ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ИЗ КЛАССА L_p РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО.

В.А.Ильин, А.А.Кулешов

Как и в работах [1]-[3] будем рассматривать в прямоугольнике $\overline{Q}_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и с граничными условиями первого рода

$$u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = 0, \tag{3}$$

второе из которых мы, не ограничивая общности, будем считать однородным[1].

В [1] мы использовали следующее определение решения рассматриваемой смешанной задачи (1)-(3).

[1]Случай двух неоднородных граничных условий является суперпозицией двух задач рассматриваемого типа.

Определение 1. Назовем функцию $u(x,t)$ обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением смешанной задачи (1)-(3), если эта функция принадлежит классу $L_p(Q_T)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)\Big]dxdt = \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt \tag{4}$$

для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям

$$\begin{cases} \Phi(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T); \Phi(x,T) \equiv 0 \text{ и } \Phi_t(x,T) \equiv 0 \text{ при всех } 0 \leqslant x \leqslant l; \\ \Phi(0,t) \equiv 0 \text{ и } \Phi(l,t) \equiv 0 \text{ при всех } 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{5}$$

В [1] было доказано, что для любых $T > 0$ и $p \geqslant 1$ при условии принадлежности граничной функции $\mu(t)$ классу L_p на всем сегменте $[0,T]$ вводимое сформулированным определением решение $u(x,t)$ существует и определяется равенствами:

а) при $T = 2ln - \Delta$, где n - натуральное число, а $\Delta \in [0,l)$,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(t + x - 2lk), \tag{6}$$

б) при $T = 2ln + l - \Delta$, где n - целое неотрицательное число, а $\Delta \in [0,l)$,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(t + x - 2lk), \tag{7}$$

в которых $\underline{\mu}(\tau)$ равно $\mu(\tau)$ при $\tau \geq 0$ и равно нулю при $\tau < 0$.

Однако, принадлежность $\mu(t)$ классу L_p на всем сегменте $[0,T]$ является только достаточным и не является необходимым условием существования вводимого указанным определением решения из класса $L_p(Q_T)$. В работе [2] при условии, что $\mu(t)$ принадлежит классу L_p на сегменте $[0, T-\varepsilon]$, где ε - любое число из интервала $0 < \varepsilon < T$, было введено обобщенное из класса L_p решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) в открытом с одной стороны прямоугольнике $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t < T)$, которое было определено как функция $u(x,t)$, совпадающая для любого ε из интервала $0 < \varepsilon < T$ с заведомо существующем решением из класса $L_p(Q_{T-\varepsilon})$ смешанной задачи (1)-(3) в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_{T-\varepsilon} = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon]$.

В [2] было доказано, что необходимым и достаточным условием принадлежности так определенного решения классу $L_p(Q_T)$ является существование интеграла

$$\int_0^T (T-t)|\mu(t)|^p dt. \tag{8}$$

При этом остался открытым вопрос о том, является ли введенное в [2] решение $u(x,t)$ при условии существования интеграла (8) обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением, удовлетворяющим условиям данного выше определения, т.е. удовлетворяющим интегральному тождеству (4) для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5).

Положительное решение этого вопроса составляет содержание настоящей работы.

Основная теорема. *Для любых $T > 0$ и $p \geqslant 1$ при условии существования интеграла (8) существует единственное обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3), удовлетворяющее интегральному тождеству (4) для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5), и определяемое равенствами (6) и (7).*

Для доказательства этой теоремы прежде всего заметим, что в [2] установлено, что при условии существования интеграла (8) (и только при условии его существования) функция $u(x,t)$, определяемая равенством (6) при $T = 2ln - \Delta$, $0 \leqslant \Delta < l$ и определяемая равенством (7) при $T = 2ln + l - \Delta$, $0 \leqslant \Delta < l$, принадлежит классу $L_p(Q_T)$. Поэтому достаточно доказать, что функция $u(x,t)$, определяемая указанными равенствами, удовлетворяет интегральному тождеству (4) для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5). Это вытекает из того, что при любом $p \geqslant 1$ может существовать единственная функция $u(x,t)$, удовлетворяющая тождеству (4) для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5)[2].

Предлагаемое нами доказательство справедливости тождества (4) базируется на установленной нами еще в [2] возможности разбиения граничной функции $\mu(t)$ на сумму двух слагаемых $\mu_1(t) + \mu_2(t)$ таких, что решение $u_1(x,t)$, отвечающее первому слагаемому $\mu_1(t)$, состоит из одного члена

[2]Единственность такой функции при любом $p \geq 1$ вытекает либо из сильно упрощенной схемы рассуждений, проведенных в §9 главы 2 работы [4], либо из результата, установленного в работе [5].

$\mu_1(t-x)$ и отлично от нуля только для значений t из интервала, примыкающего к граничной точке T, а решение $u_2(x,t)$, отвечающее второму слагаемому $\mu_2(t)$, обращается в нуль для значений t из этого примыкающего к точке T интервала.

Как и в [2], будем рассматривать два случая: а) $T = 2ln-\Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$, б) $T = 2ln + l - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < l$. Оба эти случая рассматриваются по аналогичной схеме, и мы ограничимся рассмотрением случая а).

В этом случае полусегмент $[0,T)$ разбивается на сумму сегмента $[0, 2ln-l]$ и интервала $(2ln-l, T)$, и мы представим граничную функцию $\mu(t)$ в виде суммы $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$ двух слагаемых вида

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \leqslant 2ln-l, \\ \\ \mu(t) \text{ при } 2ln-l < t < T, \end{cases} \qquad \mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2ln-l, \\ \\ 0 \text{ при } 2ln-l < t < T. \end{cases}$$

При таком разбиении, как уже установлено [2], решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, определяемые этими слагаемыми, имеют вид

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t-x \leqslant 2ln-l, \\ \\ \mu_1(t-x) = \mu(t-x) \text{ при } 2ln-l < t-x < T, \end{cases} \tag{9}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2(t-x-2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}_2(t+x-2lk), \tag{10}$$

где в (10) символ $\underline{\mu}_2(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 2ln-l$ и равную нулю при $\tau < 0$ и $\tau > 2ln-l$.

Так как $\mu_2(t)$ принадлежит классу L_p на всем сегменте $[0, T]$, то по теореме 1 из [1] функция $u_2(x,t)$ является обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением смешанной задачи (1)-(3), удовлетворяющим интегральному тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u_2(x,t)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)\Big]dxdt = \int\limits_0^T \mu_2(t)\Phi_x(0,t)dt$$

для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5).

Поэтому достаточно доказать, что для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5), при условии существования интеграла (8) функция $u_1(x,t)$, определяемая равенством (9), удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u_1(x,t)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)\Big]dxdt = \int\limits_0^T \mu_1(t)\Phi_x(0,t)dt,$$

принимающему для рассматриваемой функции (9) вид

$$\int\limits_0^l \int\limits_{2ln-l}^T \mu_1(t-x)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)\Big]dxdt = \int\limits_{2ln-l}^T \mu_1(t)\Phi_x(0,t)dt. \qquad (11)$$

Для доказательства справедливости тождества (11) обозначим через $\{\varepsilon_m\}$ сходящуюся к нулю последовательность чисел из интервала $(0, l-\Delta)$. С помощью числовой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ введем в рассмотрение последовательность функций $\{\widehat{\mu}_m(t)\}$, определив ее равенством

$$\widehat{\mu}_m(t) = \begin{cases} \mu_1(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon_m, \\ 0 \text{ при } T-\varepsilon_m < t < T \end{cases}$$

и заметив, что каждая функция $\widehat{\mu}_m(t)$ как и $\mu_1(t)$ обращается в нуль при $0 \leqslant t \leqslant 2ln - l$. Так как каждая функция $\widehat{\mu}_m(t)$ принадлежит классу L_p на сегменте $[0, T]$, то в силу теоремы 1 из [1] отвечающее ей решение $\widehat{u}_m(x, t)$ из класса $L_p(Q_T)$ смешанной задачи (1)-(3) существует и для любой пробной функции $\Phi(x, t)$, подчиненной условиям (5), удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T \widehat{u}_m(x,t)(x,t)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)\Big]dxdt = \int\limits_0^T \widehat{\mu}_m(t)\Phi_x(0,t)dt. \qquad (12)$$

Поскольку $\widehat{\mu}_m(t)$ обращается в нуль для значений $0 \leqslant t \leqslant 2ln - l$, то и $\widehat{u}_m(x, t)$ обращается в нуль для указанных значений t и определяется равенством $\widehat{u}_m(x, t) = \widehat{\mu}_m(t - x)$. Поэтому справедливое для любой пробной функции $\Phi(x, t)$, подчиненной условиям (5), тождество (12) можно преписать в виде

$$\int\limits_0^l \int\limits_{2ln-l}^T \widehat{\mu}_m(t-x)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)\Big]dxdt = \int\limits_{2ln-l}^T \widehat{\mu}_m(t)\Phi_x(0,t)dt. \qquad (13)$$

Из (13) заключаем, что для доказательства справедливости тождества (11) достаточно установить существование двух равных нулю пределов:

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_0^l \int\limits_{2ln-l}^T |\mu_1(t-x) - \widehat{\mu}_m(t-x)||\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)|dxdt = 0, \qquad (14)$$

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{2ln-l}^{T}[\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)]\Phi_x(0,t)dt=0, \tag{15}$$

причем для доказательства существования предела (14) в силу того, что $\Phi(x,t)\in C^2(\overline{Q}_T)$, и в силу неравенства Гельдера достаточно установить существование равного нулю предела

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{0}^{l}\int\limits_{2ln-l}^{T}|\mu_1(t-x)-\widehat{\mu}_m(t-x)|^p dxdt=0. \tag{16}$$

Для доказательства существования пределов (15) и (16) воспользуемся тем, что из определения функций $\widehat{\mu}_m(t)$ и из существования интеграла (8) вытекает существование равного нулю предела

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{2ln-l}^{T}(T-t)|\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)|^p dt=0 \tag{17}$$

и, в частности, равного нулю предела

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{2ln-l}^{T}(T-t)|\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)|dt=0. \tag{18}$$

Для доказательства существования предела (16) в силу существования предела (17) достаточно убедиться в том, что для любого номера m двойной интеграл, стоящий в левой части (16), существует и оценивается сверху через интеграл, стоящий в левой части (17). Для этого в силу свойства полной аддитивности интеграла Лебега от неотрицательной функции достаточно доказать, что на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^l \Big[\int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon} |\mu_1(t-x) - \widehat{\mu}_m(t-x)|^p dt\Big] dx \leqslant \int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon} (T-t)|\mu_1(t) - \widehat{\mu}_m(t)|^p dt. \quad (19)$$

Обозначая через $I(\varepsilon)$ интеграл, стоящий в левой части (19), производя в нем замену $\tau = t - x$ и учитывая, что $\mu_1(t)$ и $\widehat{\mu}_m(t)$ обращаются в нуль при $t \leqslant 2ln - l$ и что $T - \varepsilon - x \geqslant 2ln - l$ только при $x \leqslant l - \Delta - \varepsilon$, получим равенство

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^l \Big[\int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1(\tau) - \widehat{\mu}_m(\tau)|^p d\tau\Big] dx = \int\limits_0^{l-\Delta-\varepsilon} \Big[\int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1(\tau) - \widehat{\mu}_m(\tau)|^p d\tau\Big] dx.$$

Беря последний интеграл по частям, получаем

$$I(\varepsilon) = \Big[x \int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1(\tau) - \widehat{\mu}_m(\tau)|^p d\tau\Big]_{x=0}^{x=l-\Delta-\varepsilon} + \int\limits_0^{l-\Delta-\varepsilon} x|\mu_1(T-\varepsilon-x) - \widehat{\mu}_m(T-\varepsilon-x)|^p dx. \quad (20)$$

При любом $\varepsilon > 0$ обе подстановки в (20) обращаются в нуль и, производя в последнем интеграле в (20) замену $y = x + \varepsilon$, получим, что

$$I(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^{l-\Delta} (y-\varepsilon)|\mu_1(T-y) - \widehat{\mu}_m(T-y)|^p dy \leqslant \int\limits_\varepsilon^{l-\Delta} y|\mu_1(T-y) - \widehat{\mu}_m(T-y)|^p dy. \quad (21)$$

Производя в интеграле, стоящем в правой части (21), замену $t = T - y$, мы получим неравенство

$$I(\varepsilon) \leqslant \int\limits_{2ln-l}^{T-\varepsilon} (T-t)|\mu_1(t) - \widehat{\mu}_m(t)|^p dt,$$

совпадающее с (19) и завершающее доказательство существования предела (16).

Для завершения рассмотрения случая а) остается доказать существование предела (15).

Фиксируем произвольную пробную функцию $\Phi(x,t)$, подчиненную всем условиям (5). Тогда, во-первых, существует постоянная M такая, что для всех t из сегмента $[0,T]$ справедливо неравенство

$$|\Phi_x(0,t)| \leqslant M, \tag{22}$$

и, во-вторых, в силу существования равной нулю производной $\Phi_{xt}(0,T)$ и равенства $\Phi_x(0,T) = 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех t из интервала $T - \delta < t < T$ справедливо неравенство

$$|\Phi_x(0,t)| \leqslant |T-t|. \tag{23}$$

Из (22) и (23) заключаем, что

$$\Big|\int\limits_{2ln-l}^{T} [\mu_1(t) - \widehat{\mu}_m(t)]\Phi_x(0,t)dt\Big| \leqslant \int\limits_{2ln-l}^{T-\delta} |\mu_1(t) - \widehat{\mu}_m(t)||\Phi_x(0,t)|dt +$$

$$+\int\limits_{T-\delta}^{T}|\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)||\Phi_x(0,t)|dt\leqslant M\int\limits_{2ln-l}^{T-\delta}|\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)|dt+$$

$$+\int\limits_{T-\delta}^{T}(T-t)|\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)|dt\leqslant\Big(\frac{M}{\delta}+1\Big)\int\limits_{2ln-l}^{T}(T-t)|\mu_1(t)-\widehat{\mu}_m(t)|dt,$$

и существование равного нулю предела (15) вытекает из существования предела (18). Тем самым, доказательство основной теоремы для случая а) завершено.

Случай б) рассматривается аналогично: во всех рассуждениях сегмент $[0,2ln-l]$ заменяется на сегмент $[0,2ln]$.

Замечание 1. Из результатов работы [2] вытекает обратное утверждение: из принадлежности функции $\mu(t)$ классу $L_1[0,T-\varepsilon]$ при любом ε из интервала $0<\varepsilon<T$ и из выполнения условий определения 1 для функции $u(x,t)$ следует, что интеграл (8) существует, а $u(x,t)$ определяется равенством (6) при $T=2ln-\Delta$, $0\leqslant\Delta<l$ и равенством (7) при $T=2ln+l-\Delta$, $0\leqslant\Delta<l$. Отсюда также следует единственность решения $u(x,t)$, введенного определением 1.

Замечание 2. Рассмотренное в в [3] решение $u(x,t)$, принадлежащее при условии существования интеграла $\int\limits_0^T(T-t)|\mu'(t)|^p dt$ классу $W_p^1(Q_T)$, также является обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением смешанной задачи (1)-(3), удовлетворяющим тождеству (4) для любой пробной функции $\Phi(x,t)$, подчиненной условиям (5). Это вытекает из аналитического вида решения, результатов работы [1] и принадлежности функции $\mu(t)$ классу $L_p[0,T]$ при условии принадлежности $u(x,t)$ классу $W_p^1(Q_T)$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11-01-00436а и № 11-01-12031-офи-м-2011, а также Программы Президиума РАН № 14 (Проект 208).

Список литературы

[1] *Ильин В. А., Кулешов А. А. // ДАН. 2012. Т. 446, № 4. С..*

[2] *Ильин В. А., Кулешов А. А. // ДАН. 2012. Т. , № . С..*

[3] *Ильин В. А., Кулешов А. А. // ДАН. 2012. Т. , № . С..*

[4] *Ильин В. А. // УМН. 1960. Т.15, № 2. С.97 - 154 .*

[5] *Моисеев Е. И., Холомеева А. А. // ДАН. 2011. Т.441. № 3. С.310 - 312.*

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА.