КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ W_p^1 ОБОБЩЕННОГО ИЗ КЛАССА L_p РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ.

Академик *В.А.Ильин, А.А.Кулешов*

Как и в работе [1] будем рассматривать в прямоугольнике $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \qquad (1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \qquad (2)$$

и с граничными условиями первого рода

$$u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = 0, \qquad (3)$$

второе из которых мы, не ограничивая общности, будем считать однородным[1].

Мы установим необходимые и достаточные условия на граничную функцию $\mu(t)$, обеспечивающие принадлежность рассматриваемого обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x,t)$ классу $W_p^1(Q_T)$.

[1]Случай двух неоднородных граничных условий первого рода сводится к суперпозиции двух задач рассматриваемого вида.

Ранее в [1] было установлено только необходимое условие на $\mu(t)$, обеспечивающие принадлежность $u(x,t)$ классу $W_p^1(Q_T)$ и заключающееся в существовании у функции $\mu(t)$ обобщенной производной на полусегменте $0 \leqslant t < T$ и в принадлежности $\mu'(t)$ классу $L_p[0, T-\varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$.

Основная теорема. *Если при фиксированных $T > 0$ и $p \geqslant 1$ функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_1[0, T-\varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$, то для принадлежности обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) классу $W_p^1(Q_T)$ необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $\mu(t)$ имела на полусегменте $0 \leqslant t < T$ обобщенную производную $\mu'(t)$ и чтобы существовал интеграл*

$$\int_0^T (T-t)|\mu'(t)|^p dt. \tag{4}$$

Замечание. Из существования интеграла (4) вытекает установленное в [1] необходимое условие принадлежности $u(x,t)$ классу $W_p^1(Q_T)$, заключающиеся в принадлежности $\mu'(t)$ классу $L_p[0, T-\varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$.

Приведем схему доказательства основной теоремы.

Так как любое $T > 0$ представимо при некотором натуральном n либо в виде $T = 2ln - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$, либо в виде $T = 2ln + l - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$, то следует, как в [2], рассмотреть отдельно два случая: а) $T = 2ln - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$, б) $T = 2ln + l - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$.

Рассмотрим сначала случай а). Как и в [2], примем во внимание, что в этом случае при всех Δ из полусегмента $0 \leqslant \Delta < l$ обобщенное решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) определяется одним и тем же равенством

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(t + x - 2lk), \tag{5}$$

в котором $\underline{\mu}(\tau)$ совпадает с $\mu(\tau)$ при $\tau \geqslant 0$ и равно нулю при $\tau < 0$. При этом полусегмент $[0, T)$ представляет собой сумму сегмента $[0, 2ln - l]$ и интервала $(2ln - l, T)$.

Из существования обобщенной производной $\mu'(t)$ на полусегменте $[0, T)$ вытекает, что саму функцию $\mu(t)$ можно считать определенной и непрерывной в каждой точке этого полусегмента. Особую роль для дальнейших рассуждений играет значение функции $\mu(t)$ в точке $2ln - l$.

Мы отдельно рассмотрим два подслучая случая а):

1) $\mu(2ln - l) = 0$, 2) $\mu(2ln - l) \neq 0$.

Сначала рассмотрим первый подслучай $\mu(2ln - l) = 0$. В этом подслучае мы, как и в [2], $\mu(t)$ в виде суммы $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$ со слагаемыми

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \leqslant 2ln - l, \\ \mu(t) \text{ при } 2ln - l < t < T, \end{cases} \qquad \mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2ln - l, \\ 0 \text{ при } 2ln - l < t < T. \end{cases}$$

При таком представлении в силу равенства $\mu(2ln - l) = 0$ каждая из функций

$\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ имеет обобщенную производную всюду на полусегменте $[0,T)$. В соответствие с таким представлением $\mu(t)$ решение $u(x,t)$, определяемое равенством (5), разбивается на сумму $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ со слагаемыми, определяемыми равенствами

$$u_1(x,t)=\begin{cases}0 \text{ при } t-x\leqslant 2ln-l,\\ \mu_1(t-x)=\mu(t-x) \text{ при } 2ln-l<t-x<T,\end{cases}$$

$$u_2(x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\underline{\mu}_2(t-x-2lk)-\sum_{k=1}^{n}\underline{\mu}_2(t+x-2lk),$$

во втором из которых символ $\underline{\mu}_2(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant 2ln-l$ и равную нулю при $\tau<0$ и $\tau>2ln-l$.

Достаточно доказать справедливость утверждения основной теоремы отдельно для каждой из двух пар - для пары $u_1(x,t)$ и $\mu_1(t)$ и для пары $u_2(x,t)$ и $\mu_2(t)$. При этом из теоремы 2 работы [1] и замечания в конце формулировки основной теоремы следует, что для второй пары достаточно доказать существование каждого из двух интегралов

$$\int\limits_0^l\Big[\int\limits_0^T\Big(\Big|\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t)\Big|^p+\Big|\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,t)\Big|^p\Big)dt\Big]dx, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^T(T-t)|\mu_2'(t)|^p dt. \tag{7}$$

Существование интеграла (7) вытекает из того, что

$$\int\limits_0^T (T-t)|\mu_2'(t)|^p dt = \int\limits_0^{2ln-l} (T-t)|\mu'(t)|^p dt \leqslant T \int\limits_0^{2ln-l} |\mu'(t)|^p dt.$$

Существование интеграла (6), имеющего в силу определения $\mu_2(t)$ и равенства (5) вид

$$\int\limits_0^l \Big[\int\limits_0^T \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2'(t-x-2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}_2'(t+x-2lk)\Big|^p dt+$$

$$+\int\limits_0^T \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2'(t-x-2lk) + \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}_2'(t+x-2lk)\Big|^p dt\Big] dx,$$

вытекает из того, что для каждого слагаемого всех четырех сумм справедливо неравенство

$$\int\limits_0^l \Big[\int\limits_0^T |\underline{\mu}_2'(t \mp x-2lk)|^p dt\Big] dx \leqslant l \int\limits_0^{2ln-l} |\mu'(t)|^p dt. \tag{8}$$

Таким образом, в рассматриваемом подслучае $\mu(2ln-l) = 0$ случая а) достаточно доказать, что интеграл

$$\int\limits_0^l \Big[\int\limits_0^T \Big(\Big|\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t)\Big|^p + \Big|\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t)\Big|^p\Big) dt\Big] dx = 2\int\limits_0^l \Big[\int\limits_{2ln-l}^T |\mu_1'(t-x)|^p dt\Big] dx \tag{9}$$

существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int\limits_{2ln-l}^T (T-t)|\mu_1'(t)|^p dt. \tag{10}$$

Указанные интегралы (9) и (10) отличаются от оцениваемых в работе [2] интегралов (9) и (10) только тем, что в них вместо функции $\mu_1(t)$ стоит функция

$\mu_1'(t)$ и, кроме того, тем, что перед интегралом (9) теперь стоит множитель 2. Поэтому в силу свойства полной аддитивности интеграла Лебега от неотрицательной функции достаточно (как и в работе [2]) доказать, что функция

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^l \Big[\int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon} |\mu_1'(t-x)|^p dt \Big] dx$$

ограничена на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничена функция

$$K(\varepsilon) = \int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon} (T-t)|\mu_1'(t)|^p dt.$$

Схема доказательства этого полностью аналогична схеме, приведенной в работе [2], и основана на установлении справедливости для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенства

$$K(\varepsilon) \geqslant I(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2} K(2\varepsilon).$$

Тем самым, рассмотрение подслучая $\mu(2ln-l) = 0$ случая а) завершено.

Укажем теперь как подслучай $\mu(2ln-l) \neq 0$ случая а) сводится к рассмотренному нами подслучаю. Для этого введем в рассмотрение решение $u_0(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) с граничной функцией $\mu_0(t)$, имеющей следующий вид

$$\mu_0(t) = \frac{\mu(2ln-l)}{(2ln-l)^2} t^2. \qquad (11)$$

Для рассматриваемого нами случая а) решение $u_0(x,t)$ определяется равенством

$$u_0(x,t) = \frac{\mu(2ln-l)}{(2ln-l)^2}\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}(\underline{t-x-2lk})^2 - \sum_{k=1}^{n}(\underline{t+x-2lk})^2\Big\}, \qquad (12)$$

в котором символ $(\underline{\tau})^2$ обозначает функцию, равную τ^2 при $\tau \geqslant 0$ и равную нулю при $\tau < 0$.

Из явного вида (11) и (12) функций $\mu_0(t)$ и $u_0(x,t)$ легко проверяется, что функция $u_0(x,t)$ принадлежит классу $W_p^1(Q_T)$, а для функции $\mu_0(t)$ существует интеграл $\int\limits_0^T (T-t)|\mu_0'(t)|^p dt$. Отсюда следует, что для завершения доказательства основной теоремы в подслучае $\mu(2ln-l) \neq 0$ случая а) достаточно установить справедливость утверждения основной теоремы для решения $\widehat{u}(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) с граничной функцией $\widehat{\mu}(t) = \mu(t) - \mu_0(t)$. Поскольку $\widehat{\mu}(2ln-l) = 0$, то мы свели рассматриваемый подслучай $\mu(2ln-l) \neq 0$ к рассмотренному выше первому подслучаю. Итак, для случая а) основная теорема доказана.

Для случая б), когда $T = 2ln + l - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$, схема доказательства основной теоремы полностью аналогична схеме, изложенной выше для случая а).

На этот раз для всех Δ из полусегмента $0 \leqslant \Delta < l$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) определяется равенством

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \underline{\mu}(t-x-2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(t+x-2lk),$$

в котором $\underline{\mu}(\tau)$ равно $\mu(\tau)$ при $\tau \geq 0$ и равно нулю при $\tau < 0$, а сегмент $[0 \leqslant t \leqslant 2ln - l]$ и интервал $(2ln - l < t < T)$, на которые в случае а) разбивается полусегмент $[0, T)$, в случае б) заменяются сегментом

$[0 \leqslant t \leqslant 2ln]$ и интервалом $(2ln < t < T)$.

В случае б) так же, как и в случае а), рассматриваются два подслучая $\mu(2ln) = 0$ и $\mu(2ln) \neq 0$, причем второй из этих подслучаев сводится к первому.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11-01-00436а и № 11-01-12031-офи-м-2011, а также Программы Президиума РАН № 14 (Проект 208).

Список литературы

[1] *Ильин В. А., Кулешов А. А.* // *ДАН. 2012. Т. , № . С..*

[2] *Ильин В. А., Кулешов А. А.* // *ДАН. 2012. Т. , № . С..*

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА.