ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2009, том 45, № 6, с. 810–817

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

# О ЧЕТЫРЕХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2009 г. А. А. Кулешов

*Посвящается выдающемуся ученому*
*ректору МГУ академику*
*Виктору Антоновичу Садовничему*

Рассматриваются четыре смешанные задачи для уравнения колебаний струны с граничными и однородными нелокальными условиями первого либо второго рода и нулевыми начальными условиями. Через рекуррентные соотношения найдены обобщенные решения указанных задач.

В настоящей работе строятся обобщенные решения $u(x,t)$ волнового уравнения для четырех смешанных задач с нулевыми начальными условиями, граничными условиями $u(0,t) = \mu(t)$ либо $u_x(0,t) = \mu(t)$ и однородными нелокальными условиями $u(l,t) = \alpha u(x_0,t)$ либо $u_x(l,t) = \alpha u_x(x_0,t)$, где $0 \le x_0 < l$, $\alpha$ – произвольная константа.

В прямоугольнике $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ рассмотрим введенный В.А. Ильиным в [1] класс $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ функций двух переменных $u(x,t)$, непрерывных в $Q_T$ и обладающих обобщенными частными производными $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, принадлежащими классу $L_2(Q_T)$, а также классу $L_2[0 \le x \le l]$ при всех $t \in [0,T]$ и классу $L_2[0 \le t \le T]$ при всех $x \in [0,l]$. Будем искать обобщенные из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решения смешанных задач для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и с одной из следующих совокупностей граничных и нелокальных условий:

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \alpha u(x_0,t), \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \alpha u_x(x_0,t), \tag{4}$$

где $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$, удовлетворяющая условию $\mu(0) = 0$;

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \alpha u(x_0,t), \tag{5}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \alpha u_x(x_0,t), \tag{6}$$

где $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $L_2[0,T]$.

В условиях (3)–(6) $x_0$ удовлетворяет неравенству $0 \le x_0 < l$, $\alpha$ – произвольная константа. Отметим, что решения задач (3)–(6) при $\alpha = \pm 1$ найдены В.А. Ильиным в работах [2–4]. Из работы [5] вытекает следующее

**Определение 1.** Обобщенным из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решением смешанной задачи для волнового уравнения (1) с нулевыми начальными условиями (2) и с одной из совокупностей граничных и нелокальных условий (3)–(6) называется функция $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt=\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt & \text{в случае}\quad u(0,t)=\mu(t),\\ \displaystyle-\int_0^T\mu(t)\Phi(0,t)\,dt & \text{в случае}\quad u_x(0,t)=\mu(t)\end{cases}+$$

$$+\begin{cases}\displaystyle-\alpha\int_0^T u(x_0,t)\Phi_x(l,t)\,dt & \text{в случае}\quad u(l,t)=\alpha u(x_0,t),\\ \alpha\int_0^T u_x(x_0,t)\Phi(l,t)\,dt & \text{в случае}\quad u_x(l,t)=\alpha u_x(x_0,t),\end{cases}$$

в котором $\Phi(x,t)$ – произвольная функция из класса $C^2(Q_T)$, удовлетворяющая нулевым финальным условиям $\Phi(x,T)=0$, $\Phi_t(x,T)=0$ при $0\le x\le l$, равенству $\Phi(0,t)=0$ при $0\le t\le T$ в случае $u(0,t)=\mu(t)$, равенству $\Phi_x(0,t)=0$ при $0\le t\le T$ в случае $u_x(0,t)=\mu(t)$, равенству $\Phi(l,t)=0$ при $0\le t\le T$ в случае $u(l,t)=\alpha u(x_0,t)$ и равенству $\Phi_x(l,t)=0$ при $0\le t\le T$ в случае $u_x(l,t)=\alpha u_x(x_0,t)$.

В силу основной теоремы работы [5] каждая из рассматриваемых смешанных задач может иметь только одно обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение в смысле определения 1.

Обозначим через $\underline{\mu}(t)$ функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $t\ge 0$ и равную нулю при $t<0$. Введем также функцию $\widehat{\underline{\mu}}(x)=\int_0^x\underline{\mu}(\tau)d\tau$. Заметим, что если функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_2[0,T]$, то функция $\widehat{\underline{\mu}}(x)$ принадлежит классу $W_2^1(-\infty,T]$. Также из принадлежности функции $\mu(t)$ классу $W_2^1[0,T]$ и выполнения условия $\mu(0)=0$ следует принадлежность функции $\underline{\mu}(t)$ классу $W_2^1(-\infty,T]$. Далее для произвольного $T>0$ выберем целое положительное число $m_0$ такое, что $T\le l+(m_0-1)(l-x_0)$ (возможность такого выбора $m_0$ обусловлена тем, что $l-x_0>0$), и введем множество $\Omega=\{(m,n):\ (m,n)\in Z\times Z,$ $|n-1|+1\le m\le m_0\}$. Теперь перейдем к формулировке основных результатов.

**Теорема 1.** *Для произвольных чисел $T>0$, $\alpha$ и $x_0\in[0,l]$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $W_2^1[0,T]$, удовлетворяющей условию $\mu(0)=0$, каждая из смешанных задач (1), (2), (3) и (1), (2), (4) имеет единственное обобщенное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой*

$$u(x,t)=\underline{\mu}(t-x)+\sum_{(m,n)\in\Omega}a_{m,n}[\underline{\mu}(t-x-(ml+nx_0))-\underline{\mu}(t+x-(ml+nx_0))],\tag{7}$$

*где $a_{m,n}$ – постоянные коэффициенты, алгоритм нахождения которых описан ниже.*

**Теорема 2.** *Для произвольных чисел $T>0$, $\alpha$ и $x_0\in[0,l]$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $L_2[0,T]$ каждая из смешанных задач (1), (2), (5) и (1), (2), (6) имеет единственное обобщенное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой*

$$u(x,t)=-\widehat{\underline{\mu}}(t-x)+\sum_{(m,n)\in\Omega}a_{m,n}[\widehat{\underline{\mu}}(t-x-(ml+nx_0))+\widehat{\underline{\mu}}(t+x-(ml+nx_0))],\tag{8}$$

*где $a_{m,n}$ – постоянные коэффициенты, алгоритм нахождения которых описан ниже.*

Проведем подробное доказательство теоремы 1 для смешанной задачи (1)–(3).

Введем множества

$$\widehat{\Omega} = \{(m,n):\ (m,n) \in Z \times Z,\ -1 \le m \le m_0,\ 1 - m_0 \le n \le 1 + m_0\},$$

$$\widehat{\Omega}^{m+1} = \{(m,n):\ (m-1,n) \in \widehat{\Omega}\}, \quad \widehat{\Omega}^{m-1} = \{(m,n):\ (m+1,n) \in \widehat{\Omega}\},$$

$$\widehat{\Omega}^{n+1} = \{(m,n):\ (m,n-1) \in \widehat{\Omega}\}, \quad \widehat{\Omega}^{n-1} = \{(m,n):\ (m,n+1) \in \widehat{\Omega}\}$$

и положим

$$a_{m,n} = 0 \quad \text{при} \quad (m,n) \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega \setminus \{(0,0)\}, \quad a_{0,0} = 1.$$

Для определения значений $a_{m,n}$ при $(m,n) \in \Omega$ воспользуемся соотношением

$$a_{m+1,n} = \alpha(a_{m,n+1} - a_{m,n-1}) + a_{m-1,n}. \tag{9}$$

При $k = 0$ будем записывать формулу (9) для $(m,n) = (k+|q-1|, q)$ последовательно при $q = \overline{1, m_0 - k}$. На каждом шаге из (9) через известные нам коэффициенты находим значение $a_{k+|q-1|+1,q}$. Далее записываем формулу (9) для $(m,n) = (k + |q-1|, -q)$ последовательно при $q = \overline{0, m_0 - k - 2}$ (этот шаг следует выполнять при $k \le m_0 - 2$). На каждом шаге из (9) находим значение $a_{k+|q-1|+1,-q}$. Затем, повторяя описанную выше процедуру для $k = 1$, $k = 2$ и т.д. до $k = m_0 - 1$, определим все $a_{m,n}$ при $(m,n) \in \Omega$. Все вычисления ведутся последовательно вдоль ветвей функций $m = k + |n-1|$, их количество пропорционально $m_0^2$. Стоит отметить, что $a_{m,n} = 0$ при $(m,n) \in \Omega \cap \{m = |n-1| + 2p\}$ для $p = \overline{1, [m_0/2]}$. Заметим также, что применение описанного выше алгоритма гарантирует выполнение соотношения (9) при $(m,n) \in \Omega_0 = \Omega \cap \{m \ge |n-1|\} \cap \{m \le m_0 - 1\}$. Введем также множества

$$\Omega_0^{m+1} = \{(m,n):\ (m-1,n) \in \Omega_0\}, \quad \Omega_0^{m-1} = \{(m,n):\ (m+1,n) \in \Omega_0\},$$

$$\Omega_0^{n+1} = \{(m,n):\ (m,n-1) \in \Omega_0\}, \quad \Omega_0^{n-1} = \{(m,n):\ (m,n+1) \in \Omega_0\},$$

которые понадобятся нам в дальнейшем.

Далее покажем, что функция, определяемая формулой (7), где коэффициенты $a_{m,n}$ найдены по описанному выше алгоритму, удовлетворяет условиям (3). Подставляя в (7) $x = 0$, убеждаемся в выполнении граничного условия $u(0,t) = \underline{\mu}(t) = \mu(t)$ при $0 \le t \le T$.

Так как $\Omega \subset \{m \ge 1 + |n-1|\}$, то

$$ml + nx_0 \ge l + |n-1|l + nx_0 \ge l + |n-1|x_0 + nx_0 = l + x_0 + [|n-1| + (n-1)]x_0 \ge l + x_0.$$

Таким образом, из неположительности аргументов функций $\underline{\mu}(-x)$, $\underline{\mu}(\pm x - (ml + nx_0))$ и $\underline{\mu}'(-x)$, $\underline{\mu}'(\pm x - (ml + nx_0))$ при $0 \le x \le l$ следует выполнение начальных условий $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

Теперь покажем, что выполняется нелокальное условие из (3). Для этого запишем формулу (7) в виде

$$u(x,t) = \sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}} [a_{m,n}\underline{\mu}(t - x - (ml + nx_0)) + b_{m,n}\underline{\mu}(t + x - (ml + nx_0))], \tag{10}$$

где

$$b_{m,n} = -a_{m,n} \quad \text{при} \quad (m,n) \in \widehat{\Omega} \setminus \{(0,0)\}, \quad b_{0,0} = 0.$$

Теперь, подставив функцию $u(x,t)$, определенную формулой (10), во второе условие из (3), получим соотношение

$$\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}}[a_{m,n}\underline{\mu}(t-((m+1)l+nx_0))+b_{m,n}\underline{\mu}(t-((m-1)l+nx_0))]=$$

$$=\alpha\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}}[a_{m,n}\underline{\mu}(t-(ml+(n+1)x_0))+b_{m,n}\underline{\mu}(t-(ml+(n-1)x_0))],$$

которое с учетом введенных выше множеств $\widehat{\Omega}^{m+1}$, $\widehat{\Omega}^{m-1}$, $\widehat{\Omega}^{n+1}$, $\widehat{\Omega}^{n-1}$ можно записать в виде

$$\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{m+1}}a_{m-1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{m-1}}b_{m+1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))=$$

$$=\alpha\Bigg[\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{n+1}}a_{m,n-1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{n-1}}b_{m,n+1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))\Bigg]. \qquad (11)$$

Далее покажем, что равенство (11) является тождеством при любом $t$ из сегмента $[0,T]$. В силу того что $\Omega_0\subset\widehat{\Omega}^{m+1}\cap\widehat{\Omega}^{m-1}\cap\widehat{\Omega}^{n+1}\cap\widehat{\Omega}^{n-1}$, соотношение (11) примет вид

$$\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{m+1}\setminus\Omega_0}a_{m-1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\Omega_0}a_{m-1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+$$

$$+\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{m-1}\setminus\Omega_0}b_{m+1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\Omega_0}b_{m+1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))=$$

$$=\alpha\Bigg[\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{n+1}\setminus\Omega_0}a_{m,n-1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\Omega_0}a_{m,n-1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+$$

$$+\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{n-1}\setminus\Omega_0}b_{m,n+1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\Omega_0}b_{m,n+1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))\Bigg].$$

Заметим, что

$$\sum_{(m,n)\in\Omega_0}a_{m-1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\Omega_0}b_{m+1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))-$$

$$-\alpha\Bigg[\sum_{(m,n)\in\Omega_0}a_{m,n-1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\Omega_0}b_{m,n+1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))\Bigg]=$$

$$=\sum_{(m,n)\in\Omega_0}[a_{m-1,n}+b_{m+1,n}-\alpha(a_{m,n-1}+b_{m,n+1})]\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))=$$

$$=\sum_{(m,n)\in\Omega_0}[a_{m-1,n}-a_{m+1,n}-\alpha(a_{m,n-1}-a_{m,n+1})]\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))=0$$

в силу выполнения соотношения (9) при $(m,n)\in\Omega_0$.

Из последних двух формул следует, что соотношение (11) можно записать в виде

$$\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{m+1}\setminus\Omega_0}a_{m-1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{m-1}\setminus\Omega_0}b_{m+1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))=$$

$$=\alpha\Bigg[\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{n+1}\setminus\Omega_0}a_{m,n-1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))+\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}^{n-1}\setminus\Omega_0}b_{m,n+1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))\Bigg],$$

что равносильно соотношению

$$\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}\setminus\Omega_0^{m-1}} a_{m,n}\underline{\mu}(t-((m+1)l+nx_0)) + \sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}\setminus\Omega_0^{m+1}} b_{m,n}\underline{\mu}(t-((m-1)l+nx_0)) =$$

$$= \alpha\Big[\sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}\setminus\Omega_0^{n-1}} a_{m,n}\underline{\mu}(t-(ml+(n+1)x_0)) + \sum_{(m,n)\in\widehat{\Omega}\setminus\Omega_0^{n+1}} b_{m,n}\underline{\mu}(t-(ml+(n-1)x_0))\Big]. \quad (12)$$

Так как все ненулевые коэффициенты $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ при $(m,n)\in\widehat{\Omega}$ сосредоточены в области $\{m\geq 1+|n-1|\}\cup\{(0,0)\}$, то соотношение (12) примет вид

$$\sum_{(m,n)\in V\cup W} a_{m,n}\underline{\mu}(t-((m+1)l+nx_0)) =$$

$$= \alpha\Big[\sum_{(m,n)\in V} a_{m,n}\underline{\mu}(t-(ml+(n+1)x_0)) + \sum_{(m,n)\in V} b_{m,n}\underline{\mu}(t-(ml+(n-1)x_0))\Big], \quad (13)$$

где

$$V=\{(m_0,n):\ n=\overline{2-m_0,m_0}\,\},\quad W=\{(m_0-1,n):\ n=\overline{3-m_0,m_0-1}\,\}.$$

Теперь запишем (13) в виде

$$\sum_{(m,n)\in V^{m+1}\cup W^{m+1}} a_{m-1,n}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0)) =$$

$$= \alpha\Big[\sum_{(m,n)\in V^{n+1}} a_{m,n-1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0)) + \sum_{(m,n)\in V^{n-1}} b_{m,n+1}\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))\Big], \quad (14)$$

где

$$W^{m+1}=\{(m_0,n):\ n=\overline{3-m_0,m_0-1}\,\},\quad V^{m+1}=\{(m_0+1,n):\ n=\overline{2-m_0,m_0}\,\},$$

$$V^{n+1}=\{(m_0,n):\ n=\overline{3-m_0,m_0+1}\,\},\quad V^{n-1}=\{(m_0,n):\ n=\overline{1-m_0,m_0-1}\,\}.$$

Осталось лишь заметить, что при $t\leq T\leq m_0l+(1-m_0)x_0=l+(m_0-1)(l-x_0)$ значения аргументов всех функций $\underline{\mu}(t-(ml+nx_0))$, входящих в (14), неположительны. Таким образом, соотношение (14), а следовательно, и соотношение (11) обращаются в тождества, что влечет за собой выполнение нелокального условия (3).

Далее покажем, что функция $u(x,t)$, определяемая формулой (7), является решением смешанной задачи (1)–(3), т.е., согласно определению 1, принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt = \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt - \alpha\int_0^T u(x_0,t)\Phi_x(l,t)\,dt, \quad (15)$$

в котором $\Phi(x,t)$ – произвольная функция из класса $C^2(Q_T)$, удовлетворяющая нулевым финальным условиям $\Phi(x,T)=0$, $\Phi_t(x,T)=0$ при $0\leq x\leq l$ и равенствам $\Phi(0,t)=0$, $\Phi(l,t)=0$ при $0\leq t\leq T$.

Прежде всего отметим, что принадлежность функции $u(x,t)$, определенной формулой (7), классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ вытекает из того, что эта функция представляет собой алгебраическую сумму конечного числа функций от аргумента $t+x$ или $t-x$, каждая из которых принадлежит классу $W_2^1(-\infty,T]$.

Далее, используя тривиально проверяемое равенство

$$u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]=$$

$$=\{[u(x,t)\Phi_t(x,t)]_t-[u(x,t)\Phi_x(x,t)]_x\}+[u_x(x,t)\Phi_x(x,t)-u_t(x,t)\Phi_t(x,t)],$$

получаем соотношение

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt=I_1+I_2, \tag{16}$$

где

$$I_1=\iint\limits_{Q_T}\{[u(x,t)\Phi_t(x,t)]_t-[u(x,t)\Phi_x(x,t)]_x\}\,dx\,dt, \tag{17}$$

$$I_2=\int\limits_0^T\int\limits_0^l[u_x(x,t)\Phi_x(x,t)-u_t(x,t)\Phi_t(x,t)]\,dx\,dt. \tag{18}$$

К интегралу (17) применим формулу Грина

$$\iint\limits_{Q_T}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)dx\,dt=\oint\limits_{\Gamma}P\,dx+Q\,dt,$$

обозначая через $\Gamma$ границу прямоугольника $Q_T$ и полагая

$$P=-u(x,t)\Phi_t(x,t),\quad Q=-u(x,t)\Phi_x(x,t).$$

Учитывая, что $\Phi_t(x,T)=0$, $u(x,0)=0$ при $0\le x\le l$, $u(0,t)=\mu(t)$, $u(l,t)=\alpha u(x_0,t)$ при $0\le t\le T$, получаем равенства

$$I_1=-\left[\int\limits_0^T u(l,t)\Phi_x(l,t)\,dt+\int\limits_T^0 u(0,t)\Phi_x(0,t)\,dt\right]=\int\limits_0^T\mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt-\alpha\int\limits_0^T u(x_0,t)\Phi_x(l,t)\,dt. \tag{19}$$

Для вычисления интеграла (18) введем в рассмотрение функцию

$$U(x,t)=-\underline{\mu}(t-x)-\sum_{(m,n)\in\Omega}a_{m,n}[\underline{\mu}(t-x-(ml+nx_0))+\underline{\mu}(t+x-(ml+nx_0))],$$

связанную с $u(x,t)$ соотношениями

$$u_x(x,t)=U_t(x,t),\quad u_t(x,t)=U_x(x,t), \tag{20}$$

являющимися равенствами элементов из $L_2[0\le x\le l]$, справедливыми для любого $t$ из сегмента $[0,T]$, и равенствами элементов из $L_2[0\le t\le T]$, справедливыми для любого $x$ из сегмента $[0,l]$.

Равенства (20) позволяют записать (18) в виде

$$I_2=\int\limits_0^l\left[\int\limits_0^T U_t(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx-\int\limits_0^T\left[\int\limits_0^l U_x(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt. \tag{21}$$

Вычисляя в (21) внутренние (заключенные в квадратные скобки) интегралы по частям, получаем равенство

$$I_2 = \int\limits_0^l [U(x,T)\Phi_x(x,T) - U(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx - \int\limits_0^l \int\limits_0^T U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int\limits_0^T [U(l,t)\Phi_t(l,t) - U(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dx + \int\limits_0^l \int\limits_0^T U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt. \qquad (22)$$

Принимая во внимание, что двойные интегралы в (22) взаимно уничтожаются и что справедливы равенства $\Phi_x(x,T) = 0$ при $0 \le x \le l$, $\Phi_t(0,t) = 0$, $\Phi_t(l,t) = 0$ при $0 \le t \le T$, имеем

$$I_2 = -\int\limits_0^l U(x,0)\Phi_x(x,0)\,dx. \qquad (23)$$

Вычисляя интеграл (23) по частям, получаем

$$I_2 = -U(l,0)\Phi(l,0) + U(0,0)\Phi(0,0) + \int\limits_0^l U_x(x,0)\Phi(x,0)\,dx,$$

откуда в силу равенств $\Phi(l,0) = 0$, $\Phi(0,0) = 0$, $U_x(x,0) = u_t(x,0) = 0$ при $0 \le x \le l$, приходим к равенству

$$I_2 = 0. \qquad (24)$$

Из соотношений (16), (19) и (24) вытекает справедливость тождества (15), что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1 для смешанной задачи (1), (2), (4) проводится аналогично, с той лишь разницей, что вместо формулы (9) используется соотношение

$$a_{m+1,n} = \alpha(a_{m,n-1} + a_{m,n+1}) - a_{m-1,n}. \qquad (25)$$

При доказательстве теоремы 2 полагаем $a_{0,0} = -1$, а коэффициенты $a_{m,n}$ в формуле (8) находим исходя из соотношения (25) для задачи (1), (2), (5) и соотношения (9) для задачи (1), (2), (6).

В заключение запишем решение смешанной задачи (1)–(3) при $T \le l + 4(l - x_0)$:

$$u(x,t) = \underline{\mu}(t-x) - \alpha[\underline{\mu}(t-x-(l+x_0)) - \underline{\mu}(t+x-(l+x_0))] +$$
$$+ (1-\alpha^2)[\underline{\mu}(t-x-2l) - \underline{\mu}(t+x-2l)] + \alpha^2[\underline{\mu}(t-x-2(l+x_0)) - \underline{\mu}(t+x-2(l+x_0))] +$$
$$+ (\alpha-\alpha^3)[\underline{\mu}(t-x-(3l-x_0)) - \underline{\mu}(t+x-(3l-x_0))] +$$
$$+ 2(\alpha^3-\alpha)[\underline{\mu}(t-x-(3l+x_0)) - \underline{\mu}(t+x-(3l+x_0))] -$$
$$- \alpha^3[\underline{\mu}(t-x-3(l+x_0)) - \underline{\mu}(t+x-3(l+x_0))] +$$
$$+ (\alpha^2-\alpha^4)[\underline{\mu}(t-x-(4l-2x_0)) - \underline{\mu}(t+x-(4l-2x_0))] +$$
$$+ (3\alpha^4-4\alpha^2+1)[\underline{\mu}(t-x-4l) - \underline{\mu}(t+x-4l)] +$$
$$+ 3(\alpha^2-\alpha^4)[\underline{\mu}(t-x-(4l+2x_0)) - \underline{\mu}(t+x-(4l+2x_0))] +$$
$$+ \alpha^4[\underline{\mu}(t-x-4(l+x_0)) - \underline{\mu}(t+x-4(l+x_0))]. \qquad (26)$$

Подставляя в (26) $x_0 = 0$, при $T \le 5l$ получаем решение задачи

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \alpha\mu(t)$$

в виде

$$u(x,t) = \underline{\mu}(t-x) - \alpha[\underline{\mu}(t-x-l) - \underline{\mu}(t+x-l)] + \underline{\mu}(t-x-2l) - \underline{\mu}(t+x-2l) -$$
$$- \alpha[\underline{\mu}(t-x-3l) - \underline{\mu}(t+x-3l)] + \underline{\mu}(t-x-4l) - \underline{\mu}(t+x-4l).$$

Если же теперь положить $\alpha = 0$, получим решение задачи с закрепленным концом

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = 0$$

в виде

$$u(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \underline{\mu}(t-x-2l) - \underline{\mu}(t+x-2l) + \underline{\mu}(t-x-4l) - \underline{\mu}(t+x-4l).$$

Автор выражает глубокую благодарность В.А. Ильину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-862.2008.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00200).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513-1528.
2. *Ильин В.А.* Аналитический вид оптимального граничного управления смещением на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 3. С. 309–313.
3. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 4. С. 442–446.
4. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1487–1498.
5. *Ильин В.А.* Единственность обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 5. С. 672–680.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.12.2008 г.