ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Шастина Владимира Алексеевича

«Геометрические свойства модулярных групп»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Одним из наиболее эффективных подходов к изучению геометрии различных конфигурационных пространств является изучение свойств связанных с этими пространствами дискретных групп. В анализируемой диссертации этот подход развивается в двух направлениях:

- геометрия пространств Тейхмюллера метрик на двумерных поверхностях анализируется через свойства групп классов отображений этих поверхностей;
- для анализа геометрии конфигурационных пространств наборов точек на плоскости исследуются свойства групп кос.

Сложностным свойствам групп классов отображений посвящена вторая глава диссертации. Основной результат этой главы – установление существования квазиизометрии между группой классов отображений двумерной поверхности с конечным числом проколов, наделенной сжатой словарной метрикой, и «толстой частью» пространства Тейхмюллера метрик на таких поверхностях, наделенной метриками Тейхмюллера и Липшица.

Сжатая словарная метрика на конечнопорожденной группе – объект довольно новый. Определение такой метрики предложил научный руководитель соискателя И.А.Дынников. Эта метрика зависит от выбора конечного набора образующих в группе, причем зависимость существенная – различные наборы образующих одной группы могут задавать неэквивалентные метрики на ней. В основе определения сжатой словарной метрики лежит понятие сжатой словарной сложности элемента группы относительно выбранного набора образующих.

ε-толстая часть пространства Тейхмюллера – это дополнение к ε-окрестности «края» в этом пространстве, т.е. пространство гиперболических метрик постоянной кривизны -1 на двумерных поверхностях данного топологического типа, в которых нет замкнутых геодезических длины, не превосходящей ε. Для заданной метрики из ε-толстой части пространства Тейхмюллера ее орбита при действии группы классов отображений определяет вложение этой группы в ε-толстую часть пространства Тейхмюллера.

Соискатель доказывает, что в группе классов отображений поверхности без края с конечным числом проколов можно выбрать такой конечный набор образующих, что метрика на орбите этой группы, индуцированная сжатой словарной метрикой на группе, отвечающей выбранному набору образующих, квазиизометрична метрикам Липшица и Тейхмюллера. Тем самым получено сильное обобщение результата Дынникова и Виста 2007 г., утверждающего то же самое лишь для проколотой сферы.

Несомненный интерес представляет вопрос о справедливости аналогичных утверждений для поверхностей с краем, а также для пространства Тейхмюллера в целом, а не только для его толстой части.

В третьей главе соискатель строит новые примеры псевдохарактеров на группах кос. *Квазихарактер* – это вещественнозначная функция на группе, являющаяся гомоморфизмом с точностью до константы в аддитивную группу вещественных чисел. Квазихарактер называется *псевдохарактером*, если его ограничение на всякую циклическую подгруппу является гомоморфизмом. Как указывает соискатель, явные примеры псевдохарактеров позволяют получить нижние оценки на стабильную коммутаторную длину элементов группы. Последние, в свою очередь, могут быть использованы при вычислении топологических характеристик изучаемых пространств.

В основе построения лежит понятие обобщенной сигнатуры зацепления. Автор показывает, что функция, сопоставляющая косе значение обобщенной сигнатуры ее замыкания в корне из единицы, является квазихарактером. На основе этих квазихарактеров для группы кос из n нитей строится псевдохарактер $sign_n$.Также описываются способы вычисления сигнатур. Основные результаты этой главы состоят в том, что построенный псевдохарактер действительно новый – он линейно независим от изучавшихся ранее Малютиным псевдохарактеров типа закрученности.

Укажу на некоторые неточности в диссертации.

На стр. 19, строка 1, автор относит определение метрики Липшица на пространстве Тейхмюллера к работе Choi и Rafi 2007 года. В то же время, эта метрика изучалась многими авторами и раньше, и, по-видимому, ее определение следует возводить к работе Терстона 1988 года.

В последнем абзаце на стр. 20 идеальная триангуляция на поверхности определяется как максимальная по включению идеальная мультидуга. Однако к каждой идеальной мультидуге можно добавить еще одну идеальную дугу, поэтому максимальных по включению идеальных мультидуг не существует. По-видимому, автор подразумевает, что идеальная мультидуга не должна содержать идеальных дуг, представляющих один и тот же гомотопический класс, но это требование явно не сформулировано.

В обозначениях типов поверхностей на странице 24 имеются несогласованности. Так, судя по идущему далее в тексте обсуждению, под группой $MCG(S^0{}_{0,2})$ в пятом абзаце автор подразумевает группу $MCG(S^2{}_{0,0})$ классов отображений кольца – поверхности рода 0 с двумя компонентами границы. Аналогично, при упоминании группы $MCG(S^0{}_{1,0})$ в последнем абзаце автор скорее всего имеет в виду группу $MCG(S^0{}_{1,1})$.

При определении скручивания Дэна во втором абзаце на стр. 25 автор говорит, что такое скручивание однозначно определяется простой замкнутой кривой на поверхности. Однако замкнутая кривая определяет два скручивания, и выбор одного из них зависит от того, как именно мы отождествляем трубчатую окрестность выбранной кривой со стандартным кольцом. Эти два скручивания обратны друг другу.

В определении аменабельной группы (определение 3.1.1 на стр. 64) третье условие должно иметь вид $m(L_g f)=m(f)$.

Впрочем, все эти мелкие недостатки носят технический характер и не влияют на полученные в диссертации результаты. Текст диссертации написан в целом математически строго и прозрачно.

При подготовке диссертации соискатель освоил большое количество материала. Среди этого материала такие выходящие далеко за пределы геометро-топологического стандарта темы, как аменабельные группы и ограниченные когомологии групп. В диссертации приведены и использованы по существу результаты десятков исследователей со всего мира, занимающихся изучением модулярных групп и геометрии пространств модулей. Результаты диссертации могут быть интересны для математических факультетов университетов, таких как Высшая школа экономики, Новосибирский, Московский, Челябинский, Санкт-Петербургский, а также для математических институтов РАН. Все результаты диссертации своевременно опубликованы и доложены на многочисленных конференциях и семинарах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

опубликованы и доложены на многочисленных конференциях и семинарах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Содержание диссертационной работы, ее научные положения и выводы являются достоверными, обоснованными и актуальными. Диссертация В.А.Шастина «Геометрические свойства модулярных групп» является законченным исследованием. Она полностью соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Шастин Владимир Алексеевич, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Профессор факультета математики НИУ ВШЭ,
д.ф.-м.н. **С. К. Ландо**

29.04.2016

Подпись заверяю
Заместитель начальника
Управления персонала
Городиская Ю.Н.

Национальный исследовательский институт «Высшая школа экономики»
Адрес: 117312, Москва, ул. Вавилова, д.7, комната 1422
Телефон: (495) 772-95-90 *44422
Электронная почта: lando@hse.ru