

Приднестровский государственный университет  
имени Т.Г. Шевченко

физико–математический факультет

кафедра нелинейной оптики и квантовой радиофизики

*На правах рукописи*

МАРКОВ ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ  
И УСИЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ  
В СИСТЕМЕ КОГЕРЕНТНЫХ ЭКСИТОНОВ И БИЭКСИТОНОВ  
В ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

Специальность: 01.04.21 – лазерная физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико–  
математических наук,  
профессор П.И. Хаджи

Тирасполь  
2013

# Содержание

Введение .....	4
Глава 1. Обзор литературы .....	11
1.1 Резонансная нелинейная оптика тонких пленок .....	11
1.1.1 Модель тонкой пленки .....	16
1.2 Оптическая нутация .....	19
1.3 Механизмы генерации и усиления ТГц-излучения.....	21
Глава 2. Пропускание ультракоротких фазово-модулированных импульсов лазерного излучения тонкой плёнкой полупроводника в экситонной области спектра .....	25
2.1 Постановка задачи. Основные уравнения. ....	25
2.2 Стационарный режим .....	28
2.3 Нестационарный режим.....	29
2.4 Нестационарный режим пропускания фазово-модулированного импульса.....	34
Глава 3. Нелинейное пропускание ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой пленкой полупроводника в условиях двухфотонного двухимпульсного возбуждения биэкситонов.....	53
3.1 Постановка задачи. Основные уравнения .....	53
3.2 Пропускание двух прямоугольных импульсов .....	59
3.3 Пропускание прямоугольного и гауссовского импульсов.....	63
3.4. Пропускание двух гауссовских импульсов .....	67
Глава 4. Явление оптической нутации в системе экситонов и биэкситонов большой плотности .....	80
4.1 Постановка задачи. Основные уравнения. ....	80
4.2 Аналитические решения. ....	82
4.3 Приближение заданного поля. ....	97

Глава 5. Новые механизмы усиления лазерного излучения .....	104
5.1 Усиление в области М-полосы люминесценции при двухфотонной накачке биэкситонного уровня .....	104
5.2 Усиление ТГц-излучения при накачке экситонного уровня .....	109
Заключение .....	119
Литература.....	121

## Введение

В 1931 г. Я.И. Френкель высказал и обосновал идею о существовании квазичастиц, переносящих энергию, но не переносящих заряд [1]. Эта электронейтральная водородоподобная частица, состоящая из электрона и дырки, получила название экситон (от английского excite – возбуждать). Её существование, по замыслу автора, позволяло примирить существование фотоэффекта в ряде широкозонных диэлектрических кристаллов с отсутствием электрического тока. Но, возникнув как средство для объяснения весьма частной проблемы, концепция экситонов сыграла затем столь существенную роль в современной физике конденсированного состояния материи, и оказалась применимой к столь широкому кругу явлений, что ее значение и в настоящее время невозможно переоценить. Свои первые работы Яков Ильич посвятил изучению экситонов в молекулярных кристаллах, радиус которых меньше постоянной решетки [2]. Представление о другом предельном случае – экситоне с радиусом намного большим постоянной кристаллической решетки основано на работах Ванье и Мотта [3, 4]. Такой «мегаэкситон» характерен для полупроводниковых кристаллов.

Экспериментально водородоподобная экситонная серия впервые была обнаружена Евгением Федоровичем Гроссом в 1951 г. при исследовании образцов закиси меди  $\text{Cu}_2\text{O}$  [5]. Дальнейшие исследования Е.Ф. Гросса и Б.П. Захарчени были направлены на изучение изменений спектра под действием внешнего поля. Наблюдались эффект Штарка [6], возникающий в электрическом поле, и эффект Зеемана [7] – в магнитном. Полученные успехи благоприятствовали исследованию экситонов в полупроводниковых кристаллах, которые продолжают и по сей день.

Подобие экситона атому водорода позволило сделать предположение о существовании аналога молекулы водорода – экситонной молекулы. Экситонная молекула была названа биэкситоном, и на возможность ее устойчивого существования указали одновременно и независимо Москаленко [8] и Ламперт [9].

Дальнейшее изучение этих квазичастиц позволило наблюдать в полупроводниках такие нелинейные оптические эффекты как самофокусировка, самодефокусировка, самоиндуцированная прозрачность, оптическая нутация, оптическая бистабильность и мультистабильность, оптическое эхо и другие. Все они обусловлены тем, что лазерный луч, взаимодействуя с оптически нелинейной средой, изменяет условия своего распространения в этой среде. Все это позволяет сделать вывод о значимости исследований динамики экситонов и биэкситонов в полупроводниках под действием лазерного излучения.

Будущее интегральной оптики и микроэлектроники связывают с технологиями, направленными на увеличение степени интеграции узлов устройств обработки информации, что позволит повысить скорость и надежность их работы. При этом элементами микросхем могут являться тонкие пленки полупроводников, а носителем информации – свет. Тонкими считаются пленки, толщина  $L$  которых удовлетворяет неравенству  $a_0 \ll L \ll \lambda$ , где  $a_0$  – боровский радиус экситона,  $\lambda$  – длина волны падающего излучения. Возникающие при прохождении электромагнитного излучения через тонкий слой резонансной среды нелинейные эффекты, такие же как и в объемном полупроводнике (самоиндуцированная прозрачность, оптическая бистабильность и мультистабильность и др.), позволяют использовать такие элементы для создания различного рода миниатюрных устройств (усилителей, переключателей и др.), которые могут послужить элементной базой для узлов оптического компьютера, волоконно-оптических линий связи и т.п. Проявление указанных эффектов зависит от динамики экситонов и биэкситонов, являющихся элементарными возбуждениями в полупроводниках, которая, в итоге, определяет характер пропускания (отражения) лазерного излучения тонкой пленкой. Поэтому представляется актуальным изучение оптических эффектов, связанных с динамикой экситонов и биэкситонов в полупроводниках под действием импульсов лазерного излучения. Результаты таких исследований могут быть востребованы в таких отраслях, как разработка оптических систем и методов

обработки информации, создание устройств для оптического компьютера и волоконно-оптических линий связи и т.п.

Кроме изучения особенностей прохождения света через размерно-ограниченную резонансную среду, важным является вопрос измерения различных параметров среды, таких как матричный элемент квантовых переходов, константа затухания и др.. Возможность измерения матричных элементов различных переходов предоставляет явление оптической нутации, выражающееся в периодическом изменении плотностей частиц (фотонов, экситонов, биэкситонов) на временах, гораздо меньших времен релаксации квазичастиц. Поэтому исследование особенностей проявления эффекта оптической нутации в среде также является актуальной задачей.

Целью представленной диссертационной работы является теоретическое исследование эффектов когерентного нелинейного взаимодействия ультракоротких импульсов лазерного излучения с тонкой пленкой полупроводника в условиях одноимпульсного возбуждения экситонов большой плотности и двухимпульсного двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла. Также рассматриваются особенности оптической нутации в системе фотонов, экситонов и биэкситонов и механизм усиления излучения на частоте оптической экситон-биэкситонной конверсии (М-полосе люминесценции), а также предложен новый механизм усиления терагерцового излучения на частоте оптического двухэкситон-биэкситонного перехода.

В первой главе диссертационной работы представлен обзор литературы по резонансной нелинейной оптике тонких пленок двух- и трех уровневых атомов. Описаны эффекты, возникающих при взаимодействии таких систем с лазерным излучением, в частности, явление фотонного эха и оптической бистабильности. Приведены работы, в которых аналогичные эффекты наблюдаются в системах экситонов и биэкситонов. Используя уравнения Максвелла, выводятся электродинамические соотношения между амплитудами полей и поляризации в тонком нелинейном слое на границе раздела двух линейных сред – обосновывается модель тонкой пленки. Также

представлен обзор работ, посвященных явлению оптической нутации. Сформулированы основные особенности протекания данного эффекта в различных средах. Описаны возможности применения оптической нутации, например, для определения основных параметров нерезонансного электронного переноса между квантовыми точками и ЭПР-спектроскопия конденсированных сред. Далее анализируются работы, описывающие различные механизмы генерации терагерцового излучения. Рассмотрены различные среды и эффекты, приводящие к генерации субмиллиметрового излучения.

Во второй главе рассматриваются нелинейно-оптические свойства тонкой пленки полупроводника (ТПП) в условиях возбуждения экситонов большой плотности ультракоротким импульсом (УКИ) резонансного лазерного излучения. Рассмотрены особенности пропускания импульсов различной формы и интенсивности. Принципиально новые эффекты получены при рассмотрении случая прохождения через ТПП импульса с чирпингом. Наличие фазовой модуляции у падающего импульса позволяет изменить не только величину межчастичного взаимодействия в среде, но и ее знак. Это можно интерпретировать как оптический аналог Фешбах-резонанса. При определенных значениях параметра чирпинга среда перестает вести себя как нелинейная, несмотря на высокий уровень возбуждения.

В третьей главе рассматривается прохождение через ТПП двух УКИ лазерного излучения в условиях двухфотонного двухимпульсного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла. Предсказан эффект гистерезисного пропускания пленки в зависимости от интенсивности падающих импульсов. Изучается реакция пленки на прохождение импульсов с различными огибающими. Показано, что в зависимости от параметров системы может наблюдаться частичное или полное отражение более слабого импульса. Возможны случаи, когда после прохождения излучения в пленке сохраняется остаточная плотность биэкситонов. Меняя форму, амплитуду и время прохождения одного из падающих импульсов, можно делить импульс с меньшей амплитудой на два субимпульса различной длительности.

В четвертой главе изучается явление оптической нутации в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в полупроводнике типа CuCl, в условиях, когда на кристалл падают два УКИ резонансного лазерного излучения. При этом фотоны первого импульса попарно возбуждают биэкситоны из основного состояния кристалла, а фотоны второго импульса смешивают экситонное и биэкситонное состояния. Предполагается, что длительности обоих импульсов на много меньше времени релаксации биэкситонов и их спектральные ширины меньше энергии связи биэкситона. В этих условиях стационарное состояние не успевает установиться за время действия импульсов и может иметь место оптическая нутация в системе когерентных экситонов, биэкситонов и фотонов. Динамика такой системы представляет собой как периодические, так и аperiodические изменения плотностей частиц.

В пятой главе рассмотрен процесс усиления слабого импульса на частоте оптической экситон-биэкситонной конверсии, а также предложен новый механизм генерации терагерцового излучения. Усиление на частоте оптической экситон-биэкситонной конверсии возможно, когда на биэкситонном уровне благодаря мощному импульсу создается инверсия населенностей относительно экситонного, тогда падение даже слабого импульса на частоте М-полосы приводит к индуцированному сбросу инверсии и, как следствие, к усилению слабого импульса. Генерация терагерцового излучения может быть получена при возбуждении экситонов из основного состояния кристалла, что приведет к инверсии населенностей двухэкситонного состояния относительно биэкситонного. Индуцированный переход на более энергетически выгодное биэкситонное состояние будет сопровождаться генерацией фотонов с частотой, соответствующей энергии связи биэкситона.

Научная новизна работы заключается в построении последовательной теории нестационарного прохождения фазовомодулированных УКИ через ТПП в экситонной области спектра, изучении особенностей пропускания двух УКИ тонкой пленкой полупроводника в условиях двухфотонного

двухимпульсного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла, исследовании особенностей проявления эффекта оптической нутации в системе фотонов, экситонов и биэкситонов, а также предсказании и рассмотрении новых механизмов усиления света на частоте оптической экситон-биэкситонной конверсии и двухэкситон-биэкситонного перехода.

Практическая значимость работы определяется возможностью применения полученных результатов для построения таких узлов и элементов интегрально-оптических устройств, как преобразователи формы импульсов лазерного излучения, переключающие элементы на основе явления бистабильности, ячейки памяти и др.. Результаты исследования также могут быть использованы для получения информации об оптических параметрах экситонов и биэкситонов в полупроводниках.

Основные результаты данной диссертационной работы опубликованы в работах [112-164] и докладывались на 2nd International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics (Кишинев, 2004), VI международной конференции «Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы» (Ульяновск, 2004), IV Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве» (Тирасполь 2005), 3rd International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics (Кишинев, 2006), International conference “Physics of low-dimensional structures” in honour of the 80-th anniversary of Professor Evghenii Petrovich Pokatilov (Кишинев, 2007), International Conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO/LAT 2007), 4th International Conference on materials science and condensed matter physics (Кишинев, 2008), IV Украинская научная конференция по физике полупроводников (Одесса, 2009), Конференция физиков Молдовы (CFM) (Кишинев, 2009), International Conference "Telecommunications, Electronics and Informatics" (ICTEI-2010) (Кишинев, 2010), International Conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO/LAT 2010), 5th International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics (Кишинев, 2010), V Украинская научная конференция по физике полупроводников (Ужгород,

2011), XIII международной конференции «Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы» (Ульяновск, 2011), International Conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO/LAT 2013), а также на научных семинарах физико-математического факультета Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко и научно-исследовательских конференциях профессорско-преподавательского состава.

# Глава 1. Обзор литературы

## *1.1 Резонансная нелинейная оптика тонких пленок*

Достижения технологии создания тонких пленок стимулируют изучение эффектов когерентного взаимодействия света с веществом в случае, когда нелинейная среда представляет собой тонкий слой, толщина которого  $L$  значительно меньше длины волны падающего излучения. Макроскопическое описание тонких пленок (пленок на подложках, поверхностных переходных слоев материалов) проводится в рамках подхода, при котором пленка рассматривается как двумерный объект, не имеющий внутренней структуры. Вместо решения микроскопических уравнений Максвелла при толщине пленки намного меньше длины волны света для нее обычно используют граничные условия, связывающие значения полей по одну и другую сторону пленки.

В работе В. И. Рупасова и В. И. Юдсона [10] было показано, что тонкая пленка двухуровневых атомов (ТПДА) является почти идеальным зеркалом для ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения малой интенсивности и становится практически прозрачной для импульсов большой интенсивности. Несмотря на малую толщину пленки по сравнению с длиной волны света, весьма существенной является нелинейная связь между амплитудой поля прошедшей волны и оптическими свойствами резонансной среды. Это дало новый толчок к исследованию нелинейно-оптических свойств тонких полупроводниковых пленок.

В [11] изучено взаимодействие света с тонким слоем нелинейной резонансной среды, расположенным на границе между двумя полубесконечными линейными средами. Такая структура описывается интегрируемой системой нелинейных дифференциальных уравнений типа Максвелла–Блоха, учитывающей существование отраженной волны. При помощи метода обратной задачи теории рассеяния были получены аналитические решения, которые показали, что прошедшее через пленку

электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух солитонов, сдвинутых относительно друг друга по времени и по фазе.

Вслед за работами [10, 11] появился целый ряд работ, посвященных исследованию нелинейно–оптических свойств тонких пленок двухуровневых атомов как при стационарном, так и при импульсном возбуждении. Прохождение и отражение коротких импульсов лазерного излучения через тонкую пленку с инвертированной системой двухуровневых атомов изучено в [12]. Начальная инверсия приводит к возникновению импульсов сверхизлучения как в пропускании, так и в отражении. В [13, 14] были изучены переходные процессы. Результаты, полученные как в аналитической форме, так и численно, указывают на их существенное отличие от случая протяженной среды.

Связь между площадями падающего, прошедшего и отраженного импульсов при взаимодействии ультракоротких импульсов света с ТПДА была получена в [15, 16]. Таким образом, был сформулирован аналог "теоремы площадей" Мак Колла и Хана. Результаты этих исследований были использованы в [16, 17, 19] для рассмотрения условий образования сигналов фотонного эха, возбуждаемого в тонкой пленке. Задача о прохождении ультракоротких импульсов света через ТПДА в условиях двухфотонного взаимодействия излучения со средой была решена в [16, 18]. При отсутствии фазовой модуляции проходящего импульса получены аналитические решения, а также сформулирован аналог "теоремы энергий" Мак Колла и Хана для проходящего и отраженного импульсов. Показано, что при больших значениях параметра нелинейности имеет место аномальное прохождение ультракоротких импульсов через резонансный слой.

В [16, 20-22] показано, что причиной бистабильного пропускания и отражения ТПДА при возбуждении атомов пленки в области выше атомного резонанса является зависимость резонансной частоты атомов от инверсии, проявляющаяся при учете локальной поправки к полю. Причем пропускание проявляет нестационарное бистабильное поведение за время порядка времени сверхизлучательного перехода, которое может быть короче времени

релаксации системы. Эффекты нелинейного взаимодействия света с ТПДА с учетом поля Лоренца рассмотрены также в [19].

Также показано [17, 23], что ТПДА проявляет безрезонаторную оптическую бистабильность. В этом случае функция пропускания имеет вид, полученный в [26] для системы двухуровневых атомов в кольцевом резонаторе. При этом обратная связь возникает при учете нелинейной зависимости между поляризацией среды и полем проходящей волны. Теоретически изучено взаимодействие бистабильной тонкой пленки с электромагнитной волной, амплитуда которой промодулирована [27, 28]. Показано, что в зависимости от амплитуды и частоты модуляции имеют место сложные, в том числе и хаотические режимы пропускания и отражения света ТПДА. В [24] предсказаны бистабильный и периодически пульсирующий режимы отражения монохроматической волны от тонкой пленки резонансных атомов, нанесенных на диэлектрическую подложку, которая возвращает часть проходящего излучения обратно в пленку. В [25] сформулированы условия проявления бистабильных свойств отражения от тонкого слоя резонансной среды с рефракционной нелинейностью, обусловленной присутствием в энергетической структуре активных атомов переходов, соседних с резонансным, импульсов квазимонохроматического света длительностью, меньшей времени фазовой релаксации вещества. В [29, 30] рассмотрено прохождение света через систему двух бистабильных ТПДА. Показано [29], что в пределе безинерционной среды в зависимости от внешних параметров светодинамика системы допускает существование как регулярных, так и хаотических режимов. Если расстояние между пленками содержит целое число длин волн, то система двух пленок ведет себя как отдельный бистабильный элемент. Самопульсации возникают, если между пленками укладывается нечетное число полуволн и среда обладает незначительным поглощением. В [30] показано, что при падении с обеих сторон на пленки света с одинаковой интенсивностью в системе возможна бифуркация нарушения симметрии, то есть прошедшие поля оказываются различными для противоположных направлений при наличии поглощающей

среды между пленками. Бифуркация нарушения симметрии тесно связана с оптической бистабильностью – условия нарушения симметрии и бистабильности переходят друг в друга при изменении расстояния между пленками. Проиллюстрировано разрушение бифуркации нарушения симметрии при различных напряженностях падающих полей. Работы [31-33] посвящены исследованию эффектов нелинейного взаимодействия когерентных импульсов света с тонкопленочными планарными структурами типа резонаторов Фабри–Перо, заполненными средами из резонансных атомов. Специфика этого взаимодействия определяется существованием прямой и обратной волн, приводящих к образованию стоячих волн. В [31] обнаружены эффекты аномального прохождения импульсов света ультракоротких длительностей. Получен аналог “теоремы площадей” Мак Колла и Хана, играющего роль одного из интегралов движения системы. Исследованы области возникновения бистабильных, а также солитонных решений. В [32, 33] численно изучено прохождение солитоноподобных импульсов через тонкопленочный резонатор. В [33] на основе моделирования временных зависимостей амплитуды импульсов и спектров инверсной населенности атомов среды обнаружены условия возникновения эффектов СИП и сверхизлучения при взаимодействии ультракоротких импульсов света с резонаторной структурой, а также эффект “выжигания провалов” в спектре неоднородного уширения резонансных уровней.

Работы [10, 11] получили дальнейшее обобщение в исследовании нелинейно–оптических явлений в рамках точно интегрируемой модели тонкой пленки трехуровневых атомов (ТПТА) [17, 34]. Метод обратной задачи теории рассеяния использован для изучения возможностей и особенностей распространения двухчастотных импульсов как в виде нелинейных поверхностных волн ТЕ– и ТМ–типа, так и прохождения ультракоротких импульсов света через оптически нелинейную ТПТА. Полученные решения показывают, что и в этом случае возможно существование дополнительного импульса, имеющего задержку во времени относительно падающего. Показано, что величина задержки зависит от

параметров системы и от площади падающего импульса. Нелинейное взаимодействие света с ТПТА в V-конфигурации рассмотрено в [35] и в каскадной эквидистантной  $\Sigma$ -конфигурации в [36]. Показано, что существует пороговый эффект изменения пропускания от полного отражения слабых резонансных импульсов к осцилляционному режиму пропускания импульсов большей интенсивности. При этом ТПТА эффективно преобразует падающие короткие импульсы в еще более короткие с полушириной порядка времени сверхизлучательного перехода  $\sim 10^{-13}$  с. В [37] рассмотрено взаимодействие двухчастотного УКИ с тонкой пленкой резонансных трехуровневых атомов в V-конфигурации с учетом влияния локального поля. Показано, что как для коротких, так и для длинных по сравнению с частотой Раби импульсов, существует зависимость формы импульса излучения на одной частоте от энергии импульса на другой частоте. В частности, меняется частота и глубина возникающей у преломленного импульса амплитудной модуляции его огибающей.

В работах [38-40] указывается на бистабильный характер взаимодействия лазерного излучения с тонкой пленкой (толщиной меньше длины волны света), составленной из ориентированных линейных совокупностей молекул, на которых возбуждаются экситоны Френкеля. Так в [38] предполагается, что ансамбль ориентированных линейных совокупностей молекул можно рассматривать состоящим из неоднородно уширенных двухуровневых систем. Основываясь на этой аналогии, авторы показывают, что пропускание пленки может проявлять бистабильность. Также авторы указывают на возможные материалы, на которых можно наблюдать указанную бистабильность. В [39, 40] рассматриваются более сложные модели – трех- и четырехуровневые энергетические схемы, с участием экситонного, двухэкситонного уровня и с учетом релаксации двухэкситонного состояния на экситонное. Показано, что благодаря быстрой экситон-экситонной аннигиляции может быть уменьшен, мешающий наблюдать бистабильность, эффект, связанный с неоднородным уширением экситонного уровня.

Отметим здесь также работы [41, 42–44], в которых рассматриваются вопросы распространения видеоимпульсов электромагнитного излучения через тонкую пленку полупроводника со сверхрешеткой, очень близкие к указанным выше по постановке, методам решения и полученным результатам. В [44] предсказан эффект "квантования" площади видеоимпульсов при их прохождении через такую пленку.

### 1.1.1 Модель тонкой пленки

Следуя [10, 18, 34], рассмотрим тонкий слой резонансной среды, находящийся на границе раздела двух сред ( $z = 0$ ) с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно. Пусть из первой среды на границу раздела падает плоская монохроматическая ТЕ–волна с компонентами поля  $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ ,  $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$  и несущей частотой  $\omega$ . Падающая волна частично отражается и частично проходит во вторую среду. Результирующие напряженности электрических полей в первой и второй средах представим в виде:

$$\begin{aligned} E_{1y}(x, z, t) &= E_i(x, z, t) \exp(i\omega t - ik_{1x}x - ik_{1z}z) + E_r(x, z, t) \exp(i\omega t - ik_{1x}x + ik_{1z}z), \\ E_{2y}(x, z, t) &= E_t(x, z, t) \exp(i\omega t - ik_{2x}x - ik_{2z}z), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $k_{1x}, k_{1z}, k_{2x}, k_{2z}$  – проекции волнового вектора в первой и второй средах,  $E_i(x, z, t), E_r(x, z, t), E_t(x, z, t)$  – медленно меняющиеся амплитуды соответственно падающего, отраженного и прошедшего импульсов. Условия медленности изменения амплитуд предполагают выполнение неравенств

$$\left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \omega |E|, \quad \left| \frac{\partial E}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \ll \frac{|E|}{\lambda}, \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  – длина волны падающего излучения. В случае, когда толщина слоя  $L \ll \lambda$ , из уравнений Максвелла с учетом поляризации резонансной среды  $P$ , следуют граничные условия, связывающие амплитуды всех волн в первой и второй средах [10, 11, 45]:

$$\begin{aligned}
B_{2x}(x, L, t) - B_{1x}(x, 0, t) &= \frac{4\pi}{c} \int_0^L \frac{\partial P_y}{\partial t} dz, \\
E_{2y}(x, L, t) - E_{1y}(x, 0, t) &= 0, \\
B_{2z}(x, L, t) - B_{1z}(x, 0, t) &= 0,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $P_y$  – проекция вектора поляризации среды. Кроме того, из уравнений Максвелла следует, что компоненты электрического и магнитного полей связаны соотношениями

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Поляризацию среды представим в виде

$$P_y(x, z, t) = P(x, z, t) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_z z), \tag{1.5}$$

где  $P(x, z, t)$  – медленно меняющаяся во времени и пространстве огибающая поляризации. Так как, согласно исходным предположениям  $k_z z \ll 1$ , а  $P(x, z, t)$  практически постоянна внутри пленки, то интегральный член в (1.3) в приближении среднего поля можно заменить выражением

$$i \frac{4\pi\omega L}{c} P(t). \tag{1.6}$$

С учетом (1.4) из (1.3) нетрудно выразить медленно меняющиеся амплитуды напряженности электрического поля падающей  $E_i$ , прошедшей  $E_t$  и отраженной  $E_r$  световых волн через амплитуду поляризации  $P(t)$  внутри резонансного слоя:

$$E_t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_i + i \frac{4\pi\omega L}{c(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})} P, \tag{1.7}$$

$$E_r = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_i + i \frac{4\pi\omega L}{c(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})} P. \tag{1.8}$$

Из (1.7)–(1.8) видно, что амплитуды полей связаны между собой простым соотношением:

$$E_i + E_r = E_t. \tag{1.9}$$

Из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на задней границе раздела следует, что действующее поле  $E$  внутри

пленки равно амплитуде  $E_t$  проходящего импульса. Если предположить, что пленка расположена в вакууме ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ), то выражения (1.7), (1.8) приводятся к виду

$$E_t = E_i + i \frac{2\pi\omega L}{c} P, \quad E_r = i \frac{2\pi\omega L}{c} P. \quad (1.10)$$

В этом случае поле проходящей через пленку волны складывается из поля падающей волны и вторичного поля, индуцированного поляризацией среды, тогда как поле отраженного импульса формируется только за счет поляризации среды. Амплитуда поляризации резонансного слоя  $P(t)$  входящая в уравнения (1.10), в свою очередь определяется амплитудой действующего поля  $E$  внутри пленки и конкретным механизмом взаимодействия света с веществом. Согласованное решение системы соответствующих материальных уравнений (например, типа Блоха) и (1.10) позволяет определить форму проходящего  $E_t(t)$  и отраженного  $E_r(t)$  импульсов при заданной форме  $E_i(t)$  падающего на пленку импульса.

Объектом дальнейшего теоретического исследования является тонкая полупроводниковая пленка (ТПП). Предполагается, что поляризация среды возникает благодаря оптическим процессам с участием когерентных экситонов и биэкситонов. Необходимо отметить следующее. При очень малой толщине пленки, сравнимой с боровским радиусом  $a_0$  свободного экситона, последний становится фактически двумерным, что приводит к перенормировке его энергетического спектра и другим эффектам размерного квантования, существенно усложняющим поставленную задачу. Существуют, однако, полупроводники с небольшими значениями  $a_0$  (например,  $\text{CuCl}$ ,  $\text{CuBr}$ ,  $\text{Cu}_2\text{O}$ ), для которых возможно изготовление образца с толщиной  $L$ , удовлетворяющей неравенству  $a_0 \ll L \ll \lambda$ . Именно такие пленки экспериментально исследовались в работе [46]. На примере эпитаксиальных тонких пленок  $\text{CuCl}$  ( $a_0 = 7 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 3500 \text{ \AA}$ ) было показано, что влияние размерного квантования центра тяжести экситона на силу осциллятора экситонного перехода быстро уменьшается при толщине пленки

$L > 300 \text{ \AA}$  и практически исчезает уже при  $L \approx 500 \text{ \AA}$ . Следовательно, в образце такой толщины экситоны можно считать объемными. В то же время, сам образец можно рассматривать как тонкую пленку, для которой выполняется условие  $L \ll \lambda$ .

## **1.2 Оптическая нутация**

Явление оптической нутации представляет собой нестационарный эффект периодического изменения начального состояния системы под влиянием поля внешней электромагнитной волны на временах, значительно меньших времён релаксации квантовых переходов системы. Оно обусловлено колебаниями разности населённостей уровней энергии вещества при его взаимодействии с сильным резонансным электромагнитным полем. Результатом этого взаимодействия является модуляция излучаемого поля [47-49].

В [50] описана теория оптической нутации в системе двухуровневых атомов, взаимодействующих с конечным числом фотонов в резонаторе. Теория оптической нутации в экситонной области спектра представлена в [51-56]. Показано, что при низких уровнях возбуждения частота нутации определяется константой экситон-фотонного взаимодействия, а при больших уровнях возбуждения она начинает зависеть от плотности экситонов. Исследовано также явление нутации в системе когерентных фотонов, экситонов и биэкситонов в области М-полосы люминесценции [54-57]. Показано, что в пределе заданной плотности фотонов (экситонов) частота нутации пропорциональна амплитуде электромагнитной (материальной) волны. В [55-62] построена теория двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов. В [60-63] показано, что частота нутации даже без учета межчастичного взаимодействия существенно зависит от плотности фотонов и биэкситонов.

В [64] численно и аналитически исследован сигнал нестационарной оптической нутации в полупроводниковых гетероструктурах и плотных атомарных газах с учетом влияния эффектов локального поля, таких как

динамический сдвиг частоты перехода и нелинейный характер фазовой релаксации. Учет этих эффектов позволил рассматривать полупроводниковые гетероструктуры как двухуровневую систему и получить уравнение для разности населенностей, описывающее колебания нелинейного ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. В условиях точного резонанса получено аналитическое решение, выраженное через эллиптические функции Якоби. При учете этих же эффектов рассмотрена динамика экситонных переходов в полупроводниковых наноструктурах с квантовыми точками [65]. Показано, что в поле ультракороткого импульса света динамический сдвиг частоты приводит к реализации четырех типов осцилляций, включая апериодический режим. В [66, 67] рассмотрена пространственно-временная численная модель для расчета распространения лазерного излучения, модулированного по частоте, в двухуровневой нелинейно-оптической среде с насыщением поглощения и дисперсии. Полученные результаты свидетельствуют о наличии процессов нестационарной оптической нутации в случае кратковременного резонанса падающего излучения как в случае протяженной среды, так и в случае оптически тонкого слоя. В [68] показано, что в среде, резонансные свойства которой определяются ансамблем изолированных двухэлектронных квантовых точек, возможны эффекты фотонного эха, оптических нутаций, квантовых биений при возбуждении импульсами эллиптически поляризованного света. Разброс частот размерного квантования и величин кулоновского взаимодействия электронов из-за различия в размерах квантовых точек приводит к неоднородному уширению резонансных переходов. Численные решения показали, что в условиях введенной модели неоднородного уширения частота квантовых биений оказывается пропорциональной кулоновскому взаимодействию электронов в квантовой точке. В [69] описан новый тип нутационных колебаний, возникающий только в фазе электромагнитной волны вблизи ее переднего фронта, нерезонансно распространяющейся в ансамбле квантовых точек и вызывающей электронные переносы между состояниями квантовых точек с

приблизительно одинаковой энергией. Показано, что по периоду нутационных колебаний можно определить основные параметры нерезонансного электронного переноса между квантовыми точками. В [70] рассмотрено применение нестационарных нутаций в ЭПР-спектроскопии конденсированных сред. Приведены основные методы формирования и наблюдения нестационарных нутаций. Описаны закономерности данного явления в двухуровневых и многоуровневых спиновых системах, а также при неоднородном уширении линий ЭПР. Отражены последние достижения в использовании нестационарных нутаций для разделения перекрывающихся спектров, идентификации квантовых чисел и квантовых переходов, изучения кинетики фотоиндуцированных парамагнитных центров, определения времен релаксации для широкого круга кристаллических и неупорядоченных сред. В [71] изучены особенности двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов в полупроводниках типа CuCl с учётом упругого биэкситон-биэкситонного взаимодействия. Показано, что в зависимости от значений параметров системы оптическая нутация представляет собой процесс периодического превращения пар фотонов в биэкситоны и обратно, а также предсказана возможность фазового контроля процесса оптической нутации.

### ***1.3 Механизмы генерации и усиления ТГц-излучения***

Ввиду уникальных свойств терагерцового излучения проблемы генерации ТГц-излучения в размерно-ограниченных полупроводниковых структурах привлекают в последние годы всё больший интерес. Исследованию устройств для генерации и детектирования ТГц-излучения посвящены обзоры [72, 73].

В [74, 75] исследуется новый механизм прямого преобразования ультракоротких лазерных импульсов в излучение терагерцового диапазона. Преобразование обусловлено генерацией собственных дипольных колебаний плазмы в процессе туннельной ионизации газа и их последующим электромагнитным излучением в окружающее пространство. Проанализированы процессы образования плазмы и возбуждения

поляризационных токов, порождающих терагерцовое излучение, при оптическом пробое газа гауссовым импульсом, фокусируемым при помощи аксиконной линзы. Исследована зависимость эффективности рассматриваемого процесса преобразования от длительности, поперечного масштаба и фазовой структуры ионизирующего импульса. Показано, что для импульсов, содержащих малое число периодов поля, эффективность преобразования существенно превышает достигающуюся при использовании предложенных ранее «пондеромоторных» методов возбуждения плазменных колебаний, что позволяет осуществить генерацию терагерцового излучения гигаваттного уровня мощности при умеренной интенсивности лазерного импульса. В [76] представлены экспериментальные результаты генерации терагерцового электромагнитного излучения при ионизации воздуха фемтосекундными импульсами на основной и удвоенной частотах титан-сапфирового лазера. Обнаружена квазипериодическая зависимость средней мощности генерируемого Т-излучения от временной задержки между разночастотными импульсами. Теоретически показано, что эффективная генерация Т-излучения обусловлена инерционной частью нелинейного отклика среды, которая определяется динамикой заселения высоковозбужденных состояний и последующего перехода электронов в свободное состояние. В [77] приводятся результаты исследования генерации терагерцового излучения в плазме оптического разряда, возникающего в атмосфере при фокусировке фемтосекундного лазерного излучения. Исследованы различные схемы генерации, связанные с фокусировкой оптического излучения сферическими и аксиконными линзами, с наложением постоянного электрического поля на область лазерной искры, а также с использованием бихроматического лазерного излучения. Проведён детальный анализ диаграмм направленности и распределения поляризации терагерцового излучения при различных способах генерации, дано сравнение с экспериментальными результатами других групп, обсуждены возможные нелинейные механизмы генерации терагерцового излучения. В [78] рассмотрена генерация терагерцового электромагнитного излучения при

прохождении лазерного импульса через слой разреженной плазмы. Показано, что возбуждение терагерцовых волн связано с раскачкой слабозатухающей, антисимметричной вытекающей моды плазменного слоя. Исследованы спектральные, угловые и энергетические характеристики терагерцового излучения, а также пространственно-временная структура излучаемых волн. Показано, что наиболее эффективная генерация терагерцовых волновых электромагнитных полей происходит, когда продольный размер лазерного импульса сравним с толщиной плазменного слоя. В [79] рассмотрен резонансный механизм генерации терагерцового излучения, основанный на взаимодействии лазерного импульса с двухуровневыми квантовыми частицами, обладающими постоянным дипольным моментом. В случае, когда постоянный дипольный момент превосходит по величине дипольный момент перехода, резонансный механизм превосходит по эффективности нерезонансное оптическое выпрямление. В [80] рассчитаны энергетические уровни, волновые функции и энергии излучательных переходов в квантовых каскадных лазерах терагерцового диапазона на гетероструктурах GaAs/Al<sub>0,15</sub>Ga<sub>0,85</sub>As. Измерены вольт-амперные характеристики и токовые зависимости интенсивности излучения лазеров, определены максимальные рабочие температуры, достигающие 85 К. Измерены спектры излучения квантовых каскадных лазеров при различных температурах, обнаружен эффект «перекачки» интенсивности из низкочастотных в высокочастотные моды при росте тока и времени задержки выборки сигнала, что объясняется разогревом образца в течение импульса тока. Продемонстрировано использование лазеров для регистрации сигнала примесной фотопроводимости в полупроводниковых гетероструктурах. В [81] описаны экспериментальные исследования излучения выращенных из газовой фазы монокристаллических пластинок сульфида кадмия с толщиной 0,02–0,25 мм при возбуждении их наносекундными лазерными импульсами. Показано, что наряду с люминесценцией в видимой области спектра, которая связана с процессом экситон-экситонного рассеяния, при температурах 300 и 77 К наблюдается излучение в терагерцовом диапазоне частот, которое можно

связать с переходами в экситонной зоне кристаллов. При генерации в кристаллах CdS видимого излучения на переходах экситон-экситонного рассеяния интенсивность наблюдаемого терагерцового излучения резко возрастает, что позволяет говорить о возможной инверсии населённости на экситонных уровнях.

Терагерцовое излучение также наблюдалось при квантовых переходах в асимметричных связанных квантовых ямах [82-84], в сверхрешётках [85, 86], в отдельно взятой квантовой яме как результат квантовых биений между экситонами с лёгкими и тяжелыми дырками [82]. На важную роль экситонных состояний в процессе генерации терагерцового излучения, особенно когда накачка действует в экситонной области спектра, указано в [82, 83, 87-89]. В [90] наблюдалась генерация терагерцового излучения в поляритонных спектрах благодаря ультрабыстрой модуляции частоты перехода между модой микрорезонатора и экситонным уровнем. В [91] показано, что микрорезонатор металл-диэлектрик-металл является идеальной системой для создания поляритонных состояний в терагерцовой области благодаря наличию межподзонных переходов в квантовых ямах. В [92] изучена генерация ТГц-излучения на разностной частоте при накачке CO<sub>2</sub> лазером кристаллов GaSe, ZnGeP<sub>2</sub> и GaAs. Показано, что более эффективно процесс генерации реализуется в кристаллах GaSe и GaAs. В [93] предложена модель лазера с вертикальным резонатором, генерирующего ТГц-излучение на  $2p-1s$  экситоном переходе.

## Глава 2. Пропускание ультракоротких фазово-модулированных импульсов лазерного излучения тонкой плёнкой полупроводника в экситонной области спектра

### 2.1 Постановка задачи. Основные уравнения.

Исследуем нелинейно-оптические свойства тонкой пленки полупроводника (ТПП) в условиях возбуждения экситонов большой плотности ультракоротким импульсом (УКИ) резонансного лазерного излучения. Пусть на расположенную в вакууме ТПП толщиной  $L$ , на много меньшей длины  $\lambda$  световой волны, но намного большей радиуса основного состояния экситона  $a_0$ , падает нормально импульс лазерного излучения с амплитудой электрического поля волны  $E_i$  и частотой  $\omega$ , резонансной частоте  $\omega_0$  экситонного перехода. В этих условиях основным механизмом нелинейности является упругое экситон-экситонное взаимодействие. Рассмотрение процесса прохождения импульса через ТПП проводится с учетом экситон-фотонного и упругого экситон-экситонного взаимодействия в предположении, что существует только одна макрозаполненная мода когерентных экситонов и фотонов. Задача решается полуклассически с использованием уравнений Максвелла для поля и гайзенберговского (материального) уравнения для амплитуды экситонной волны поляризации. Исходим из уравнения Келдыша [94] для амплитуды экситонной волны

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = -\hbar(\Delta + i\gamma)a + \nu|a|^2 a - \frac{d_{ex}}{\sqrt{V_0}} E^+, \quad (2.1)$$

где  $\Delta = \omega - \omega_0$  - расстройка резонанса,  $\gamma$  - константа затухания экситонов,  $\nu$  - константа упругого экситон-экситонного взаимодействия,  $d_{ex}$  - дипольный момент перехода из основного состояния кристалла в экситонное,  $E^+$  - положительно-частотная компонента электрического поля распространяющейся через ТПП волны. Содержащиеся в (2.1) параметры  $d_{ex}$  и  $\nu$  определяются выражениями:

$$d_{ex} = (\epsilon_b V_0 \hbar \omega_{LT} |4\pi|^{1/2}), \quad \nu = (26/3)\pi d_{ex} a_0^3, \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon_b$  - фоновая диэлектрическая проницаемость среды,  $a_0$ ,  $\omega_{LT}$  и  $I_{ex}$  - борковский радиус, частота продольно-поперечного расщепления и энергия связи экситона соответственно. Уравнение Келдыша для объемного кристалла соответствует приближению среднего поля, условия применимости которого обсуждаются в [94, 95]. Следуя [10-12], из граничных условий непрерывности тангенциальных компонент полей проходящих импульсов можно получить электродинамические соотношения, связывающие амплитуды полей падающей  $E_i$ , прошедшей  $E_t$  и отраженной  $E_r$  волн с амплитудой волны экситонной поляризации  $a$ :

$$E_t^+ = E_i + i \frac{2\pi\omega L}{c} \frac{d_{ex}}{\sqrt{V_0}} a, \quad E_t^+ = E_i + E_r^+, \quad (2.3)$$

где  $L$  – толщина плёнки,  $c$  – скорость света в вакууме. При получении (2.1) и (2.3) макроскопические амплитуды представлялись в виде произведений медленно меняющихся во времени огибающих и быстро осциллирующих экспоненциальных множителей с частотой  $\omega$ . Вводя далее нормированные величины

$$A = a/\sqrt{n_0}, \quad F_t^+ = E_t^+/E_{eff}, \quad F_i = E_i/E_{eff}, \quad \tau = t/\tau_0, \quad \delta = \Delta\tau_0, \quad \Gamma = \tau_0\gamma, \quad (2.4)$$

уравнения (2.1) и (2.3) можно записать в виде:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} = -(\delta + i\Gamma)A + |A|^2 A - iA - F_i, \quad (2.5)$$

$$F_t^+ = F_i + iA, \quad F_r^+ = iA, \quad (2.6)$$

где характерный временной параметр  $\tau_0$  реакции плёнки, плотность экситонов  $n_0$  и эффективное поле  $E_{eff}$  определяются выражениями:

$$\tau_0^{-1} = 2\pi\omega L d_{ex}^2 / (c\hbar V_0), \quad n_0 = \hbar / (v\tau_0), \quad E_{eff} = \hbar\sqrt{n_0 V_0} / (d_{ex}\tau_0). \quad (2.7)$$

Оценим величины параметров для полупроводниковой плёнки типа CdS толщиной  $L = 10^{-6} \text{ cm}$ , используя данные  $\varepsilon_b = 9,3$ ,  $V_0 = 1,25 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^3$ ,  $a_0 = 2,8 \text{ nm}$ ,  $\hbar\omega_{LT} = 1,9 \text{ meV}$ ,  $I_{ex} = 29 \text{ meV}$ ,  $\gamma = 10^{11} \text{ s}^{-1}$  из [96-100]. Получаем  $\Gamma = 5,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $d_{ex} = 0,53 \cdot 10^{-18} \text{ erg}^{1/2} \text{ cm}^{3/2}$ ,  $v = 2,8 \cdot 10^{-32} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3$ ,

$\tau_0 = 5,7 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ ,  $n_0 = 6,3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ,  $E_{\text{eff}} = 2,8 \cdot 10^3 \text{ V/cm}$ , что соответствует интенсивности  $10^3 \text{ W/cm}^2$ .

Представляя функции  $A(\tau)$  и  $F_i^+(\tau)$  в виде суммы действительной и мнимой частей:  $A = x + iy$ ,  $F_i^+ = F + iG$ , и полагая, что огибающая падающего импульса  $F_i$  является действительной функцией от времени, уравнения (2.5)–(2.6) можно записать в виде:

$$\dot{x} = -(1 + \Gamma)x - (\delta - z)y, \quad (2.8)$$

$$\dot{y} = -(1 + \Gamma)y + (\delta - z)x + F_i, \quad (2.9)$$

$$F = F_i - y, \quad G = x, \quad (2.10)$$

где  $z = x^2 + y^2$  – нормированная плотность экситонов, для которой также можно получить уравнение

$$\dot{z} = -2(1 + \Gamma)z + 2F_i y. \quad (2.11)$$

Отсюда видно, что амплитуда прошедшей через ТПП волны (как и амплитуда волны экситонной поляризации) является фазомодулированной функцией. В линейном приближении решение для функции  $A(\tau)$  ( $F_i^+(\tau)$ ) является затухающим со временем

$$A = \frac{iF_0}{1 + \Gamma - i\delta} \left( 1 + e^{-(1 + \Gamma - i\delta)\tau} \right), \quad (2.12)$$

причём константа затухания равна  $1 + \Gamma$ . В (2.12) сохраняется экспоненциально убывающий множитель  $e^{-\tau}$  даже если положить коэффициент диссипативного затухания  $\Gamma = 0$ , т.е. если считать, что экситонное состояние в объеме полупроводника не затухает. Это обусловлено тем, что плёнка является открытой системой, и выход излучения из плёнки представляет собой дополнительный “диссипативный” механизм затухания в системе экситонов. В пределе  $\Gamma \ll 1$  ( $\gamma \ll \tau_0^{-1}$ ) реальная диссипация, обусловленная уходом экситонов из когерентной моды в некогерентные, не успевают осуществляться.

## 2.2 Стационарный режим

Из (2.8)–(2.11) легко найти зависимость стационарной плотности экситонов  $z_s$  от амплитуды поля  $F_i = F_0 = const$  падающего на пленку прямоугольного импульса. Эта зависимость определяется решением кубического уравнения

$$z_s \left[ (z_s - \delta)^2 + (1 + \Gamma)^2 \right] = F_0^2. \quad (2.13)$$

При расстройках резонанса  $\delta < \delta_c = \sqrt{3}(1 + \Gamma)$  плотность экситонов монотонно растет с ростом амплитуды  $F_0$  падающего импульса. Зависимость  $z_s(F_0)$  в этом случае является нелинейной, но однозначной. При больших уровнях возбуждения, когда существенным становится экситон–экситонное взаимодействие, зависимость  $z_s(F_0)$  является нелинейной и при  $\delta > \delta_c$  она оказывается неоднозначной и характеризуется гистерезисным поведением (рис. 2.1a). При значениях амплитуды поля  $F_{\pm}$  имеют место скачки в зависимости  $z_s(F_0)$  при  $z = z_{\pm}$ , где

$$z_{\pm} = \frac{1}{3} \left[ 2\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 3(1 + \Gamma)^2} \right], \quad (2.14)$$

$$F_{\pm}^2 = \frac{2}{27} \left[ \delta(\delta^2 + 9(1 + \Gamma)^2) \mp (\delta^2 - 3(1 + \Gamma)^2)^{3/2} \right]. \quad (2.15)$$

При критической расстройке резонанса  $\delta = \delta_c = \sqrt{3}(1 + \Gamma)$  получаем  $z_c = 2(1 + \Gamma)/\sqrt{3}$  и  $F_c = z_c^{3/2}$ . Циклическое изменение амплитуды падающего импульса  $F_i$  вызывает скачкообразное изменение плотности экситонов в пленке, формируя область гистерезиса при  $F_+ < F_0 < F_-$ . Физической причиной возникновения гистерезисной зависимости  $z(F_0)$  является смещение экситонного уровня при увеличении интенсивности возбуждения. Исследование этих решений на устойчивость относительно малых отклонений от стационарных значений приводит к выводу о том, что неустойчивость стационарного состояния для  $z_s$  имеет место в пределах  $z_- < z < z_+$ , что соответствует среднему участку гистерезисной кривой

$z_s(F_0)$ . Система уравнений (2.8)-(2.11) имеет три стационарных решения, двум из которых соответствуют особые точки типа устойчивого узла (при  $\delta/3 < z < \delta$ ) либо устойчивого фокуса (при  $z < \delta/3$  и  $z > \delta$ ), а третьей – особая точка типа седла. Фазовый портрет динамической системы (2.8)–(2.9) в области трехзначности представлен на рис. 2.2.

Отметим, что полученные особенности поведения  $z_s(F_0)$  (рис. 2.1a) определяют стационарное пропускание (отражение) ГПП в зависимости от уровня возбуждения кристалла (рис. 2.1b). Условия возникновения неоднозначной функции пропускания такие же, что и для  $z_s(F_0)$ . Поэтому неоднозначное поведение плотности экситонов в соответствии с (2.10) подтверждается в неоднозначности функции пропускания  $F_t(F_0)$  (рис. 2.1b).

### 2.3 Нестационарный режим

Обсудим особенности нестационарного поведения системы, предполагая, что в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) кристалл находится в основном состоянии, т.е. в нём отсутствуют экситоны:  $x|_{\tau=0} = y|_{\tau=0} = z|_{\tau=0} = 0$ . Поведение системы существенно определяется уровнем возбуждения и расстройкой резонанса. Рассмотрим сначала случай нулевой расстройки резонанса ( $\delta = 0$ ). Получить общее аналитическое решение для системы уравнений (2.8)-(2.11) не представляется возможным. Но для случая падающего импульса с формой  $F_i = F_0 \exp(-3\tau)$  можно получить аналитическое решение для плотности экситонов  $z(\tau)$ , которое имеет вид

$$z(\tau) = \frac{F_0^{2/3}(\sqrt{3}-1)e^{-2\tau}}{2^{1/3}} \frac{1 - \operatorname{cn}\left(4\sqrt{3}\left(\frac{F_0}{2}\right)^{2/3}(1-e^{-2\tau})\right)}{1 + (2-\sqrt{3})\operatorname{cn}\left(4\sqrt{3}\left(\frac{F_0}{2}\right)^{2/3}(1-e^{-2\tau})\right)}, \quad (2.16)$$

где  $\operatorname{cn}(x)$  – эллиптическая функция Якоби [106] с модулем  $k = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2 = \sin(\pi/12)$ . На рис. 2.3 представлена временная эволюция нормированной плотности экситонов  $z(\tau)$ . Видно, что она испытывает

несколько быстро убывающих по амплитуде колебаний, после чего экспоненциально затухает. Из (2.16) следует, что на больших временах ( $\tau \gg 1$ ) функция  $z(\tau)$  убывает пропорционально  $e^{-2\tau}$ , тогда как эволюция колебательных множителей насыщается. С ростом амплитуды накачки  $F_0$  растёт амплитуда и частота колебаний, а также число колебаний, которое ограничено сверху. Эти особенности определяют форму проходящего через ТПП импульса (рис. 2.3). Видно, что осцилляции функции  $z(\tau)$  отражаются в полочках функции  $F_i(\tau)$ .

### Прямоугольный импульс

Пусть на ТПП падает прямоугольный импульс с амплитудой  $F_i = F_0 = const$ , начиная с момента времени  $t=0$ . На рис. 2.4 представлена временная эволюция плотности экситонов в плёнке  $z$  и амплитуды прошедшего импульса  $|F_i|$  при различных значениях амплитуды поля  $F_0$  падающего импульса для случаев  $\Gamma = 0$  и  $\Gamma = 1$ . Видно, что при малых уровнях возбуждения плотность экситонов монотонно растёт со временем  $z = F_0^2 / (1 + \Gamma)^2 \times (1 - e^{-(1+\Gamma)\tau})^2$  и на больших временах ( $\tau \gg 1$ ) достигает своего стационарного значения  $z_s \approx F_0^2$ . С ростом уровня возбуждения рост плотности экситонов на начальном этапе эволюции постепенно убыстряется, возникают малоамплитудные осцилляции плотности с большим периодом. Дальнейшее увеличение амплитуды падающего импульса  $F_0$  приводит к резкому росту плотности экситонов на начальном этапе эволюции и к установлению ярко выраженного осцилляционного поведения плотности в зависимости от времени. При этом амплитуда осцилляций растёт с ростом  $F_0$ , но монотонно убывает со временем при фиксированном  $F_0$ . Что касается периода осцилляций плотности экситонов, то он монотонно убывает с ростом уровня возбуждения. На больших временах осцилляции плотности экситонов постепенно затухают и устанавливается стационарное состояние с плотностью экситонов  $z_s$  тем большей, чем больше  $F_0$ . Увеличение

параметра  $\Gamma$  качественно не меняет поведения системы, но приводит к уменьшению амплитуды колебаний плотности экситонов  $z(\tau)$ .

Найденные особенности поведения функции  $z(\tau)$  предопределяют особенности временной эволюции амплитуды  $|F_t|$  прошедшего излучения. При низких уровнях возбуждения амплитуда  $|F_t|$  поля прошедшего через ТПП импульса монотонно убывает со временем и на больших временах устанавливается стационарное пропускание плёнки с амплитудой тем меньшей, чем меньше константа  $\Gamma$ . При  $\Gamma = 0$  плёнка закрывается в пропускании и всё падающее излучение отражается. Таким образом, при низких уровнях возбуждения ТПП может функционировать как зеркало для УКИ с длительностью  $\tau_{pulse} \ll \Gamma^{-1}$ . С ростом уровня возбуждения после начального спада функции  $|F_t(\tau)|$  возникают слабо выраженные осцилляции с большим периодом. Дальнейшее увеличение амплитуды  $F_0$  падающего импульса приводит к увеличению скорости спада поля прошедшего импульса на начальном этапе эволюции и к установлению ярко выраженного осцилляционного пропускания плёнки в зависимости от времени. При этом период осцилляций убывает, а их амплитуда растёт с ростом  $F_0$  и даже может оказаться, что  $|F_t| > F_0$  в пике первого максимума. Это обусловлено тем, что поле проходящего импульса складывается из поля падающего импульса и вторичного поля, генерируемого экситонной поляризацией. Если оба поля изменяются синфазно, то амплитуда проходящего импульса может быть больше амплитуды падающего. При фиксированном  $F_0$  амплитуда осцилляций монотонно убывает со временем и на больших временах устанавливается стационарное пропускание с амплитудой  $|F_t| \approx F_0$ .

Рассмотрим теперь особенности временной эволюции системы при расстройках резонанса  $\delta > \delta_c$  (рис. 2.5). В этом случае при низких уровнях возбуждения с ростом амплитуды поля  $F_0$  падающего импульса плотность экситонов очень медленно растёт как в зависимости от  $F_0$ , так и в зависимости от времени. На начальном этапе эволюции наблюдается

незначительное увеличение плотности экситонов. То же самое имеет место и в пропускании: амплитуда проходящего излучения сначала убывает со временем, возникает одна-две еле заметные осцилляции и система переходит в стационарное состояние. Однако это имеет место до тех пор, пока амплитуда падающего импульса  $F_0$  не окажется равной  $F_-$ , которая соответствует скачку с одной ветви гистерезисной кривой на другую для зависимости плотности экситонов от  $F_0$  в стационарном режиме (рис. 2.1a). Сразу же после бифуркации временная эволюция системы на начальном этапе обнаруживает чрезвычайно быстрый рост плотности экситонов, который затем трансформируется в ярко выраженный осцилляционный режим эволюции с большими амплитудами осцилляций и малыми периодами. Со временем осцилляции затухают и система постепенно переходит в стационарное состояние. Аналогичные явления имеют место и в пропускании: сразу же после бифуркации возникает режим пропускания с ярко выраженными осцилляциями амплитуды прошедшего излучения. Из рис. 2.5 видно, что при  $\delta > \delta_c$  возможно пропускание, при котором амплитуда первого пика проходящего излучения оказывается больше амплитуды падающего импульса.

Отметим, что изменение амплитуды падающего прямоугольного импульса, а также расстройки резонанса (частоты) приводит к генерации сложной формы проходящих через плёнку импульсов.

#### Гауссовский импульс

Обсудим особенности нестационарного пропускания тонкой плёнки при нормальном падении на неё гауссовского импульса  $F_i(t) = F_0 \exp(-t^2/T^2)$ , где  $F_0$  и  $T$  – амплитуда и полуширина импульса. На рис. 2.6, 2.7 представлена временная эволюция плотности экситонов  $z$  и амплитуды прошедшего импульса  $|F_t|$  при различных значениях амплитуды  $F_0$  падающего импульса. Видно, что с ростом  $F_0$  форма проходящего импульса существенно изменяется. При малых значениях  $F_0$  возникает пик плотности экситонов и проходящего импульса, которые практически

повторяют форму падающего импульса. Максимум проходящего импульса приходится на более ранний момент времени по отношению к максимуму падающего. С ростом  $F_0$  возникают осцилляции пика плотности экситонов, которые синхронно изменяют поведение проходящего импульса. Пик проходящего импульса постепенно сужается, смещаясь к переднему фронту падающего импульса, тогда как в моменты времени, соответствующие центру и заднему фронту падающего импульса, возникают последовательно новые пики, амплитуды и число которых растут с ростом  $F_0$ . Далеко на заднем хвосте возникает слабый пик, обусловленный только эмиссией вторичного излучения. Полуширины новых пиков существенно меньше ширины падающего импульса.

На рис. 2.8 представлена временная эволюция амплитуды прошедшего импульса при падении на ТПП гауссовского импульса, а также функция пропускания, т.е. зависимость амплитуды прошедшего импульса от амплитуды падающего. Можно заметить отличие нестационарной функции пропускания от стационарной. Чем больше полуширина падающего импульса, тем лучше совпадение нестационарной функции пропускания со стационарной. Падающие импульсы с большими амплитудами приводят к сильным осцилляциям проходящего импульса, что представляет собой существенное отклонение от стационарного режима. Поэтому можно утверждать, что стационарная кривая пропускания получена при использовании значений амплитуд проходящих импульсов, устанавливающихся после переходной стадии, когда прекращаются все осцилляции. Результаты экспериментального исследования функции пропускания с помощью ультракоротких гауссовских импульсов будут существенно отличаться от теоретических результатов, полученных в предположении стационарного пропускания. Многозначность функции пропускания скорее будет обусловлена переходными процессами, нежели бистабильностью в стационарном режиме, которая предсказывается теоретически.

## 2.4 Нестационарный режим пропускания фазово-модулированного импульса

Рассмотрим случай, когда на ТПП нормально падает фазово-модулированный импульс (импульс с чирпингом) вида  $F_i = F_0 \exp(-i\psi)$ , где функция  $\psi$  описывает фазовую модуляцию. Решения уравнений (2.5)–(2.6) также являются фазово-модулированными и их следует искать в виде:  $A = B \exp(-i\psi)$ ,  $F_i = f_i \exp(-i\psi)$ , где  $B(t)$  и  $f(t)$  – новые комплексные амплитуды экситонной волны и прошедшего через пленку поля. Будем называть чирпинг самосогласованным в том смысле, что скорость изменения фазы  $\dot{\psi}$  определяется амплитудой экситонной волны поляризации. Считая чирпинг самосогласованным, выберем его в виде:

$$\psi = \alpha \int_{-\infty}^{\tau} |B(\tau')|^2 d\tau', \quad (2.17)$$

где  $\alpha$  – параметр чирпинга. В этом случае уравнение (2.3) приводится к виду

$$i\dot{B} = -(\delta + i(1 + \Gamma))B + (1 - \alpha)|B|^2 B - F_0. \quad (2.18)$$

По виду уравнения (2.18) и (2.5) одинаковы. Уравнение (2.5) описывает эволюцию экситонов с константой упругого экситон-экситонного взаимодействия  $\nu$  под действием фазово-модулированного УКИ  $F_i$ . Уравнение (2.18) описывает эволюцию экситонов с эффективной константой упругого межэкситонного взаимодействия  $\nu^* = \nu(1 - \alpha)$  под действием УКИ с амплитудой  $F_0$ , не содержащей фазовую модуляцию. Таким образом, формальное преобразование уравнения (2.5), снимающее фазовый экспоненциальный множитель, ответственный за чирпинг, переводит основное эволюционное уравнение для амплитуды экситонной волны в уравнение без чирпинга, но с эффективной (перенормированной) константой упругого экситон-экситонного взаимодействия. Если в (2.18) положить  $\alpha = 0$ , то мы приходим к известному эволюционному уравнению без чирпинга [94]. Параметр чирпинга  $\alpha$  является внешним параметром и экспериментально может быть выбран различным по величине. Если  $\alpha = 1$ , то

слагаемое  $|B|^2 B$  исчезает и уравнение (2.18) становится линейным, для которого хорошо известно аналитическое решение. Этот результат интересен тем, что он указывает на принципиальную возможность фазового управления эволюцией экситонной системы в ТПП путем выбора величины параметра чирпинга  $\alpha$ . Самосогласованный чирпинг падающего импульса постоянно «отслеживает» концентрационное смещение экситонного уровня благодаря упругому экситон–экситонному взаимодействию и своей фазой (переменной частотой  $\Omega = \dot{\psi}$ ) точно компенсирует это смещение. Из (2.18) видно, что при  $\alpha = 1$  смещения частот из-за экситон–экситонного взаимодействия и чирпинга равны по величине и направлены в противоположные стороны и в каждый момент времени компенсируют друг друга. Отсюда можно сделать вывод, что при  $\alpha = 1$  нелинейно–оптические явления, обусловленные упругим экситон–экситонным взаимодействием, наблюдаться не будут. Таким образом, при больших уровнях возбуждения ТПП, когда экситон–экситонное взаимодействие должно было бы приводить к существенной нелинейности процесса взаимодействия света с экситонами и когда возможны были бы эффекты оптической бистабильности, самоотражения и др., оказывается, что система экситонов под действием мощного импульса с самосогласованным чирпингом становится физически линейной системой.

Если  $0 < \alpha < 1$ , то имеет место только частичная компенсация обоих смещений, что эффективно воспринимается как ослабление экситон–экситонного взаимодействия. В этом случае сохраняется возможность проявления различных нелинейно–оптических эффектов, обусловленных упругим экситон–экситонным взаимодействием.

Интересным является случай  $\alpha > 1$ . Это соответствует такой самосогласованной перенормировке энергетического спектра, при которой эффективная константа упругого экситон–экситонного взаимодействия  $\nu^*$  оказывается отрицательной. Это означает, что смещение экситонного уровня вниз из-за чирпинга больше его смещения вверх из-за экситон–экситонного взаимодействия. Отметим, что отрицательная константа экситон–экситонного взаимодействия соответствует притяжению между экситонами.

Таким образом, самосогласованный чирпинг может приводить к изменению величины и знака эффективной константы межэкситонного взаимодействия. Из атомной физики и физики бозе-эйнштейновской конденсации хорошо известно аналогичное явление, которое называется эффектом Фешбаха. Оно выражается в том, что под действием магнитного поля происходит перенормировка спектра атомов и даже изменение величины и знака константы межатомного взаимодействия [101-103]. Поэтому рассматриваемый нами эффект можно назвать оптическим аналогом резонанса Фешбаха: магнитное поле заменяется электрическим полем электромагнитной волны с чирпингом.

Наконец, если  $\alpha < 0$ , то имеет место сложение обоих смещений, что эффективно воспринимается как усиление экситон-экситонного взаимодействия.

Таким образом, один и тот же импульс с одной и той же формой и амплитудой совершенно по-разному будет распространяться в ТПП при наличии самосогласованной фазовой модуляции и в отсутствии её.

Обсудим теперь особенности нестационарного пропускания ТПП, по-прежнему считая, что в начальный момент времени кристалл находился в основном состоянии.

#### Прямоугольный импульс

Пусть на ТПП падает прямоугольный импульс с амплитудой  $F_i = F_0 = const$ . На рис. 2.9 представлена временная эволюция плотности экситонов в плёнке  $z$  при различных значениях амплитуды поля  $F_0$  падающего импульса для различных значений параметра  $\alpha$ . Из него видно, что при значениях параметра  $\alpha$  от нуля до единицы амплитуда и период колебаний  $z$  при фиксированном уровне возбуждения больше, чем при  $\alpha = 0$  (рис. 2.9b), а при  $\alpha > 1$  наоборот – меньше (рис. 2.9d). Также, при  $\alpha > 1$  в зависимости  $z(F_0)$  исчезает резкий скачок при  $F_0 = F_-$ . Однако этот эффект не пропадает, а будет наблюдаться при отрицательных значениях расстройки резонанса. Значение  $\alpha = 1$  соответствует линейному случаю, для которого известно аналитическое решение. Особенности, связанные с нелинейностью

системы, в этом случае, не будут наблюдаться даже при больших уровнях возбуждения. Из рис. 2.10а видно, что при приближении  $\alpha$  к единице поведение  $z(\tau)$  характеризуется увеличением амплитуды и периода колебаний. В условиях точного резонанса зависимость  $z(\alpha)$  симметрична относительно  $\alpha = 1$  (рис. 2.10а). Уход от этого условия приводит к искажению симметрии и смещению пика функции  $z(\alpha)$  в область значений, меньших единицы (рис. 2.10с) при положительной  $\delta$ , при отрицательной расстройке резонанса – наоборот (рис. 2.10d). Таким образом, изменение расстройки резонанса приводит к нарушению строгой симметрии, однако качественное изменение при удалении от пика функции  $z(\alpha)$  сохраняется: уменьшение амплитуды и периода колебаний  $z(\tau)$ . Динамика плотности экситонов ответственна за формирование прошедшего излучения, поэтому на рис. 2.11 наблюдаются аналогичные особенности формы прошедшего импульса  $F_t(\tau)$  при различных значениях параметра чирпинга, что и для  $z(\tau)$ . Функция  $\psi$ , как видно из рис. 2.12 растет со временем, и тем быстрее, чем сильнее накачка.

#### Гауссовский импульс

Рассмотрим теперь случай, когда на ТПП падает гауссовский импульс с огибающей  $F_0 \exp(-\tau^2/T^2)$ , где  $F_0$  – амплитуда а  $T$  – полуширина импульса, и с самосогласованным чирпингом. На рис. 2.13-2.15 представлена временная эволюция плотности экситонов  $z$ , амплитуды  $F_t$  проходящего через ТПП импульса и самосогласованной фазы  $\psi$  падающего импульса при различных значениях параметра чирпинга  $\alpha$  и расстройки резонанса  $\delta = 3$ . Отметим, что в стационарном режиме при  $\delta = 3$  имеет место гистерезисное пропускание ТПП. Частота модуляции падающего импульса  $\Omega = \alpha z$ , т.е. определяется концентрацией экситонов. Из рис. 2.14 видно, что форма проходящего через ТПП импульса существенно отличается от формы падающего. При  $\alpha < 1$  наблюдаются осцилляции плотности экситонов и амплитуды проходящего импульса. При малых амплитудах  $F_0$  падающего импульса наблюдается сдвиг максимума проходящего импульса

относительно падающего. С ростом  $F_0$  форма пика проходящего импульса существенно искажается, возникает крутой задний хвост и дополнительные максимумы, число и амплитуды которых увеличиваются. Еще более заметные пиковые структуры наблюдаются во временной эволюции плотности экситонов. Что касается фазы падающего импульса (рис. 2.15), то она монотонно растет со временем, напоминая по виду логистическую кривую: на переднем и заднем хвостах падающего импульса рост фазы медленный, а в окрестности пика падающего импульса скорость роста фазы резко увеличивается и наблюдается дополнительная структура в виде крутых ступенек. Возникновение ступенек коррелирует с возникновением новых пиков колебаний плотности экситонов. С ростом параметра чирпинга  $\alpha$  число пиков проходящего импульса убывает. Видно, что пики выталкиваются в область больших амплитуд  $F_0$  падающего импульса. При  $\alpha = 1$  полностью исчезает многопиковая структура плотности экситонов и амплитуды проходящего импульса и наблюдается линейное пропускание с монотонным изменением фазы. При  $\alpha > 1$  эволюция плотности экситонов подавлена, фаза падающего импульса монотонно растёт, а проходящий импульс практически не имеет особенностей.

Из всего вышесказанного можно сделать следующие выводы:

- Временная эволюция плотности экситонов в тонкой пленке полупроводника с учетом упругого экситон-экситонного взаимодействия представляет собой затухающие к некоторому стационарному значению осцилляции, частота и амплитуда которых определяются уровнем накачки и расстройкой резонанса;
- Наблюдается амплитудный и частотный гистерезис, меняющий динамику системы в зависимости от уровня возбуждения и расстройки резонанса соответственно;
- Учет фазовой модуляции падающего импульса приводит к перенормировке константы межчастичного взаимодействия и возможности ее изменения с помощью параметра чирпинга;

- Изменение параметра чирпинга приводит к усилению, ослаблению или полному исчезновению нелинейных эффектов, связанных с упругим экситон-экситонным взаимодействием;
- Предсказана возможность существования оптического аналога Фешбах-эффекта, состоящего в перенормировке константы упругого экситон-экситонного взаимодействия при падении на тонкую пленку полупроводника ультракороткого импульса с самосогласованным чирпингом.

Таким образом, один и тот же импульс с одной и той же формой и амплитудой совершенно по-разному будет распространяться в ТПП при наличии самосогласованной фазовой модуляции и в отсутствии её.

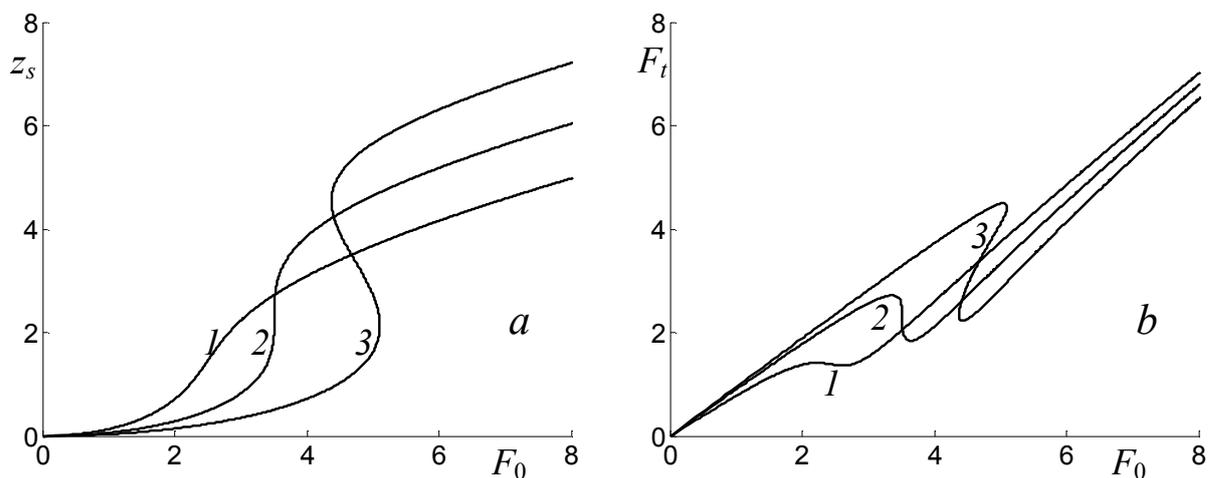


Рис. 2.1 Зависимость стационарной плотности экситонов  $z_s$  и амплитуды проходящего через пленку импульса  $F_t$  от амплитуды поля падающего на пленку импульса при  $\Gamma=1$  и различных значениях расстройки резонанса  $\delta$   $\delta < \delta_c$  (1),  $\delta = \delta_c$  (2),  $\delta > \delta_c$  (3).

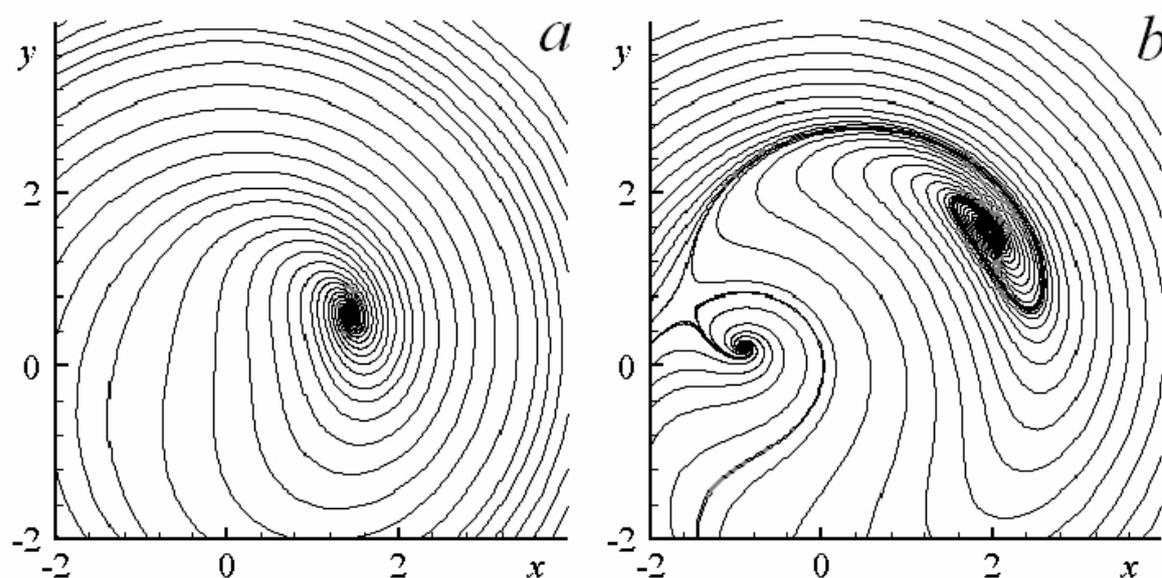


Рис. 2.2 Фазовый портрет системы при различных значениях расстройки резонанса  $\delta < \delta_c$  (a),  $\delta > \delta_c$  (b).

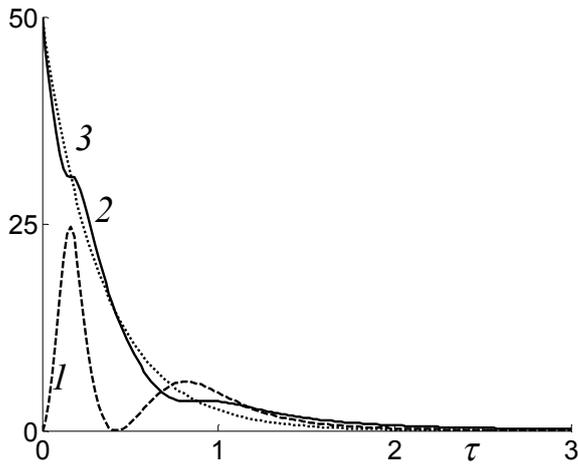


Рис. 2.3 Временная эволюция плотности экситонов (1) и амплитуды проходящего импульса (2) в случае падения на пленку импульса с формой  $F_i = F_0 \exp(-3\tau)$  (3).

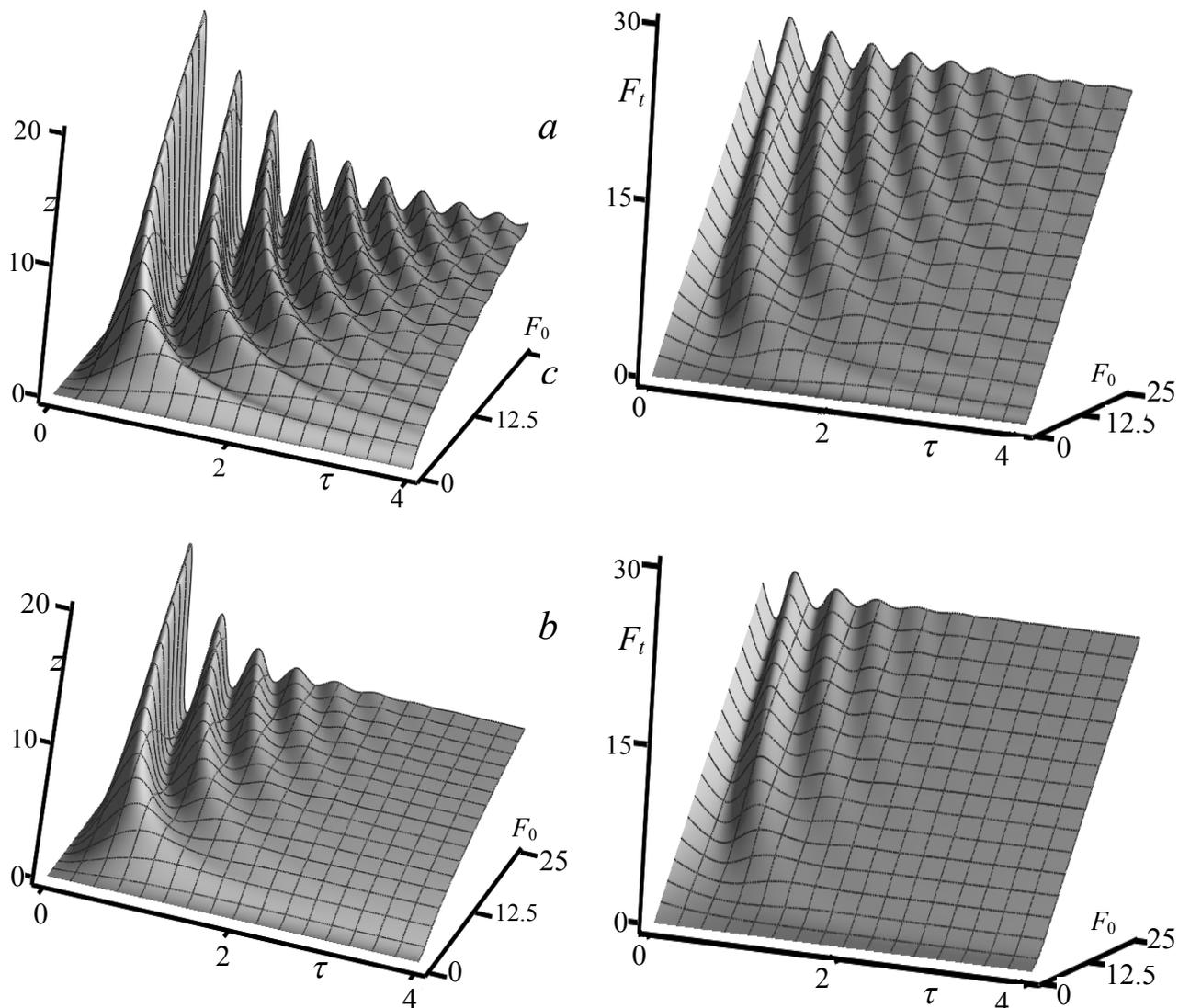


Рис. 2.4 Временная эволюция плотности экситонов и амплитуды проходящего импульса при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку ступенчатого импульса при значениях  $\delta = 0$ ,  $\Gamma = 0$  (a) и  $\delta = 0$ ,  $\Gamma = 1$  (b).

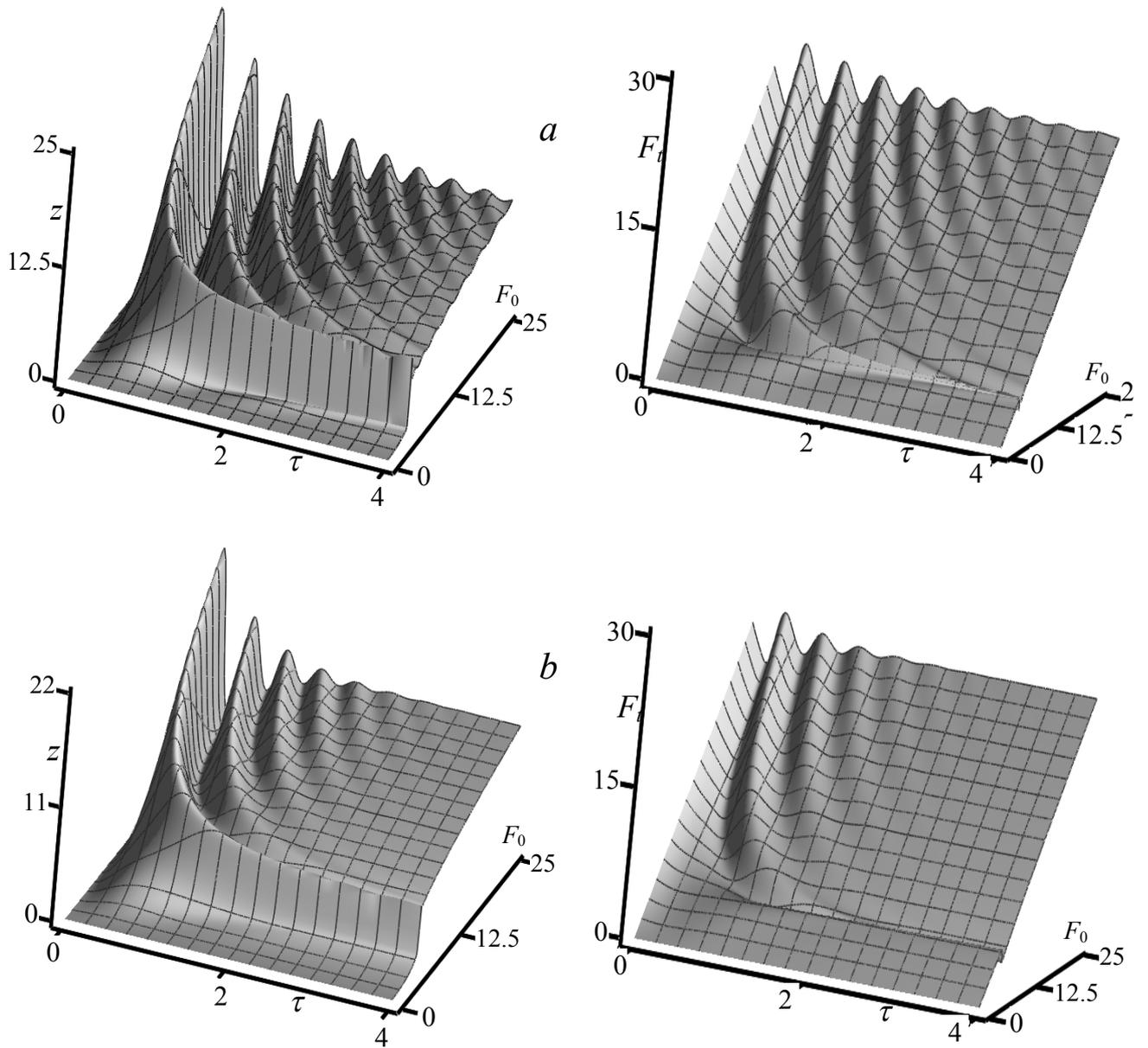


Рис. 2.5 Временная эволюция плотности экситонов и амплитуды проходящего импульса при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку ступенчатого импульса при значениях  $\delta = 5$ ,  $\Gamma = 0$  (a) и  $\delta = 5$ ,  $\Gamma = 1$  (b).

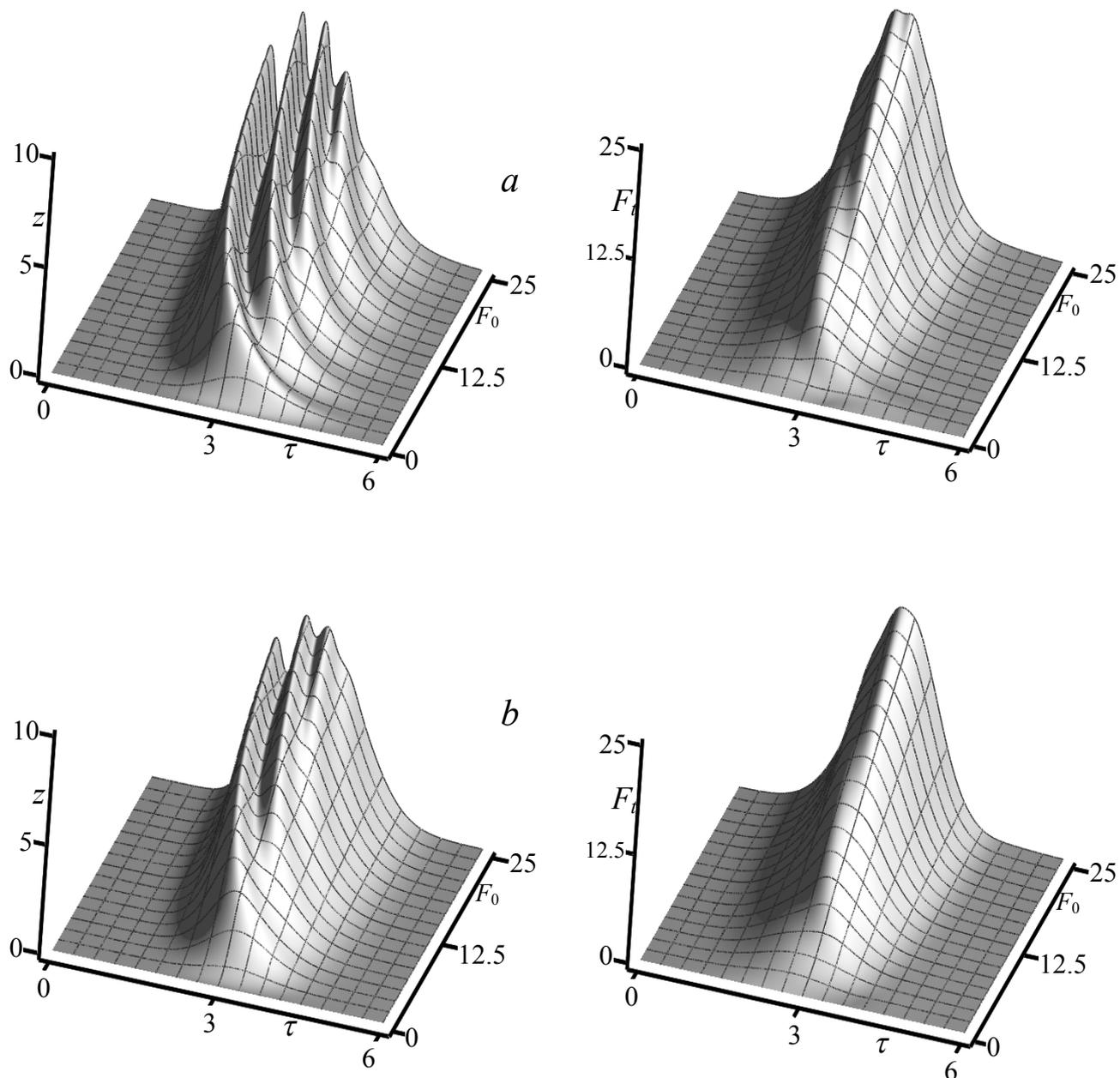


Рис. 2.6 Временная эволюция плотности экситонов и амплитуды проходящего импульса при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку гауссовского импульса при значениях  $\delta = 0$ ,  $\Gamma = 0$  (a) и  $\delta = 0$ ,  $\Gamma = 1$  (b).

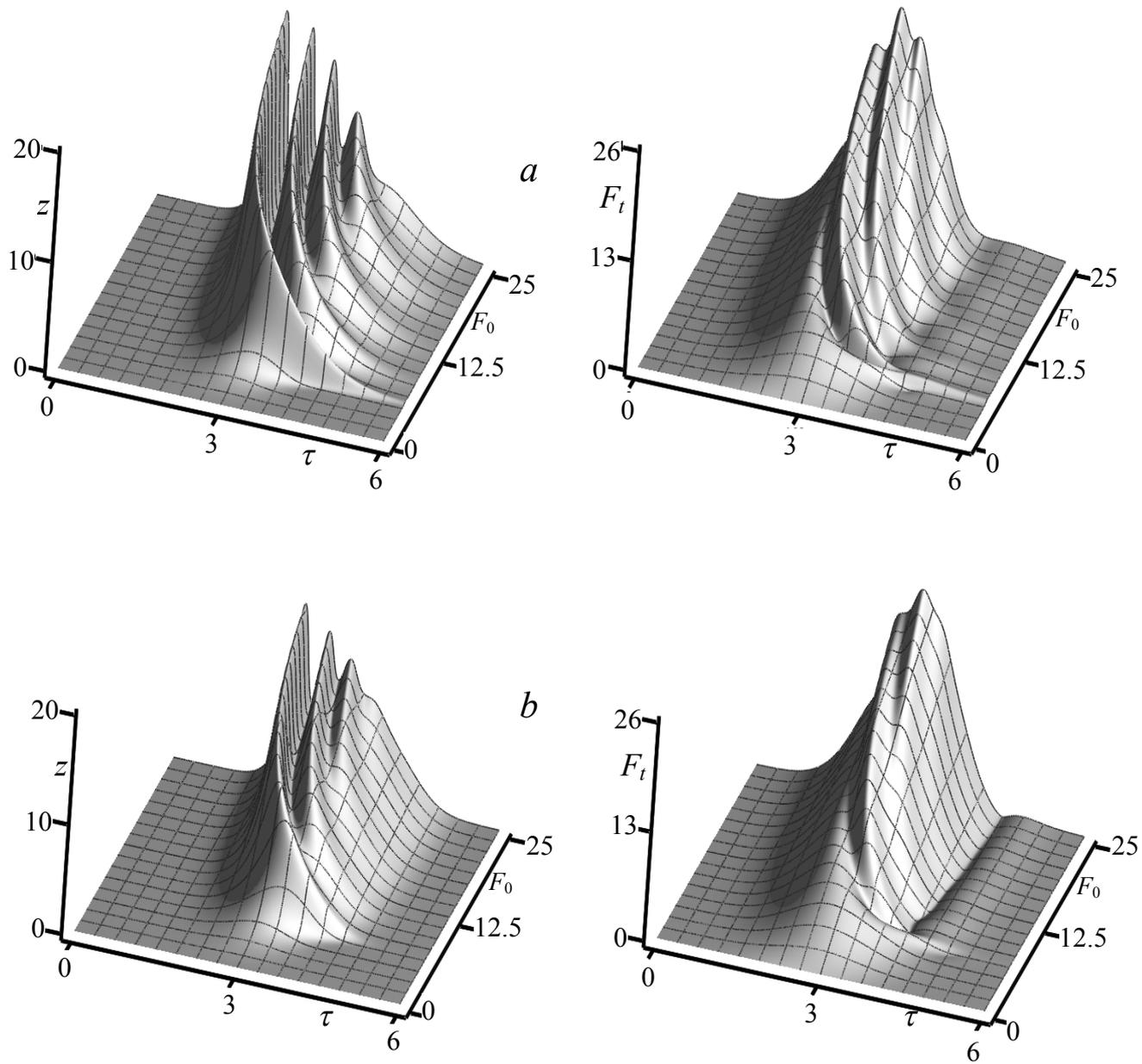


Рис. 2.7 Временная эволюция плотности экситонов и амплитуды проходящего импульса при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку гауссовского импульса при значениях  $\delta = 5$ ,  $\Gamma = 0$  (a) и  $\delta = 5$ ,  $\Gamma = 1$  (b).

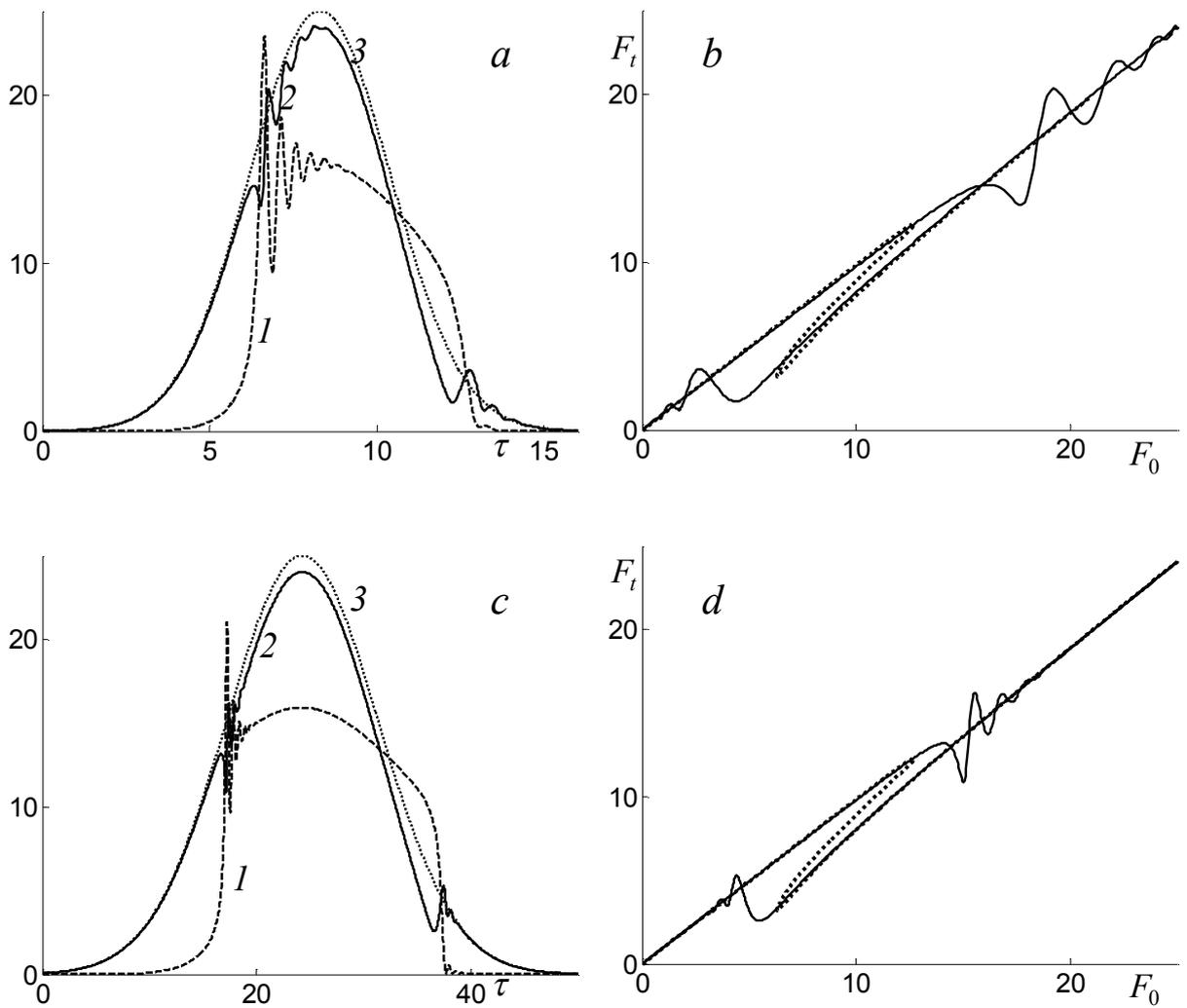


Рис. 2.8 Временная эволюция плотности экситонов (1), амплитуды прошедшего импульса (2) при падении на ТПП гауссовского импульса (3) (a, c), а также функция пропускания (b, d) при  $\delta = 10$  и различных полуширинах гауссовского импульса  $T=3$  (a, b),  $T=10$  (c, d).

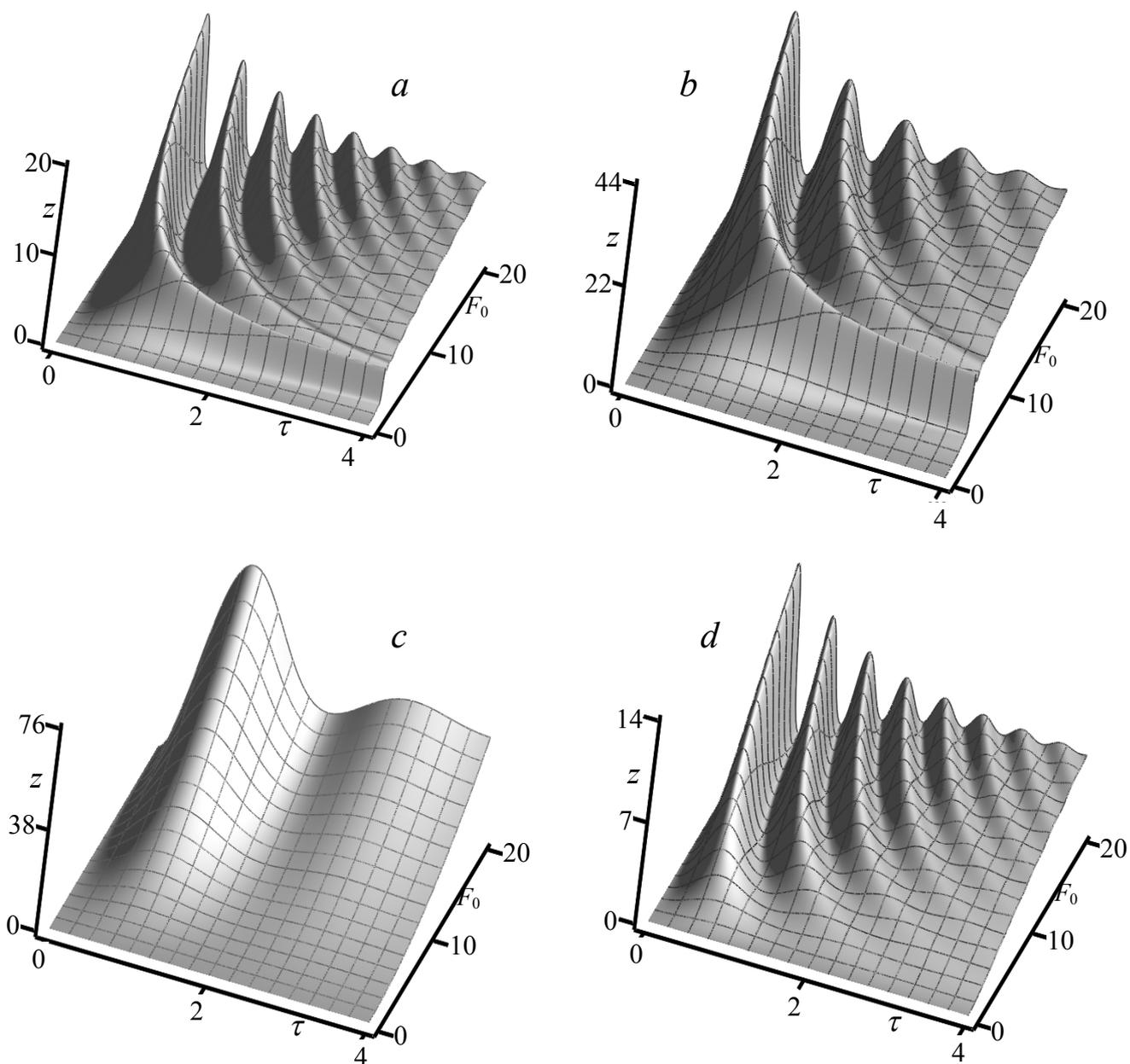


Рис. 2.9 Временная эволюция плотности экситонов при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку ступенчатого импульса с чирпингом при  $\delta=3$ ,  $\Gamma=0$  и различных значениях параметра  $\alpha=0$  (a),  $\alpha=0.7$  (b),  $\alpha=1$  (c) и  $\alpha=2$  (d).

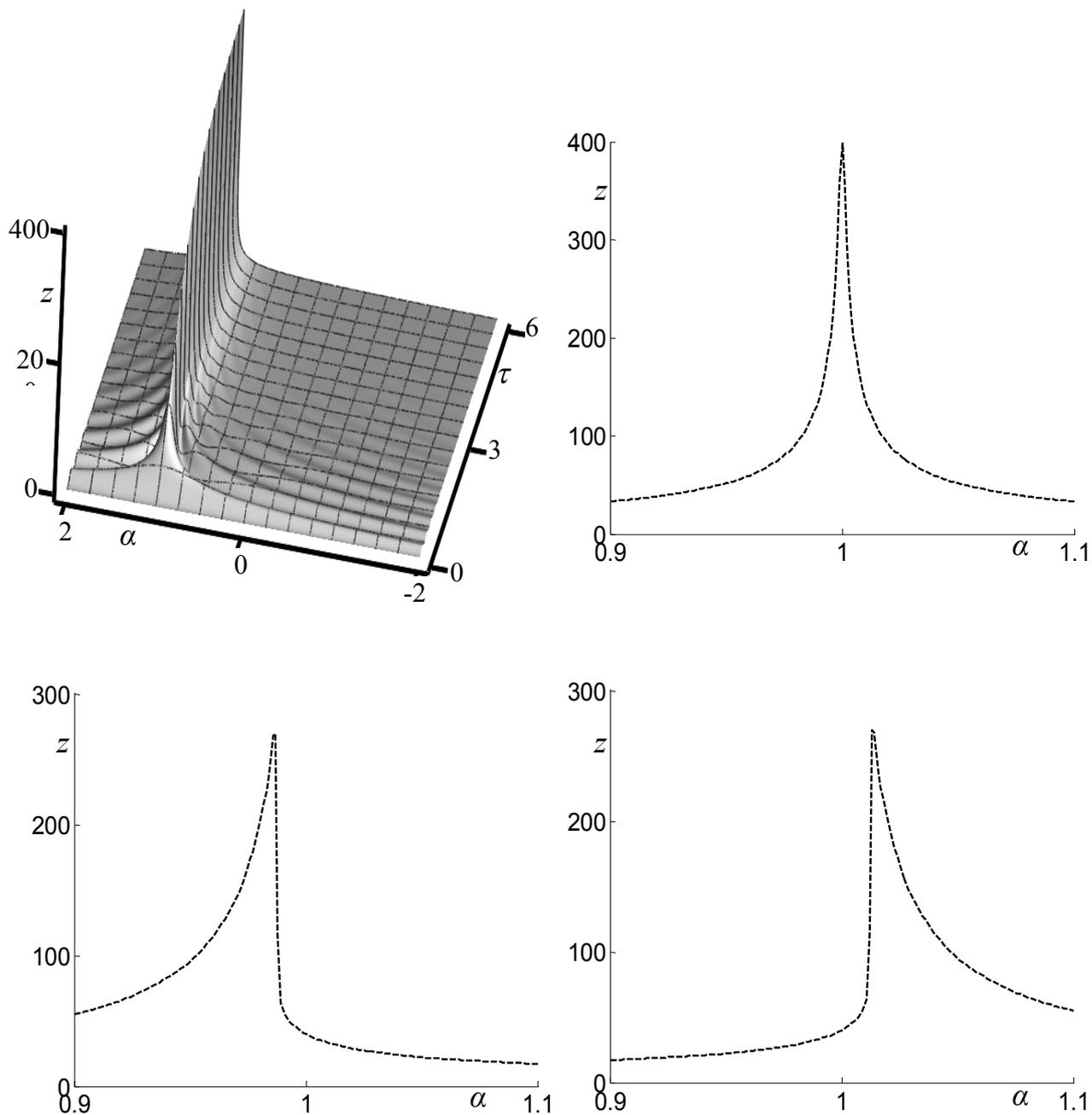


Рис. 2.10 Временная эволюция плотности экситонов при различных значениях параметра  $\alpha$  в случае падения на пленку ступенчатого импульса с чирпингом и зависимость  $z(\alpha)$  при значениях расстройки резонанса  $\delta = 0$  (a)-(b),  $\delta = 3$  (c) и  $\delta = -3$  (d).

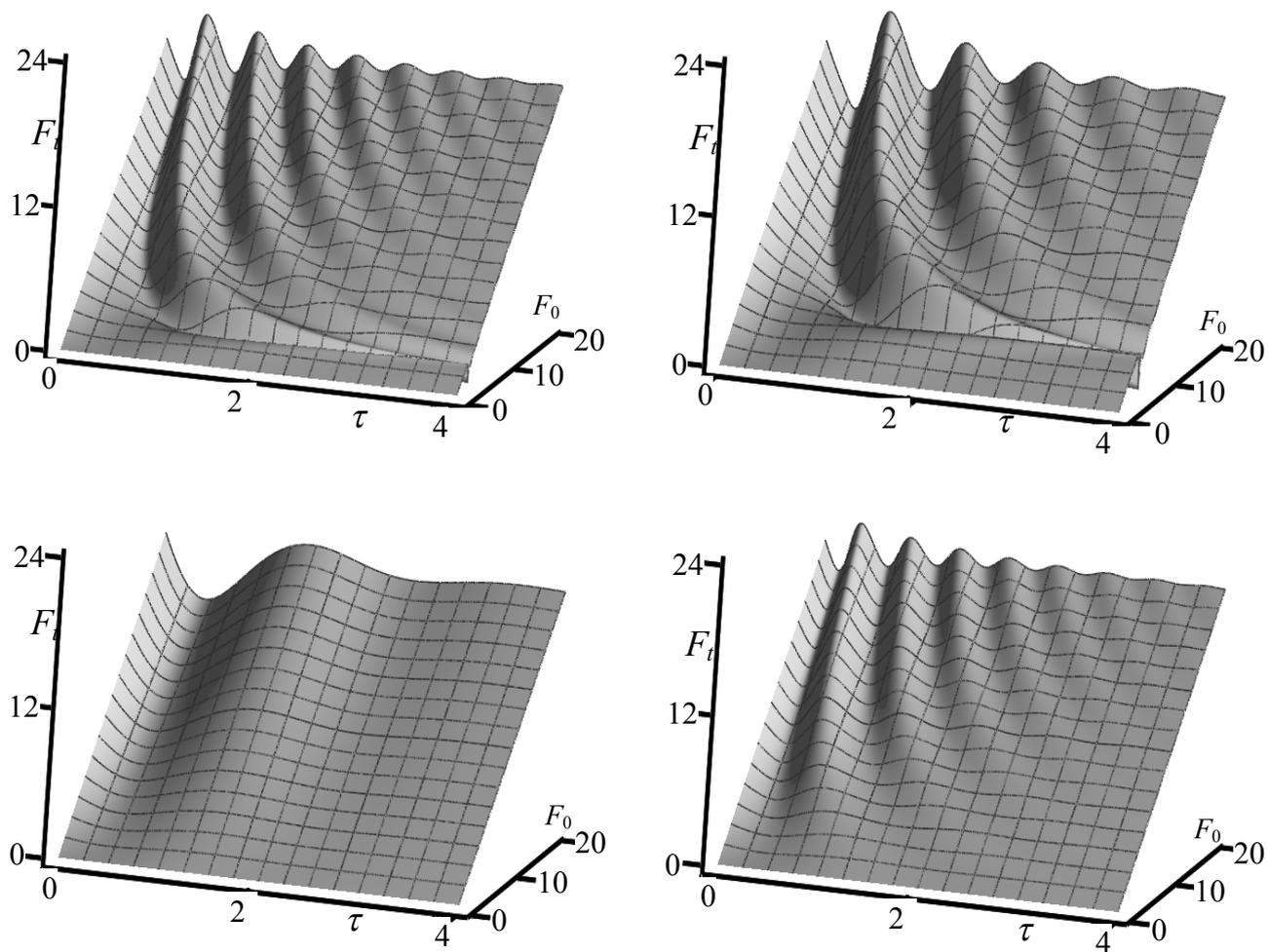


Рис. 2.11 Временная эволюция амплитуды прошедшего поля при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку ступенчатого импульса с чирпингом при  $\delta = 3$ ,  $\Gamma = 0$  и различных значениях параметра  $\alpha = 0$  (a),  $\alpha = 0.7$  (b),  $\alpha = 1$  (c) и  $\alpha = 2$  (d).

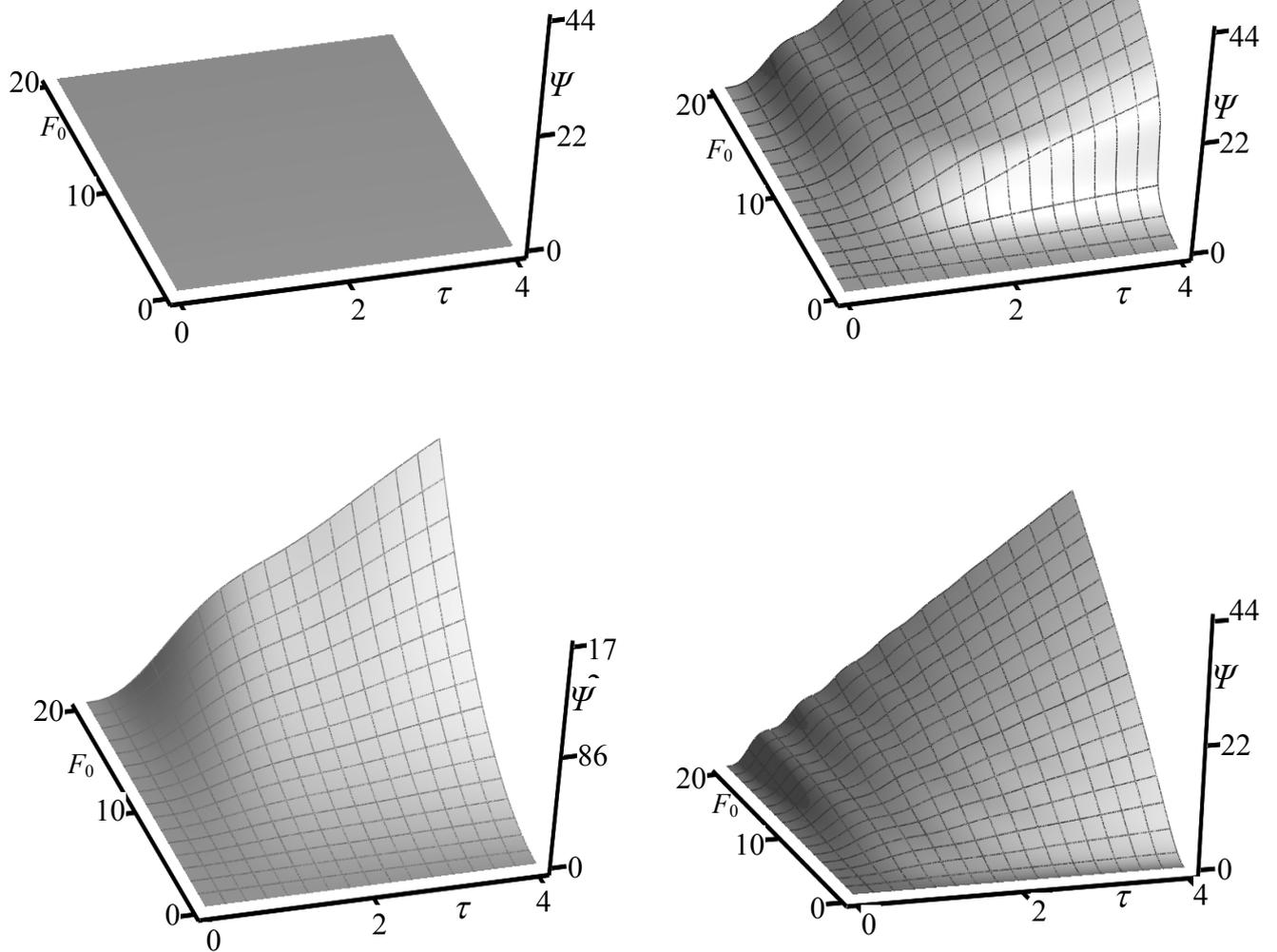


Рис. 2.12 Временная эволюция самосогласованной фазы при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку ступенчатого импульса с чирпингом при  $\delta = 3$ ,  $\Gamma = 0$  и различных значениях параметра  $\alpha = 0$  (a),  $\alpha = 0.7$  (b),  $\alpha = 1$  (c) и  $\alpha = 2$  (d).

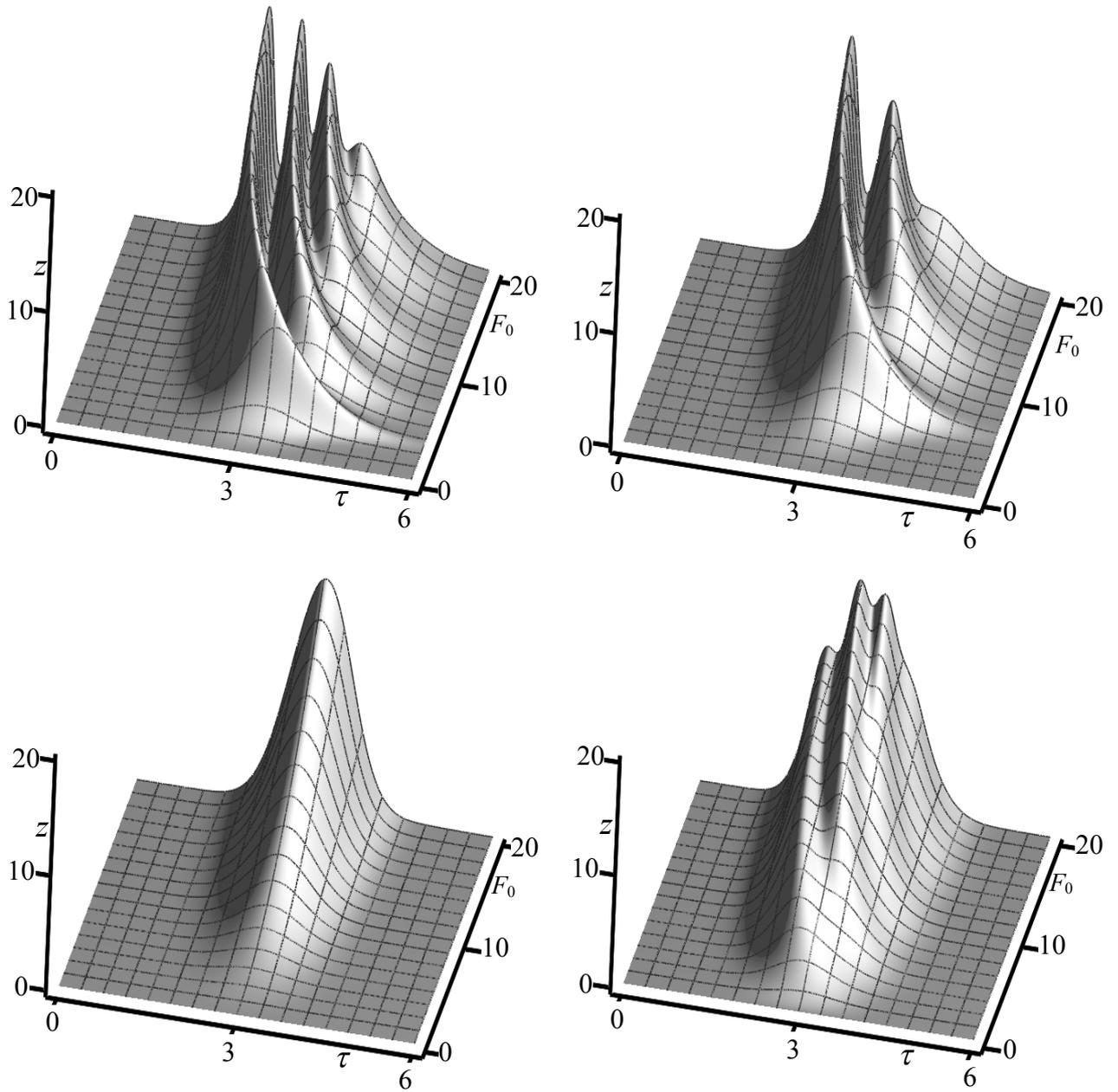


Рис. 2.13 Временная эволюция плотности экситонов при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку гауссовского импульса с чирпингом при  $\delta = 3$ ,  $\Gamma = 0$  и различных значениях параметра  $\alpha = 0$  (a),  $\alpha = 0.7$  (b),  $\alpha = 1$  (c) и  $\alpha = 2$  (d).

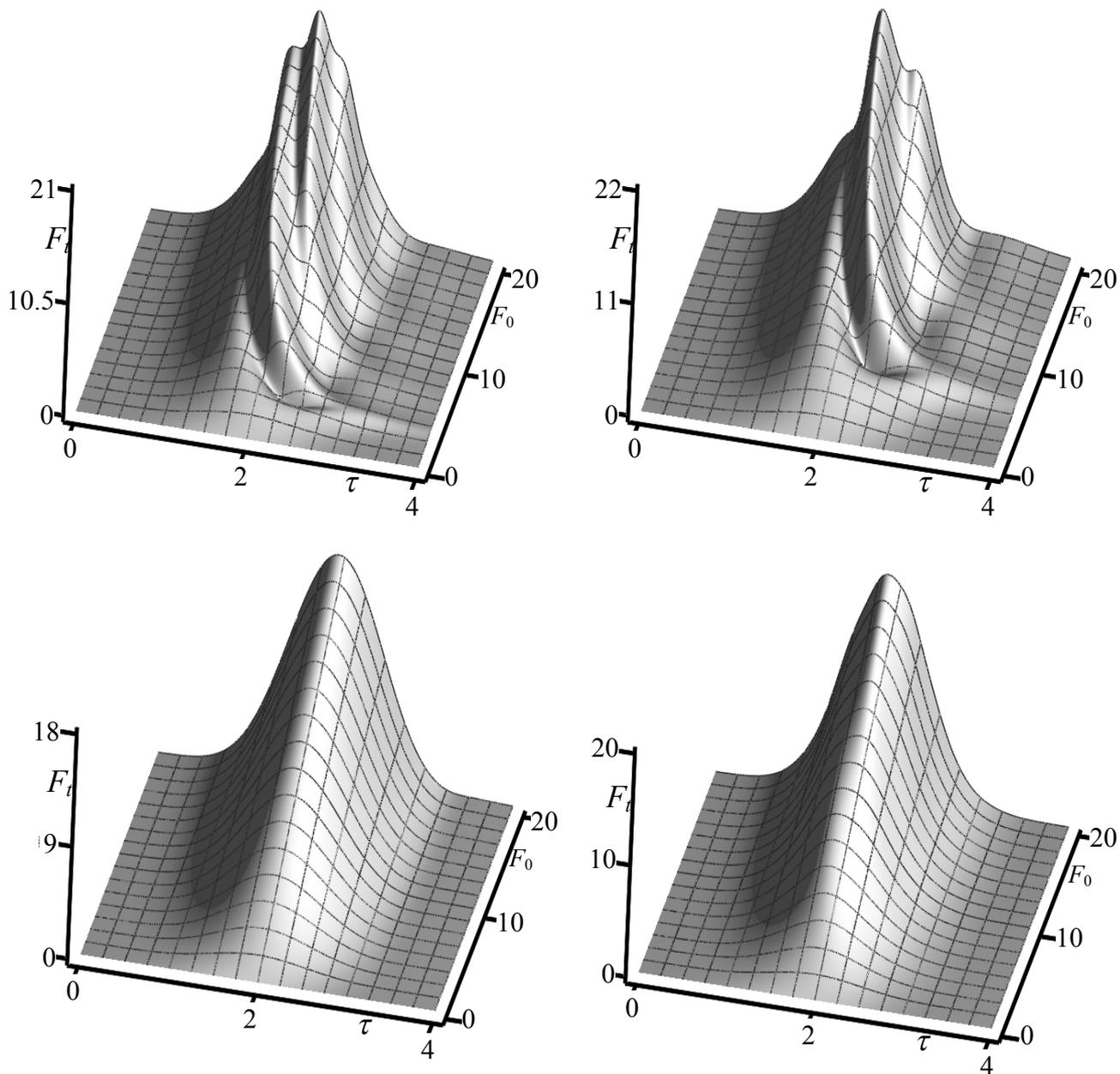


Рис. 2.14 Временная эволюция амплитуды прошедшего поля при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку гауссовского импульса с чирпингом при  $\delta = 3$ ,  $\Gamma = 0$  и различных значениях параметра  $\alpha = 0$  (a),  $\alpha = 0.7$  (b),  $\alpha = 1$  (c) и  $\alpha = 2$  (d).

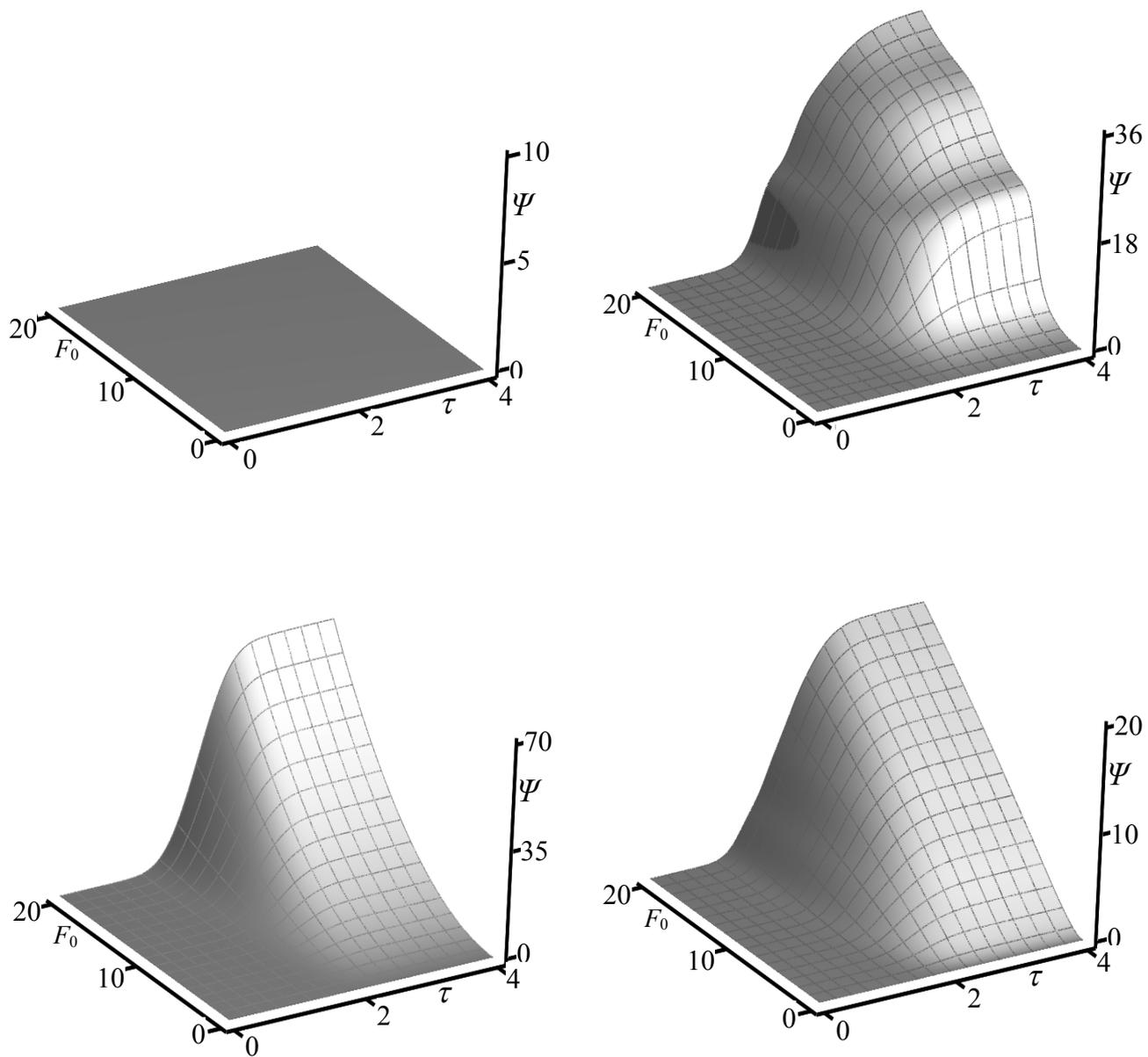


Рис. 2.15 Временная эволюция самосогласованной фазы при различных уровнях возбуждения в случае падения на пленку гауссовского импульса с чирпингом при  $\delta=3$ ,  $\Gamma=0$  и различных значениях параметра  $\alpha=0$  (a),  $\alpha=0.7$  (b),  $\alpha=1$  (c) и  $\alpha=2$  (d).

# Глава 3. Нелинейное пропускание ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой пленкой полупроводника в условиях двухфотонного двухимпульсного возбуждения биэкситонов

## 3.1 Постановка задачи. Основные уравнения

Пусть на тонкую пленку полупроводника толщиной  $L$ , расположенную в вакууме, падают нормально два коротких импульса монохроматического лазерного излучения с огибающими напряженностей электрического поля  $E_{i1}(t)$  и  $E_{i2}(t)$  и частотами фотонов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Длительности импульсов предполагаются на много меньшими времени релаксации биэкситонов в пленке, а их огибающие считаются медленно меняющимися во времени. Полагаем, что суммарная энергия обоих фотонов совпадает с энергией возбуждения биэкситона из основного состояния кристалла. Кроме того считаем, что частоты фотонов каждого из импульсов не находятся в резонансе с какой-либо другой собственной частотой перехода в полупроводнике (например, с частотой перехода в экситонной области спектра либо с частотой оптической экситон–биэкситонной конверсии в области М–полосы). В общем случае, когда  $\omega_1 \neq \omega_2$ , мы полагаем, что имеет место только процесс двухимпульсного двухфотонного возбуждения биэкситонов, и что процесс одноимпульсного двухфотонного возбуждения невозможен из-за большой расстройки резонанса. Такая ситуация легко может быть реализована в кристалле  $\text{CuCl}$ , где энергия связи биэкситона достаточно велика ( $\sim 30\text{--}40\text{meV}$ ), а сила осциллятора двухфотонного возбуждения биэкситона является гигантской. Таким образом, когерентные фотоны обоих импульсов попарно порождают в пленке когерентные биэкситоны, излучательная рекомбинация которых ответственна за формирование вторичного излучения, генерируемого пленкой.

Гамильтониан взаимодействия биэкситонов с полями обоих импульсов имеет вид:

$$H_{\text{int}} = -\hbar\mu(b^+ E_1^+ E_2^+ + b E_1^- E_2^-), \quad (3.1)$$

где  $\mu$  – константа двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла,  $b$  – амплитуда биэкситонной волны,  $E_j^+$  ( $E_j^-$ ) – положительно (отрицательно)-частотная компонента амплитуды электрического поля проходящего импульса ( $j=1,2$ ).

Используя (3.1), получаем следующее уравнение для амплитуды  $b(t)$  биэкситонной волны

$$i \frac{db}{dt} = -\Delta b - \mu E_1^+ E_2^+, \quad (3.2)$$

где  $\Delta = \omega_1 + \omega_2 - \Omega_0$  – расстройка резонанса для суммарной частоты обоих фотонов по отношению к собственной частоте  $\Omega_0$  перехода (частоте возбуждения биэкситона из основного состояния кристалла). Следуя [18, 32, 33, 35], из граничных условий сохранения тангенциальных компонент электрического и магнитного полей через границу раздела пленка – вакуум получаем следующие электродинамические отношения

$$E_1^+ + t_0 \frac{dE_1^+}{dt} = E_{i1} + i\alpha_1 \mu b E_2^-, \quad (3.3)$$

$$E_2^+ + t_0 \frac{dE_2^+}{dt} = E_{i2} + i\alpha_2 \mu b E_1^-, \quad (3.4)$$

где  $E_1^+(t)$  и  $E_2^+(t)$  – поля прошедших через пленку импульсов,  $E_{i1}(t)$  и  $E_{i2}(t)$  – амплитуды падающих на пленку импульсов,  $t_0 = L/c$  – время пролета импульса через пленку,  $c = c_0/n_0$ ,  $c_0$  – скорость света в вакууме,  $n_0$  – показатель преломления кристалла,  $\alpha_j = 2\hbar\omega_j L/c$ , ( $j=1,2$ ). Далее, простоты ради, будем считать  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Константу  $\mu$  двухфотонного возбуждения биэкситонов определим из следующих соображений. При низких уровнях возбуждения вероятность двухфотонной генерации биэкситонов мала. Однако с ростом уровня возбуждения вероятность этого процесса увеличивается. В [60, 61] показано, что для кристаллов типа CuCl вероятность процесса двухфотонного возбуждения биэкситонов сравнивается

с вероятностью однофотонного возбуждения экситонов из основного состояния кристалла при плотности фотонов  $N_c=10^{15}\text{см}^{-3}$ . Поэтому, следуя [60, 61], можно записать, что  $\mu E_c = g$ , где  $g$  – константа экситон–фотонного взаимодействия, а характерное поле  $E_c$  определяется выражением  $E_c^2/8\pi = \hbar\omega N_c$ . Далее мы полагаем  $\mu = gE_c^{-1}$ . Удобства ради введем следующие нормированные величины:

$$b = (E_c/\alpha g)a, \quad E^\pm/E_c = f^\pm, \quad E_i/E_c = f_i, \quad t = \tau\tau_0, \quad s = t_0/\tau_0, \quad \delta = \Delta\tau_0, \quad \tau_0^{-1} = \alpha g^2, \quad (3.5)$$

где  $\tau_0$  – характерное время реакции пленки на внешнее поле. Таким образом, поля мы нормируем на характерное поле  $E_c$ , а плотность биэкситонов  $n_{bi} = |b|^2$  – на характерную плотность  $n_c = E_c^2/(\alpha g)^2$ . Тогда система уравнений (3.2)–(3.4) принимает вид:

$$i \frac{da}{d\tau} = -\delta a - f_1^+ f_2^+, \quad (3.6)$$

$$s \frac{df_1^+}{d\tau} + f_1^+ = f_{i1} + iaf_2^-, \quad (3.7)$$

$$s \frac{df_2^+}{d\tau} + f_2^+ = f_{i2} + iaf_1^-. \quad (3.8)$$

Система уравнений (3.6)–(3.8) полностью решает задачу об определении формы прошедших через тонкую пленку импульсов  $E_1^+(t)$  и  $E_2^+(t)$  (либо  $f_1^+(t)$  и  $f_2^+(t)$ ) при заданных огибающих  $E_{i1}$  и  $E_{i2}$  (либо  $f_{i1}$  и  $f_{i2}$ ) падающих импульсов в условиях двухимпульсного двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла.

Рассмотрим сначала прохождение ультракоротких импульсов лазерного излучения через тонкую пленку полупроводника, толщина которой  $L$  удовлетворяет неравенству  $L \ll c\tau_0$ . В этом пределе время пролета фотона через пленку намного меньше характерного времени  $\tau_0$  реакции пленки на внешнее возмущение и поэтому параметр  $s$  в (3.7)–(3.8) можно считать равным нулю. Тогда из (3.7)–(3.8) получаем следующие выражения для амплитуд  $f_1^+(t)$  и  $f_2^+(t)$  проходящих через ТПП импульсов:

$$f_1^+ = \frac{f_{i1} + iaf_{i2}}{1 - |a|^2}, \quad f_2^+ = \frac{f_{i2} + iaf_{i1}}{1 - |a|^2}, \quad (3.9)$$

а (3.6) приводится к нелинейному дифференциальному уравнению для нормированной амплитуды  $a(\tau)$  биекситонной волны

$$i \frac{da}{d\tau} = -\delta a - \frac{(f_{i1} + ia f_{i2})(f_{i2} + ia f_{i1})}{(1 - |a|^2)^2}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что если в пленке каким-то образом была создана система когерентных биекситонов ( $a_{|\tau=0} \neq 0$ ) и она была предоставлена самой себе, то в отсутствии внешних, падающих на пленку импульсов ( $f_{i1} = f_{i2} = 0$ ), плотность биекситонов со временем сохраняется неизменной. Это обусловлено спецификой двухфотонного индуцирования процесса излучательного распада биекситонов. Если при тех же начальных условиях ( $a_{|\tau=0} \neq 0$ ) на пленку падает только один из импульсов (например,  $f_{i1}$ ), то тогда имеет место индуцированный излучательный распад биекситонов с образованием фотонов как на частоте падающего импульса, так и на дополнительной частоте, что приведет к формированию проходящих через пленку импульсов на обеих частотах и к монотонному уменьшению плотности биекситонов со временем. При этом индуцирующий импульс  $f_{i1}$  может иметь произвольную форму, интеграл от которой сходится. В самом деле, полагая в (3.10)  $f_{i2} = 0$  и  $a(\tau) = \rho(\tau) \exp(i\delta\tau + i\varphi(\tau))$ , легко получить, что функция  $\varphi(\tau) = 0$ , а функция  $\rho(\tau)$  определяется решением трансцендентного уравнения

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \rho_0^2 - \rho^2 + \frac{1}{4}(\rho^4 - \rho_0^4) = - \int_{\tau_i}^{\tau} f_{i1}^2(\tau') d\tau', \quad (3.11)$$

где  $\rho_0 = \rho_{|\tau=\tau_i}$  – начальное условие,  $\tau_i$  – начальный момент времени, который считается равным нулю для ступенчатого импульса и равным  $-\infty$  для импульса с плавной огибающей  $f_{i1}(\tau)$  (например, гауссовского импульса).

Предположим, что на пленку, находящуюся в основном состоянии, падает импульс с огибающей  $f_{i1}(\tau) = f_{i1} \operatorname{sech} \tau/T_1$ , где  $T_1$  – полуширина этого импульса. Самостоятельно этот импульс не может возбудить биекситоны. Пусть в некоторый момент времени  $\tau = \tau_1$  на пленку падает второй,  $\delta$ -образный импульс вида  $f_{i2}(\tau) = f_{i2} \delta((\tau - \tau_1)/T_2)$ . Здесь  $T_2$  – полуширина «размазанного»  $\delta$ -образного импульса. Его роль, по существу, сводится к

тому, что в момент времени  $\tau = \tau_1$  в пленке возбуждаются биэкситоны, амплитуда которых определяется выражением  $\rho_0 = f_{i1}f_{i2}T_2 \operatorname{sech} \tau_1/T_1$ . Тогда дальнейшая эволюция амплитуды  $\rho(\tau)$  биэкситонной волны происходит в соответствии с решением:

$$Q(\rho) = T_1 f_{i1}^2 (1 + \operatorname{th} \tau/T_1), \quad (3.12)$$

где  $Q(\rho)$  – левая часть выражения (3.11). Из (3.12) следует, что с течением времени плотность биэкситонов монотонно убывает и форма проходящего импульса  $f_1(\tau)$  повторяет форму падающего  $f_{i1}(\tau)$ .

Если на пленку падают оба импульса, то точные аналитические решения удается получить для случая, когда расстройка резонанса  $\delta = 0$  и импульсы являются прямоугольными с амплитудами  $f_{i1} = \text{const}$  и  $f_{i2} = \text{const}$ , которые далее считаем действительными. Пусть в начальный момент времени  $\tau = 0$  кристалл находится в основном состоянии, т.е. в нем отсутствовали биэкситоны ( $a_{\tau=0} = 0$ ). Выделяя в (3.10) действительную  $z$  и мнимую  $w$  компоненты амплитуды биэкситонной волны  $a = z + iw$ , легко показать, что  $z(\tau) = 0$  в любой момент времени. Это свидетельствует об отсутствии фазовой модуляции биэкситонной волны, и, следовательно, огибающих прошедших (и отраженных) волн. Тогда уравнение для мнимой компоненты  $w$  биэкситонной волны имеет вид:

$$\frac{dw}{d\tau} = f_{i1}f_{i2} (f_{i1}/f_{i2} - w)(f_{i2}/f_{i1} - w)(1 - w^2)^{-2}, \quad (3.13)$$

решение которого выражается формулой:

$$Aw + Bw^2 + Cw^3 + M \ln |1 - w/s| + N \ln |1 - sw| = f_{i1}f_{i2}\tau, \quad (3.14)$$

где

$$A = k^2 + k^{-2} - 1, \quad B = (k + k^{-1})/2, \quad C = 1/3, \quad M = k(k^2 - 1), \quad N = k^{-3} - k^{-1}, \quad k = f_{i1}/f_{i2}. \quad (3.15)$$

Отметим здесь, что если оба падающих импульса имеют одну и ту же форму  $f(\tau)$ , но различаются по амплитуде  $f_{i1}(\tau) = f_{i1} \cdot f(\tau)$ ,  $f_{i2}(\tau) = f_{i2} \cdot f(\tau)$ , то эволюция системы происходит в соответствии с решением (3.14), только

справа в (3.14)  $f_{i1}f_{i2}\tau$  надо заменить на  $f_{i1}f_{i2}\int_{-\infty}^{\tau} f^2(\tau)d\tau$ . Если же  $f_{i1} = f_{i2} = f_i$ , то

решение имеет вид  $w = \left( 3f_i^2 \int_{-\infty}^{\tau} f^2(\tau')d\tau' \right)^{1/3} - 1$ .

Из (3.13) и (3.14) следует, что в процессе временной эволюции функция  $w(\tau)$  асимптотически стремится к  $k$ , если  $k < 1$ , либо к  $1/k$ , если  $k > 1$ , т.е. к меньшему из отношений  $f_{i1}/f_{i2}$  и  $f_{i2}/f_{i1}$ . Система стремится к стационарному состоянию, при котором, как видно из (3.9), пленка полностью пропускает тот из падающих прямоугольных импульсов, амплитуда которого больше, тогда как импульс с меньшей амплитудой полностью отражает.

После выключения одного из импульсов (например,  $f_{i2}$ ) система продолжает эволюционировать в соответствии с решением уравнения (3.10), которое имеет вид

$$\ln \frac{w_0}{w} + w^2 - w_0^2 + \frac{1}{4}(w_0^4 - w^4) = f_{i1}^2 \tau, \quad (3.16)$$

где  $w_0$  – значение функции  $w(\tau)$  в момент выключения второго импульса. В этом случае плотность биекситонов монотонно убывает со временем со скоростью тем большей, чем больше  $f_{i1}$ . Что касается проходящих через пленку импульсов, то, как следует из (3.9) и (3.16), их амплитуды резко изменяются в момент выключения второго падающего импульса, причем второй проходящий импульс изменяет в этот момент не только свою величину, но и поляризацию (на противоположную). Затем абсолютные значения амплитуд обоих проходящих импульсов монотонно убывают со временем, причем  $f_1(\tau)$  асимптотически стремится к значению  $f_{i1}$ , а  $f_2(\tau)$  обращается в нуль. Таким образом, видно, что хотя на систему действует только один импульс, тем не менее рекомбинационное (вторичное) излучение возникает на частотах обоих импульсов благодаря процессу индуцированного распада предварительно созданных в пленке биекситонов. При этом проходящий импульс  $f_2(\tau)$  и соответствующий ему отраженный импульс  $f_{r,2}(\tau)$  имеют одну и ту же форму, так как они возникают только за

счет вторичного излучения, тогда как импульс  $f_1(\tau)$  формируется как полем падающего импульса  $f_{i1}(\tau)$ , так и полем вторичного излучения.

### 3.2 Пропускание двух прямоугольных импульсов

На рис. 3.1 представлена временная эволюция плотности биэкситонов  $n = |a|^2$  и интенсивностей проходящих через ТПП импульсов  $I_1 = f_1^+ f_1^-$  и  $I_2 = f_2^+ f_2^-$  для ступенчатых накачек  $f_{i1}(\tau) = f_{i1}[1 - \Theta(\tau - \tau_1)]$ ,  $f_{i2}(\tau) = f_{i2}[1 - \Theta(\tau - \tau_2)]$  при различных значениях  $f_{i1}$ ,  $f_{i2}$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . При  $\delta = 0$  и  $s = 0$  на начальном этапе эволюции, когда действуют оба импульса накачки, плотность биэкситонов монотонно растет со временем (рис. 3.1a, 3.1d). Интенсивности обоих проходящих импульсов монотонно убывают, причем скорость изменения того из них, интенсивность которого больше, со временем уменьшается, в какой-то момент времени его интенсивность достигает своего минимума, затем начинает расти. Если же амплитуды падающих импульсов  $f_{i1}$  и  $f_{i2}$  слабо отличаются по величине, то временная эволюция системы характеризуется более яркими особенностями и ко времени, когда плотность биэкситонов асимптотически приближается к своему предельному значению, меньшему, но практически равному единице, скорости изменения интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  резко возрастают и тот из импульсов, интенсивность которого больше, быстро принимает значение интенсивности падающего импульса, переходя таким образом в режим полного пропускания, тогда как импульс, интенсивность которого меньше, быстро стремится к нулю, переходя в конечном счете в режим полного отражения (рис. 3.1d). Эти особенности временной эволюции обусловлены особенностями процесса двухфотонного индуцирования. Поскольку один из импульсов переходит со временем в режим полного отражения, то фотоны другого импульса (с большей амплитудой) проходят через пленку как через абсолютно прозрачную среду, так как они в соответствии с исходными предположениями не могут возбуждать биэкситоны без участия фотонов первого импульса. В момент выключения одного из падающих импульсов (рис. 3.1a, 3.1d) интенсивности обоих проходящих импульсов скачкообразно

изменяются, причем тот из импульсов, который отсутствует как падающий, тем не менее существует в пропускании за счет вторичного излучения пленки и амплитуда его изменяет свой знак. Скачки в значениях амплитуд проходящих импульсов могут быть значительными. В самом деле, если выключить один из импульсов, например,  $f_{i2}$ , то в этом случае амплитуды проходящих импульсов определяются выражениями  $f_1^+ = f_{i1}/(1-w^2)$ ,  $f_2^+ = -wf_{i1}/(1-w^2)$ . Так как в момент выключения первого импульса плотность биэкситонов  $w^2 = n < 1$ , то функция  $f_1^+(\tau)$  испытывает скачок и становится больше  $f_{i1}$ , тогда как функция  $f_2^+$  также скачкообразно изменяется, одновременно изменяя и свою поляризацию. Дальнейшая эволюция состоит в том, что амплитуда второго импульса  $f_2(\tau)$  стремится к нулю, тогда как  $f_1(\tau)$  стремится к  $f_{i1}$ , так как в отсутствии второго импульса первый проходит через тонкую пленку как через абсолютно прозрачную среду. При этом плотность биэкситонов монотонно убывает.

Используя (3.9)–(3.10), можно исследовать поведение системы при  $s=0$ , но  $\delta \neq 0$ . Слагаемое с  $\delta$  в (3.10) приводит к тому, что решения для амплитуд  $a(\tau)$ ,  $f_1(\tau)$  и  $f_2(\tau)$  являются фазовомодулированными. Поэтому имеют место колебания во времени действительных и мнимых компонент амплитуд. Частота этих колебаний тем больше, чем больше  $|\delta|$ . Результаты численного интегрирования уравнения (3.10) для  $n$ ,  $I_1$  и  $I_2$  при тех же значениях параметров, что и на рис. 3.1a, 3.1d, но при  $\delta = 2$ , представлены на рис. 3.1b, 3.1e. Видно, что, пока действуют оба падающих импульса, плотность биэкситонов сначала растет со временем, затем начинает медленно убывать. При более длительной эволюции, а также при больших  $|\delta|$  эти изменения представляют собой осцилляции. Временная эволюция амплитуд обоих проходящих импульсов также носит колебательный характер. Поэтому, пока действуют оба внешних импульса, режим практически полного отражения импульса с меньшей амплитудой либо отсутствует, либо проявляется не столь ярко, как в случае  $\delta = 0$ . Для двух ступенчатых импульсов в приближении заданного поля одного из них (например, первого)  $f_{i1} \gg f_{i2}$

решения уравнений (3.9)–(3.10) приводят к следующим выражениям для плотности биекситонов  $n$  и интенсивностей проходящих импульсов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$n = \frac{I_{i1}I_{i2}}{I_{i1}^2 + \delta^2} \left( 1 - 2e^{-I_{i1}t} \cos \delta t + e^{-2I_{i1}t} \right), \quad I_1 = I_{i1}, \quad I_2 = \frac{I_{i2}}{I_{i1}^2 + \delta^2} \left( \delta^2 - 2I_{i1}\delta e^{-I_{i1}t} \sin \delta t + I_{i1}^2 e^{-2I_{i1}t} \right). \quad (3.17)$$

Плотность биекситонов  $n$  и интенсивность слабого импульса  $I_2$  изменяются со временем, испытывая затухающие осцилляции с частотой  $\delta$ , асимптотически приближаясь к своим стационарным значениям  $n_s = I_{i1}I_{i2}/(I_{i1}^2 + \delta^2)$ ,  $I_{2s} = \delta^2 I_{i2}/(I_{i1}^2 + \delta^2)$ . Можно сделать вывод, что при  $\delta = 0$  интенсивность слабого импульса быстро убывает до нуля и пленка для него закрывается в пропускании, тогда как для сильного импульса она оказывается абсолютно прозрачной; если же  $\delta \neq 0$ , то пленка частично пропускает слабый импульс, интенсивность которого равна  $I_{2s}$ . Если амплитуды падающих импульсов слабо отличаются по величине, то при  $\delta \neq 0$  режим очень быстрого изменения во времени с полным отражением одного из импульсов также не достигается, а имеет место режим, при котором интенсивности проходящих импульсов слабо отличаются друг от друга. Отметим также, что величины скачков всех амплитуд после выключения одного из падающих импульсов по-прежнему достаточно велики.

Поведение системы при  $s \neq 0$  и  $\delta = 0$  в соответствии с системой уравнений (3.6)–(3.8) представлена на рис. 3.1с, 3.1f. Решения в этом случае также являются фазомодулированными. Видно, что в начальный момент времени амплитуды проходящих импульсов равны нулю, затем они быстро увеличиваются, достигая своих максимумов, после чего эволюция системы оказывается практически подобной эволюции при  $s = 0$  с той разницей, что при больших значениях  $s$  возникает колебательный режим изменения амплитуд проходящих импульсов. Скачки в амплитудах проходящих импульсов в момент выключения одного из падающих импульсов отсутствуют. Пики излучения, возникающие при выключении более короткого импульса, обусловлены излучательной рекомбинацией биекситонов с образованием фотонов с частотами обоих импульсов. При  $s \neq 0$  и  $\delta \neq 0$  указанные особенности временной эволюции системы становятся более сглаженными.

Из полученных результатов следует, что под действием падающих импульсов с постоянными интенсивностями  $I_{i1} = |f_{i1}|^2$  и  $I_{i2} = |f_{i2}|^2$  в системе устанавливается стационарное состояние даже без учета затухания биэкситонного уровня. Это состояние характеризуется стационарной концентрацией биэкситонов  $n_s$  и стационарными значениями интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  прошедших через пленку импульсов, которые, как видно из (3.6)–(3.8), не зависят от параметра  $s$ . Из (3.9)–(3.10) легко получить соотношения, связывающие интенсивности прошедших через пленку импульсов  $I_1, I_2$  и интенсивности падающих на нее импульсов  $I_{i1}, I_{i2}$ , а также стационарную концентрацию биэкситонов  $n_s$ :

$$I_1 \left( 1 + \frac{\delta^2 I_{i2}^2}{(\delta^2 + I_1^2)^2} \right) = I_{i1}, \quad I_2 \left( 1 + \frac{\delta^2 I_{i1}^2}{(\delta^2 + I_2^2)^2} \right) = I_{i2}, \quad (3.18)$$

$$\delta^2 n_s (1 - n_s)^2 = I_{i1} I_{i2} - \frac{(I_{i1} + I_{i2})^2 n_s}{(1 + n_s)^2}. \quad (3.19)$$

Из (3.18) видно, что как  $I_1(I_{i1}, I_{i2}, \delta)$ , так и  $I_2(I_{i1}, I_{i2}, \delta)$  при определенных условиях могут испытывать бистабильное поведение в зависимости от уровня возбуждения (рис. 3.2). При этом параметром бистабильности, например, для первого импульса является интенсивность второго падающего импульса и наоборот. Легко видеть, что гистерезисное пропускание для первого импульса в зависимости от падающей интенсивности первого импульса возникает при условии, что  $I_{i2} \geq 2\delta$ . На рис. 3.2 показана зависимость  $I_1(I_{i1})$  при различных значениях параметра  $I_{i2}$ . Видно, что увеличение интенсивности второго импульса приводит к увеличению размера петли гистерезиса. Увеличение расстройки резонанса  $\delta$  приводит к обратному эффекту. Пунктирными линиями обозначены прямые  $I_1 = I_{i1}$  и  $I_1 = I_{i1}/(1 + I_{i2}^2/\delta^2)$ , в створке которых заключены бистабильные кривые  $I_1(I_{i1})$ .

Используя уравнения (3.9)–(3.10) и линеаризуя их относительно стационарных значений  $I_1, I_2$  и  $n_s$ , легко показать, что найденные стационарные решения являются устойчивыми при выполнении неравенства

$$(I_{i1} + I_{i2})^2 \geq \delta^2 (3n_s - 1)(n_s + 1)^3, \quad (3.20)$$

где  $n_s$  определяется через  $I_{i1}, I_{i2}, \delta$  из уравнения (3.19). В случае длинных ступенчатых импульсов постоянной амплитуды неравенство (3.20) всегда выполняется.

### 3.3 Пропускание прямоугольного и гауссовского импульсов

Рассмотрим случай, когда на пленку падает прямоугольный импульс с постоянной амплитудой  $f_{i1}(\tau) = f_{i1}[1 - \Theta(\tau - \tau_1)]$ , где  $\tau_1$  время выключения первого падающего импульса, и гауссовский импульс  $f_{i2}(\tau) = f_{i2}e^{-\left(\frac{\tau}{T}\right)^2}$ , где  $f_{i2}$  – его амплитуда, а  $T$  – полуширина, с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Взаимодействие ТПП с падающими импульсами, в этом случае, будет определяться не только значением параметра  $s$ , расстройкой резонанса  $\delta$  и амплитудами падающего излучения, но и площадью перекрытия импульсов (рис. 3.3). Из рис. 3.3 видно, что, например, второй падающий импульс может проходить через пленку почти без изменения формы (рис. 3.3а), может сужаться (при этом значения амплитуд проходящих импульсов скачкообразно изменяются на величины порядка амплитуды падающего импульса или намного превышающие их) (рис. 3.3б, с), либо практически полностью отражаться (рис. 3.3д).

Для первых трех случаев (рис. 3.3а, 3.3б, 3.3с) динамика процессов в системе представляет собой следующее. Передний фронт гауссова импульса вместе с фотонами прямоугольного импульса возбуждает биэкситоны из основного состояния кристалла. Амплитуда биэкситонной волны достигает своего максимума и в этот момент времени пленка закрывается для более слабого из импульсов. Так как в этот момент амплитуда падающего гауссовского импульса больше амплитуды падающего прямоугольного, пленка полностью отражает прямоугольный импульс и просветляется для гауссовского. Следующая за этим излучательная рекомбинация биэкситонов ведет к появлению в пропускании слабого излучения с частотой  $\omega_1$  и небольшому усилению проходящего импульса на частоте  $\omega_2$ . После того, как плотность биэкситонов достигла своего минимума в момент времени,

соответствующий прохождению максимума гауссовского импульса, пленка начинает поглощать фотоны обоих импульсов, что вновь приводит к увеличению плотности биэкситонов. Когда плотность биэкситонов достигает своего второго максимума амплитуда падающего прямоугольного импульса больше амплитуды гауссовского и пленка закрывается для меньшего из них (гауссовского) и просветляется для большего (прямоугольного). Дальнейший распад биэкситонов формирует в пропускании небольшой импульс с частотой  $\omega_2$  и формирует пик излучения на частоте  $\omega_1$ . После выключения первого импульса (амплитуда второго исчезающе мала) динамика в системе прекращается. Если в этот момент в системе еще присутствовали биэкситоны, то их концентрация остается неизменной, так как отсутствуют фотоны, с которыми они могли бы взаимодействовать.

Случай на рис. 3.3d соответствует неравенству  $f_{i1} > f_{i2}$ . Динамика системы представляет собой пропускание импульса с большей амплитудой с небольшим искажением формы, связанным с генерацией и распадом биэкситонов, и слабым проходящим излучением на частоте  $\omega_2$ , обусловленным теми же процессами. Уход от условия  $\delta = 0$  приводит к увеличению амплитуды проходящего гауссовского импульса. Изменение параметра  $s$  существенно не меняет динамику процессов.

При малых  $f_{i2}$  (по сравнению с  $f_{i1}$ ) изменения амплитуд происходят плавно и в моменты формирования максимумов амплитуды биэкситонной волны пленка полностью закрывается для более слабого импульса (рис. 3.4а). Можно сказать, что ТПП под действием слабого прямоугольного импульса и сильного гауссова практически полностью отражает первый во время действия второго. Второй импульс проходит через пленку, практически не меняя форму, порождая первый максимум биэкситонной волны на переднем фронте и второй – на заднем. Когда амплитуда гауссова импульса становится меньше амплитуды прямоугольного, пленка становится прозрачной для прямоугольного импульса. При выключении прямоугольного импульса амплитуды обоих проходящих импульсов и плотность биэкситонов плавно убывают, после чего концентрация биэкситонов не меняется со временем по

вышеуказанной причине (рис. 3.4b). Учет расстройки резонанса приводит к исчезновению эффекта полного закрытия пленки для более слабого импульса, то есть уход от условия точного резонанса ведет к ослаблению взаимодействия импульсов падающего излучения с тонкой пленкой полупроводника (рис. 3.4c). Полагая  $s \neq 0$ , видим (рис. 3.4d), что основным отличием являются нулевые значения амплитуд выходящих импульсов в начальный момент времени. Однако, очень быстро амплитуда принимает значения, равные падающим, и дальнейшая динамика качественно не отличается от случая  $s = 0$ . Таким образом, при исследовании пропускания пленкой прямоугольного импульса с малой амплитудой и гауссова импульса с большей амплитудой получены результаты аналогичные результатам предыдущего параграфа: во время одновременного действия импульсов меньший из них отражается, а больший – проходит через пленку, как через абсолютно прозрачную среду; увеличение расстройки резонанса ведет к ослаблению взаимодействия импульсов с пленкой; следствием изменения параметра  $s$  является более плавный, а при больших значениях – колебательный режим изменения плотностей частиц.

Увеличение амплитуды прямоугольного импульса не меняет поведения системы, но проходящий гауссовский импульс становится при этом уже и максимумы амплитуды биекситонной волны имеют вид острых пиков (рис. 3.5a). Этим пикам соответствуют резкие изменения амплитуд обоих импульсов. Влияние расстройки резонанса и параметра  $s$  аналогично предыдущему случаю (рис. 3.5b). Учитывая, что амплитуды падающих импульсов медленно изменяются во времени, то при  $\delta \neq 0$  можно попытаться согласовать кривые на рис. 3.2 с результатами численного интегрирования для данного случая. Из рис. 3.5c видно, что в моменты времени, соответствующие максимумам амплитуды биекситонной волны происходит резкое изменение амплитуд обоих импульсов. Это соответствует перескоку с нижней ветви гистерезисной кривой на верхнюю на переднем фронте гауссовского импульса, и с верхней на нижнюю – на заднем фронте (рис. 3.5d). Увеличение полуширины гауссовского импульса замедляет изменение

его амплитуды во времени, приближая систему к стационарному случаю. На рис. 3.5e, 3.5f рассмотрен случай более широкого импульса. Видно, что в этом случае результаты численного интегрирования почти совпадают с результатами аналитических вычислений. Увеличение параметра  $s$  приводит к увеличению ширины гистерезиса (рис. 3.5g, 3.5h).

Дальнейшее увеличение амплитуды прямоугольного импульса все больше сужает проходящий гауссовский импульс (рис. 3.6a). В условиях точного резонанса  $\delta = 0$  и значении  $s = 0$  сужение происходит до тех пор, пока амплитуда падающего прямоугольного импульса не достигает некоторого критического значения, превышение которого меняет характер поведения системы (рис. 3.6b). В этом случае рост концентрации биэкситонов не ограничивается каким-то значением, а продолжается до полного истощения одного из импульсов. Если после этого оба импульса все еще падают на пленку, начинается распад биэкситонов, сопровождающийся увеличением интенсивности проходящего излучения на обеих частотах. Однако, если выключить прямоугольный импульс до того, как все биэкситоны рекомбинируют, плотность биэкситонов убывает настолько слабо, что можно считать ее постоянной, причем, изменяя время выключения прямоугольного импульса, можно контролировать концентрацию биэкситонов в пленке (рис. 3.6c). Этот механизм может быть использован для создания ячейки памяти, хранящей разряд, значение которого определяется концентрацией биэкситонов. Также данный случай может быть использован в качестве подготовительного этапа для процесса, требующего определенной плотности биэкситонов в пленке. Наличие даже небольшой расстройки резонанса исключает возможность выше описанного режима. Однако наличие расстройки резонанса позволяет сильно сузить проходящий гауссовский импульс. Чем ближе снизу значение амплитуды падающего прямоугольного импульса к значению  $f_{i2}$ , тем уже пик проходящего излучения на частоте  $\omega_2$  (рис. 3.6d). В момент пропускания узкого пика на переднем его фронте пленка резко закрывается для прямоугольного импульса, а на заднем также резко просветляется. То есть при малых  $\delta$ ,

когда пленка закрывается почти полностью, прямоугольный импульс разбивается на два более коротких импульса. Меняя время прохождения максимума гауссовского импульса и его полуширину, можно «разрезать» прямоугольный импульс на два импульса различной длительности и различным временем задержки между ними. Влияние параметра  $s$  аналогично предыдущим случаям.

### ***3.4. Пропускание двух гауссовских импульсов***

В случае, когда на пленку падает два гауссовских импульса  $f_{i1}(\tau) = f_{i1} e^{-\left(\frac{\tau}{T_1}\right)^2}$  и  $f_{i2}(\tau) = f_{i2} e^{-\left(\frac{\tau}{T_2}\right)^2}$ , где  $f_{i1,2}$  – их амплитуды, а  $T_{1,2}$  – полуширины, динамика системы также зависит от площадей импульсов и площади их перекрытия. В целом, особенности пропускания сохраняются: пленка прозрачна для импульса с большей амплитудой, а для слабого импульса она закрывается, как только амплитуда биэкситонной волны достигает своего максимума (рис. 3.7a); при определенных условиях, больший из импульсов сужается, а меньший делится на два субимпульса (рис. 3.7b); при больших значениях параметра  $s$  скачкообразное изменение амплитуд проходящих импульсов сменяется осцилляционным (рис. 3.7c, d).

При одновременном падении одинаковых импульсов рост плотности биэкситонов продолжается непрерывно до тех пор, пока амплитуда падающих импульсов не становится исчезающе малой, после чего остается неизменной (рис. 3.8a). Данный режим может быть использован для создания заданной плотности биэкситонов. Небольшая расстройка резонанса не меняет динамику процесса, но уменьшает количество частиц, что позволяет в совокупности с амплитудами падающих импульсов регулировать заполненность биэкситонного уровня (рис. 3.8b). Увеличение расстройки резонанса приводит к появлению узких пиков в форме проходящих импульсов, обусловленных колебаниями плотности биэкситонов в пленке, и остаточная плотность биэкситонов меньше, чем в случае точного резонанса (рис. 3.8c). Также возможно возникновение нерегулярных скачков в амплитудах проходящих импульсов, связанных с неустойчивостью системы

при значениях плотности биекситонов близких к единице (рис. 3.8d). В случае даже небольшой разницы в амплитудах или времени падения пиков падающих импульсов вышеуказанные особенности пропадают.

При отличном от нуля значении параметра  $s$  поведение системы также меняется. По-прежнему считаем, что на пленку одновременно падают два идентичных импульса. Тогда незначительное увеличение параметра  $s$  приводит к высокочастотным колебаниям плотности биекситонов и, следовательно, к интенсивным скачкообразным изменениям амплитуд обоих проходящих импульсов (рис. 3.9a). Дальнейшее увеличение  $s$  приводит к разделению высокочастотных колебаний по амплитудам и их затуханию по мере прохождения падающих импульсов (рис. 3.9b), также увеличивается период колебаний (рис. 3.9c). Начиная с некоторого значения, параметр  $s$  перестает влиять на форму проходящих импульсов, но возникает эффект, выражающийся в двукратной генерации пленкой достаточно мощных импульсов на обеих частотах, после того, как падающие импульсы уже прошли через пленку (рис. 3.9d). Первый отклик пленки представляет собой узкий пик с интенсивностью большей, чем у падающих импульсов, обусловленный распадом биекситонов. За время его существования в пленке пары образовавшихся фотонов успевают возбудить некоторое количество биекситонов, меньшее, чем первичная инверсия, но достаточное для генерации второго отклика – импульсов на обеих частотах с меньшей амплитудой и большей полушириной. Амплитуда, полуширина и времена задержки первого отклика и между откликами определяется величиной  $s$  (рис. 3.9e). Учет расстройки резонанса в этом случае приводит к отсутствию вышеописанного эффекта, однако присутствует осцилляционный режим изменения плотностей биекситонов и фотонов обоих проходящих импульсов (рис. 3.9f).

Если немного разнести одинаковые падающие импульсы во времени, то количество биекситонов после прохождения импульсов также будет велико, но динамика системы и особенно вид проходящих импульсов сильно изменится (рис. 3.10a). Из рисунка видно, что на начальном этапе импульс,

падающий раньше, полностью проходит через пленку с небольшим искажением переднего фронта, в то время как второй импульс пропускается только частично. При этом плотность биэкситонов быстро растет, пока не достигает некоторого значения, достигая которого скорость ее роста существенно замедляется. В этот момент пленка практически полностью закрывается для второго импульса до тех пор, пока амплитуды падающих импульсов не становятся равными. Происходит резкое, скачкообразное изменение амплитуд обоих импульсов, после чего они монотонно убывают, а амплитуда биэкситонной волны быстро растет. Небольшая расстройка резонанса ослабляет, но не исключает этот эффект (рис. 3.10b). Увеличивая ее, мы получаем уже известные нам результаты: в момент насыщения биэкситонной волны происходит резкое изменение интенсивностей проходящих импульсов, после чего пленка закрывается для слабого из них и просветляется для сильного (рис. 3.10c). Учет параметра  $s$  как вместе с расстройкой резонанса, так и без нее приводит к осцилляционному режиму изменения плотностей фотонов проходящих импульсов и биэкситонов (рис. 3.10d). Дальнейшее увеличение промежутка времени между падениями пиков импульсов приводит к уменьшению площади их перекрытия и, как следствие, к ослаблению их взаимодействия. Качественно картина соответствует динамике на рис. 3.10c до тех пор, пока площадь перекрытия импульсов не становится настолько малой, что импульсы перестают взаимодействовать с пленкой, проходя через нее без искажения формы.

Таким образом, показано, что при прохождении двух ультракоротких импульсов лазерного излучения через тонкую пленку полупроводника при учете только процесса двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла наблюдаются следующие особенности:

- в момент, когда плотность биэкситонов достигает некоторого предельного значения, пленка закрывается для более слабого падающего импульса и просветляется для более сильного;
- взаимодействие импульсов с пленкой и друг другом тем сильнее, чем ближе значения амплитуд падающих импульсов и меньше расстройка резонанса.

Полученные результаты позволяют использовать данную систему как:

- оптический переключатель, в котором пропускание одного сигнала контролируется другим;
- ячейки памяти, значение разряда в которой определяется плотностью биэкситонов и зависит от двух управляющих сигналов;
- устройство, позволяющее сужать один из падающих импульсов или делить его на субимпульсы различной длительности и временем задержки между ними.

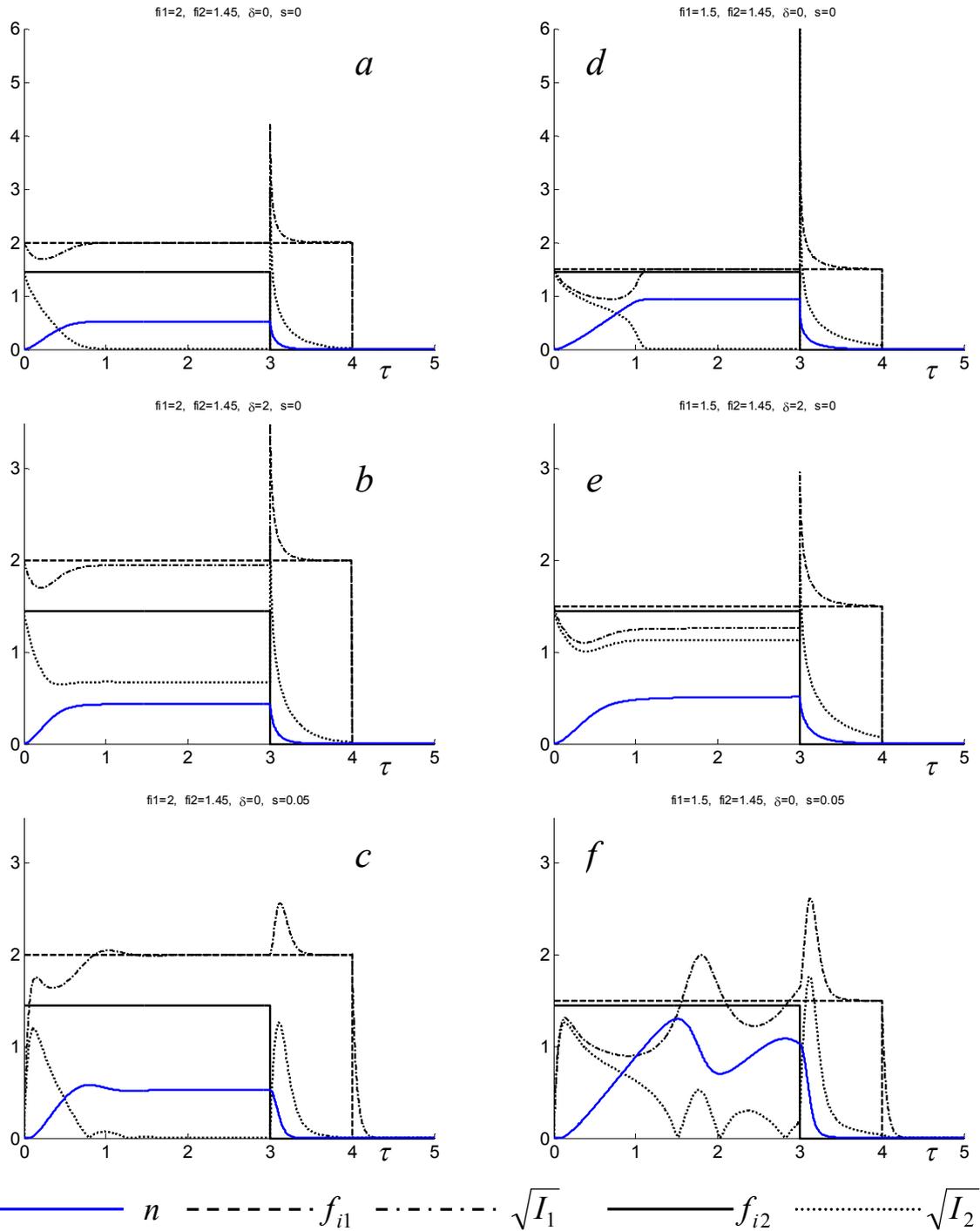


Рис. 3.1 Временная эволюция плотности биекситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при падении двух прямоугольных импульсов  $f_{i1}=2$ ,  $f_{i2}=1.45$  (*a*, *b*, *c*) и  $f_{i1}=1.5$ ,  $f_{i2}=1.45$  (*d*, *e*, *f*) при значениях параметров  $\delta=0$ ,  $s=0$  (*a*, *d*),  $\delta=2$ ,  $s=0$  (*b*, *e*),  $\delta=0$ ,  $s=0.05$  (*c*, *f*).

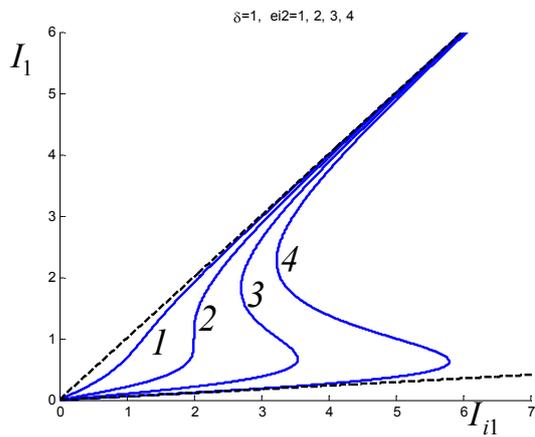


Рис. 3.2 Зависимость  $I_1(I_{i1})$  при  $\delta = 1$  и различных значениях  $I_{i2} = 1$  (1),  $I_{i2} = 2$  (2),  $I_{i2} = 3$  (3) и  $I_{i2} = 4$  (4).

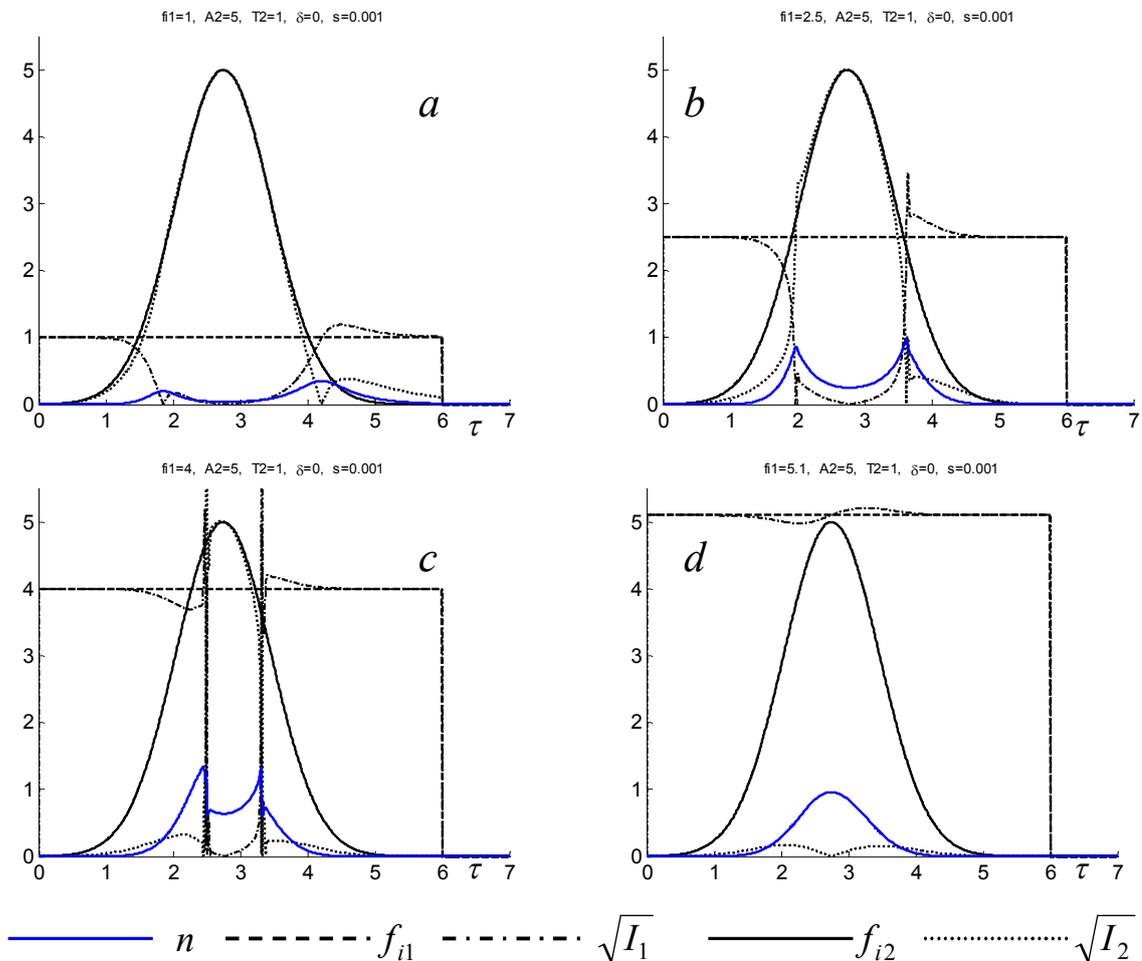


Рис. 3.3 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при падении прямоугольного  $f_{i1} = 1$  (a),  $f_{i1} = 2.5$  (b),  $f_{i1} = 4$  (c),  $f_{i1} = 5.1$  (d) и гауссовского  $f_{i2} = 5$ ,  $T = 1$  импульсов при значении параметров  $\delta = 0$ ,  $s = 0.001$ .

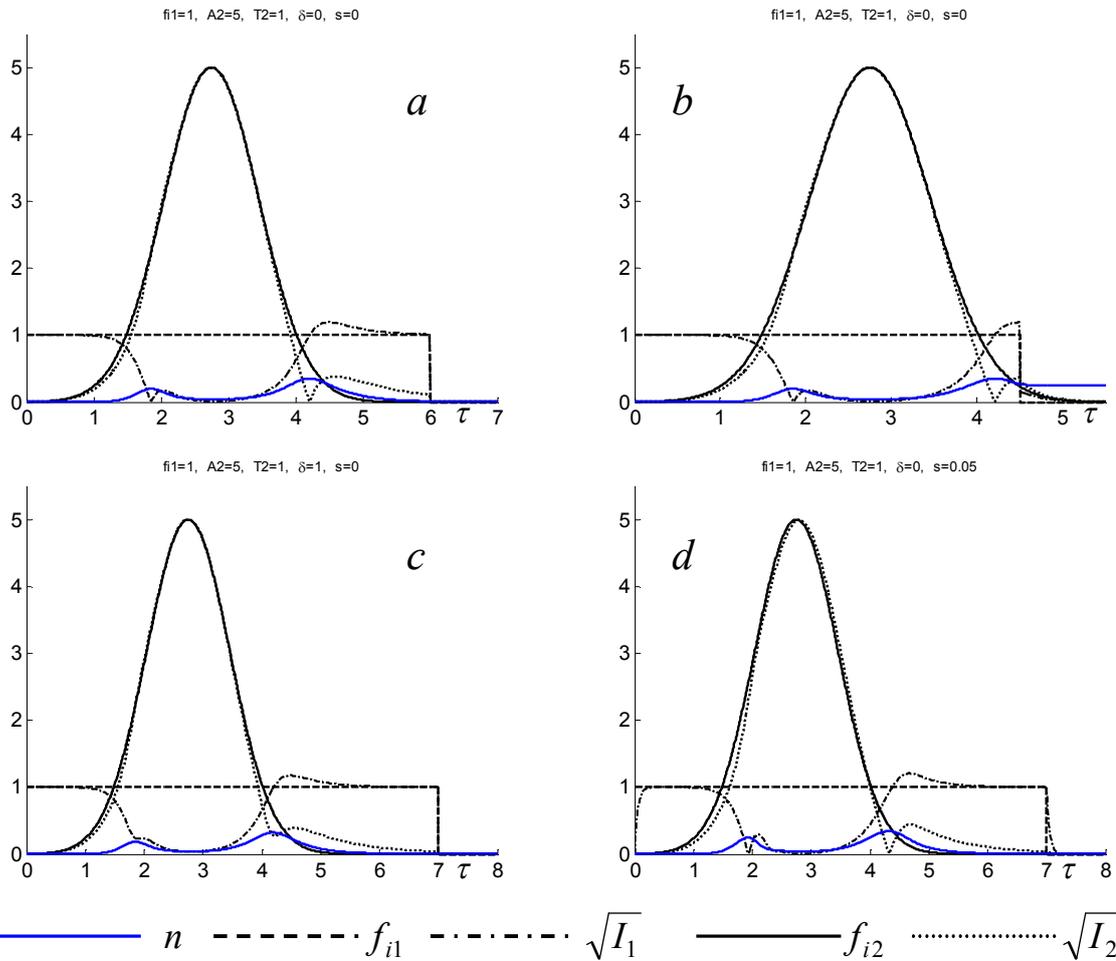


Рис. 3.4 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при падении прямоугольного  $f_{i1}=1$  и гауссовского  $f_{i2}=5$ ,  $T=1$  импульсов при значениях параметров  $\delta=0$ ,  $s=0$  (a),  $\delta=0$ ,  $s=0$  (b),  $\delta=1$ ,  $s=0$  (c),  $\delta=0$ ,  $s=0.05$  (d).

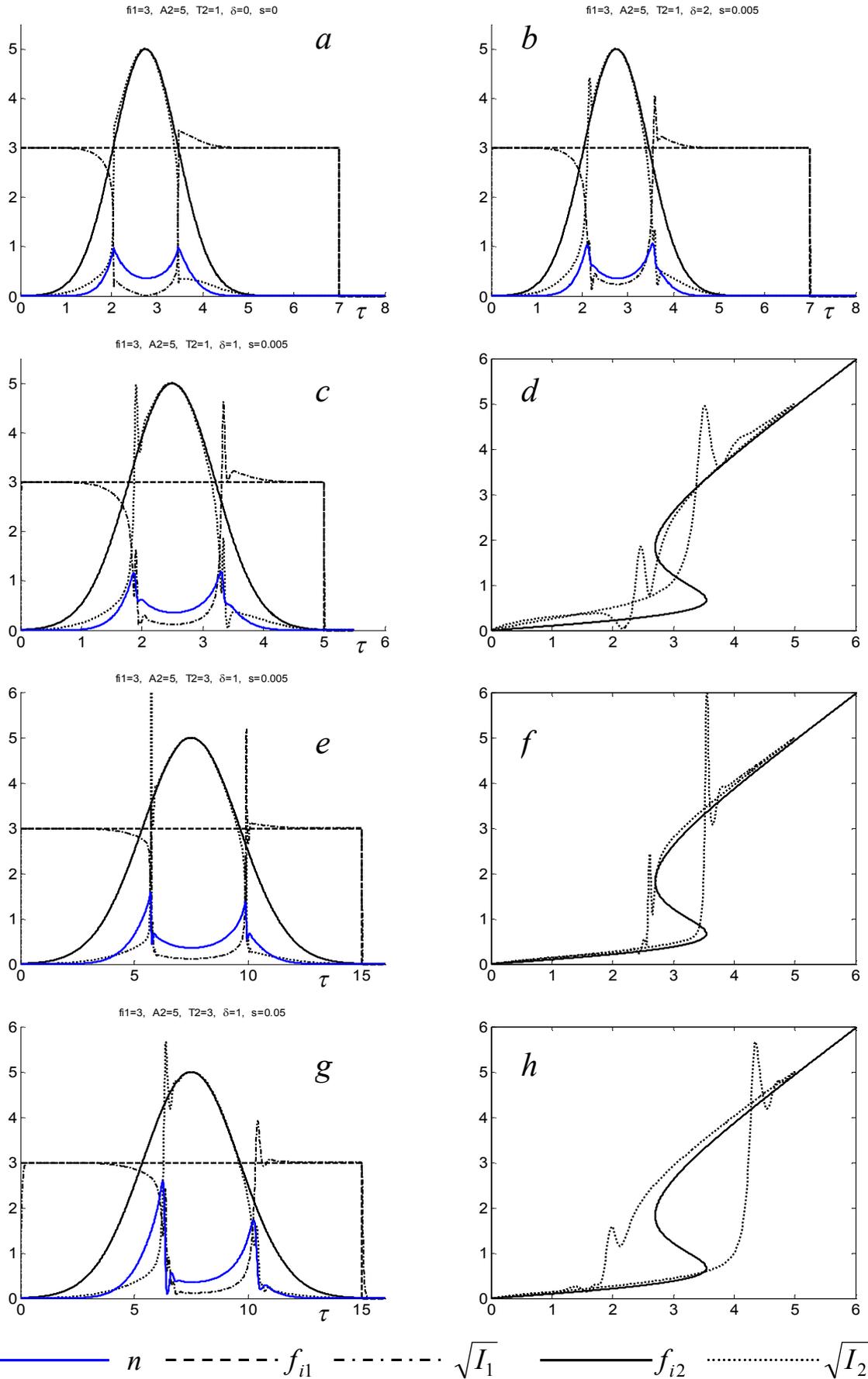


Рис. 3.5 Временная эволюция системы при падении прямоугольного  $f_{i1} = 3$  и гауссовского  $f_{i2} = 5$  импульсов, а также функции пропускания при значениях параметров  $\delta = 0, s = 0$  (a),  $\delta = 2, s = 0.005$  (b),  $\delta = 1, s = 0.005$  (c-f),  $\delta = 1, s = 0.05$  (g, h).

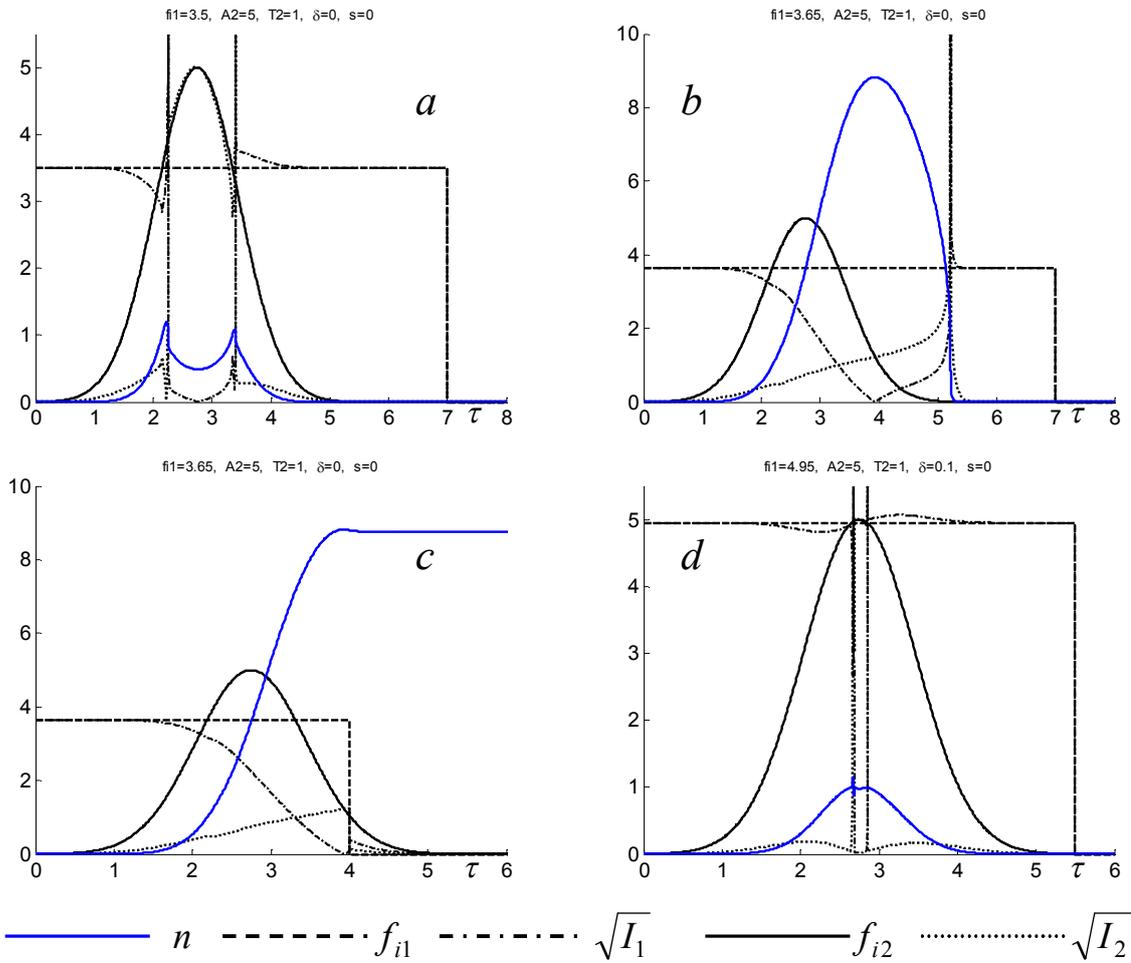


Рис. 3.6 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при падении прямоугольного и гауссовского  $f_{i2} = 5$ ,  $T = 1$  импульсов при значениях параметров  $f_{i1} = 3.5$ ,  $\delta = 0$ ,  $s = 0$  (a),  $f_{i1} = 3.65$ ,  $\delta = 0$ ,  $s = 0$  (b, c),  $f_{i1} = 4.95$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $s = 0$  (d).

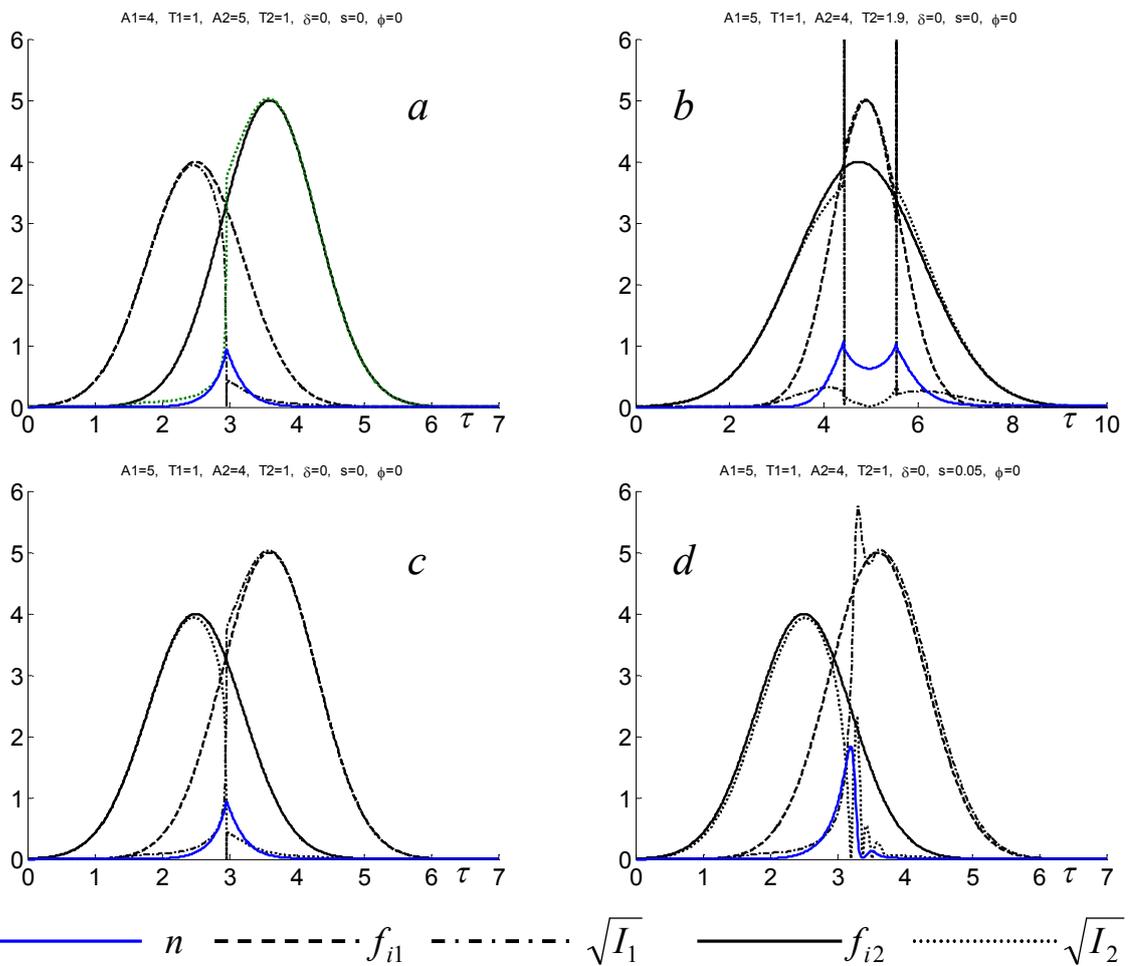


Рис. 3.7 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при падении двух гауссовских  $f_{i1} = 5$ ,  $f_{i2} = 4$  импульсов при различных значениях параметров  $\delta$ ,  $s$  и  $T$ .

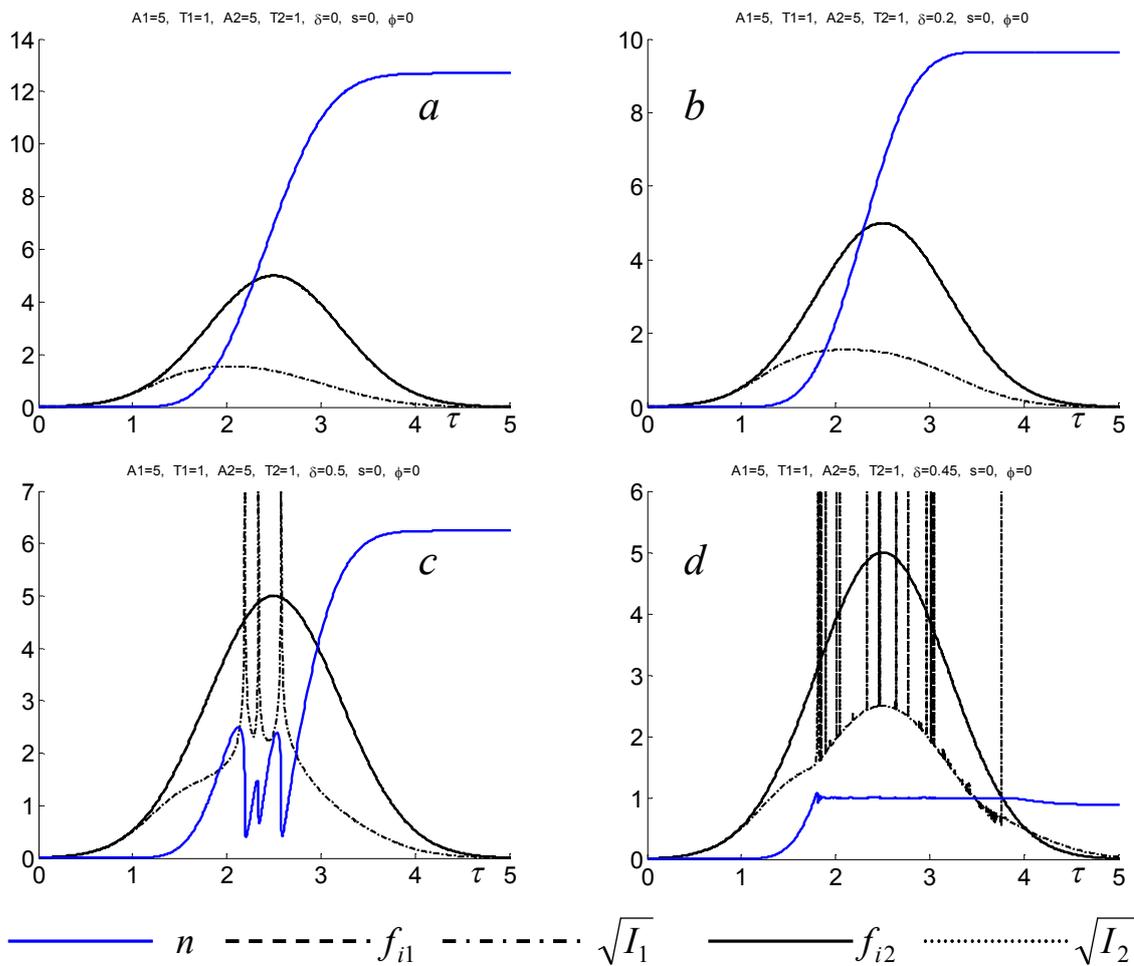


Рис. 3.8 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при одновременном падении двух идентичных гауссовских импульсов при  $s=0$  и различных значениях параметра  $\delta = 0$  (a),  $\delta = 0.2$  (b),  $\delta = 0.5$  (c),  $\delta = 0.45$  (d).

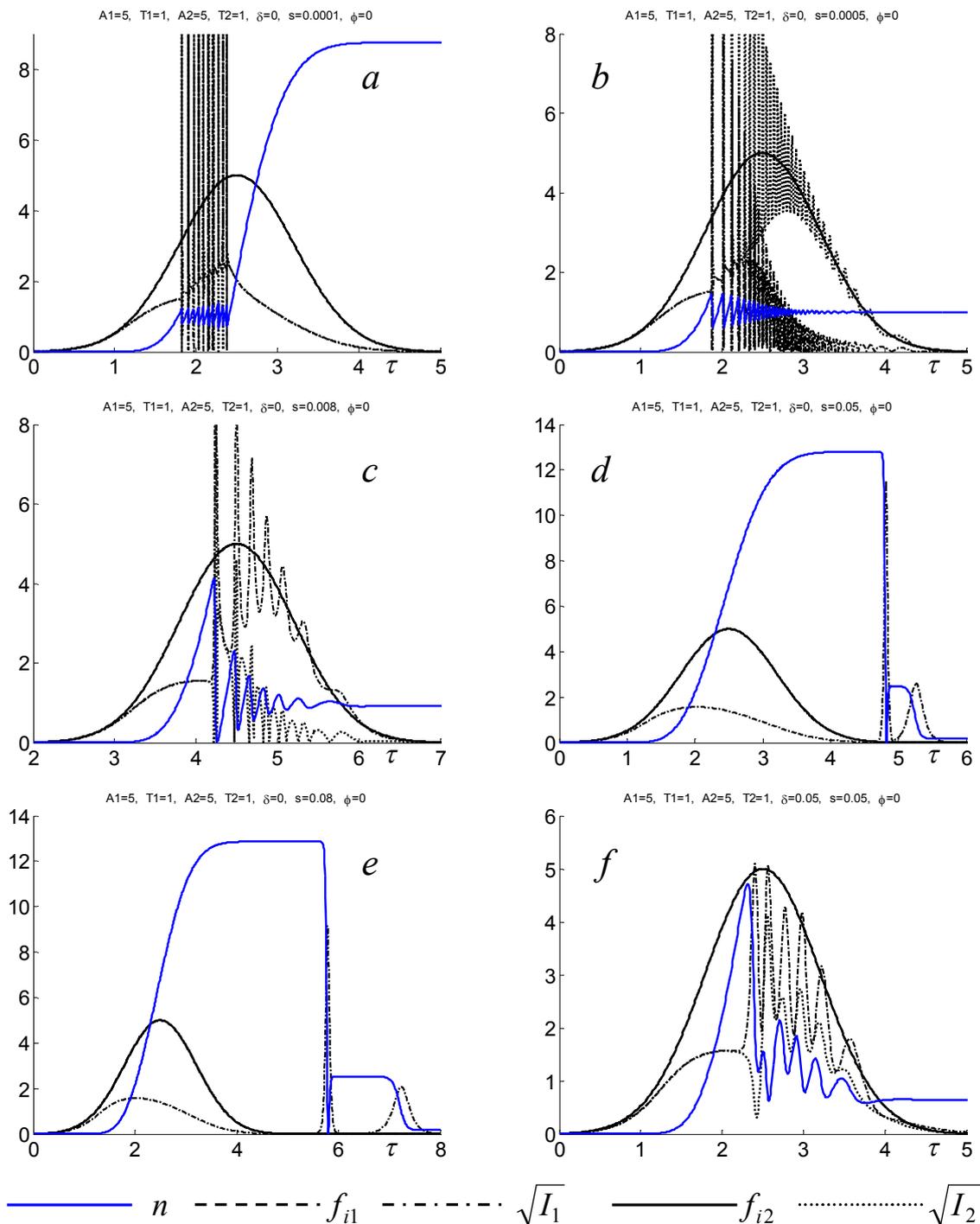


Рис. 3.9 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при одновременном падении двух идентичных гауссовских импульсов при различных значениях параметров  $\delta=0$   $s=0.0001$  (a),  $\delta=0$   $s=0.0005$  (b),  $\delta=0$   $s=0.008$  (c),  $\delta=0$   $s=0.05$  (d),  $\delta=0$   $s=0.08$  (e),  $\delta=0.05$   $s=0.05$  (f).

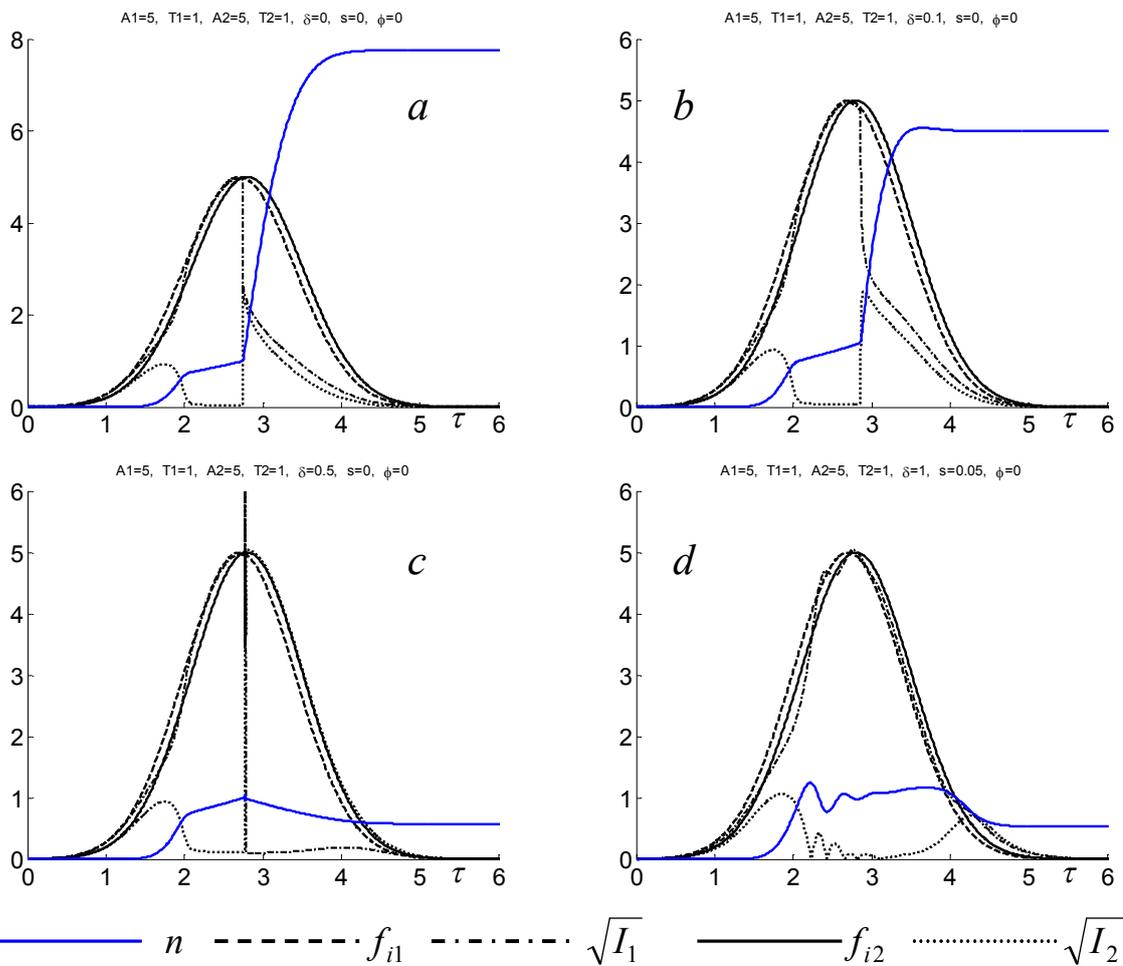


Рис. 3.10 Временная эволюция плотности биэкситонов и модулей амплитуд проходящих через ТПП импульсов при падении двух идентичных гауссовских импульсов при различных значениях параметров  $\delta = 0$   $s = 0$  (a),  $\delta = 0.1$   $s = 0$  (b),  $\delta = 0.5$   $s = 0$  (c),  $\delta = 1$   $s = 0.05$  (d).

## Глава 4. Явление оптической нутации в системе экситонов и биэкситонов большой плотности

### 4.1 Постановка задачи. Основные уравнения.

Представляем результаты теоретического исследования явления оптической нутации в системе экситонов, фотонов и биэкситонов в полупроводнике типа CuCl, в условиях, когда на кристалл падают два УКИ резонансного лазерного излучения. При этом предполагается, что фотоны первого импульса с частотой  $\omega_1$  попарно находятся в резонансе с частотой  $\Omega_0$  перехода из основного состояния кристалла в биэкситонное состояние ( $2\omega_1 = \Omega_0$ ), так что они ответственны за двухфотонную генерацию биэкситонов (рис. 4.1), аналогично пробному импульсу в [104]. Фотоны второго УКИ с частотой  $\omega_2$  находятся в резонансе с частотой  $\Omega_0 - \omega_0$  перехода в области М-полосы поглощения ( $\omega_2 = \Omega_0 - \omega_0$ , где  $\omega_0$  - частота экситонного перехода). Они перемешивают экситонное и биэкситонное состояния, обуславливая возникновение оптического Штарк-эффекта, смещение и расщепление энергетических уровней экситонов и биэкситонов с ростом уровня возбуждения кристалла. В силу того, что энергия связи биэкситона  $I_m$  в кристаллах CuCl достаточно велика (30-40 meV [56, 60, 61]), то фотоны с частотой  $\omega_1$  могут только возбуждать биэкситоны, но не могут участвовать в экситон-биэкситонной конверсии из-за большой расстройки резонанса по отношению к частоте перехода  $\Omega_0 - \omega_0$  в области М-полосы. Точно так же из-за большой расстройки резонанса два фотона частоты  $\omega_2$  не могут возбуждать биэкситоны из основного состояния кристалла (рис. 4.1). Предполагается, что длительности обоих импульсов на много меньше времени релаксации биэкситонов и их спектральные ширины меньше энергии связи биэкситона. В этих условиях стационарное состояние не успевает установиться за время действия импульсов и может иметь место оптическая нутация в системе когерентных экситонов, биэкситонов и

фотонов. При этом можно не учитывать процессы релаксации экситонов и биэкситонов.

Гамильтониан  $H_{\text{int}}$ , описывающий взаимодействие фотонов обоих импульсов с экситонами и биэкситонами, имеет вид:

$$H_{\text{int}} = -\hbar\mu(\hat{b}^+\hat{c}_1\hat{c}_1 + \hat{c}_1^+\hat{c}_1\hat{b}) - \hbar\sigma(\hat{b}^+\hat{a}\hat{c}_2 + \hat{c}_2^+\hat{a}\hat{b}), \quad (4.1)$$

где  $\mu$  и  $\sigma$  – константы двухфотонного возбуждения биэкситонов и оптической экситон-биэкситонной конверсии соответственно [56, 60, 61],  $\hat{c}_1(\hat{c}_2)$  – оператор уничтожения фотона с частотой  $\omega_1(\omega_2)$ ,  $\hat{a}(\hat{b})$  – оператор уничтожения экситона (биэкситона). Используя (4.1), легко получить гайзенберговские уравнения движения для операторов  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$ . Далее используем приближение среднего поля (mean field approximation), в рамках которого средние значения от операторов, которые называем амплитудами материального и электромагнитного полей, отличны от нуля:  $\langle\hat{a}\rangle \equiv a$ ,  $\langle\hat{b}\rangle \equiv b$ ,  $\langle\hat{c}_1\rangle \equiv c_1$  и  $\langle\hat{c}_2\rangle \equiv c_2$  [105]. Для этих амплитуд получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= -\sigma c_2^* b, \\ i\dot{b} &= -\mu c_1 c_1 - \sigma a c_2, \\ i\dot{c}_1 &= -2\mu c_1^* b, \\ i\dot{c}_2 &= -\sigma a^* b. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В приближении среднего поля среднее значение от произведения нескольких операторов считается равным произведению соответствующих амплитуд [105]. Отметим, что система (4.2) получена в предположении точного резонанса:  $2\omega_1 = \Omega_0$ ,  $\omega_2 = \Omega_0 - \omega_0$ . Эту систему необходимо дополнить начальными условиями:  $a|_{t=0} = a_0$ ,  $b|_{t=0} = b_0$ ,  $c_1|_{t=0} = c_{10}$ ,  $c_2|_{t=0} = c_{20}$ . Из (4.2) видно, что оптическая экситон-биэкситонная нутация под действием фотонов двух импульсов является существенно нелинейной по амплитудам полей.

Будем искать решение системы уравнений (4.2) в виде:  $a = \sqrt{n}e^{i\varphi}$ ,  $b = \sqrt{N}e^{i\psi}$ ,  $c_1 = \sqrt{f_1}e^{i\varphi_1}$ ,  $c_2 = \sqrt{f_2}e^{i\varphi_2}$ , где  $n$ ,  $N$ ,  $f_1$  и  $f_2$  –

плотности частиц. Тогда легко получить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений для плотностей частиц и разностей фаз  $\theta_1 = \Psi - 2\varphi_1$ ,  $\theta_2 = \Psi - \varphi - \varphi_2$ :

$$\begin{aligned}
\dot{f}_1 &= -4\mu f_1 \sqrt{N} \sin \theta_1, \\
\dot{f}_2 &= -2\sigma \sqrt{N n f_2} \sin \theta_2, \\
\dot{n} &= -2\sigma \sqrt{N n f_2} \sin \theta_2, \\
\dot{N} &= 2\mu f_1 \sqrt{N} \sin \theta_1 + 2\sigma \sqrt{N n f_2} \sin \theta_2, \\
\dot{\theta}_1 &= \mu \frac{f_1 - 4N}{\sqrt{N}} \cos \theta_1 + \sigma \sqrt{\frac{n f_2}{N}} \cos \theta_2, \\
\dot{\theta}_2 &= \mu \frac{f_1}{\sqrt{N}} \cos \theta_1 - \sigma \frac{N(n + f_2) - n f_2}{\sqrt{N n f_2}} \cos \theta_2.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.3) получаем два независимых интеграла движения:

$$\begin{aligned}
n - f_2 &= n_0 - f_{20}, \\
N + f_2 + \frac{1}{2} f_1 &= N_0 + f_{20} + \frac{1}{2} f_{10},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где  $f_{10}$ ,  $f_{20}$ ,  $n_0$  и  $N_0$  - концентрации фотонов, экситонов и биэкситонов в начальный момент времени ( $t=0$ ).

#### 4.2 Аналитические решения.

Общее аналитическое решение системы уравнений (4.3) получить не удается. Поэтому далее мы рассмотрим ряд частных случаев, определяемых значениями параметра  $\sigma/\mu$  и начальными плотностями частиц, для которых удастся найти аналитические решения.

Предположим, что в начальный момент времени в системе существуют фотоны обоих сортов с концентрациями  $f_{10}$ ,  $f_{20}$  и экситоны с концентрацией  $n_0$ , а биэкситоны отсутствуют ( $N_0 = 0$ ). Если  $\sigma = 0$  либо  $\mu = 0$ , то решения системы (4.3) описывают либо только двухфотонную нутацию биэкситонов, либо оптическую нутацию в области М-полосы, обусловленной оптической экситон-биэкситонной конверсией. В самом деле, полагая  $\sigma = 0$ , а  $\mu \neq 0$ , находим, что  $2N + f_1 = f_{10}$ ,  $f_2 = f_{20}$ ,  $n = n_0$  и

$$f_1 = f_{10} \operatorname{sech}^2(\mu \sqrt{2f_{10}} t). \quad (4.5)$$

Следовательно, в этом случае все фотоны с частотой  $\omega_1$  полностью попарно превращаются в биэкситоны, чем процесс эволюции и завершается. Образовавшиеся биэкситоны не распадаются, так как для их индуцированного двухфотонного распада отсутствуют фотоны. Наличие в начальный момент биэкситонов наряду с фотонами не меняет общего хода и направления эволюции.

В случае, если  $\mu = 0$ , а  $\sigma \neq 0$ , имеются два интеграла движения  $N + f_2 = f_{20}$  и  $N + n = n_0$  и

$$f_2 = f_{20} \operatorname{dn}^2(\sigma \sqrt{f_{20}} t), \quad k = \sqrt{n_0/f_{20}}, \quad (4.6a)$$

при  $n_0 < f_{20}$  и

$$f_2 = f_{20} \operatorname{cn}^2(\sigma \sqrt{n_0} t), \quad k = \sqrt{f_{20}/n_0}, \quad (4.6b)$$

при  $n_0 > f_{20}$ , где  $\operatorname{dn}(x)$  и  $\operatorname{cn}(x)$  – эллиптические функции Якоби [106] с модулем  $k$ . Отсюда видно, что при  $f_{20} \neq n_0$  оптическая нутация в области М-полосы представляет собой процесс периодического изменения плотностей фотонов  $f_2$ , экситонов  $n$  и биэкситонов  $N$ . При этом период нутации  $T$  определяется большей из начальных плотностей экситонов и фотонов:  $T = 2K(k)/(\sigma \sqrt{f_{20}})$  при  $n_0 < f_{20}$  и  $T = 2K(k)/(\sigma \sqrt{n_0})$  при  $n_0 > f_{20}$ , где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода [106]. Если  $f_{20} = n_0$ , то

$$f_2 = f_{20} \operatorname{sech}^2(\sigma \sqrt{f_{20}} t), \quad (4.6c)$$

т.е. имеет место аperiodический режим связывания исходных экситонов и фотонов в биэкситоны, которые не могут распасться из-за отсутствия индуцирующих распад партнеров. Таким образом, при изменении начальных плотностей фотонов  $f_{20}$  и экситонов  $n_0$  период осцилляций плотностей частиц непрерывно изменяется и растет по мере приближения к точке, где  $f_{20} = n_0$ .

Найдем решения системы (4.3) в условиях, когда существует конкуренция обоих квантовых переходов. Исключая из рассмотрения бесконечную фазовую модуляцию, из последних двух уравнений (4.3) при

$N_0 = 0$  получаем  $\theta_1 = \pm(2k+1)\pi/2$  и  $\theta_2 = \pm(2n+1)\pi/2$  ( $k, n=0, 1, 2, \dots$ ).

Тогда из первых двух уравнений (4.3) легко получить еще один интеграл движения

$$f_2 = \frac{1}{4} \left\{ \left( \sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0} \right) \left( \frac{f_1}{f_{10}} \right)^{\frac{\sigma}{4\mu}} + \left( \sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0} \right) \left( \frac{f_{10}}{f_1} \right)^{\frac{\sigma}{4\mu}} \right\}^2 \quad (4.7a)$$

при  $(\dot{f}_1 \dot{f}_2)|_{t=0} < 0$  либо

$$f_2 = \frac{1}{4} \left\{ \left( \sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0} \right) \left( \frac{f_1}{f_{10}} \right)^{\frac{\sigma}{4\mu}} + \left( \sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0} \right) \left( \frac{f_{10}}{f_1} \right)^{\frac{\sigma}{4\mu}} \right\}^2 \quad (4.7b)$$

при  $(\dot{f}_1 \dot{f}_2)|_{t=0} > 0$ . Из физических соображений ясно, что в отсутствие биэкситонов при  $t = 0$  имеют место несколько режимов временной эволюции системы. Если  $n_0 = 0$ , то в начальный момент времени возможна эволюция только с уменьшением плотности фотонов  $f_1$  и увеличением плотности фотонов  $f_2$  (и экситонов  $n$ ). Одновременное увеличение или уменьшение плотностей фотонов обоих импульсов невозможно. Невозможна также эволюция после начального момента времени с уменьшением плотности фотонов  $f_2$ , так как для оптической конверсии необходимо иметь и экситоны. Таким образом, при  $n_0 = 0$  в начальный момент времени эволюция происходит в соответствии с неравенством  $(\dot{f}_1 \dot{f}_2)|_{t=0} < 0$  и для ее описания следует использовать выражение (4.7a). В свою очередь это неравенство эквивалентно неравенству  $\theta_{10} \theta_{20} < 0$ , накладываемому на начальные разности фаз (например,  $\theta_{10} = \pi/2$ , а  $\theta_{20} = -\pi/2$ ). Процесс эволюции в этом случае сводится к противофазным изменениям плотностей фотонов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Если  $n_0 \neq 0$ , то из физических соображений ясно, что временная эволюция системы на начальной стадии ( $t \geq 0$ ) может состоять как в одновременном синфазном уменьшении плотностей фотонов  $f_1$  и  $f_2$  (и экситонов  $n$ ), так и в противофазном изменении плотностей фотонов  $f_1$  и  $f_2$ .

Однако также ясно, что на начальном этапе невозможна эволюция, сопровождающаяся синфазным увеличением плотностей обоих фотонов. Следовательно, при  $n_0 \neq 0$  на начальном этапе возможна как противофазная эволюция системы  $((\dot{f}_1 \dot{f}_2)_{|t=0} < 0$ , что возможно как при  $\theta_{10} = \pi/2$ ,  $\theta_{20} = -\pi/2$ , так и при  $\theta_{10} = -\pi/2$ ,  $\theta_{20} = \pi/2$ ), так и синфазная  $((\dot{f}_1 \dot{f}_2)_{|t=0} > 0$ , что возможно при  $\theta_{10} = \pi/2$  и  $\theta_{20} = \pi/2$ ). Отсюда видно, что начальная разность фаз существенно определяет характер эволюции системы. Значимость фазового контроля физических процессов отмечалась для оптической нутации, для рамановской атомно-молекулярной конверсии в условиях бозе-эйнштейновской конденсации [107].

Имея три независимых интеграла движения для плотностей частиц, можно получить нелинейное дифференциальное уравнение для одной из функций, например,  $f_1(t)$ . Полагая, что  $\theta_{10}\theta_{20} < 0$  и используя (4.7а), получаем

$$\frac{df_1}{dt} = \pm 2\sqrt{2}\mu f_1 \times \left\{ f_{10} + f_{20} + n_0 - f_1 - \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2 \left( \frac{f_1}{f_{10}} \right)^{\frac{\sigma}{2\mu}} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2 \left( \frac{f_{10}}{f_1} \right)^{\frac{\sigma}{2\mu}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.8)$$

В пределе  $\sigma/\mu \ll 1$  из (4.8) можно получить приближенное решение вида

$$f_1 = f_{10} \operatorname{dn}^2 \left( \mu \sqrt{2 \left[ f_{10} + \frac{\sigma}{4\mu} (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2 \right]} t \right), \quad (4.9)$$

где  $k$  – модуль эллиптической функции  $\operatorname{dn}(x)$  [106], который определяется выражением  $k^2 = 1 - (\sigma/4\mu)(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2 / f_{10}$ . Колебания плотности фотонов  $f_1(t)$  происходят в пределах от  $f_{10}$  до близкой к нулю минимальной плотности  $f_{1\min} = (\sigma/4\mu)(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2$ . Период колебаний  $T$  определяется выражением  $T = 2K(k)/(\mu\sqrt{2f_{10}})$ . Полагая здесь  $\sigma = 0$ , получаем снова решение (4.5), а период колебаний  $T$  обращается в бесконечность по закону

$T = \frac{\sqrt{2}}{\mu\sqrt{f_{10}}} \ln \frac{8\sqrt{\mu/\sigma}\sqrt{f_{10}}}{\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0}}$ , т.е. эволюция трансформируется из периодической в аperiodическую.

Для произвольных значений параметра  $\sigma/\mu$  решение уравнения (4.8) формально можно представить в квадратурах в виде гиперэллиптической функции. Для ряда конкретных значений этого параметра удастся получить решения через известные эллиптические функции.

Рассмотрим решения при  $\sigma/\mu = 2$ . В этом случае конкретный вид решения зависит от соотношения между начальными плотностями частиц  $f_{10}$ ,  $f_{20}$  и  $n_0$ . Если выполняется неравенство  $f_{10} > 2\sqrt{f_{20}n_0}$ , то решение уравнения (4.6) имеет вид

$$f_1 = f_{10} \operatorname{dn}^2 \left( \mu \sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} t \right), \quad (4.10)$$

где модуль  $k$  эллиптической функции и период  $T$  колебаний плотности  $f_1(t)$  определяются выражениями:

$$k^2 = 1 - \frac{f_m}{f_{10}}, \quad T = 2K(k) / \left( \mu \sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} \right), \quad (4.11)$$

$f_m$  – минимальное значение, которое принимает функция  $f_1(t)$  в процессе эволюции

$$f_m = f_{10} \frac{(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2}{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2}. \quad (4.12)$$

Используя полученные интегралы движения, для плотности фотонов  $f_2(t)$  и биэкситонов  $N(t)$  находим

$$f_2 = \frac{(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2}{4} \frac{\left\{ 1 + \frac{\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0}}{\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0}} \operatorname{dn}^2 \left( \mu \sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} t \right) \right\}^2}{\operatorname{dn}^2 \left( \mu \sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} t \right)}, \quad (4.13)$$

$$N = \frac{(f_{10} - 2\sqrt{f_{20}n_0})^2}{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} \times \frac{\operatorname{sn}^2\left(\mu\sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} t\right) \operatorname{cn}^2\left(\mu\sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} t\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\mu\sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2} t\right)}. \quad (4.14)$$

При  $f_{10} < 2\sqrt{f_{20}n_0}$  решение для функции  $f_1(t)$  имеет вид:

$$f_1 = \frac{f_{10}}{\operatorname{dn}^2\left(\mu(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})t\right)}, \quad (4.15)$$

где модуль  $k$  и период  $T$  равны:

$$k^2 = 1 - \frac{f_{10}}{f_m}, \quad T = 2K(k)/\left(\mu(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})\right), \quad (4.16)$$

а  $f_m$  по-прежнему выражается формулой (4.12), но теперь эта величина имеет смысл максимального значения функции  $f_1(t)$ , которую она принимает в процессе эволюции.

Наконец, при  $f_{10} = 2\sqrt{f_{20}n_0}$  находим, что решение уравнения (4.8) имеет тривиальный вид:

$$f_1(t) = f_{10}, \quad (4.17)$$

т.е. система не эволюционирует, она покоится. Этот же результат следует и из решений (4.10) и (4.15). Кроме того, в этом случае  $f_m = f_{10}$ . Можно утверждать, что плотность фотонов  $f_1(t)$  осциллирует с предельно малой, нулевой, амплитудой, но с отличным от нуля периодом  $T_0$ , равным

$$T_0 = \pi/(\mu(\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})). \quad (4.18)$$

Период  $T_0$  монотонно убывает с ростом плотностей  $f_{20}$  и  $n_0$ .

Из (4.10) и (4.15) следует, что амплитуда колебаний  $\Delta f_1$  функции  $f_1(t)$  определяется выражением

$$\Delta f_1/f_{10} = 2|f_{10} - 2\sqrt{f_{20}n_0}|/(2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2). \quad (4.19)$$

На рис. 4.2 представлена временная эволюция плотности фотонов  $f_1(t)$  при различных значениях плотностей  $f_{20}$  и  $n_0$ . Видно, что плотность

фотонов  $f_1(t)$  периодически изменяется со временем в пределах от  $f_{10}$  до  $f_m$ . Сразу же после начального момента времени плотность фотонов  $f_1(t)$  убывает (возрастает) при  $f_{10} > 2\sqrt{f_{20}n_0}$  ( $f_{10} < 2\sqrt{f_{20}n_0}$ ). Поверхность, являющаяся огибающей всех максимумов функций  $f_1/f_{10}$  при  $f_{10} > 2\sqrt{f_{20}n_0}$  и всех минимумов при  $f_{10} < 2\sqrt{f_{20}n_0}$ , есть плотность с координатой  $f_1/f_{10} = 1$ . Текущие значения функции  $f_1(t)/f_{10}$  и ее минимумов (максимумов) при  $f_{10} > 2\sqrt{f_{20}n_0}$  ( $f_{10} < 2\sqrt{f_{20}n_0}$ ) располагаются ниже (выше) единицы, т.е. ниже (выше) огибающей плоскости. Из рис. 4.2 также видно, что амплитуда колебаний монотонно растет при отходе от условия  $f_{10} = 2\sqrt{f_{20}n_0}$ . При  $f_{10} = 2\sqrt{f_{20}n_0}$  все максимумы функции  $f_1(t)$  превращаются в минимумы и наоборот.

На рис. 4.3 представлена зависимость амплитуды колебаний  $\Delta f_1/f_{10}$  от отношения начальных плотностей  $x = f_{20}/f_{10}$  и  $y = n_0/f_{10}$ . Видно, что наибольшее значение амплитуды колебаний достигается на прямой  $x = y$  ( $f_{20} = n_0$ ), где  $\Delta f_1/f_{10} = |1 - 2x|/2$ . На гиперболе  $xy = 1/4$  амплитуда колебаний равна нулю.

На рис. 4.4 представлена временная эволюция плотности фотонов  $f_2(t)$  и биэкситонов  $N(t)$  при различных значениях параметров  $f_{10}$ ,  $f_{20}$  и  $n_0$  при  $\sigma/\mu = 2$ . Видно, что в течение промежутков времени, когда плотность фотонов  $f_1(t)$  убывает при  $f_{10} > 2\sqrt{f_{20}n_0}$  (растет при  $f_{10} < 2\sqrt{f_{20}n_0}$ ) плотность фотонов  $f_2(t)$  изменяется в противофазе. При этом максимальное при  $f_{10} > 2\sqrt{f_{20}n_0}$  (минимальное при  $f_{10} < 2\sqrt{f_{20}n_0}$ ) значение плотности фотонов  $f_2$  равно  $f_{2m} = (f_{10} + f_{20} - \sqrt{f_{20}n_0})^2 / [2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2]$ . Амплитуда колебаний  $\Delta f_2$  функции  $f_2(t)$  определяется выражением

$$\frac{\Delta f_2}{f_{10}} = \frac{|f_{10} - 2\sqrt{f_{20}n_0}|}{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2}. \quad (4.20)$$

Отсюда видно, что амплитуда  $\Delta f_2$ , также как и  $\Delta f_1$ , обращается в нуль при  $f_{10} = 2\sqrt{f_{20}n_0}$ .

Синхронно с функцией  $f_2(t)$  изменяется и функция  $n(t)$ .

Что касается плотности биэкситонов  $N(t)$ , то она сначала растет, начиная с нуля при  $t=0$ , достигает своего максимума через четверть периода, затем убывает, так что в момент времени  $t=T/2$  она снова оказывается равной нулю, как и в начальный момент времени. В течение второй половины периода функция  $N(t)$  повторяет свое поведение, которое она имела в течение первой половины периода. Таким образом, функция  $N(t)$  также является осциллирующей, но ее период в два раза меньше периода осцилляций функций  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $n(t)$ . При  $f_{10} = 2\sqrt{f_{20}n_0}$  колебания функции  $N(t)$  также отсутствуют.

Используя полученные решения, обсудим три частных случая, связанных с начальными плотностями  $f_{20}$  и  $n_0$ .

Пусть  $n_0 = 0$ . Тогда, при  $f_{10} \neq 0$  и  $f_{20} \neq 0$  на начальном этапе эволюции физически возможно только уменьшение плотности фотонов на частоте  $\omega_1$  и увеличение плотности фотонов  $f_2$ . В самом деле, из (4.10) получаем

$$f_1 = f_{10} \operatorname{dn}^2(\mu\sqrt{2f_{10} + f_{20}} t), \quad k^2 = 2f_{10}/(2f_{10} + f_{20}), \quad (4.21)$$

а период колебаний  $T$  равен

$$T = 2K(k)/(\mu\sqrt{2f_{10} + f_{20}}). \quad (4.22)$$

Отсюда видно, что по-прежнему имеет место периодическое изменение плотностей фотонов, экситонов и биэкситонов. Минимальная плотность фотонов  $f_m$  с частотой  $\omega_1$ , которую они достигают в процессе колебаний, равна  $f_m = f_{10}f_{20}/(2f_{10} + f_{20})$ . С ростом  $f_{10}$  либо  $f_{20}$  плотность  $f_m$  монотонно растет, т.е. все меньшая доля исходных фотонов с плотностью  $f_{10}$  участвует в их конверсии в биэкситоны и фотоны частоты  $\omega_2$ .

С ростом  $f_{10}$  период колебаний  $T$  сначала убывает, но при  $f_{10} \gg f_{20}$ , достигнув некоторого минимума, он начинает быстро расти. С ростом  $f_{20}$  период колебаний монотонно убывает.

Если положить  $f_{20} = 0$ , но  $n_0 \neq 0$  то решения совпадают с (4.21) и (4.22) с заменой везде  $f_{20}$  на  $n_0$ .

Наконец, если плотность фотонов второго импульса равна плотности экситонов в начальный момент  $f_{20} = n_0$ , то решение для  $f_1(t)$  имеет вид

$$f_1 = f_{10} \operatorname{dn}^2(\mu\sqrt{2f_{10}} t), \quad k^2 = 1 - 2f_{20}/f_{10}, \quad T = 2K(k)/(\mu\sqrt{2f_{10}}), \quad (4.23)$$

при  $f_{10} > 2f_{20}$  и

$$f_1 = \frac{f_{10}}{\operatorname{dn}^2(2\mu\sqrt{f_{20}} t)}, \quad k^2 = 1 - \frac{f_{10}}{2f_{20}}, \quad T = K(k)/(\mu\sqrt{f_{20}}) \quad (4.24)$$

при  $f_{10} < 2f_{20}$ . Амплитуда колебаний  $\Delta f_1 = |f_{10} - 2f_{20}|$ . При  $f_{10} = 2f_{20}$  функция  $f_1(t) = f_{10} = \text{const}$ , амплитуда колебаний обращается в нуль, а период колебаний оказывается равным  $T_0 = \pi/(2\mu\sqrt{f_{20}})$ . Используя (4.7а), легко убедиться, что функция  $f_2(t)$  периодически изменяется со временем в противофазе по отношению к  $f_1(t)$ . Чрезвычайно простые и наглядные выражения (4.23) и (4.24) убедительно подтверждают все отмеченные ранее особенности временной эволюции плотностей частиц для других соотношений параметров.

Рассмотрим теперь решения при  $\sigma/\mu = 2$  и  $(\dot{f}_1 \dot{f}_2)_{t=0} > 0$  (рис. 4.5). В этом случае как  $f_1(t)$ , так и  $f_2(t)$  изменяются синфазно. Это обусловлено конкретным выбором начальных разностей фаз  $\theta_{10}$  и  $\theta_{20}$ , которые считаются равными  $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$ . Из физических соображений ясно, что начальные фазы  $\theta_{10}$  и  $\theta_{20}$  следует брать именно такими, чтобы все три функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $n(t)$  на начальном этапе убывали. Легко видеть, что при  $\theta_{10} = \theta_{20} = -\pi/2$  эволюция невозможна, так как это связано с увеличением  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  на начальном этапе эволюции. Если при  $(\dot{f}_1 \dot{f}_2)_{t=0} < 0$  система

эволюционировала даже при  $N_0 = 0$  и  $n_0 = 0$ , то при  $(\dot{f}_1 \dot{f}_2)_{t=0} > 0$  и  $n_0 = N_0 = 0$  эволюция оказывается невозможной. Из физических соображений ясно, что если в начальный момент времени отличны от нуля только  $f_{10}$  и  $f_{20}$ , то функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  не могут одновременно увеличиваться на начальном этапе, но не могут и уменьшаться из-за того, что функция  $f_2(t)$  не может убывать при  $n_0 = 0$ . Эволюция возможна при  $f_{10}$ ,  $f_{20}$  и  $n_0$  не равных нулю и тогда решение представляется в виде

$$f_1 = f_{10} \operatorname{dn}^2 \left( \mu \sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2} t \right), \quad (4.25)$$

где модуль  $k$  и период  $T$  колебаний определяются выражениями:

$$k^2 = 1 - \frac{f_{\min}}{f_{10}}, \quad T = 2K(k) / \left( \mu \sqrt{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2} \right), \quad (4.26)$$

а минимальное значение  $f_{\min}$  плотности  $f_1(t)$  равно

$$f_{\min} = f_{10} \frac{(\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2}{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2}. \quad (4.27)$$

Отсюда видно, что плотность фотонов  $f_1(t)$  периодически осциллирует в пределах от  $f_{10}$  до  $f_{\min}$ . Синфазно с этой функцией изменяется и функция  $f_2(t)$ . Легко видеть, что чем меньше разность  $f_{20} - n_0$ , тем больше период колебаний  $T$ . При  $f_{20} = n_0$  период  $T$  обращается в бесконечность. В этом случае функция  $f_1(t)$  изменяется аperiodически

$$f_1 = f_{10} \operatorname{sech}^2 \left( \mu \sqrt{2(f_{10} + 2f_{20})} t \right). \quad (4.28)$$

Из (4.7b) следует, что  $f_2 = f_{20} f_1 / f_{10}$  и, следовательно,  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  убывают со временем пропорционально друг другу и одновременно стремятся к нулю. Вместе с ними по такому же закону убывает и плотность экситонов. Аperiodическая эволюция в этом случае обусловлена особенностями индуцированных переходов в системе.

Таким образом, из полученных выше решений следует, что в случае, когда  $\theta_{10} \theta_{20} < 0$  и  $\sigma / \mu = 2$  оптическая нутация в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в обобщенной  $\Lambda$ -схеме при учете

процессов двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла и оптической экситон-биэкситонной конверсии представляет собой периодические изменения плотностей фотонов, экситонов и биэкситонов, причем период нутации существенно определяется начальными плотностями частиц. В случае  $\sigma/\mu = 2$  и синфазного изменения обоих полей  $\theta_{10}\theta_{20} > 0$  возможен режим как периодического изменения плотностей частиц  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $n(t)$  и  $N(t)$ , так и аperiodического убывания плотностей фотонов обоих импульсов и амплитуды экситонной волны с одновременным увеличением амплитуды биэкситонной волны.

Все представленные выше решения были получены в предположении, что в начальный момент времени в системе отсутствовали биэкситоны. Однако ясно, что наличие биэкситонов в подготовленном начальном состоянии может изменить эволюцию системы. Например, индуцированный распад исходных биэкситонов одновременно по обоим каналам может привести к новым особенностям временной эволюции.

В самом деле, полагая  $N_0, n_0, f_{10}, f_{20} \neq 0$ , получаем, что решение уравнения (4.8) при  $\theta_{10}\theta_{20} < 0$  имеет вид

$$f_1 = \frac{f_{\min}}{\operatorname{dn}^2\left(\pm \mu \sqrt{\left[2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2\right]x_+} t + F(\varphi_0, k)\right)}, \quad (4.29)$$

где

$$x_{\pm} = 1 +$$

$$+ \frac{2N_0 - (f_{10} - 2\sqrt{f_{20}n_0}) \pm \sqrt{(2N_0 - f_{10} + 2\sqrt{f_{20}n_0})^2 + 4N_0 \left[2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2\right]}}{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2},$$

$$k^2 = 1 - \frac{x_-}{x_+}, \quad T = \frac{2K(k)}{\mu \sqrt{\left[2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} - \sqrt{n_0})^2\right]x_+}},$$

$$f_{\min} = f_{10}x_-, \quad f_{\max} = f_{10}x_+, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{x_+(1-x_-)}{x_+ - x_-}}, \quad (4.30)$$

$F(\varphi_0, k)$  – неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ . Из (4.29) следуют решения (4.10) и (4.15) при  $N_0 = 0$ . Выражение (4.29) по сути

дела представляет собой два решения в зависимости от знака (+) либо (-) в аргументе эллиптической функции  $\text{dn}(x)$ . Знак (+) соответствует решению с  $\theta_1 = -\pi/2$  и  $\theta_2 = \pi/2$ , тогда как знак (-) определяет решение с  $\theta_1 = \pi/2$  и  $\theta_2 = -\pi/2$ . Знаки разностей фаз в свою очередь определяют направление скорости изменения функции  $f_1(t)$  в начальный момент времени  $\dot{f}_1|_{t=0}$ . При заданном значении  $f_1|_{t=0} = f_{10}$  решения со знаком (+) и (-) в аргументе функции  $\text{dn}(x)$  соответствуют противоположным направлениям начальных скоростей изменения функции  $f_1(t)$  (без изменения самой величины скорости  $\dot{f}_1|_{t=0}$ ). Из (4.29) тогда следует, что сразу же после начального момента времени плотность фотонов  $f_1(t)$  может не только убывать, как это имело место при  $N_0 = 0$ , но также и возрастать, начиная со значения  $f_{10}$ . Осцилляции плотности фотонов  $f_1(t)$  происходят в пределах  $f_{\min} \leq f_1 \leq f_{\max}$ . На рис. 4.6 представлена временная эволюция функций  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $n(t)$  и  $N(t)$ . Видно, что графики функций  $f_{1+}$  и  $f_{1-}$  (со знаками (+) и (-) в аргументе  $\text{dn}(x)$ ) начинаются с одного и того же начального значения  $f_{10}$ , но тангенсы углов наклона кривых при  $t = 0$  имеют противоположные знаки. Увеличение плотности фотонов  $f_1$  от значения  $f_{10}$  до значения  $f_{\max} > f_{10}$  на начальном этапе эволюции обусловлено распадом части исходных биэкситонов. Если положить  $N_0 = 0$ , то  $x_+ = 1$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $F(\pi/2, k) = K(k)$ , знаки ( $\pm$ ) в аргументе  $\text{dn}^2(x)$  в силу четности исчезают. Отметим также то обстоятельство, что при  $N_0 \neq 0$  отсутствует режим покоя системы при отличных от нуля плотностях частиц. Из (4.29) также следует, что период  $T$  и амплитуда  $\Delta f_1 = f_{\max} - f_{\min}$  колебаний определяются всеми начальными плотностями частиц, включая и  $N_0$ .

Если в (4.29)-(4.30) положить  $n_0 = 0$ , т.е. что в начальный момент времени в системе отсутствовали экситоны, то мы получаем более простое выражение для  $f_1(t)$ . Однако и в этом случае возможен начальный рост

плотности фотонов  $f_1$  от  $f_{10}$  до  $f_{\max}$  за счет индуцированного распада части исходных биэкситонов.

Если в начальный момент времени отличны от нуля плотности всех частиц  $(N_0, n_0, f_{10}, f_{20})$ , то эволюция плотности фотонов  $f_1(t)$  при  $(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_{t=0} > 0$  определяется выражением:

$$f_1 = \frac{f_{10}x_-}{\operatorname{dn}^2\left(\pm \mu \sqrt{\left[2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2\right]x_+} t + F(\varphi_0, k)\right)}, \quad (4.31)$$

где  $F(\varphi_0, k)$  – неполный эллиптический интеграл первого рода,

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{x_+(1-x_-)}{x_+ - x_-}}, \quad (4.32)$$

$$x_{\pm} = \frac{2N_0 + n_0 + f_{10} + f_{20} \pm \sqrt{(f_{10} + 2\sqrt{f_{20}n_0})^2 + 4N_0(N_0 + n_0 + f_{10} + f_{20})}}{2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2}, \quad (4.33)$$

модуль  $k$  и период колебаний  $T$  определяются выражениями:

$$k^2 = 1 - \frac{x_-}{x_+}, \quad T = 2K(k) / \mu \sqrt{\left[2f_{10} + (\sqrt{f_{20}} + \sqrt{n_0})^2\right]x_+}. \quad (4.34)$$

Решение (4.31) со знаком (+) в аргументе  $f_{1+}$  справедливо при  $\theta_{10} = \theta_{20} = -\pi/2$ , а со знаком (-)  $f_{1-}$  при  $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$ . Из рис. 4.7 видно, что оба решения периодически осциллируют между  $f_{1\min} \equiv f_{10}x_- \leq f_1 \leq f_{10}x_+ \equiv f_{1\max}$ . Функция  $f_{1+}$  сначала растет от значения  $f_{10}$  до  $f_{1\max}$ , тогда как функция  $f_{1-}$  убывает от  $f_{10}$  до  $f_{1\min}$  и затем имеют место периодические осцилляции плотностей фотонов с периодом  $T$  и амплитудой  $\Delta f_1 = f_{10}(x_+ - x_-)$ .

Если в (4.31) положить  $f_{20} = n_0$ , то выражение для  $f_1$  примет вид:

$$f_1 = x_+ \operatorname{sech}^2\left(\pm \mu \sqrt{2(2N_0 + f_{10} + 2f_{20})} t + \operatorname{arch} \sqrt{1 + 2N_0/(f_{10} + 2f_{20})}\right). \quad (4.35)$$

Отсюда видно, что поведение функции  $f_1$ , а вместе с ней и  $N$ ,  $n$ ,  $f_2$ , будет аperiodическим (рис. 4.8). Знак (-) перед первым слагаемым аргумента секанса гиперболического соответствует отрицательным значениям начальных разностей фаз  $\theta_{10} = \theta_{20} = -\pi/2$ , и, в этом случае, функция  $f_1$

сначала увеличивается до значения  $x_+$ , а затем убывает до значения  $x_-$ , равного нулю (рис. 4.8a). В случае  $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$  плотность фотонов первого импульса сразу начинает убывать до значения  $x_-$ , после чего эволюция системы прекращается (рис. 4.8b).

Из анализа результатов следует, что при  $f_{20} = n_0 \neq 0$  и любых значениях  $\sigma/\mu$  в случае синфазного изменения плотностей фотонов первого и второго импульса имеет место только аperiодический режим эволюции с превращением фотонов в биэкситоны. Разница в том, что в случае  $N_0 = 0$  возможно только уменьшение плотностей фотонов обоих импульсов, т.е. эволюция системы представляет собой монотонное уменьшение функции  $f_1$  до нуля. Качественно поведение функций соответствует рис. 4.8b. Так как  $f_2 \sim f_1$ , то при уменьшении фотонов  $f_1$  до нуля исчезают также и фотоны второго сорта  $f_2$ , а вместе с ними и экситоны, начальная плотность которых  $n_0$  была равна начальной плотности  $f_{20}$ . Все они превратились в биэкситоны. Однако биэкситоны не распадаются, так как отсутствуют другие частицы, которые могли бы индуцировать их распад. Если же в начальный момент в системе присутствовали биэкситоны, то плотность фотонов  $f_1$ , а за ней и  $f_2$ , растёт за счёт распада исходных биэкситонов. И после того как все исходные биэкситоны превратятся в фотоны первого и второго импульса дальнейшая динамика повторяет описанную выше, для  $N_0 = 0$ . Качественно это соответствует результатам на рис. 4.8a. Если предположить, что  $f_{20} \neq n_0$ , то ситуация качественно изменяется. В этом случае в системе остается некоторое количество экситонов, которые могут индуцировать распад биэкситонов, что приводит к тому, что эволюция становится периодической.

Уравнение (4.8) удается проинтегрировать в известных функциях также и для значений  $\sigma/\mu = 1$  и 4 при  $n_0 = N_0 = 0$ . Как было ранее замечено, при таких начальных условиях возможно только противофазное изменение функций  $f_1$  и  $f_2$ , причем  $f_1$  в начальный момент времени уменьшается, а  $f_2$  – увеличивается. Для  $\sigma/\mu = 1$  получаем

$$f_1 = f_{10} \operatorname{dn}^4 \left( \mu \sqrt{\frac{1}{2}(y_+ - y_-)} f_{10} t \right) \left[ 1 + \frac{1 - y_+}{y_+ - y_-} \operatorname{sn}^2 \left( \mu \sqrt{\frac{1}{2}(y_+ - y_-)} f_{10} t \right) \right]^{-2}, \quad (4.36)$$

где модуль  $k$  и период колебаний  $T$  определяются выражениями:

$$k^2 = \frac{y_-(y_+ - 1)}{y_+ - y_-}, \quad T = 2K(k) / \left( \mu \sqrt{\frac{1}{2}(y_+ - y_-)} f_{10} \right), \quad (4.37)$$

$$y_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -1 - \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 + 4\alpha} \right), \quad \alpha = \frac{f_{20}}{2f_{10}}.$$

В этом случае функция  $f_1(t)$  также изменяется периодически со временем в пределах  $y_+^2 \leq f_1/f_{10} \leq 1$ . Минимальная плотность фотонов  $f_{1\min} = y_+^2 f_{10}$  растет с ростом параметра  $\alpha$  (рис. 4.9).

Выражение для случая  $\sigma/\mu = 4$  имеет более сложный вид, но качественно не меняет динамики процесса. Плотность фотонов  $f_1$  осциллирует в пределах  $x_m \leq f_1/f_{10} \leq 1$ , где  $x_m$  – единственный положительный корень кубического уравнения  $x^2 = \alpha(1-x)(1+x)^2$ ,  $\alpha = f_{20}/(2f_{10})$ .

Используя (4.8), можно получить более общие решения в квадратурах при произвольных значениях параметров  $s = \sigma/2\mu$ ,  $p = f_{20}/f_{10}$ ,  $q = n_0/f_{10}$ , которые имеют вид

$$\int_{f_1/f_{10}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{1 + 2q - x - \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{p} - \sqrt{q}) x^{s/2} - (\sqrt{p} + \sqrt{q}) x^{-s/2} \right]^2}} = 2\sqrt{2f_{10}} \mu t. \quad (4.38)$$

Обращение этого интеграла на нижнем пределе приводит к периодическим решениям для функции  $f_1(t)/f_{10}$ . В общем виде это гиперэллиптический интеграл, который только при частных значениях параметра  $s$  представляется в виде эллиптических функций Якоби. Легко получить также уравнение для определения минимальной (максимальной) плотности фотонов  $f_{1m} = f_{10} x_m$ , которое имеет вид:

$$2(1 + 2q - x_m) = \left[ (\sqrt{p} - \sqrt{q}) x_m^{s/2} - (\sqrt{p} + \sqrt{q}) x_m^{-s/2} \right]^2. \quad (4.39)$$

Здесь  $x_m$  является ближайшим к единице (не равным ей) корнем этого уравнения. При известном значении  $x_m$  легко определить также и период колебаний  $T$  функции  $f_1(t)$ :

$$\int_{x_m}^1 \frac{dx}{x \sqrt{1 + 2q - x - \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{p} - \sqrt{q}) x^{s/2} - (\sqrt{p} + \sqrt{q}) x^{-s/2} \right]^2}} = \sqrt{2f_{10}} \mu T. \quad (4.40)$$

### 4.3 Приближение заданного поля.

Использование приближения заданного поля, позволяет существенно упростить задачу. Предположим, что плотность фотонов второго импульса намного больше плотностей остальных частиц  $f_{20} \gg f_{10}, n_0, N_0$ , тогда можно считать что  $f_2(t) = f_{20} = const$ . В этом случае система уравнений (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -4\mu f_1 \sqrt{N} \sin \theta_1, \\ \dot{n} &= -2\sigma \sqrt{f_{20}} \sqrt{Nn} \sin \theta_2, \\ \dot{N} &= 2\mu f_1 \sqrt{N} \sin \theta_1 + 2\sigma \sqrt{f_{20}} \sqrt{Nn} \sin \theta_2, \\ \dot{\theta}_1 &= \mu \frac{f_1 - 4N}{\sqrt{N}} \cos \theta_1 + \sigma \sqrt{f_{20}} \sqrt{\frac{n}{N}} \cos \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= \mu \frac{f_1}{\sqrt{N}} \cos \theta_1 + \sigma \sqrt{f_{20}} \frac{n - N}{\sqrt{Nn}} \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Полагая  $\theta_{10} = \pi/2$ , а  $\theta_{20} = -\pi/2$  получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -4\mu f_1 \sqrt{N}, \\ \dot{n} &= 2\sigma \sqrt{f_{20}} \sqrt{Nn}, \\ \dot{N} &= 2\mu f_1 \sqrt{N} - 2\sigma \sqrt{f_{20}} \sqrt{Nn}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Рассмотрим сначала случай, когда в начальный момент времени в системе отсутствовали экситоны и биэкситоны  $n_0 = N_0 = 0$  (рис. 4.10а). Используя интеграл движения  $2(N + n) + f_1 = 2(N_0 + n_0) + f_{10}$ , получаем, что система (4.42) приводится к уравнению

$$\frac{df_1}{dt} = -4\mu f_1 \sqrt{\frac{f_{10} - f_1}{2} - \frac{\sigma^2 f_{20}}{16\mu^2} \left( \ln \frac{f_{10}}{f_1} \right)^2} \quad (4.43)$$

и выражениям

$$n = \frac{\sigma^2 f_{20}}{16\mu^2} \left( \ln \frac{f_{10}}{f_1} \right)^2$$

$$N = \frac{f_{10} - f_1}{2} - \frac{\sigma^2 f_{20}}{16\mu^2} \left( \ln \frac{f_{10}}{f_1} \right)^2. \quad (4.44)$$

Анализ уравнения (4.43) показывает, что плотность фотонов  $f_1$  изменяется аperiodически, уменьшаясь от начального значения  $f_{10}$  до некоторого минимального значения  $f_{1\min}$ , определяемого как меньший  $f_{1\min} \equiv x_1 < x_2 = 1$  из двух корней уравнения

$$\frac{f_{10} - x}{2} - \frac{\sigma^2 f_{20}}{16\mu^2} \left( \ln \frac{f_{10}}{x} \right)^2 = 0. \quad (4.45)$$

В случае, когда в начальный момент времени в системе присутствуют все частицы  $f_{10}, n_0, N_0 \neq 0$ , поведение системы качественно не меняется. Дифференциальное уравнение и выражения для плотностей экситонов и биэкситонов принимают вид

$$\frac{df_1}{dt} = -4\mu f_1 \sqrt{N_0 + n_0 + \frac{f_{10} - f_1}{2} - \left( \sqrt{n_0} + \frac{\sigma \sqrt{f_{20}}}{4\mu} \ln \frac{f_{10}}{f_1} \right)^2}$$

$$n = \left( \sqrt{n_0} + \frac{\sigma \sqrt{f_{20}}}{4\mu} \ln \frac{f_{10}}{f_1} \right)^2$$

$$N = N_0 + n_0 + \frac{f_{10} - f_1}{2} - \left( \sqrt{n_0} + \frac{\sigma \sqrt{f_{20}}}{4\mu} \ln \frac{f_{10}}{f_1} \right)^2. \quad (4.46)$$

Из рис. 4.10b видно, что плотности частиц и в этом случае достигают некоторого стационарного значения, после чего эволюция системы прекращается.

Также в этом случае возможен режим синфазного изменения плотностей фотонов обоих импульсов. При этом в (4.46) изменится лишь

аргумент логарифма на  $f_1/f_{10}$ . Поведение плотностей всех частиц также будет аperiodическим (рис. 4.11).

Таким образом, можно сделать вывод, что характер и динамика процессов оптической нутации в системе когерентных экситонов и биэкситонов существенно зависят от начальных плотностей частиц, а также начальной разности фаз.

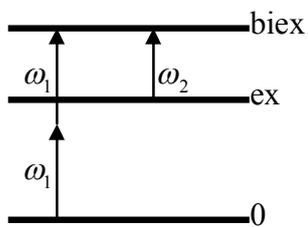


Рис.4.1 Схема уровней и оптических переходов в кристалле типа CuCl.

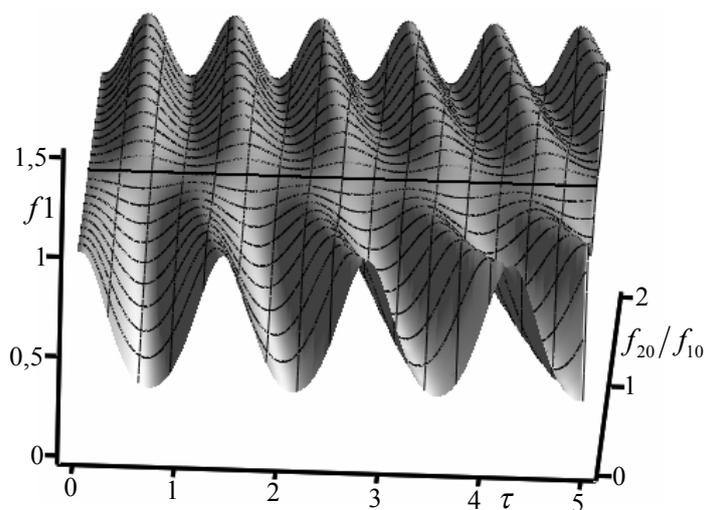


Рис.4.2 Временная эволюция плотности фотонов  $f1 = f_1(\tau)/f_{10}$  при различных значениях  $f_{20}/f_{10}$  и  $n_0/f_{10} = 0.25$  (здесь и далее  $\tau = \mu\sqrt{f_{10}t}$ ).

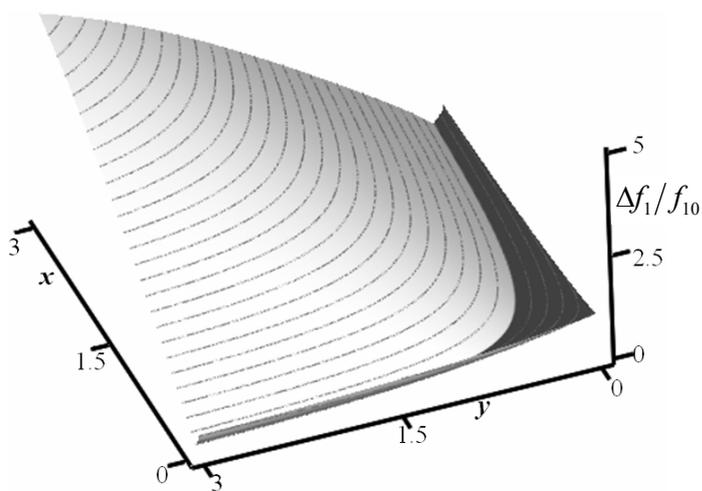


Рис.4.3 Зависимость амплитуды колебаний  $\Delta f_1/f_{10}$  от  $x = f_{20}/f_{10}$  и  $y = n_0/f_{10}$ .

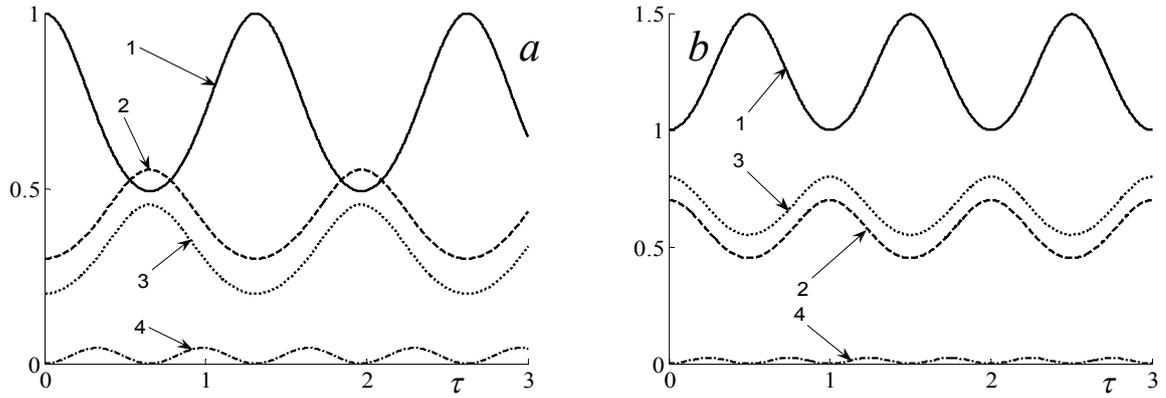


Рис.4.4 Временная эволюция плотностей фотонов обоих полей  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$ ,  $f_2 = f_2(\tau)/f_{10}$  (кривые 1 и 2 соответственно), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (кривая 3) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (кривая 4) при значениях начальных плотностей  $f_{20}/f_{10} = 0.3$ ,  $n_0/f_{10} = 0.2$  (a),  $f_{20}/f_{10} = 0.7$ ,  $n_0/f_{10} = 0.8$  (b) и  $\theta_{10}\theta_{20} < 0$ .

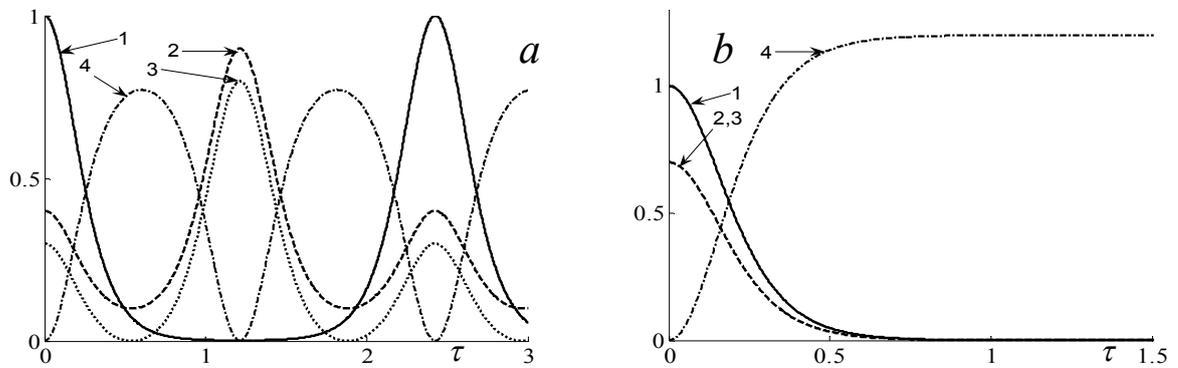


Рис.4.5 Временная эволюция плотностей фотонов обоих полей  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$ ,  $f_2 = f_2(\tau)/f_{10}$  (кривые 1 и 2 соответственно), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (кривая 3) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (кривая 4) при различных значениях начальных плотностей  $f_{20}/f_{10} = 0.4$ ,  $n_0/f_{10} = 0.3$  (a),  $f_{20}/f_{10} = n_0/f_{10} = 0.7$  (b) и  $\theta_{10}\theta_{20} > 0$ .

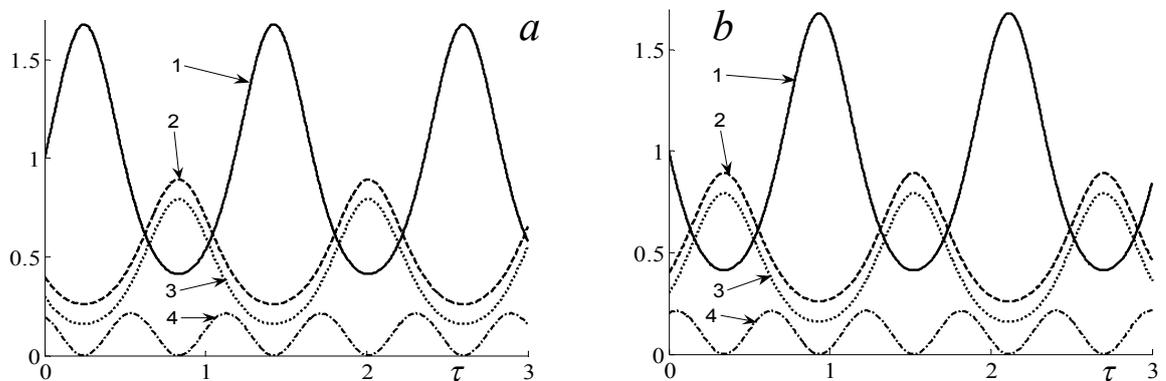


Рис.4.6 Временная эволюция плотностей фотонов обоих полей  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$ ,  $f_2 = f_2(\tau)/f_{10}$  (кривые 1 и 2 соответственно), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (кривая 3) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (кривая 4) при различных значениях начальных плотностей  $f_{20}/f_{10} = 0.4$ ,  $n_0/f_{10} = 0.3$ ,  $N_0/f_{10} = 0.2$  и  $\theta_{10}\theta_{20} < 0$  ( $\theta_{10} = -\pi/2$  (a),  $\theta_{20} = -\pi/2$  (b)).

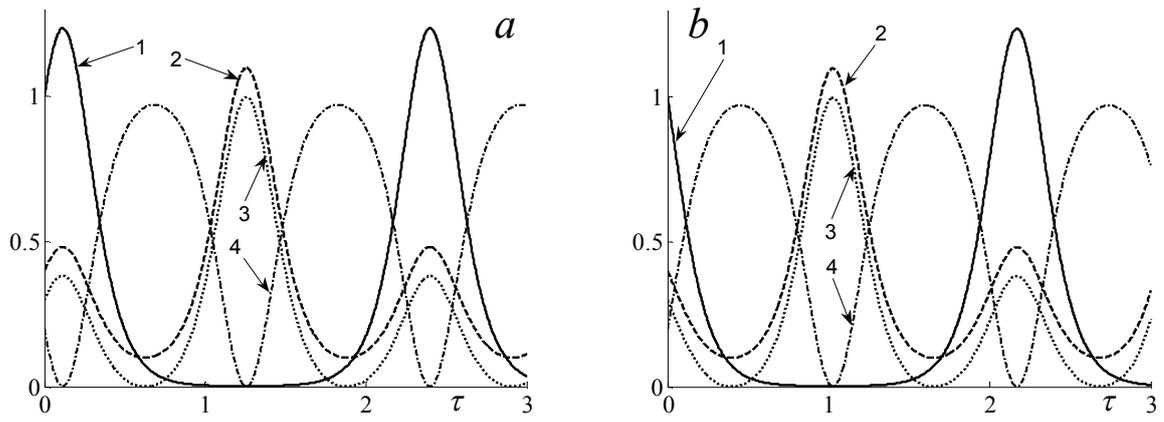


Рис.4.7 Временная эволюция плотностей фотонов обоих полей  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$ ,  $f_2 = f_2(\tau)/f_{10}$  (кривые 1 и 2 соответственно), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (кривая 3) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (кривая 4) при различных значениях начальных плотностей  $f_{20}/f_{10} = 0.4$ ,  $n_0/f_{10} = 0.3$ ,  $N_0/f_{10} = 0.2$  и  $\theta_{10}\theta_{20} > 0$  ( $\theta_{10} = \theta_{20} = -\pi/2$  (a),  $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$  (b)).

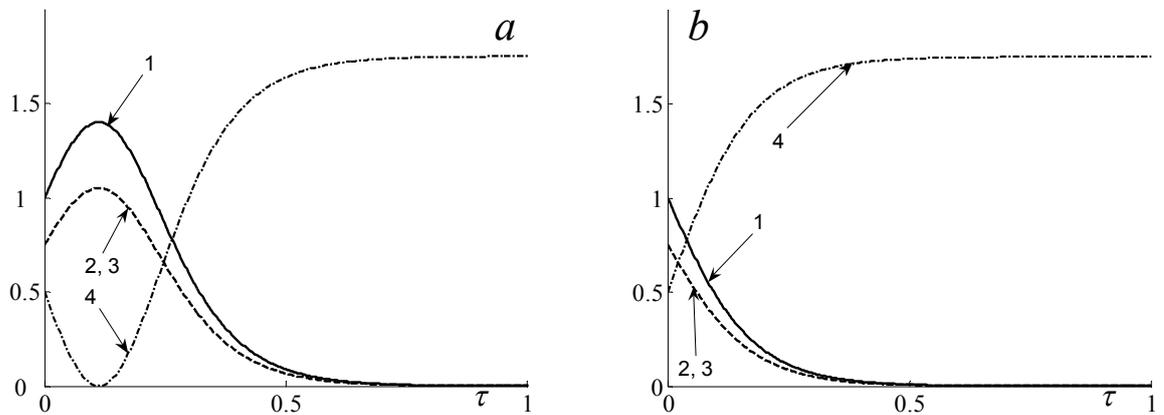


Рис.4.8 Временная эволюция плотностей фотонов обоих полей  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$ ,  $f_2 = f_2(\tau)/f_{10}$  (кривые 1 и 2 соответственно), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (кривая 3) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (кривая 4) при различных значениях начальных плотностей  $f_{20}/f_{10} = n_0/f_{10} = 0.75$ ,  $N_0/f_{10} = 0.5$  и  $\theta_{10}\theta_{20} > 0$  ( $\theta_{10} = \theta_{20} = -\pi/2$  (a),  $\theta_{10} = \theta_{20} = \pi/2$  (b)).

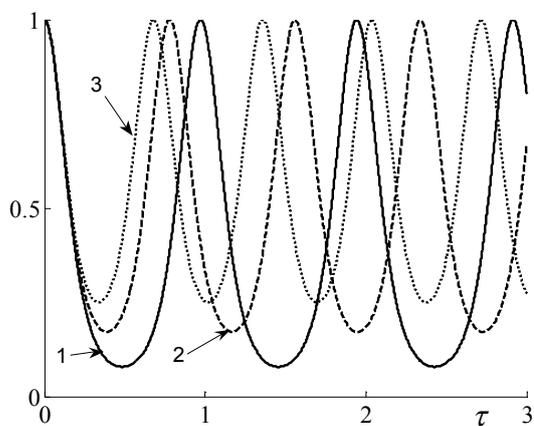


Рис.4.9 Временная эволюция плотности фотонов  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$  при  $\sigma/\mu = 1$  и различных значениях  $f_{20}/f_{10} = 1$  (1), 2 (2), 3 (3).

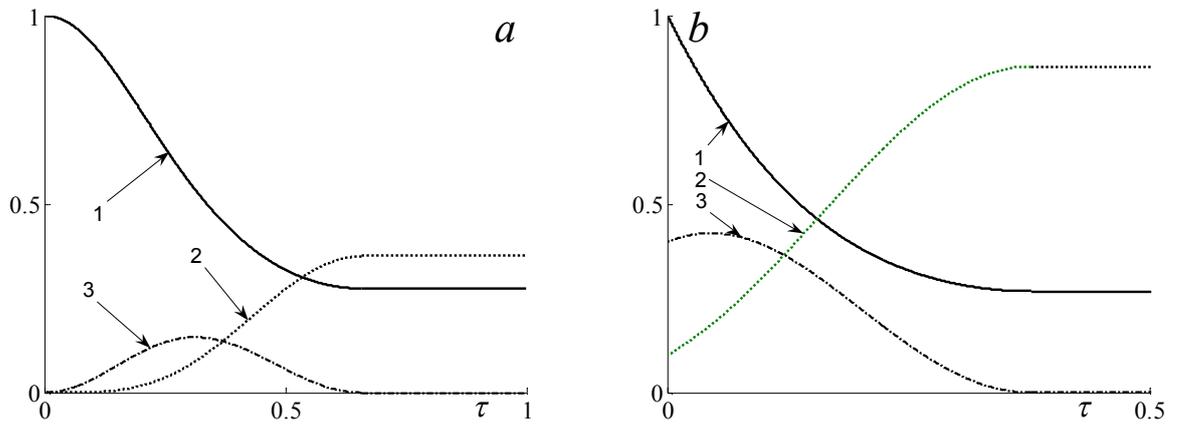


Рис.4.10 Временная эволюция плотностей фотонов  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$  (кривая 1), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (кривая 2) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (кривая 3) при различных значениях начальных плотностей  $N_0/f_{10} = n_0/f_{10} = 0$  (а),  $N_0/f_{10} = 0.4$ ,  $n_0/f_{10} = 0.1$  (б) и  $\theta_{10}\theta_{20} < 0$ , полученных в приближении заданного поля.

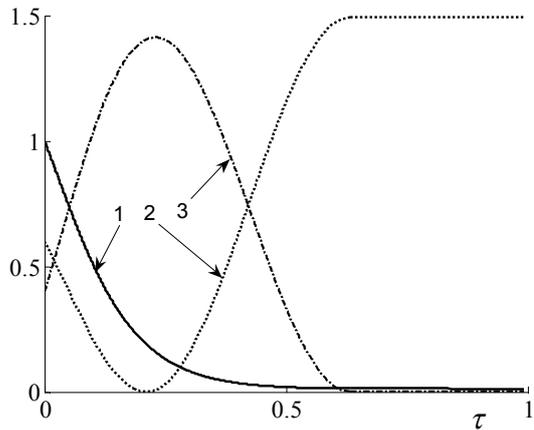


Рис.4.11 Временная эволюция плотностей фотонов  $f_1 = f_1(\tau)/f_{10}$  (1), экситонов  $n' = n(\tau)/f_{10}$  (2) и биэкситонов  $N' = N(\tau)/f_{10}$  (3) при  $\theta_{10}\theta_{20} > 0$ , полученных в приближении заданного поля.

## Глава 5. Новые механизмы усиления лазерного излучения

### 5.1 Усиление в области $M$ -полосы люминесценции при двухфотонной накачке биэкситонного уровня.

Используя ту же схему энергетических уровней (и квантовых переходов), что и в предыдущей главе (рис. 5.1) и, по-прежнему, считая, что первый пучок падающего излучения ответствен за двухфотонное возбуждение биэкситонов, а второй импульс ответствен за оптическую экситон-биэкситонную конверсию, исследуем возможность усиления излучения с частотой  $\omega_2$  за счет энергии поля первого пучка с частотой  $\omega_1$ . Такая возможность просматривается уже на качественном уровне. В самом деле, двухфотонная генерация даже небольшого количества биэкситонов из основного состояния кристалла приводит к возникновению инверсии населенностей биэкситонного уровня по отношению к экситонному. Сброс этой инверсии будет способствовать генерации когерентных фотонов на частоте  $\omega_2$  и к усилению падающего импульса на этой частоте. Данная схема энергетических уровней и квантовых переходов в какой то мере напоминает известную трехуровневую  $\Lambda$ -схему, для которой доказана возможность генерации лазерного излучения без предварительно созданной инверсии населенностей уровней. Отличие ее состоит в том, что в одном плече рассматриваемой нами  $\Lambda$ -схемы имеет место двухфотонный переход из основного состояния кристалла на верхний (биэкситонный) уровень, а на другом плече возникает однофотонный переход между нижним (экситонным) и верхним (биэкситонным) уровнями. Общим уровнем для обоих переходов является биэкситонный уровень.

Гамильтониан взаимодействия обоих полей с экситонами и биэкситонами полупроводника можно представить в виде

$$H_{\text{int}} = -\hbar\mu(b^+ E_1^+ E_1^+ + b E_1^- E_1^-) - \hbar\sigma(a^+ b E_2^- + b^+ a E_2^+), \quad (5.1)$$

где  $a$  и  $b$  – амплитуды экситонной и биэкситонной волн поляризации среды,  $\mu$  и  $\sigma$  – константы двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла и оптической экситон-биэкситонной конверсии

соответственно [56, 60, 61]. Используя (1), можно записать гайзенберговские уравнения движения для амплитуд  $a$  и  $b$  материальных полей:

$$i\dot{a} = \omega_0 a - i\gamma a - \sigma b E_2^-, \quad (5.2)$$

$$i\dot{b} = \Omega_0 b - i\Gamma b - \sigma a E_2^+ - \mu E_1^+ E_1^+, \quad (5.3)$$

где  $\gamma$  и  $\Gamma$  - константы затухания экситонного и биэкситонного состояний,  $\omega_0$  и  $\Omega_0$  - собственные частоты экситонного и биэкситонного состояний. Рассмотрим далее стационарное распространение обоих пучков лазерного излучения в среде. Считаем, что фотоны обоих полей находятся в точном резонансе с частотами соответствующих переходов:  $2\omega_1 = \Omega_0$ ,  $\omega_2 = \Omega_0 - \omega_0$ . Из (5.2)-(5.3) легко найти амплитуды экситонной  $a$  и биэкситонной  $b$  волн, затем получить выражения для поляризаций среды  $P_1$  и  $P_2$  на частотах полей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, и, наконец, найти мнимые компоненты восприимчивостей  $\chi_1''$  и  $\chi_2''$ , которые имеют вид:

$$\chi_1'' = \gamma \frac{2\hbar\mu^2 |E_1|^2}{\Gamma\gamma + \sigma^2 |E_2|^2}, \quad \chi_2'' = -\gamma \frac{\hbar\sigma^2 \mu^2 |E_1|^4}{(\Gamma\gamma + \sigma^2 |E_2|^2)^2}. \quad (5.4)$$

Что касается стационарных плотностей экситонов  $n$  и биэкситонов  $N$ , то они определяются выражениями

$$N = \gamma^2 \frac{\mu^2 |E_1|^4}{(\Gamma\gamma + \sigma^2 |E_2|^2)^2}, \quad n = \frac{\sigma^2 \mu^2 |E_1|^4 |E_2|^2}{(\Gamma\gamma + \sigma^2 |E_2|^2)^2}. \quad (5.5)$$

Плотности экситонов  $n$  и биэкситонов  $N$  существенно зависят от интенсивностей обоих импульсов. Обе плотности растут пропорционально квадрату интенсивности первого импульса. Действие второго импульса сводится в основном к насыщению переходов в области М-полосы. Как следствие этого плотность биэкситонов монотонно убывает с ростом интенсивности второго импульса, а плотность экситонов сначала растет пропорционально интенсивности второго импульса, достигает максимума при интенсивности этого импульса, равной интенсивности насыщения  $I_2 = I_s$ , после чего монотонно убывает. Легко также видеть, что отношение плотностей экситонов и биэкситонов растет пропорционально интенсивности второго импульса.

В условиях точного резонанса отличными от нуля являются абсорбционные компоненты восприимчивостей, причем, как следует из (5.4),  $\chi_1'' > 0$ , а  $\chi_2'' < 0$ , тогда как действительные компоненты  $\chi_1'$  и  $\chi_2'$  точно равны нулю. Это означает, что коэффициент поглощения среды на частоте первого импульса является положительным, а на частоте второго – отрицательным, т.е. первый импульс поглощается, а второй – усиливается. Видно также, что абсолютное значение  $\chi_2''$  пропорционально квадрату восприимчивости  $\chi_1''$ . Восприимчивости  $\chi_1''$  и  $\chi_2''$  существенно зависят от интенсивностей распространяющихся полей: они растут с ростом интенсивности первого пучка и убывают с ростом интенсивности второго пучка. Зависимость восприимчивостей от интенсивности первого пучка носит керровско-подобный характер, а второе поле способствует проявлению эффекта насыщения поглощения (усиления).

Используя выражения (5.4) для восприимчивостей, можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений для пространственной эволюции полей в полупроводнике в приближении медленно меняющихся огибающих  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$ :

$$\frac{dE_1}{dx} = -\frac{2\pi\gamma\omega_1}{cn_{01}} \frac{2\hbar\mu^2|E_1|^2}{\Gamma\gamma + \sigma^2|E_2|^2} E_1, \quad (5.6)$$

$$\frac{dE_2}{dx} = \frac{2\pi\gamma\omega_2}{cn_{02}} \frac{\hbar\sigma^2\mu^2|E_1|^4}{(\Gamma\gamma + \sigma^2|E_2|^2)^2} E_2. \quad (5.7)$$

При получении (5.6) – (5.7) мы положили  $k_1^2 = \varepsilon_{01}\omega_1^2/c^2$ ,  $k_2^2 = \varepsilon_{02}\omega_2^2/c^2$ ,  $n_{01} = \sqrt{\varepsilon_{01}}$ ,  $n_{02} = \sqrt{\varepsilon_{02}}$ , где  $k_i$  – волновые вектора полей,  $\varepsilon_{0i}(n_{0i})$  – фоновые диэлектрические проницаемости (показатели преломления), которые считались положительными ( $i=1, 2$ ). Из (5.6) – (5.7) следует, что амплитуда поля  $E_1$  (поля накачки) убывает с расстоянием по мере распространения в кристалле, начиная с переднего торца. Скорость пространственного убывания поля  $E_1$  тем больше, чем больше интенсивность этого поля. Что касается амплитуды поля  $E_2$ , то она только растет с ростом расстояния от переднего торца, причем скорость роста пропорциональна квадрату

интенсивности волны накачки. Скорости пространственного изменения обоих полей убывают с ростом интенсивности в области М-полосы. Пространственная эволюция амплитуд обоих полей возможна, если только оба поля присутствуют на переднем торце кристалла. Если, например, поле  $E_1$  отсутствует на торце кристалла, то тогда невозможна генерация поля  $E_2$  на частоте  $\omega_2$  и, следовательно, оба поля отсутствуют в среде. Если же поле  $E_2$  отсутствует на переднем торце кристалла, то это поле отсутствует и в объеме, но поле  $E_1$  отлично от нуля и распространяется в среде.

Введем далее интенсивности полей  $I_{1,2} = \frac{c}{8\pi} |E_{1,2}|^2$  и пронормируем интенсивность  $I_2$  на интенсивность насыщения  $I_s = \frac{\Gamma\gamma c}{8\pi\sigma^2}$  ( $I_2 = I_s y$ ), а интенсивность  $I_1$  на критическую интенсивность  $I_c = \frac{c}{8\pi} |E_c|^2$ , где критическое поле  $E_c$  было введено в [60, 61] и определяется из условия равенства вероятностей однофотонного перехода из основного состояния кристалла в экситонное и двухфотонного перехода из основного состояния в биэкситонное:  $g = \mu E_c$  [60, 61]. Тогда  $I_c = \frac{c}{8\pi} \frac{g^2}{\mu^2}$  и  $u = I_1/I_c$ . Из (5.6) и (5.7) находим, что пространственные профили нормированных интенсивностей  $u(x)$  и  $y(x)$  распространяющихся импульсов при этом определяются из уравнений

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2\omega_1}{cn_{01}} \frac{4\pi\hbar g^2}{\Gamma} \frac{u^2}{1+y}, \quad (5.8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega_2}{cn_{02}} \frac{4\pi\hbar g^2}{\Gamma} \frac{I_c}{I_s} \frac{u^2 y}{(1+y)^2}. \quad (5.9)$$

Из (5.8) – (5.9) нетрудно получить интеграл движения, связывающий функции  $u(x)$  и  $y(x)$  в произвольной точке пространства:

$$u = u_0 - 2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{n_{02}}{n_{01}} \frac{I_s}{I_c} \left( y - y_0 + \ln \frac{y}{y_0} \right), \quad (5.10)$$

где  $u_0 = u|_{x=0} = I_{10}/I_c$  и  $y_0 = y|_{x=0} = I_{20}/I_s$  – нормированные интенсивности импульсов, падающих на передний торец кристалла,  $I_{10}$  и  $I_{20}$  – заданные

интенсивности обоих импульсов на торце. Можно ввести коэффициент усиления  $\beta$  для поля  $E_2$ , который определим равенством

$$\beta = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \alpha_{ex} \frac{\gamma}{\Gamma} \frac{I_c}{I_s} \left\{ \frac{u_0 - 2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{n_{02}}{n_{01}} \frac{I_s}{I_c} \left( y - y_0 + \ln \frac{y}{y_0} \right)}{1 + y} \right\}^2, \quad (5.11)$$

где  $\alpha_{ex}$  – коэффициент экситонного поглощения:  $\alpha_{ex} = 4\pi\hbar\omega_2 g^2 / (cn_{02}\gamma)$ .

Значение коэффициента усиления  $\beta_0 = \beta|_{x=0}$  у переднего торца кристалла определяется падающими интенсивностями  $I_{10}$  и  $I_{20}$  обоих импульсов:

$$\beta_0 = \alpha_{ex} \frac{\gamma}{\Gamma} \frac{I_c}{I_s} \frac{u_0^2}{(1 + y_0)^2}. \quad (5.12)$$

Нормированная интенсивность  $y(x)$  усиливаемого излучения на лазерном переходе определяется выражением

$$\int_{y_0}^y \frac{dy(1+y)^2}{y \left[ u_0 - 2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{n_{02}}{n_{01}} \frac{I_s}{I_c} \left( y - y_0 + \ln \frac{y}{y_0} \right) \right]^2} = \alpha_{ex} \frac{\gamma}{\Gamma} \frac{I_c}{I_s} x. \quad (5.13)$$

Из рис. 5.2 видно, что интенсивность поля накачки  $u(x)$  быстро убывает с расстоянием вглубь кристалла, тогда как интенсивность  $y(x)$  усиливаемого сигнала в области М-полосы растет. Что касается распределенного коэффициента усиления  $\beta(x)$ , то он монотонно убывает с расстоянием из-за пространственного истощения накачки.

На рис. 5.3 представлен график зависимости интенсивности усиливаемого сигнала от интенсивности импульса накачки (интеграл движения (5.10)). Уменьшение интенсивности накачки приводит к увеличению интенсивности генерируемого излучения.

Таким образом, рассмотренная модель свидетельствует о возможности усиления слабого сигнала в области М-полосы за счет накачки в области двухфотонного поглощения с образованием биэкситонов в кристаллах типа CuCl. По-видимому, возможно функционирование модельного устройства и в тонкопленочном варианте [134].

## 5.2 Усиление ТГц-излучения при накачке экситонного уровня.

Рассмотрим также новый механизм генерации (усиления) терагерцового излучения в объемных либо размерно-ограниченных полупроводниках с использованием экситонного и биэкситонного состояний. Пусть падающий на полупроводник импульс резонансного лазерного излучения с частотой, равной частоте экситонного перехода  $\omega_0$ , возбуждает экситоны из основного состояния кристалла (рис. 5.4). Считаем экситонное состояние  $ex$  макрозаполненным. Вместе с ним макрозаполненным является также и двухэкситонное состояние  $2ex$  на частоте  $2\omega_0$ . Эти состояния неоднократно использовались для интерпретации экспериментальных результатов по четырехволновому смешению в полупроводниках [108, 109], а также при исследовании двухфотонного двухэкситонного поглощения света [110] и процесса фотораспада (фотодиссоциации) биэкситона [111]. Эти же состояния, по-видимому, могут играть важную роль в процессе генерации терагерцового излучения. Поскольку биэкситонное состояние  $biex$  с собственной частотой  $\Omega_0 = 2\omega_0 - \Omega_m$  расположено ниже двухэкситонного состояния с частотой  $2\omega_0$  на величину  $\Omega_m$ , то между состоянием  $2ex$  и  $biex$  в условиях однофотонного возбуждения экситонов из основного состояния кристалла возникает инверсия населенностей. Поэтому если запустить в кристалл слабый импульс терагерцового излучения с частотой  $\omega_2$ , равной  $\Omega_m$ , то такое излучение будет усиливаться благодаря индуцированному сбросу инверсии.

Законы сохранения энергии и импульса для области частот двухэкситон-биэкситонного перехода имеют вид:

$$2E_{ex}(\mathbf{k}_1) = E_{biex}(\mathbf{q}) + \hbar\omega_2, \quad 2\mathbf{k}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{k}_2, \quad (5.14)$$

где  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{phot}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}_2$  – волновой вектор экситона (фотона, возбуждающего его), биэкситона и терагерцового кванта с частотой  $\omega_2$ , соответственно. Тогда для энергии кванта  $\hbar\omega_2$  терагерцового излучения получаем выражение:

$$\hbar\omega_2 = I_m + \frac{\hbar^2}{4m_{ex}} \mathbf{k}_2 (2\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}), \quad (5.15)$$

где  $m_{ex}$  – трансляционная масса экситона. При  $\mathbf{k}_2 = 0$  из (5.14) и (5.15) находим  $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}_1$  и  $\hbar\omega_2 = I_m$ , т.е. энергия кванта терагерцового излучения точно равна энергии связи биэкситона.

Пусть в кристалле распространяются две плоские электромагнитные волны: одна с амплитудой поля  $E_1$  и частотой  $\omega_1$ , резонансной частоте экситонного перехода  $\omega_0$ , а другая – с амплитудой  $E_2$  и частотой  $\omega_2$ , резонансной частоте двухэкситон-биэкситонного перехода (рис. 5.4). Тогда гамильтониан взаимодействия обеих волн с экситонами и биэкситонами имеет вид:

$$H = -\hbar g(a^+ E_1^+ + a E_1^-) - \hbar \mu(a^+ a^+ b E_2^+ + b^+ a a E_2^-), \quad (5.16)$$

где  $g$  – константа взаимодействия экситонов с полем волны,  $\mu$  – константа оптического двухэкситон-биэкситонного перехода,  $a$  и  $b$  – амплитуды экситонной и биэкситонной волн поляризации среды соответственно,  $E_1^+$  и  $E_2^+$  ( $E_1^-$ ,  $E_2^-$ ) – положительно (отрицательно) – частотные компоненты полей волн.

Используя (5.16), легко получить гайзенберговские уравнения для амплитуд экситонной и биэкситонной волн. Решая эти уравнения в стационарном режиме, можно найти эти амплитуды и затем определить восприимчивости среды  $\chi_1$  и  $\chi_2$  для областей частот  $\omega_0$  и  $2\omega_0 - \Omega_m$  соответственно:

$$\chi_1 = -\frac{\hbar g^2}{\Delta_1 + i\gamma_1 - \frac{2\mu^2 n |E_2|^2 (2\Delta_1 - \Delta_2 - i\gamma_2)}{(2\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \gamma_2^2}}, \quad \chi_2 = -\frac{\hbar \mu^2 n^2 (2\Delta_1 - \Delta_2 + i\gamma_2)}{(2\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \gamma_2^2}, \quad (5.17)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – феноменологически введенные константы затухания экситонного и биэкситонного состояний, описывающие уход экситонов и биэкситонов из когерентных мод,  $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_0$ ,  $\Delta_2 = \omega_2 - I_m/\hbar$  – расстройки резонанса для частот обеих волн по отношению к соответствующим частотам переходов,  $n$  – концентрация экситонов, которая определяется из выражения:

$$n \left\{ \left[ \Delta_1 - (2\Delta_1 - \Delta_2) \frac{2\mu^2 n |E_2|^2}{(2\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \gamma_2^2} \right]^2 + \left[ \gamma_1 + \gamma_2 \frac{2\mu^2 n |E_2|^2}{(2\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \gamma_2^2} \right]^2 \right\} = g^2 |E_1|^2. \quad (5.18)$$

Из (5.17) следует, что при любых расстройках резонанса  $\text{Im} \chi_1 = \chi_1'' > 0$ , а  $\text{Im} \chi_2 = \chi_2'' < 0$ . Следовательно, при распространении в среде излучение на частоте  $\omega_2$  будет усиливаться, а на частоте  $\omega_1$  – ослабляться.

В условиях точного резонанса ( $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ) дисперсионные компоненты восприимчивостей равны нулю. Отличными от нуля являются только абсорбционные компоненты восприимчивостей  $\chi_1''$  и  $\chi_2''$ . Тогда для диэлектрических функций среды  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  на частотах  $\omega_0$  и  $\omega_2$  соответственно при  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  получаем выражения:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} \left( 1 + i \frac{\omega_{LT} \gamma}{\gamma^2 + 2\mu^2 n |E_2|^2} \right), \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{20} - i \frac{4\pi \hbar \mu^2 n^2}{\gamma}, \quad (5.20)$$

где  $\omega_{LT}$  – продольно-поперечное расщепление в экситонной области спектра,  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{20}$  – фоновые диэлектрические функции, а концентрация экситонов  $n$  определяется из кубического уравнения:

$$n(\gamma^2 + 2\mu^2 n |E_2|^2)^2 = \gamma^2 g^2 |E_1|^2. \quad (5.21)$$

Из (5.19)-(5.21) следует, что диэлектрические функции существенно определяются интенсивностями полей обеих волн.

Рассмотрим теперь стационарное распространение обеих волн в среде в направлении оси  $x$ , используя для этого волновые уравнения:

$$\frac{d^2 E_i}{dx^2} + \varepsilon_i \frac{\omega_i^2}{c^2} E_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.22)$$

В приближении медленно меняющихся в пространстве огибающих и при условии, что  $c^2 k_i^2 = \varepsilon_{i0} \omega_i^2$ ,  $i = 1, 2$ , где  $k_i$  – волновой вектор  $i$ -ой волны, получаем следующую систему укороченных нелинейных уравнений для определения пространственного распределения амплитуд полей  $E_1$  и  $E_2$  вдоль направления распространения:

$$\frac{dE_1}{dx} = -\frac{k_1}{2} \frac{\omega_{LT} \gamma}{\gamma^2 + 2\mu^2 n |E_2|^2} E_1, \quad (5.23)$$

$$\frac{dE_2}{dx} = \frac{2\pi\hbar\mu^2 k_2}{\varepsilon_{20}\gamma} n^2 E_2. \quad (5.24)$$

Отсюда видно, что нелинейный коэффициент поглощения волны на частоте  $\omega_1$  и коэффициент усиления на частоте  $\omega_2$  сложным образом зависят от интенсивностей обеих волн.

Получить точные аналитические решения системы уравнений (5.23)-(5.24) не удастся. Определяя из (5.21) концентрацию экситонов  $n$  в линейном приближении по интенсивности первой волны ( $n = g^2 |E_1|^2 / \gamma^2$ ) и затем интегрируя систему (5.23)-(5.24), находим ее первый интеграл движения:

$$J_2 = J_{20} \exp\left[\frac{c}{2}(J_{10}^2 - J_1^2)\right], \quad (5.25)$$

где  $c = (\varepsilon_{10}/\varepsilon_{20})(k_2/k_1)(\mu g/\gamma^2)^2$ ,  $J_i = |E_i|^2$ ,  $J_{i0} = |E_{i(x=0)}|^2$ ,  $i = 1, 2$ . Выражение (5.25) связывает интенсивности обеих волн в каждой точке кристалла. Интенсивность низкочастотной волны экспоненциально зависит от интенсивности высокочастотной. На рис. 5.5 представлены графики зависимости  $J_2(J_1)$ , при нескольких значениях параметра  $\beta = cJ_{10}^2/2$ . Видно, что чем больше значение параметра  $\beta$ , тем больше максимально возможное значение интенсивности  $J_{2\max}/J_{20} = \exp(\beta)$  ( $J_{2\max}$  растет экспоненциально с ростом  $J_{10}$ ) и тем меньше полуширина кривой  $J_2(J_1)$ .

Беря приближенное решение уравнения (5.23) в виде  $J_1 = J_{10} \exp(-\alpha_{10}x)$ , где  $\alpha_{10} = k_1\omega_{LT}/\gamma$ , получаем следующее выражение для пространственного распределения интенсивности усиливаемой волны:

$$J_2 = J_{20} \exp(cJ_{10}^2 e^{-\alpha_{10}x} \alpha_{10}x). \quad (5.26)$$

Отсюда видно, что интенсивность  $J_2/J_{20}$  волны на частоте  $\omega_2$ , распространяющейся вглубь среды, сначала быстро растет с ростом координаты, затем скорость роста постепенно уменьшается, так, что на больших расстояниях интенсивность этой волны насыщается, принимая максимальное значение  $J_{2\max}$ , тогда как интенсивность волны накачки экспоненциально убывает (рис. 5.5). Из рис. 5.5. видно, что параметр  $\beta$  определяет величину  $J_{2\max}$ , параметр  $\alpha_{10}$  – скорость пространственного

изменения функций  $J_1(x)$  и  $J_2(x)$ . Вводя коэффициент усиления  $g$  этой волны по формуле  $J_2(x) = J_{20} \exp(gx)$ , получаем  $g(x) = (cJ_{10}^2/2x)(1 - \exp(-2\alpha_{10}x))$ . При  $x=0$  коэффициент усиления имеет максимальное значение  $g(0) = \alpha_{10}cJ_{10}^2$ , пропорциональное квадрату начальной интенсивности волны на частоте  $\omega_1$ . С ростом  $x$  он монотонно убывает, обращаясь в нуль при  $x \gg \alpha_{10}^{-1}$ .

Рассмотрим случай, когда расстройки резонанса  $\Delta_2 = 0$ , а  $\Delta_1 \neq 0$ . Простоты ради будем далее полагать константы затухания  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  одинаковыми, Используя нормировки  $\Delta_1 \equiv \Delta = \delta\gamma$ ,  $E_{1,2} = C_0 F_{1,2}$ ,  $n = N_0 m$ ,  $x = x_0 \tau$ , где  $N_0 = g/\mu$ ,  $C_0^2 = \gamma^2/\mu g$ ,  $x_0 = \alpha_{10}^{-1}$ , уравнение (5.18) можно записать в виде:

$$m \left\{ \delta^2 \left( 1 - \frac{4m|F_2|^2}{4\delta^2 + 1} \right)^2 + \left( 1 + \frac{2m|F_2|^2}{4\delta^2 + 1} \right)^2 \right\} = |F_1|^2. \quad (5.27)$$

Из (5.27) видно, что произведение нормированной плотности экситонов  $m$  и нормированной плотности терагерцового излучения  $I_2 = |F_2|^2$  является бистабильной функцией интенсивности накачки  $I_1 = |F_1|^2$  в экситонной области спектра. Как видно из (5.27), при расстройках резонанса  $\delta$ , превышающих критическую расстройку  $\delta_c$  ( $\delta > \delta_c$ ), где  $\delta_c = \sqrt{(31 + \sqrt{945})}/2/2$ , имеет место бистабильность типа плотность-свет  $mI_2(I_1 I_2)$  (рис. 5.6). Из (5.27) также следует, что решение для плотности экситонов  $m$  в зависимости от интенсивности накачки можно представить выражением вида  $mI_2 = f(I_1 I_2)$ , т.е. произведение  $mI_2$  является функцией произведения интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$ . Вводя функции  $y = 2mI_2/(4\delta^2 + 1)$  и  $z = 2I_1 I_2/(4\delta^2 + 1)$ , уравнение (5.19) примет вид

$$y(\delta^2(1-2y)^2 + (1+y)^2) = z. \quad (5.28)$$

Из (5.28) видно, что  $z(y)$  при  $\delta > \delta_c$  имеет максимум и минимум в точках

$$y_{\pm} = 2 \left( 2\delta^2 - 1 \pm \sqrt{\delta^4 - \frac{31}{4}\delta^2 + \frac{1}{4}} \right) / (3(4\delta^2 + 1)) \quad (5.29)$$

соответственно. При  $\delta = \delta_c$  функция  $z(y)$  имеет точку перегиба при  $y = \frac{2}{3} \frac{2\delta_c^2 - 1}{4\delta_c^2 + 1}$ , а при  $\delta < \delta_c$  она является однозначной, монотонно возрастающей функцией в зависимости от  $y$ . Что касается функции  $y(z)$ , т.е.  $mI_2(I_1I_2)$ , то при  $\delta > \delta_c$  в некоторой области значений интенсивности накачки  $I_1$  она является трехзначной, т.е. одному и тому же значению произведения амплитуд полей  $I_1I_2$  соответствуют три значения произведения  $mI_2$ . Таким образом можно утверждать, что плотность экситонов  $m$  может быть трехзначной функцией интенсивности накачки  $I_1$  (рис.5.6) при  $\delta > \delta_c$ . Из рис.5.6 видно, что с ростом  $\delta$  при  $\delta < \delta_c$  функция  $y(z)$  является нелинейной, монотонно растущей с ростом  $z$ , но однозначной. При  $\delta = \delta_c$  возникает участок дифференциального усиления, а при  $\delta > \delta_c$  имеет место трехзначная зависимость  $y$  от  $z$ . Это означает, что при  $\delta > \delta_c$  плотность экситонов сначала медленно растет с ростом интенсивности накачки  $I_1$  вдоль нижней ветви бистабильной кривой до точки с вертикальной касательной в зависимости  $y(z)$ , в которой происходит скачок с нижней ветви на верхнюю, вдоль которой далее  $y$  медленно растет с ростом  $z$ . При уменьшении интенсивности накачки возникает скачок с верхней ветви бистабильной кривой на нижнюю, но в другой точке и далее уменьшение  $y$  при уменьшении  $z$ . Если  $\delta = \delta_c$ , то при некотором значении  $z$  имеет место быстрый рост функции  $y(z)$ , т.е. возникает участок дифференциального усиления. Таким образом, при  $\delta \geq \delta_c$  в кристалле существует два домена: домен высокой и домен низкой плотности экситонов и биэкситонов, граница раздела между которыми определяется интенсивностью накачки  $I_1$  (рис. 5.7).

Из (5.28) видно, что возможен также и частотный гистерезис, который определяет неоднозначную зависимость плотности экситонов  $m$  от расстройки резонанса  $\delta$  при фиксированном значении интенсивности накачки  $I_1$  (рис.5.6). Видно, что при фиксированном значении  $z$  (интенсивности накачки  $I_1$ ) плотность экситонов сначала растет вдоль

верхней ветви гистерезисной кривой  $y(\delta)$  до точки с вертикальной касательной, в которой происходит скачок на нижнюю ветвь, вдоль которой функция  $y(\delta)$  убывает с ростом  $\delta$ . При уменьшении  $\delta$  снова имеет место скачок с нижней ветви на верхнюю, но при меньших значениях  $\delta$  и далее  $y(\delta)$  уменьшается при уменьшении  $\delta$ . Таким образом, если изменять частоту поля накачки, то в этом случае также может существовать бистабильность и домены высокой и низкой плотности экситонов и биэкситонов в кристалле.

Таким образом, мы показали, что при накачке в экситонное состояние возникает инверсия населенностей между двухэкситонным и биэкситонным состояниями, на переходе между которыми возможна генерация терагерцового излучения. Интенсивность волны терагерцового излучения экспоненциально растет с ростом интенсивности накачки.

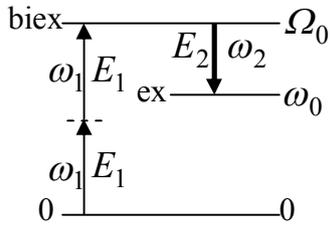


Рис. 5.1 Схема энергетических уровней экситона и биэкситона в кристалле типа CuCl и квантовых переходов под действием импульсов с амплитудами полей  $E_1$  и  $E_2$ .

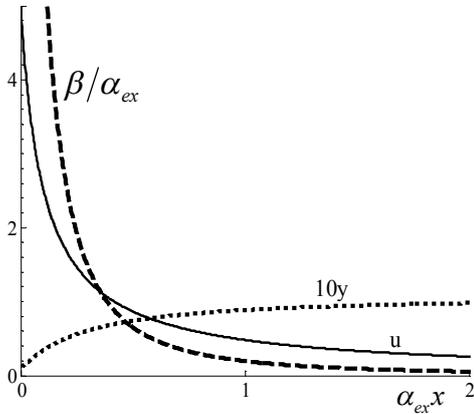


Рис. 5.2 Пространственные профили нормированных интенсивностей полей  $u$  и  $y$  и коэффициента усиления  $\beta/\alpha_{ex}$  при  $u_0 = 5$ ,  $y_0 = 0.01$ .

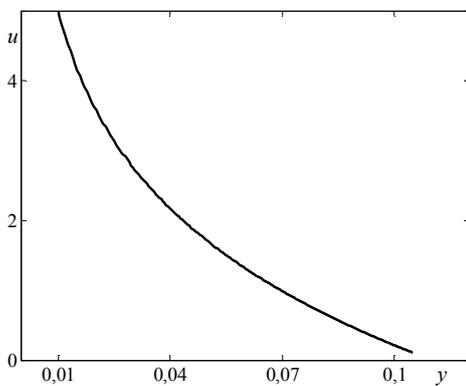


Рис.5.3 Зависимость между нормированными интенсивностями полей  $u$  и  $y$  в среде (при тех же значениях параметров, что и на рис.5.2).

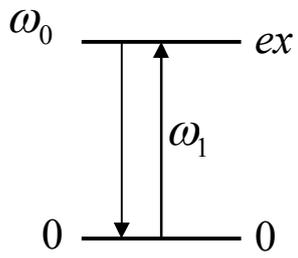
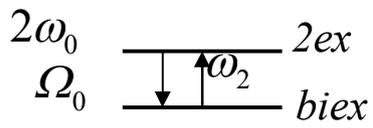


Рис. 5.4 Схема энергетических уровней и квантовых переходов.

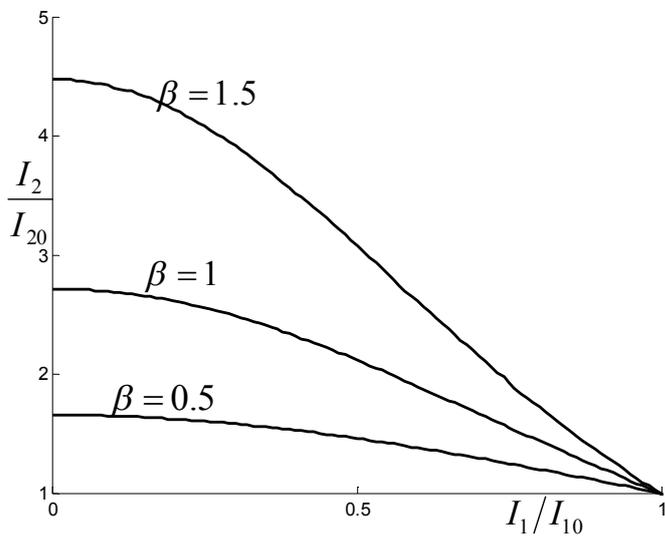


Рис. 5.5 Зависимость  $I_2(I_1)$  при различных значениях  $\beta$

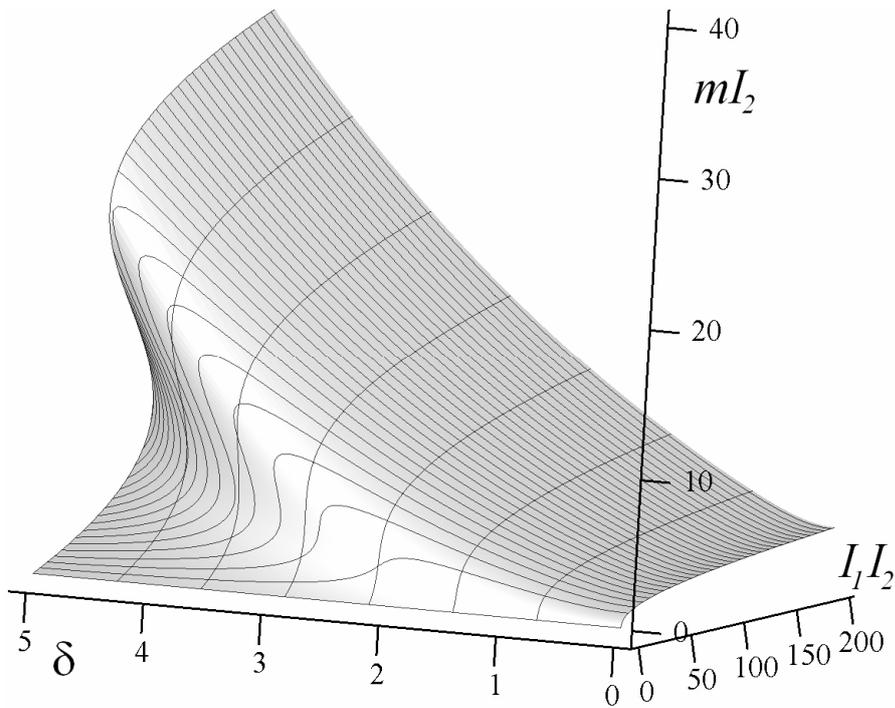


Рис. 5.6 Зависимость  $mI_2$  от  $I_1 I_2$  и расстройки резонанса  $\delta$ .

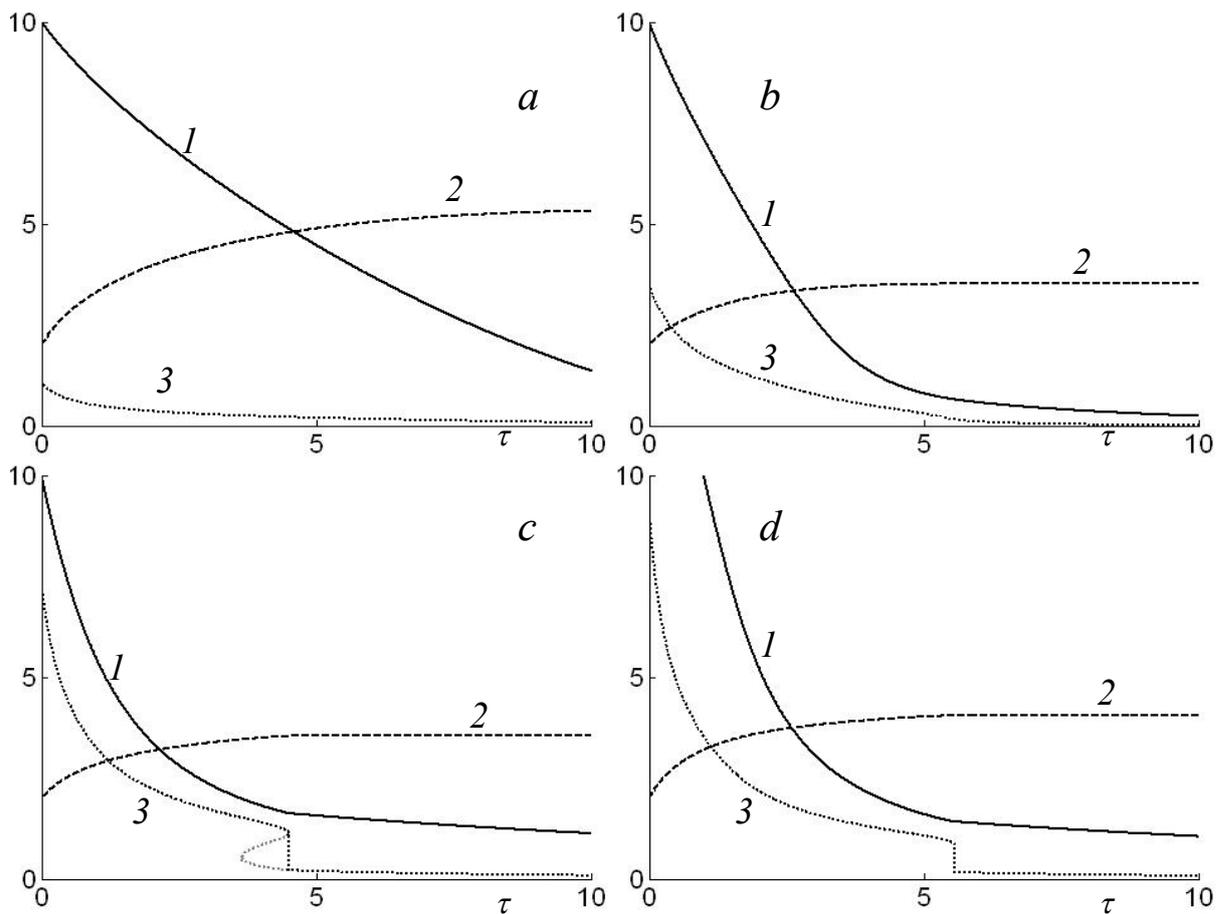


Рис. 5.7 Пространственное распределение профилей поля накачки (1), усиливаемого сигнала (2) и плотности экситонов (3) при  $F_{20}=0.6$  и различных значениях  $\delta=0$   $F_{10}=10$  (a),  $\delta=5$   $F_{10}=10$  (b),  $\delta=5$   $F_{10}=11$  (c),  $\delta=5$   $F_{10}=12$  (d).

## Заключение

В рамках полуклассического подхода построена последовательная теория когерентного нелинейного взаимодействия лазерного излучения с тонкой пленкой полупроводника в случаях падения на ТПП импульса с частотой в области экситонного перехода и двух импульсов, где суммарная частота обоих фотонов соответствует собственной частоте биэкситонного уровня, то есть фотоны попарно возбуждают биэкситоны из основного состояния кристалла. Предсказан дополнительный механизм затухания системы экситонов в ТПП, обусловленный выходом излучения через границы раздела пленки с вакуумом. Константа затухания пропорциональна толщине пленки и определяется обратным характерным временем реакции пленки. Предсказана возможность существования оптического аналога Фешбах-резонанса, состоящего в перенормировке константы упругого экситон-экситонного взаимодействия благодаря взаимодействию экситонов с полем ультракороткого импульса с самосогласованным чирпингом. Введенный параметр чирпинга определяет режимы усиления, ослабления или полного исчезновения нелинейного эффекта, обусловленного упругим экситон-экситонным взаимодействием. В случае падения на ТПП двух УКИ лазерного излучения предсказано скачкообразное изменение пропускания при выключении одного из импульсов. Доказана возможность бистабильного пропускания пленкой импульсов, причем пропусканием одного из импульсов можно управлять изменением амплитуды другого импульса. Описаны особенности эффекта оптической нутации в системе когерентных фотонов, экситонов и биэкситонов. Предсказаны механизмы усиления излучения в области М-полосы люминесценции при двухфотонной накачке биэкситонного состояния и терагерцового излучения при накачке в экситонный уровень благодаря оптической двухэкситон-биэкситонной конверсии. Из представленных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Временная эволюция плотности экситонов в тонкой пленке полупроводника при учете экситон-фотонного и упругого экситон-

экситонного взаимодействия представляет собой затухающие к стационарному состоянию осцилляции, частота и амплитуда которых определяется уровнем возбуждения и расстройкой резонанса. Проходящее через пленку излучение определяется как суперпозиция падающего излучения и вторичного излучения, генерируемого экситонной поляризацией.

2. Мгновенная частота самосогласованно модулированного по фазе импульса в каждый момент времени компенсирует сдвиг экситонного уровня, обусловленный ростом плотности экситонов.

3. В условиях двухимпульсного двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла в тонкой пленке полупроводника возможно установление режима полного просветления пленки для более сильного импульса и полного непропускания (отражения) для более слабого. Характерное время реакции пленки определяется ее толщиной.

4. Динамика явления оптической нутации в системе когерентных экситонов и биэкситонов на временах, на много меньших времени релаксаций возбуждений среды, под действием фотонов двух ультракоротких импульсов, представляет собой периодические либо аperiodические колебания плотностей частиц, частота и амплитуда которых существенно определяется начальными условиями.

5. Возможно усиление слабого излучения в области М-полосы люминесценции за счет инверсии населенности биэкситонного уровня относительно экситонного при двухфотонной накачке биэкситонов из основного состояния кристалла. Также возможно усиление слабого терагерцового сигнала на частоте, соответствующей оптической двухэкситон-биэкситонной конверсии при накачке в экситонный уровень.

## Литература

- [1] *Frenkel J.I.* On the transformation of light into heat in solids // *Phys. Rev.* 1931. V.37. P.1276.
- [2] *Frenkel J.I.* // *Phys. Z. d. SU.* 1934. V. 5. P. 597.
- [3] *Wannier G.H.* The structure of electronic excitation levels in insulating crystals // *Phys. Rev.* 1937. V. 52. P. 191.
- [4] *Mott N.F.* Conduction in polar crystals. II. The conduction band and ultra-violet absorption of alkali halide crystals // *Trans. Faraday Soc.* 1938. V. 34. P. 500.
- [5] *Гросс Е.Ф., Каррыев Н.А.* Поглощение света кристаллом закиси меди в инфракрасной и видимой части спектра // *Доклады АН СССР.* 1952. Т.84. С. 261.
- [6] *Гросс Е.Ф., Захарченя Б.П., Рейнов Н.М.* // *Доклады АН СССР.* 1954. Т.57. С. 97.
- [7] *Гросс Е.Ф., Захарченя Б.П., Рейнов Н.М.* // *Доклады АН СССР.* 1954. Т.99. С. 527.
- [8] *Москаленко С.А.* К теории экситона Мотта в щелочногалогидных кристаллах // *Оптика и спектроскопия.* 1958. Т.5. С. 147.
- [9] *Lampert M.A.* Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // *Phys. Rev. Lett.* 1958. V. 1. P.450.
- [10] *Рупасов В.И., Юдсон В.И.* О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред // *Квантовая электроника.* 1982. Т.9. С. 2179.
- [11] *Рупасов В.И., Юдсон В.И.* Нелинейная резонансная оптика тонких пленок: метод обратной задачи // *ЖЭТФ.* 1987. Т.93. С. 494.
- [12] *Самсон А.М., Логвин Ю.А., Туровец С.И.* Взаимодействие коротких импульсов света с инвертированной тонкой пленкой двухуровневых атомов // *Квантовая электроника.* 1990. Т.17. С. 1223.
- [13] *Benedict M.G., Trifonov E.D.* Coherent reflection as superradiation from the boundary of a resonant medium // *Phys. Rev. A.* 1988. V.38. P.2854.

- [14] *Захаров О.М., Маймистов А.И., Манькин Э.А., Селифанов М.А., Скляр Ю.М.* Переходные процессы, возникающие при взаимодействии света с тонким слоем поверхностных резонансных атомов // *Поверхность*. 1989. № 12. С. 60.
- [15] *Захаров С.М., Манькин Э.А.* Аналог "теоремы площадей" при взаимодействии ультракоротких импульсов света с тонким слоем резонансных атомов // *Поверхность*. 1989. №7. С. 68.
- [16] *Захаров С.М., Манькин Э.А.* Нелинейное взаимодействие света с тонким слоем поверхностных резонансных атомов // *ЖЭТФ*. 1994. Т.105. С. 1053.
- [17] *Манькин Э.А., Башаров А.М., Елютин С.О., Захаров С.М., Маймистов А.И., Скляр Ю.М.* Резонансная нелинейная оптика тонких пленок // *Известия АН СССР, сер.физ.* 1987. Т.53. С. 2350.
- [18] *Захаров С.М., Манькин Э.А.* Взаимодействие ультракоротких импульсов света с тонким слоем поверхностных атомов при двухфотонном резонансе // *ЖЭТФ*. 1989. Т. 95. С. 800.
- [19] *Захаров С.М., Манькин Э.А.* Пространственный синхронизм фотонного эха, возбуждаемого в тонком резонансном слое на границе раздела двух сред // *Оптика и спектроскопия*. 1987. Т. 63. С. 1069.
- [20] *Бенедикт М.Г., Зайцев А.И., Малышев В.А., Трифонов Е.Д.* Резонансное взаимодействие ультракороткого импульса света с тонкой пленкой // *Оптика и спектроскопия*. 1989. Т. 66. С. 726.
- [21] *Benedict M.G., Malyshev V.A., Trifonov E.D., Zaitsev A.L.* Reflection and transmission of ultrashort light pulses through a thin resonant medium: Local field effects // *Phys. Rev. A* 1991. V. 43. P. 3845.
- [22] *Бенедикт М.Г., Зайцев А.И., Малышев В.А., Трифонов Е.Д.* Беззеркальная бистабильность при прохождении ультракороткого импульса света через тонкий слой с резонансными двухуровневыми атомами // *Оптика и спектроскопия*. 1990. Т. 68. С. 812.
- [23] *Захаров С.М., Манькин Э.А.* Безрезонаторная оптическая бистабильность в тонком поверхностном слое резонансных атомов // *Поверхность*. 1988. №2. С. 137.

- [24] *Башаров А.М.* Тонкая пленка двухуровневых атомов – простая модель оптической бистабильности и самопульсаций // *ЖЭТФ*. 1988. Т. 94. С.12.
- [25] *Юревич В.А.* Особенности отражения УКИ света от тонкого слоя нелинейной среды // *Квантовая электроника*. 1994. Т. 21. С. 959.
- [26] *Vonifacio R., Lugiato L.A.* Bistable absorption in a ring cavity // *Lett.Nuovo Cimento*. 1978. V.21. P.505.
- [27] *Логвин Ю.А., Самсон А.М., Туровец С.И.* Модель нелинейного осциллятора для бистабильной тонкой пленки двухуровневых атомов // *Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук*. 1990. №6. С. 48.
- [28] *Логвин Ю.А., Самсон А.М., Туровец С.И.* Неустойчивости и хаос в бистабильной тонкой пленке двухуровневых атомов // *Квантовая электроника*. 1990. Т.17. С. 1521.
- [29] *Логвин Ю.А., Самсон А.М.* Прохождение света через систему двух бистабильных тонких пленок // *ЖЭТФ*. 1992. Т.102. С. 472.
- [30] *Бабушкин И.В., Логвин Ю.А., Лойко Н.А.* Нарушение симметрии в светодинамике двух бистабильных пленок // *Квантовая электроника*. 1998. Т.25. С. 251.
- [31] *Захаров С.М.* Взаимодействие ультракоротких импульсов света с тонкопленочными резонаторными структурами // *ЖЭТФ*. 1995. Т.108, С. 829.
- [32] *Горячев В.А., Захаров С.М.* Динамика прохождения ультракоротких импульсов света через тонкопленочные резонаторные структуры // *Квантовая электроника*. 1997. Т.24. С. 251.
- [33] *Горячев В.А., Захаров С.М., Маныкин Э.А.* Нелинейная динамика взаимодействия ультракоротких импульсов света с тонкопленочными резонаторными структурами // *Известия АН СССР сер. физ.*, 1999. Т.63. С. 683.
- [34] *Башаров А.М., Маймистов А.И., Маныкин Э.А.* Точно интегрируемые модели резонансного взаимодействия света с тонкой пленкой трехуровневых частиц // *ЖЭТФ*. 1990. Т.97. С. 1530.

- [35] *Хаджи П.И., Гайван С.Л.* Взаимодействие ультракоротких импульсов лазерного излучения с тонкой пленкой трехуровневых атомов // Оптика и спектроскопия. 1996. Т.81. С.333.
- [36] *Хаджи П.И., Гайван С.Л.* Взаимодействие ультракоротких импульсов света с тонкой пленкой трехуровневых атомов. — Известия АН РМ, физика и техника, №3(21), 45 (1996).
- [37] *Елютин С.О., Маймистов А.И.* О резонансном взаимодействии света с тонкой пленкой трехуровневых атомов // Оптика и спектроскопия. 2001. Т.90. С.849.
- [38] *Malyshev V.A., Glaeske H., Feller K.-H.* Intrinsic optical bistability of an ultrathin film consisting of oriented linear aggregates // Chem. Phys. 2000. V.113. P.1170.
- [39] *Glaeske H., Malyshev V.A., Feller K.-H.* Mirrorless optical bistability of an ultrathin glassy film built up of oriented J-aggregates: Effects of two-exciton states and exciton-exciton annihilation // Chem. Phys. 2001. V.114. P.1966.
- [40] *Glaeske H., Malyshev V.A., Feller K.-H.* Effects of higher exciton manifolds and exciton-exciton annihilation on optical bistable response of an ultrathin glassy film comprised of oriented linear Frenkel chains // Phys. Rev. A 2002. V. 65. P.033821.
- [41] *Ванагас Э.* Бистабильность в тонкой пленке полупроводника со сверхрешеткой // Лит. физ. сборник. 1992. Т.32. С.719.
- [42] *Ванагас Э.* Прохождение видеоимпульсов электромагнитного поля через тонкую пленку полупроводника со сверхрешеткой на границе раздела диэлектрических сред // Лит. физ. сборник. 1992. Т.32. С.634.
- [43] *Ванагас Э.* О прохождении биполярных видеоимпульсов электромагнитного поля через тонкую пленку полупроводника с квантовой сверхрешеткой // Письма в ЖТФ. 1993. Т.19. С.6.
- [44] *Ванагас Э.* "Квантование" площади видеоимпульсов электромагнитного поля при их прохождении через тонкую пленку полупроводниковой сверхрешетки // Лит. физ. журнал. 1993. Т.33. С.110.

- [45] *Голубков А., Макаров В.А.* Граничные условия для электромагнитного поля на поверхности линейных сред со слабонеоднородным оптическим откликом // Известия РАН. 1995. Т.59. С.93.
- [46] *Tang Z. K., Yanase A., Segawa J., Matsuura N., Cho K.* Quantization of excitons in CuCl epitaxial thin films: Behavior between a two-dimensional quantum well and the bulk // Phys. Rev. B 1995. V. 52. P.2640.
- [47] Нелинейная спектроскопия (под ред. Н. Бломбергена, пер. с англ.). М., 1979.
- [48] *Апанасевич П.А.* Основы теории взаимодействия света с веществом, Минск, 1977.
- [49] *Манькин Э.А., Самарцев В.В.* Оптическая эхо-спектроскопия. М., 1984.
- [50] *Бурштейн А.И., Пусен А.Ю.* Сверхнутаия // ЖЭТФ. 1975. Т.69. С.1927.
- [51] *Davydov A.S., Sericov A.A.* Quantum-Statistical Theory of Light Propagation in Crystals // Phys. Stat. Sol. (b). 1973. V.56. P.351.
- [52] *Samartsev V.V., Sheibut U.E., Ivanov U.S.* The Nutation Effect and SIT on the Exciton Levels // Spectrosc. Lett. 1976. V.9. P.57.
- [53] *Хаджи П.И., Белкин С.Н., Москаленко С.А., Ротару А.Х.* // ФТТ. 1980. Т. 22. С. 1961.
- [54] *Хаджи П.И., Москаленко С.А., Белкин С.И.* Явление нутации в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в области М-полосы // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 223.
- [55] *Москаленко С.А., Хаджи П.И., Ротару А.Х.* Солитоны и нутация в экситонной области спектра. Кишинев: Штиинца, 1980.
- [56] *Хаджи П.И.* Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках. Кишинев: Штиинца, 1985.
- [57] *Хаджи П.И., Москаленко С.А., Белкин С.Н., Ротару А.Х.* Явление когерентной нутации экситонов, фотонов и биэкситонов в полупроводниках // ФТТ. 1980. Т. 22. С. 749.
- [58] *Хаджи П.И., Белкин С.Н.* // ФТТ. 1979. Т. 21. С. 3291.
- [59] *Хаджи П.И., Москаленко С.А., Белкин С.Н.* // УФЖ. 1980. Т. 25. С. 361.

- [60] *Hanamura E.* Giant two-photon absorption due to excitonic molecule // *Solid Stat. Commun.* 1973. V. 12. P. 951.
- [61] *Hanamura E.* Excitonic Molecule. III. Electronic Structure // *J. Phys. Soc. Jap.* 1975. V. 39. P. 1506.
- [62] *Хаджи П.И., Шибаришина Г.Д., Ротару А.Х.* Оптическая бистабильность в системе когерентных экситонов и биэкситонов в полупроводниках. Кишинев: Штиинца, 1988.
- [63] *Ротару А.Х., Трончу В.З.* Нелинейное распространение света в полупроводниках при двухфотонном возбуждении биэкситонов // *ФТТ.* 1998. Т. 40. С. 1999.
- [64] *Хасанов О.Х., Русецкий Г.А.* Оптическая нутация в полупроводниковых гетероструктурах и плотных газах // *Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2007. Т. 149. С. 115.
- [65] *Русецкий Г.А., Хасанов О.Х.* Динамика экситонных переходов в полупроводниковых наноструктурах с квантовыми точками // *Учён. Зап. Казан. Гос. Ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2010. Т. 152. С. 150.
- [66] *Пластун И.Л.* Математическая модель распространения лазерного излучения в двухуровневой среде с насыщением поглощения и дисперсии // *Вестник Саратовского государственного технического университета.* 2010. Т. 3. С. 19.
- [67] *Пластун И.Л., Дербов В.Л.* Исследование влияния нестационарных когерентных эффектов и резонансного самовоздействия на характеристики лазерного пучка, модулированного по частоте // *Компьютерная оптика.* 2009. Т.33. С. 233.
- [68] *Елютин С.О., Маймистов А.И.* Эффекты фотонного эха и оптических нутаций в системе двухэлектронных квантовых точек // *Оптический журнал.* 2008. Т.75. С.13.
- [69] *Башаров А.М., Дубовис С.А., Знаменский Н.В.* Нутационный эффект при нерезонансном распространении электромагнитной волны в ансамбле квантовых точек // *Оптика и спектроскопия.* 2008. Т.104. С.784.

- [70] Федорук Г.Г. Нестационарная нутационная эпр-спектроскопия конденсированных сред (обзор) // Журнал прикладной спектроскопии. 2002. Т.69 С.141.
- [71] Хаджи П.И., Васильев В.В. Особенности двухфотонной оптической нутации в системе биэкситонов в полупроводниках с учётом упругих межчастичных взаимодействий // Квант.Электроника. 2010. Т.40. С.907.
- [72] Dragoman D., Dragoman M. Terahertz fields and applications // Progress in Quantum Electronics. 2004. V. 28. P. 1.
- [73] Sizov F., Rogalski A. THz detectors // Progress in Quantum Electronics. 2010. V. 34. P. 278.
- [74] Быстров А.М., Введенский Н.В., Гильденбург В.Б. Генерация терагерцового излучения при оптическом пробое газа // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т.82 С.852.
- [75] Введенский Н.В., Гильденбург В.Б. Прямое преобразование ультракоротких лазерных импульсов в терагерцовое излучение в процессе оптического пробоя газа // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2007. № 1. С.65.
- [76] Андреев А.А., Беспалов В.Г., Городецкий А.А. и др. Генерация сверхширокополосного терагерцового излучения при оптическом пробое воздуха двумя разночастотными фемтосекундными импульсами // Оптика и спектроскопия. 2009. Т.107. С.570.
- [77] Ахмеджанов Р.А., Иляков И.Е., Миронов В.А. и др. Плазменные механизмы генерации импульсного терагерцового излучения // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2009. Т.52. С.536.
- [78] Фролов А.А. Генерация терагерцового излучения при падении лазерного импульса на слой разреженной плазмы // Физика плазмы. 2010. Т.36. С.347.
- [79] Бугай А.Н., Сазонов С.В. О генерации терагерцового излучения в режиме самоиндуцированной прозрачности в системе примесей, обладающих постоянным дипольным моментом // Ученые записки

- Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т.152. С.36.
- [80] Антонов А.В., Гавриленко В.И., Иконников А.В. и др. Спектры излучения квантовых каскадных лазеров терагерцового диапазона // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2009. Т.52. С.550.
- [81] Крупа Н.Н. Терагерцовое излучение при экситонных переходах в кристаллах CdS // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2009. Т.52. С.449
- [82] Nuss M.C., Planken P.C.M., Brener I. et al. Terahertz electromagnetic radiation from quantum wells // Appl. Phys. B. 1994. V. 58. P.249.
- [83] Luo M.S.C., Chuang S.L., Planken P.C.M. et al. Generation of terahertz electromagnetic pulses from quantum-well structures // IEEE J. Quantum Electron. 1994. V.30. P.1478.
- [84] Huggard P.G., Shaw C.J., Andrews S.R. et al. Mechanism of THz Emission from Asymmetric Double Quantum Wells // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. P.1023.
- [85] Meier T., Thomas P., Koch S.W. Coherent effects in photoexcited semiconductor superlattices with electric fields // Phys. Low-Dimens. Semicond. Struct. 1998. V.3. P.1.
- [86] Lachaine J.M., Hawton M., Sipe J.E., Dignam M.M. Asymmetry in the excitonic Wannier-Stark ladder: A mechanism for the stimulated emission of terahertz radiation // Phys. Rev. B. 2000. V.62. P.R4829.
- [87] Kavokin K.V. et al. Stimulated emission of terahertz radiation by exciton-polariton lasers // Appl. Phys. Lett. 2010. V.97. P.201111.
- [88] Chansungsan C., Tsang L., Chuang S.L. Coherent terahertz emission from coupled quantum wells with exciton effects // J. Opt. Soc. Am. B. 1994. V.11. P.2508.
- [89] Savenko I.G., Shelykh I.A., Kaliteevski M.A. Nonlinear Terahertz Emission in Semiconductor Microcavities // Phys. Rev. Lett. 2011. V.107. P.027401.
- [90] Berstermann T., Scherbakov A.V., Akimov A.V. et al. Terahertz polariton sidebands generated by ultrafast strain pulses in an optical semiconductor microcavity // Phys. Rev. B. 2009. V.80. P.075301.

- [91] *Todorov Y., Andrews A.M., Sagnes I. et al.* Strong Light-Matter Coupling in Subwavelength Metal-Dielectric Microcavities at Terahertz Frequencies // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V.102. P.186402.
- [92] *Lu Yan-Zhao, Wang Xin-Bing, Miao Liang, Zuo Du-Luo, Cheng Zu-Hai* Terahertz Generation in Nonlinear Crystals with Mid-Infrared CO<sub>2</sub> Laser // *Chinese Physics Letters.* 2011. V.28. P.034201.
- [93] Kavokin V., Shelykh I.A., Taylor T., Glazov M.M. Vertical cavity surface emitting terahertz laser // arXiv:1201.4010 (2012).
- [94] *Келдыш Л.В.* В сб. Проблемы теоретической физики. М.: Наука. 1972.
- [95] *Балкарей Ю.И., Коган А.С.* Расслоение когерентного состояния экситонов, поддерживаемого световой накачкой // *Письма в ЖЭТФ.* 1993. Т.57. С.277.
- [96] *Moskalenko S.A., Snoke D.W.* Bose–Einstein condensation of excitons and biexcitons and coherent nonlinear optics with excitons. Cambridge Univ. Press. 2000.
- [97] *Панков Ж.* Оптические процессы в полупроводниках. М.:Мир. 1973.
- [98] *Литовченко В.Г. и др.* Влияние поверхности на экситонные характеристики полупроводников // *ФТП.* 2002. Т.36. С.447.
- [99] Экситоны, под ред. Е.И. Рашба, М.Д. Стурге. М.: Наука. 1985.
- [100] *Бродин М.С., Мясников Э.Н., Марисова С.В.* Поляритоны в кристаллооптике. Киев: Наукова Думка. 1984.
- [101] *Путаевский Л.П.* Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения // *УФН.* 2006. Т.176. С.345.
- [102] *Köhler T., Goral K.* Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances // *Rev.Mod.Phys.* 2006. V.78. P.1311.
- [103] Pellegrini P., Gacesa M., Côté R. Giant Formation Rates of Ultracold Molecules via Feshbach-Optimized Photoassociation // *Phys.Rev.Lett.* 2008. V.101. P.053201.
- [104] *Shimano R., Kuwata–Gonokami M.* Observation of Autler–Townes Splitting of Biexcitons in CuCl // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V.72. P.530.

- [105] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика, ч.2. М.: Наука. 1978.
- [106] *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1963.
- [107] *Хаджи П.И., Ткаченко Д.В.* Динамика стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т.83. С.120.
- [108] *Mayer E.J., Smith G.O., Heukeroth V. et al.* Evidence of biexcitonic contributions to four-wave mixing in GaAs quantum wells // Phys. Rev. B. 1994. V.50. P.14730.
- [109] *Svirko Iu.P., Kuwata-Gonokami M.* Signatures of the excitonic memory effects in four-wave mixing processes in cavity polaritons // Phys. Rev. B. 2000. V.62, P.6912.
- [110] *Петрашук К.Г., Руссу А.С., Хаджи П.И.* // ФТТ. 1981. Т.23. С.3191.
- [111] *Хаджи П.И., Петрашук К.Г.* // ФТП. 1975. Т.9. С.2340.
- [112] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Transmission of supershort laser pulses by thin semiconductor films due to two-photon biexciton excitation // Abstracts of 2nd International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics, Chisinau, 2004. P. 101.
- [113] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Особенности пропускания ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкими пленками полупроводника в условиях двухфотонного возбуждения биэкситонов // Труды IV международной конференции «Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы», Ульяновск, 2004. С. 68.
- [114] *Коровай А.В., Хаджи П.И., Марков Д.А.* Явление оптической бистабильности в пропускании тонкой полупроводниковой пленки в условиях двухфотонного возбуждения биэкситонов // Вестник приднестровского университета 2004, № 1. С. 57.
- [115] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Особенности пропускания (отражения) ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой

- пленкой полупроводника в условиях возбуждения экситонов и биэкситонов // Вестник приднестровского университета 2004. №1. С.94.
- [116] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Тонкая пленка полупроводника как базовый элемент прибора, генерирующего ультракороткие импульсы лазерного излучения // Датчики и системы 2004. Т. 67. С. 47.
- [117] *Коровай А.В., Хаджи П.И., Марков Д.А., Личман В.А., Станкул Г.В.* Пропускание ультракоротких импульсов тонкой пленкой полупроводника при возбуждении биэкситонов // Материалы IV Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве». Тирасполь. 2005. С. 60.
- [118] *Коровай А.В., Хаджи П.И., Марков Д.А., Личман В.А., Станкул Г.В.* Пропускание ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой пленкой полупроводника в условиях двухфотонного возбуждения биэкситонов // Вестник приднестровского университета 2005. №3. С.10.
- [119] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Optical bistability in transmission of thin semiconductor film without external feedback // Proceedings of the 4th International Conference on “Microelectronics and Computer Science”, Chisinau, 2005. V.I. P. 87.
- [120] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Resonatorless optical bistability in transmission of thin semiconductor film // Moldavian J. Phys. Sci. 2005. V.4. P. 408.
- [121] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Optical bistability in transmission of thin semiconductor film without external feedback // Abstracts of 2nd International conference on physics of electronic materials (Phyem'05). Калуга. 2005. С. 232.
- [122] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A., Lichman V.A.* Peculiarities of two-pulse transmission (reflection) of laser radiation by thin semiconductor films // Proceedings of SPIE, ICONO 2005. 2006. V.6259. P. 62590M.1-9.
- [123] *Коровай А.В., Коровай О.В., Хаджи П.И., Марков Д.А.* Двухимпульсное возбуждение биэкситонов ультракороткими импульсами лазерного

- излучения в тонкой полупроводниковой пленке // Вестник приднестровского университета 2006. №3. С. 53.
- [124] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A., Lichman V.A.* Transmission and reflection of two-pulse laser radiation by thin semiconductor films // Abstracts of 3<sup>rd</sup> International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics Chisinau, 2006. P. 217.
- [125] *Марков Д.А.* Оптическая нутация в системе когерентных экситонов и биэкситонов // Вестник приднестровского университета 2007. №3. С.53.
- [126] *Марков Д.А.* Оптическая нутация в системе когерентных экситонов и биэкситонов // Abstracts of International Conference of Young Researchers, Chisinau, 2007. С. 118.
- [127] *Марков Д.А.* Оптическая нутация в системе когерентных экситонов и биэкситонов // Материалы V Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве», Тирасполь, 2007. С. 93.
- [128] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Korovai O.V., Markov D.A.* Interaction of thin semiconductor films in exciton range of spectrum with supershort light pulses // The book of abstracts of International conference “Physics of low-dimensional structures” in honour of the 80-th anniversary of Professor Evghenii Petrovich Pokatilov Chisinau, 2007. P. 15.
- [129] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Korovai O.V., Markov D.A.* Interaction of supershort light pulses with thin semiconductor films in exciton range of spectrum // Technical Digest ICONO/LAT 2007, Minsk, 2007. P. I08-21.
- [130] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Korovai O.V., Markov D.A.* Interaction of supershort light pulses with thin semiconductor films in exciton range of spectrum // Proceedings of SPIE, ICONO 2007. V. 6729 P. 67291W.
- [131] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Belousov I.V., Markov D.A.* Nonlinear transmission and reflection of supershort light pulses by thin semiconductor films in exciton range of spectrum // Abstracts of CFM-2007, Chisinau, 2007. P. 38.

- [132] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Korovai O.V., Markov D.A.* The peculiarities of interaction of supershort light pulses with thin semiconductor films in exciton range of spectrum // Труды IX международной конференции «Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы», Ульяновск, 2007. С. 202.
- [133] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Нелинейное пропускание ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой плёнкой полупроводника в условиях двухфотонного двухимпульсного возбуждения биэкситонов // Оптика и спектроскопия. 2008. Т.104. С.109.
- [134] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Усиление и лазерная генерация на М-полосе люминесценции // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference “Telecommunications, Electronics and Informatics”, Chisinau, 2008. V. II. P. 317.
- [135] *Khadzhi P.I., Rosanov N.N., Markov D.A. et al.* Gain and lasing at M-band of luminescence of semiconductors // Abstracts of 4<sup>th</sup> International Conference on materials science and condensed matter physics, Chisinau, 2008. P. 233.
- [136] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A. et al.* Transmission of ultrashort pulses of laser radiation by thin semiconductor film due to two-photon biexciton generation // Abstracts of 4<sup>th</sup> International Conference on materials science and condensed matter physics, Chisinau, 2008. P. 225.
- [137] *Khadzhi P.I., Rosanov N.N., Markov D.A. et al.* Gain and lasing at M-band of luminescence of semiconductors // Technical program International Conference “Laser Optics 2008”, Санкт-Петербург, 2008. С. 59.
- [138] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Belousov I.V., Markov D.A.* Interaction of supershort light pulses with thin semiconductor films in exciton range of spectrum // 3rd International conference on physics of electronic materials (Phyem'08), Калуга, 2008. V. 2. С. 140.

- [139] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Amplification and lasing at M-band of luminescence // 3rd International conference on physics of electronic materials (Phyem'08), Калуґа, 2008. V. 2. С. 205.
- [140] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Belousov I.V., Markov D.A.* Transmission of supershort light pulses by thin semiconductor films in exciton range of spectrum // 22nd General Conference of the Condensed Matter Division of the European Physical Society, Rome, 2008. P. 43.
- [141] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Belousov I.V., Markov D.A.* Transmission of supershort light pulses by thin semiconductor films in exciton range of spectrum // *Mold. J. Phys. Sci.* 2008. V.7. P. 8.
- [142] *Хаджу П.И., Коровай А.В., Коровай О.В., Марков Д.А.* Оптическая нутація в системі екситонів, біекситонів і фотонів // Тези доповідей ІІІ Міжнародної науково–практичної конференції “МЕТІТ-3”, Кременчук, 2008. С. 199.
- [143] *Хаджу П.И., Розанов Н.Н., Марков Д.А. и др.* Пропускание фазово-модулированного лазерного излучения тонкой пленкой полупроводника в экситонной области спектра и оптический эффект Фешбаха // *Оптика и спектроскопия.* 2009. Т. 107. С. 613.
- [144] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A. et al.* Peculiarities of supershot light pulses transmission by thin semiconductor film in exciton range of spectrum // *Nanoscale Phenomena: Fundamentals and Applications* by Horst Hahn, Anatoli Sidorenko, Ion Tiginyanu, Chapter 4, Berlin, Heidelberg: Springer – Verlag. 2009. P. 29.
- [145] *Хаджу П.И., Коровай А.В., Белоусов И.В., Марков Д.А.* Пропускание фазово-модулированных ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой плёнкой полупроводника в экситонной области спектра // Тезиси докладов ІV Української наукової конференції фізики напівпровідників (УНКФП ІV), Запоріжжя, 2009. Т. 1, С. 102.
- [146] *Марков Д.А.* Усиление и лазерная генерация на М-полосе люминесценции // *Материалы ІV Международной научно-практической*

- конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве», Тирасполь, 2009. С. 81.
- [147] *Хаджи П.И., Розанов Н.Н., Марков Д.А. и др.* Оптический аналог Фешбах–резонанса в пропускании фазово-модулированных УКИ лазерного излучения тонкой плёнкой полупроводника в экситонной области спектра // Abstracts of CFM – 2009, Chishinau, 2009. С. 180.
- [148] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Усиление и лазерная генерация на М-полосе люминесценции // Abstracts of CFM – 2009, Chishinau, 2009. С. 186.
- [149] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Коровай О.В., Марков Д.А.* Взаимодействие тонкой полупроводниковой пленки с фазово-модулированным УКИ лазерного излучения в экситонной области спектра при высоком уровне возбуждения и оптический аналог Фешбах-резонанса // Вестник приднестровского университета. 2009. №3. С. 53
- [150] *Khadzhi P.I., Rosanov N.N., Markov D.A. et al.* Phase-modulated laser light transmission by a thin semiconductor film in the exciton range of spectrum and optical analog of the feshbach resonance // Abstracts of 5th International Conference MSCMP, Chishinau, 2010. P. 53.
- [151] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Belousov I.V., Markov D.A.* Nonlinear transmission of ultrashort laser pulses by a thin semiconductor film under two-photon generation of biexcitons // Abstracts of 5th International Conference MSCMP, Chisinau, 2010. P. 57.
- [152] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Коровай О.В., Марков Д.А.* Оптическая нутация в системе когерентных экситонов и биэкситонов // Proceedings of the 3-rd International Conference "Telecommunications, Electronics and Informatics", Chisinau, 2010. V.I. С.176.
- [153] *Белоусов И.В., Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Нелинейное пропускание ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой полупроводника в условиях двухфотонного возбуждения биэкситонов // Proceedings of the 3-rd International Conference "Telecommunications, Electronics and Informatics", Chisinau, 2010. V.I. С.336.

- [154] *Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Amplification and lasing at M-band of luminescence // Technical digest of ICONO/LAT 2010, Kazan, 2010. P. LME5.
- [155] *Khadzhi P.I., Rosanov N.N., Markov D.A. et al.* Phase-modulated laser light transmission by a thin semiconductor film in the exciton range of spectrum and optical analog of the Feshbach resonance // Technical digest of ICONO/LAT 2010, Kazan, 2010. P. ITuQ15.
- [156] *Belousov I.V., Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Nonlinear transmission of ultrashort laser pulses by a thin semiconductor film under two-photon generation of biexcitons // Technical digest of ICONO/LAT 2010, Kazan, 2010. P. IThL1.
- [157] *Belousov I.V., Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Nonlinear transmission of ultrashort laser pulses by a thin semiconductor film under two-photon generation of biexcitons // Proceedings of SPIE, ICONO 2010. V. 7993. P. 79930F.
- [158] *Khadzhi P.I., Rosanov N.N., Markov D.A. et al.* Transmission of phase modulated laser light through a thin semiconductor film in the excitonic spectral range and an optical analog of the Feshbach effect // Proceedings of SPIE, ICONO 2010. V. 7993. P. 79930G.
- [159] *Khadzhi P.I., Rosanov N.N., Markov D.A. et al.* Amplification and lasing at M-band of luminescence // Proceedings of SPIE, ICONO 2010. V. 7994. P. 799404.
- [160] *Belousov I.V., Khadzhi P.I., Corovai A.V., Markov D.A.* Nonlinear transmission and reflection of ultrashort laser pulses by a thin semiconductor film under two-photon generation of biexcitons // J. Phys.: Condens. Matter. 2011. V. 23. P. 225802.
- [161] *Белосов И.В., Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Нелинейное пропускание двух последовательных ультракоротких импульсов лазерного излучения тонкой пленкой полупроводника в условиях двухфотонного возбуждения биэкситонов // Труды международной

конференции "Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы". Ульяновск, 2011. С. 305.

- [162] *Хаджи П.И., Коровай А.В., Марков Д.А.* Генерация (усиление) терагерцового излучения при резонансном возбуждении экситонов в полупроводниках // Тезисы докладов V Украинской научной конференции физики полупроводников (УНКФП V), Ужгород, 2011. С. 191.
- [163] *Марков Д.А., Белоусов И.В., Хаджи П.И., Коровай А.В.* Взаимодействие тонкой полупроводниковой пленки с фазово-модулированными УКИ лазерного излучения в экситонной области спектра при высоком уровне возбуждения и оптический аналог Фешбах-резонанса // Тезисы докладов V Украинской научной конференции физики полупроводников (УНКФП V), Ужгород, 2011. С. 217.
- [164] *Марков Д.А., Белоусов И.В., Хаджи П.И., Коровай А.В.*, О генерации (усилении) терагерцового излучения в процессе резонансного возбуждения экситонов в полупроводниках // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. С. 15.