

УДК 624.31

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ
БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ**

Кирсанов Михаил Николаевич,

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической
механики и мехатроники.*

Аннотация

С использованием метода индукции получено аналитическое выражение для прогиба упругой статически определимой фермы в зависимости от нагрузки, размеров и числа панелей. Проведен анализ влияния размеров боковых скосов на величину прогиба. Замечено, что наличие скосов увеличивает жесткость конструкции. Обнаружены экстремальные и аналитические характеристики прогиба фермы.

Ключевые слова: балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

**ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE DEFLECTION OF THE FLAT
GIRDER BEAM UNDER THE UNIFORM LOAD**

Kirsanov Mikhail Nikolaevich,

National Research University "MPEI", Moscow,

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Theoretical Mechanics and
Mechatronics".*

Abstract

Using the method of induction an analytical expression for the elastic deflection of statically determinate truss depending on load, dimensions and number of panels is obtained. The analysis of the influence of size of side bevels on the deflection is performed. It is noticed that the presence of the bevels increases the rigidity of the

structure. Extreme and analytical characteristics of the deflection of the truss are found.

Keywords: braced girder, the deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics

Введение. Плоские балочные фермы находят широкое применение в строительстве, машиностроении, авиации и космонавтике. Легкие, прочные, легко монтируемые и недорогие фермы имеют явные эксплуатационные преимущества. Методики расчета ферм появились еще на заре развития теоретической и строительной механики. Если для сравнительно небольших ферм с относительно небольшим числом элементов применение численных методов (а еще ранее даже графических) удобно, надежно и оправдано, то с усложнением конструкций при значительном числе стержней возникает дополнительная проблема – так называемое «проклятие размерности». Погрешность решения систем линейных уравнений, к которым сводится метод вырезания узлов, может превысить разумные нормы. Метод же Риттера (метод сечений), во-первых, не всегда применим, во-вторых, не удобен для программирования (удобные компьютерные программы на его основе автору неизвестны). Единственная возможность получить точное решение – применение метода индукции с использованием систем компьютерной математики [1, 2] для вычисления усилий в стержнях и для решения рекуррентных уравнений метода.

Метод индукции использован в работах [3-6] для получения формул прогиба балочных ферм с произвольным числом панелей, в [7, 8] – для получения аналитических выражений для линий влияния. В работах [9-11] исследовались пространственные фермы. В [12] дан краткий обзор различных аналитических решений для плоских ферм, проведено сравнение аналитических решений по методу индукции с решениями, полученными численными методами.

Постановка задачи. В настоящей работе рассмотрим ферму, которую в полной мере нельзя отнести к регулярным (рисунок 1). Крайние панели фермы имеют скосы. При $c = b$ ферма становится регулярной – увеличение числа панелей не меняет ее структуру. Однако введенная таким образом «нерегулярность» незначительно усложняет индуктивный процесс, сводящийся к последовательному расчету (в аналитической форме) ферм с возрастающим числом панелей. Параметром индукции в этой задаче является число панелей в половине пролета фермы n .

Усилия в стержнях будем определять методом вырезания узлов. Сначала задаем координаты узлов. Ось x направляем по ширине фермы, ось y – по длине, z – по высоте (рисунок 1):

$$x_k = x_{k+2n+1} = a(k-1), y_k = y_{k+2n+1} = b, k = 1, \dots, 2n+1, y_{2n+2} = y_{4n+2} = c.$$

Затем указываем номера узлов по концам стержней, условно представляя их векторами \bar{V} . Направления этих векторов выбираем произвольно. Стержни нижнего и верхнего пояса, $k = 1, \dots, 2n$:

$$\bar{V}_k = [k, k+1], \bar{V}_{k+2n} = [k+2n+1, k+2n+2],$$

раскосы:

$$\bar{V}_{k+4n} = [k+1, k+2n+1], \bar{V}_{k+5n} = [k+n, k+3n+2],$$

стойки $k = 1, \dots, 2n+1$: $\bar{V}_{k+6n} = [k, k+2n+1]$.

Опорные стержни, моделирующие неподвижную опору $\bar{V}_{8n+2} = [1, 4n+3]$, $\bar{V}_{8n+3} = [1, 4n+4]$, подвижную: $\bar{V}_{8n+4} = [2n+1, 4n+5]$.

Для уравнений равновесия потребуются проекции стержней-векторов на оси координат: $l_{x,i} = x_{V_{i,1}} - x_{V_{i,2}}, l_{y,i} = y_{V_{i,1}} - y_{V_{i,2}}, l_{z,i} = z_{V_{i,1}} - z_{V_{i,2}}$. Матрица направляющих косинусов G имеет компоненты: $G_{2V_{i,1}-1,i} = l_{x,i} / l_i, G_{2V_{i,1},i} = l_{y,i} / l_i, G_{2V_{i,2}-1,i} = -l_{x,i} / l_i, G_{2V_{i,2},i} = -l_{y,i} / l_i, l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$. Систему уравнений равновесия узлов представим в векторном виде

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

Прогиб определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,P} S_{i,1} l_i}{EF},$$

где $S_{i,P}$ – усилие в стержне i от действия внешней нагрузки, $S_{i,1}$ – усилие в стержне i от действия единичной силы, приложенной в середине пролета к узлу нижнего пояса по направлению перемещения, EF – жесткость стержней, l_i – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням (опорные стержни приняты жесткими), $m = 8n + 1$.

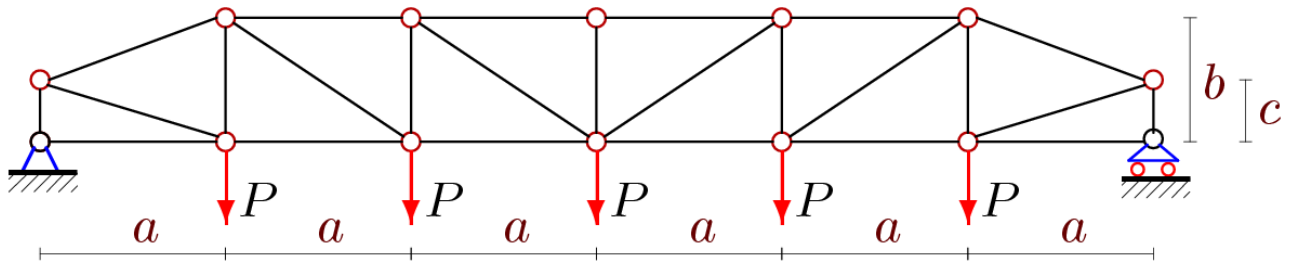


Рисунок 1 – Ферма при $n=3$

В результате получаем следующую формулу

$$EF\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 d^3 + C_4((f^2 + b^2 - 2bc)e + bc^2 + f^3) + C_5 b^2 c) / (2b^2),$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, $f = \sqrt{a^2 + c^2}$, $e = \sqrt{a^2 + (b-c)^2}$, а коэффициенты имеют вид

$$C_1 = (n-1)(5n^2(n+1) + 6(n-1)) / 6, C_2 = (n-2)^2, C_3 = (n-1)^2, C_4 = 2n-1, C_5 = 2n-3.$$

Для вывода формулы потребовалась индукция по 10 фермам, начиная с $n=2$. Случай $n=1$ является выраженным (как раз тут сильнее всего проявляется нерегулярность конструкции). Проанализируем полученное решение при фиксированной длине половины пролета $L = na$ и фиксированной суммарной нагрузке $P = P_{sum} / (2n-1)$. На рисунке 2 даны графики зависимости относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / P_{sum}$ (измеряется в метрах) от числа панелей при $b = 5\text{ м}$, $L = na = 40\text{ м}$ и при различных значениях размера c (в метрах).

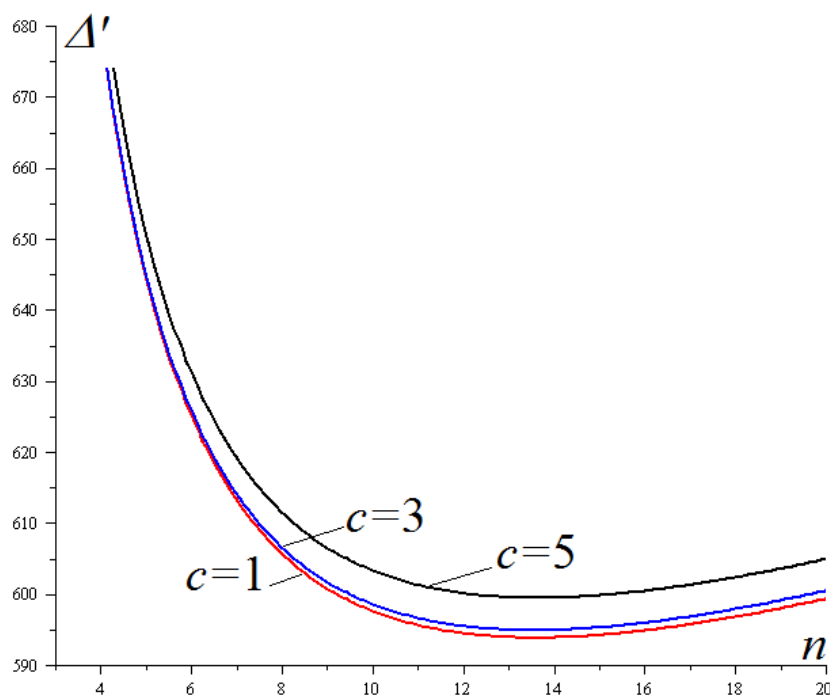


Рисунок 2 – Зависимость прогиба от числа панелей

Графики обнаруживают неожиданную особенность конструкции: наличие откосов ($c = 1м$, $c = 3м$) повышает жесткость фермы (прогиб уменьшается). При $c = b = 5м$ ферма имеет параллельные пояса без боковых откосов. С увеличением числа панелей (при фиксированной суммарной нагрузке и длине пролета) величина прогиба сначала падает, затем растет. Точку экстремума в аналитической форме найти не удастся. Численный же анализ показывает, что критическое значение n слабо зависит от c .

Ход кривых на рисунке 2 подсказывает также наличие асимптот. Вычисляя предел (удобно использовать оператор `limit` системы Maple), получаем угол наклона асимптот $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = b / 2$ и уравнение

$$\Delta' = Kn + \frac{5L^3 - 24bc(b - 2c) - 18b^3}{24b^2}.$$

Таким образом, темп роста прогиба с увеличением числа панелей не зависит от размера c .

Заключение. Получена точная и сравнительно компактная формула для оценки прогиба плоской фермы раскосного типа в упругой стадии. Выявлено

влияние скоса боковых панелей на жесткость всей системы в целом. По сравнению с некоторыми, полученными ранее аналитическими решениями, выведенная формула несколько сложнее – добавился еще один геометрический параметр. Однако этот параметр расширяет область применения решения.

Библиографический список:

1. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
2. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М, 2015. Т.1. С. 52-56.
4. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2015. № 3(31). С. 42-48.
6. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
7. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7
8. Dong Xiaomeng, Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4(5). С. 6-7.
9. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.

10. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52-58.

11. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т.4. №2(20). С. 36-39.

12. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.