

УДК 537.312.62

М. Ю. КУПРИАНОВ, В. Ф. ЛУКИЧЕВ

СТАЦИОНАРНЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИОДНОМЕРНЫХ МОСТИКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

На основе уравнений Узаделя рассчитана зависимость характерного напряжения V_c мостиков переменной толщины с одинаковыми материалами берегов и перемычки от температуры при различных значениях длины мостика L . Показано, что для достижения максимальных значений V_c необходимо использовать мостики с $L \sim (4-6) \xi^*$ и работать в области температур $T \sim 0,5 T_c$.

Введение

Мостики переменной толщины (МПТ), представляющие собой два массивных сверхпроводящих электрода (берега), соединенных тонкопленочной перемычкой [1,2], являются одним из перспективных типов элементов как для различных приложений, так и для изучения нелинейных нестационарных процессов в сверхпроводниках. Это связано с тем, что в мостиках реализуется наиболее простой для анализа случай «жестких» граничных условий и, следовательно, облегчается количественное сравнение теории с экспериментом [3,4]. Однако до настоящего времени полностью не изучены стационарные свойства МПТ, даже в том наиболее распространенном случае, когда материалы перемычки и берегов мостика одинаковы [2,5,6].

Известно, что все измеряемые стационарные характеристики мостика можно определить из соотношения между сверхтоком I_s , протекающим через него, и разностью фаз параметров порядка берегов φ . Ранее соотношение $I_s(\varphi)$ для таких мостиков было найдено лишь в следующих частных случаях: 1) $T \approx T_c$, длина мостика L произвольна [7]; 2) произвольные T , ($L \ll \xi^*$, где ξ^* — длина когерентности [8,9]).

Целью настоящей работы являлось определение зависимости тока от фазы $I_s(\varphi)$ во всем температурном интервале $0 < T \leq T_c$ при произвольных значениях L/ξ^* . Предполагается, что для сверхпроводящего материала выполнены условия «грязного» предела и что ширина мостика W значительно меньше джозефсоновской глубины проникновения λ_J , что позволяет считать переход квазиодномерным.

1. Основные уравнения

Исследование стационарных процессов в грязных сверхпроводниках существенно облегчается существованием простых уравнений Узаделя [10]. Эти уравнения удобно записать, введя новые функции Φ , связанные с функциями F и G в теории Узаделя следующими соотношениями:

$$F = \frac{1}{\omega} \Phi G = \frac{\Phi}{(\omega^2 + \Phi\Phi^*)^{1/2}}; \quad G = \frac{\omega}{(\omega^2 + \Phi\Phi^*)^{1/2}}, \quad (1)$$

где $\omega = (2n + 1)\pi T$ — мацубаровские частоты.

Совместим начало координат с серединой пленки мостика и выберем калибровку, в которой вектор-потенциал тождественно равен нулю, а мнимая часть параметра порядка $\Delta = \text{Re}\Delta + i\text{Im}\Delta$ обращается в нуль в точке $x = 0$. В этой калибровке уравнения Узаделя имеют вид

$$\Phi = \Delta + \frac{1}{l^2} \frac{\pi T_c}{\omega G} [G^2 \Phi']'; \quad (2a)$$

$$\Delta \ln \frac{T}{T_c} + 2\pi T \sum_{\omega} \left(\frac{\Delta}{\omega} - \frac{G\Phi}{\omega} \right) = 0; \quad (2б)$$

$$I_s R_N = \frac{2\pi T}{e} \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^2} G^2 (RI' - IR'). \quad (2в)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по безразмерной координате x , нормированной на длину мостика L ; l — величина L/ξ^* , где $\xi^* = (D/2\pi T_c)^{1/2}$ — длина когерентности, D — коэффициент диффузии, R_N — сопротивление мостика в нормальном состоянии, R и I — действительная и мнимая части функции Φ соответственно. Систему уравнений (2) необходимо дополнить условиями непрерывности функций Узаделя на границах между пленками переемычки и берега [11, 12]:

$$R(\pm 1/2) = \Delta_0 \cos \varphi/2; \quad I(\pm 1/2) = \pm \Delta_0 \sin \varphi/2, \quad (3)$$

где Δ_0 и φ — равновесное значение и разность фаз параметров порядка берегов соответственно. При конкретных расчетах оказывалось удобным вместо одного из условий (3) использовать вытекающие из них и из симметрии задачи условия в центре мостика $x = 0$:

$$R'(0) = 0; \quad I(0) = 0. \quad (4)$$

Характер решения краевой задачи (2) — (4) существенно зависит от соотношения между величиной L и характерными длинами уравнений Узаделя. Из соотношений (1) и уравнений (2a), (2б) видно, что в области температур $T_c - T \sim T_c$ такой длиной является не зависящая от температуры длина когерентности

$$\xi^* = (D/2\pi T_c)^{1/2}. \quad (5)$$

При $T \sim T_c$ уравнения (2) переходят в уравнении Гинзбурга — Ландау (ГЛ), и в (2б) появляется обычная зависящая от температуры длина когерентности

$$\xi(T) = \frac{\pi}{2} (1 - T/T_c)^{-1/2} \xi^*. \quad (6)$$

Решение поставленной задачи существенно упрощается лишь для предельных случаев малых и больших длин мостика.

2. Приближение малых и больших длин

В случае $L \ll \max\{\xi^*, \xi(T)\}$ в уравнениях (2a), (2б) можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме градиентных, и в результате получить

$$\frac{R'}{\omega^2 + R^2 + I^2} = C_R, \quad \frac{I'}{\omega^2 + R^2 + I^2} = C_I, \quad (7)$$

где C_R и C_I — постоянные интегрирования. Из граничного условия (4) сле-

дует, что $C_R = 0$, и из (3), (7) получаем, что функции R не зависят от координаты и частоты ω :

$$R = \Delta_0 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (8)$$

Подставляя (8) во второе уравнение (7), интегрируя его и используя граничные условия (3), (4), для I получаем

$$I = \left(\omega^2 + \Delta_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \left[2x \operatorname{arctg} \frac{\Delta_0 \sin(\varphi/2)}{(\omega^2 + \Delta_0^2 \cos^2(\varphi/2))^{1/2}} \right]. \quad (9)$$

Из равенств (2в), (8), (9) следует соотношение $I_s(\varphi)$, полученное ранее в работе [8]:

$$I_s R_N = \frac{2\pi T}{e} \sum_{\omega} \frac{2\Delta_0 \cos(\varphi/2)}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2 \cos^2(\varphi/2)}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta_0 \sin(\varphi/2)}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2 \cos^2(\varphi/2)}}. \quad (10)$$

При $L \gg \max \{ \xi^*, \xi(T) \}$ можно не учитывать влияния сверхпроводящих электродов на процессы в мостике и считать, что в нем реализуется однородное токовое состояние. При этом модули параметра порядка и функций Φ не зависят от координат, и решение уравнений (2) можно искать в виде

$$\Phi = |\Phi| e^{i\varphi x}, \quad \Delta = |\Delta| e^{i\varphi x}. \quad (11)$$

Подстановка искомого вида решения (11) в систему уравнений (2) позволяет свести ее к системе алгебраических уравнений относительно $|\Delta|$ и $|\Phi|$, решение которой получено в работе [13].

При произвольном соотношении между L и длинами ξ^* , $\xi(T)$ необходимо использовать численные методы решения.

3. Численные результаты

Краевая задача (2), (3), (4) представляет собой систему интегродифференциальных уравнений. Основная трудность ее решения состоит в правильном нахождении функции Δ , которая, с одной стороны, определяет, согласно (2а), характер изменения функций Φ , а, с другой стороны, сама определяется суммированием Φ по всем частотам ω .

Алгоритм численного решения системы уравнений (2) с граничными условиями (3), (4) состоял в следующем. В качестве начального приближения для функции $\Delta(x)$ выбиралась функция $\Delta^{(0)}(x)$, равная $\Delta_0 \cos(\varphi/2) + 2i\Delta_0 x \sin(\varphi/2)$ для коротких мостиков ($l \leq 3$) и $\Delta_0 \cos \varphi x + i\Delta_0 \sin \varphi x$ — для мостиков с $l > 3$. Далее, начиная с $n = (\omega/2\pi T - 1) = 0$ при заданном $\Delta(x)$ методом прогонки [14] решались линейные уравнения

$$\tilde{\Phi} = \Delta + \frac{\pi T_c}{l^2 \omega} \tilde{\Phi}'' \quad (12)$$

следующие из уравнений (2а) в пределе больших значений $\omega > (R^2 + I^2)^{1/2}$. Полученное решение использовалось в качестве начального приближения при решении методом установления [14] нелинейного уравнения (2а) и определения функций $\Phi^{(0)}$. Далее функции Φ и $\tilde{\Phi}^{(0)}$ сравнивались, и если оказывалось, что $\max |\Phi - \tilde{\Phi}^{(0)}| < \varepsilon \sim 10^{-4}$, то при больших значениях ω решалось только уравнение (12). По вычисленным $\tilde{\Phi}^{(0)}$ определялись n -е слагаемое суммы $S_1 = \sum_n \omega^{-1} G \Phi^{(0)}$ в каждой точке x и n -е слагаемое суммы $S_2 =$

$= \sum_n^{\infty} \omega^{-2} G^2 R I'$ при $x = 0$. Сами суммы S_1 и S_2 определялись как частичные, т. е. их n -е слагаемое складывалось с их значением, рассчитанным для предыдущего n . Сумма S_1 входила в вытекающую из уравнения самосогласования (2б) формулу для вычисления следующего приближения для параметра порядка $\Delta^{(1)}(x)$:

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{S_1}{A}, \quad A = \ln \frac{T}{T_c} + 2\pi T \sum \omega^{-1} = 2\pi T \sum (\omega^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \quad (13)$$

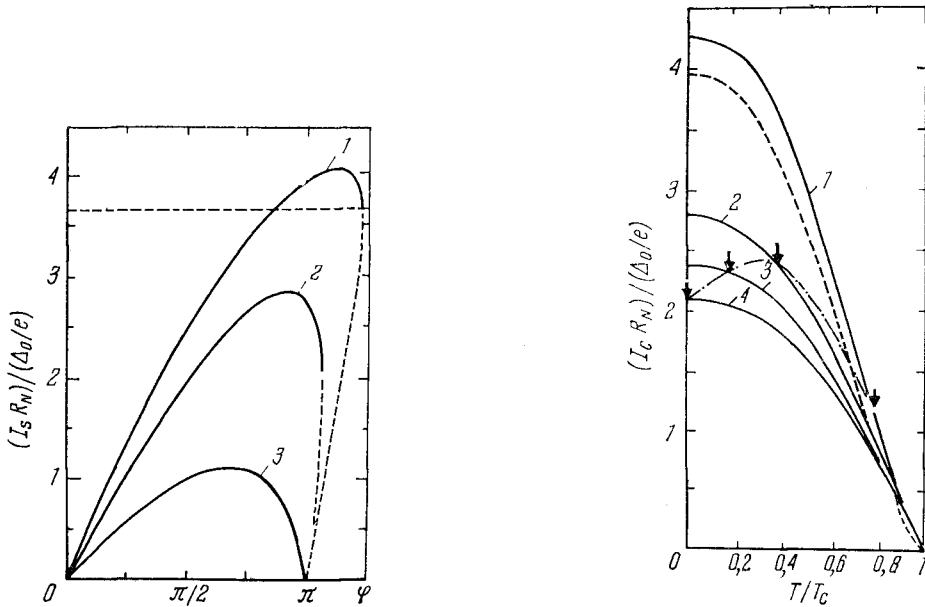


Рис. 1. Зависимость тока от фазы $I_s(\varphi)$ для МПТ с длиной $L = 10\xi^*$ при различных значениях отношения T/T_c : 0,28 (1); 0,53 (2) и 0,80 (3). Пунктиром показаны неустойчивые участки; горизонтальная пунктирная прямая соответствует току распаривания [13] для температуры $T = 0,28 T_c$.

Рис. 2. Зависимость характерного напряжения $V_c = I_c R_N$ от температуры для различных значений параметра L/ξ^* : 10 (1); 5 (2); 3 (3); 0 (4). Пунктирная кривая — зависимость $I_c(T) R_N$. Стрелками указаны точки, в которых соотношение $I_s(\varphi)$ становится неоднозначным; геометрическое место этих точек, т. е. граница «истинного» эффекта Джозефсона [3, 4], показано штрих-пунктирной линией.

Величина S_2 определяла значение сверхтока. Частота Ω , до которой проводилось суммирование, выбиралась из требования независимости (с точностью до 10^{-3}) от нее величины $\Delta^{(1)}(x)$. Полученная зависимость $\Delta^{(1)}(x)$ сравнивалась с $\Delta^{(0)}(x)$, и если оказывалось, что $\max |\Delta^{(1)}(x) - \Delta^{(0)}(x)| > \epsilon \sim 10^{-4}$, то функции $\Delta^{(1)}(x)$ присваивалось значение $\Delta^{(0)}(x)$, и процедура счета повторялась. В противном случае итерационный цикл заканчивался, и выводились искомые значения тока и разности фаз φ .

Результаты численного расчета представлены на рис. 1, 2, 3. На рис. 1 показаны зависимости $I_s(\varphi) R_N$ для МПТ с длиной $L = 10\xi^*$ при различных

значениях температуры. Видно, что с уменьшением температуры зависимость $I_s(\varphi)$ переходит от синусоидальной к неоднозначной. Это связано с тем, что при $T \approx T_c$ свойства МПТ определяются соотношением между его длиной L и длиной когерентности $\xi(T)$, и, поскольку в этой области температур $\xi(T) \gg L = 10\xi^*$, справедлива теория Асламазова — Ларкина (АЛ) [15], дающая синусоидальную зависимость $I_s(\varphi)$.

С уменьшением температуры величина $\xi(T)$ уменьшается, что эквивалентно увеличению длины мостика в единицах $\xi(T)$. При этом происходит постепенный переход от эффекта Джозефсона к эффекту распаривания в пленке мостика. Наиболее отчетливо эффекты, связанные с распариванием, проявляются при температурах, меньших $\sim 0,5 T_c$. В этом температурном интервале характерной длиной уравнений (2) является определяемая формулой (5) величина ξ^* , значительно меньшая длины мостика $L = 10\xi^*$. Так, при $T = 0,28 T_c$ величина критического тока $I_s = \max I_s(\varphi)$ оказывается весьма близкой к критическому току распаривания для той же температуры, рассчитанному в работе [13]. Величина $I_c R_N$, соответствующая этому току, показана на рис. 1 пунктирной линией.

На рис. 2 показаны зависимости характерного напряжения $V_c = I_c R_N$ от температуры T , рассчитанные при различных значениях параметра L/ξ^* . Видно, что в окрестности критической температуры все кривые имеют одну и ту же асимптотику, представляющую собой прямую с тангенсом угла наклона, равным 4,178, что в размерных единицах составляет $(\pi/4)\Delta_0^2/ek_B I_c \approx 635$ мкВ/К. Такое линейное возрастание V_c с уменьшением температуры следует из справедливой при $T \approx T_c$ теории АЛ, при этом отклонение V_c от линейного закона наступает тем быстрее, чем больше длина мостика L . Для сравнения пунктиром показана зависимость $I_c(T)R_N$, где $I_c(T)$ — критический ток распаривания, найденный в работе [13], а R_N — сопротивление пленки мостика в нормальном состоянии с длиной $10 \xi^*$. Видно, что эта кривая лежит ниже зависимости $V_c(T)$, рассчитанной для МПТ той же длины. Это объясняется тем, что сверхпроводящие электроды поддерживают сверхпроводимость в пленке мостика, вследствие чего величина ее критического тока всегда должна превышать критический ток распаривания однородной пленки.

Интересно отметить, что кривая, соответствующая границе «истинного» эффекта Джозефсона, имеет максимум в области температур $T \sim 0,5 T_c$, который соответствует длинам порядка (4—6) ξ^* , причем значение V_c в этой области превышает величину $1,32 (\pi/2) (\Delta_0/e)$, равную $V_c(0)$ для предельно коротких мостиков. Таким образом, максимально возможные значения параметра $V_c(\sim k_B T_c/e)$ при сохранении однозначной зависимости $I_s(\varphi)$ достигаются в мостиках с длиной $L \sim (4—6) \xi^*$ в области температур $T \sim 0,5 T_c$.

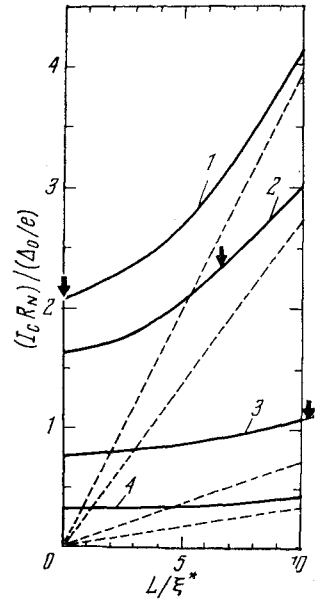


Рис. 3. Зависимость характерного напряжения $V_c = I_c R_N$ от длины мостика при различных значениях отношения T/T_c : 0 (1); 0,5 (2); 0,8 (3); 0,9 (4). Пунктирные прямые соответствуют зависимости $V_c(L)$ в случае, когда критический ток МПТ равен току распаривания для указанных температур. Стрелками обозначены точки, в которых соотношение $I_s(\varphi)$ становится неоднозначным.

Экспериментально зависимость $V_c(T)$ для мостиков с одинаковыми материалами берегов и переемычки (Sn) изучались в работах [5,6]. Результаты эксперимента для образца с $l = 13$ работы [6] хорошо совпадают с рассчитанной нами зависимостью $V_c(T)$ для этой длины. Однако данные для образца с $l = 5$ укладываются ниже расчетных кривых, что, по мнению авторов работы [6], связано с неравномерным распределением тока по поперечному сечению мостика.

На рис. 3 представлено семейство зависимостей характерного напряжения V_c от длины мостика при различных значениях T . Этот рисунок иллюстрирует также переход от эффекта Джозефсона к эффекту распаривания, происходящий при фиксированной температуре по мере увеличения L . В случае распаривания параметр V_c пропорционален длине мостика L , в то время как при эффекте Джозефсона V_c не зависит от L .

Заключение

В работе исследован переход от эффекта Джозефсона к эффекту распаривания в МПТ с одинаковыми материалами берегов и переемычки. При фиксированной длине мостика такой переход происходит по мере уменьшения температуры, а при фиксированной температуре — по мере увеличения L .

Показано, что для достижения максимальных значений параметра V_c при сохранении однозначной зависимости $I_s(\varphi)$ необходимо использовать мостики с длинами $L \sim (4-6) \xi^*$ и работать в области температур $T \sim 0,5 T_c$.

Следует отметить, что полученные результаты справедливы не только для МПТ, но и для джозефсоновских переходов типа «сэндвич» в случае, если критические температуры материала прослойки и электродов одинаковы, а материал прослойки имеет достаточно большое сопротивление [3.4.12]: $(\sigma' \xi_s)/(\sigma_s \xi') \ll \min \{1, l\}$, где σ' и σ_s — проводимости материалов прослойки и электродов в нормальном состоянии, ξ' и ξ_s — длина когерентности материалов прослойки и электродов.

В заключение выражаем благодарность К. К. Лихареву за помощь в работе, а также М. А. Савченко за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихарев К. К. Движение вихрей и эффект Джозефсона в сверхпроводящих тонких мостиках. — ЖЭТФ, 1971, 67, № 10, с. 1700—1711.
2. Губанков В. Н., Кошелец В. П., Лихарев К. К., Овсянников Г. А. Когерентное движение вихрей в сверхпроводящих мостиках больших размеров. — Письма в ЖЭТФ, 1973, 18, вып. 5, с. 292—295.
3. Likharev K. K. Superconducting weak links. — Rev. Mod. Phys., 1979, 51, N 1, p. 101—159.
4. Лихарев К. К. Сверхпроводящие слабые связи: стационарные процессы. — УФН, 1979, 127, № 2, с. 185—220.
5. Губанков В. Н., Кошелец В. П., Овсянников Г. А. Свойства джозефсоновских тонкопленочных микромостиков переменной толщины. — ЖЭТФ, 1977, 73, № 4, с. 1435—1443.
6. Губанков В. Н., Кошелец В. П., Овсянников Г. А. Когерентные эффекты в сверхпроводящих мостиках переменной толщины. — ЖЭТФ, 1976, 71, № 1, с. 338—358.
7. Лихарев К. К., Якобсон Л. А. Стационарные свойства сверхпроводящих мостиков переменной толщины. — ЖЭТФ, 1973, 45, № 7, с. 1503—1509.

8. Кулик И. О., Омелянчук А. Н. К микроскопической теории эффекта Джозефсона в сверхпроводящих мостиках.— Письма в ЖЭТФ, 1975, **21**, вып. 4, с. 216—219.
9. Кулик И. О., Омелянчук А. Н. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих мостиках: микроскопическая теория.— ФНТ, 1978, **4**, № 3, с. 296—311.
10. Usadel K. D. Generalized diffusion equation for superconducting alloys.— Phys. Rev. Lett., 1970, **5**, N 8, p. 507—508.
11. Лихарев К. К. Соотношение $J_s(\varphi)$ для SNS мостиков переменной толщины.— Письма в ЖТФ, 1976, **2**, № 1, с. 29—34.
12. Ivanov Z. G., Kupriyanov M. Yu., Likharev K. K., Snigirev O. V. Boundary conditions for the Usadel equations and properties of dirty S—N—S sandwiches.— J. de Phys., 1978, **39**, N 8 (suppl.), p. C6—556—557.
13. Куприянов М. Ю., Лукичев В. Ф. Температурная зависимость критического тока распаривания в сверхпроводниках.— ФНТ, 1980, **6**, № 4, с. 445—453.
14. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.; «Наука», 1971.
15. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. Эффект Джозефсона в гетерных сверхпроводящих контактах.— Письма в ЖЭТФ, 1969, **9**, № 2, с. 150—154.

Московский институт
радиотехники, электроники и
автоматики

Поступила в редакцию
4 августа 1980 г.

М. Ю. KUPRIYANOV and V. F. LUKICHEV

STEADY-STATE PROPERTIES OF A QUASI-ONEDIMENSION VARIABLE-THICKNESS BRIDGES

On the basis of Usadel's equations, the temperature dependence of the characteristic voltage $V_c(0 \leq T \leq T_c)$ of variable-thickness bridges, whose banks and weak link are of the same material, is numerically calculated for several bridge lengths values. It is shown that the highest values of V_c are reached for lengths $L \sim (4 \div 6) \xi^*$ and in the temperature range $T \sim 0.5 T_c$.

LIST OF SYMBOLS

ξ^* , coherence length; λ_J , Josephson penetration depth; T_c , critical temperature; Δ , modulus of the order parameter; D , diffusion coefficient; e , electron charge; σ , conductivity in the normal state.

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1. The $I_s(\varphi)$ relationship for a variable-thickness bridges of length $L = 10 \xi^*$ for different values of the reduced temperature: 0.28 (1); 0.53 (2); 0.80 (3). The dash curves show instable parts of $I_s(\varphi)$. The horizontal dash line corresponds to the pair-breaking current $I_{s1}^{[1]}$ for $T = 0.28 T_c$.

Fig. 2. The characteristic voltage $V_c = I_c R_N$ versus the temperature for different values of the parameter L/ξ^* : 10 (1); 5 (2); 3 (3); 0 (4). The dash curve represents the dependence $I_c(T)R_N$, where $I_c(T)$ is the critical pair-breaking current $I_{s1}^{[1]}$, R_N is the resistance of a $10 \xi^*$ -long bridge in the normal state. The arrows indicate the points where the $I_s(\varphi)$ relationship becomes multivalued; the locus of such points, i.e. the boundary of the «true» Josephson effect, is shown as a dash-dot line.

Fig. 3. The characteristic voltage $V_c = I_c R_N$ versus the bridge length for different T/T_c : 0 (1); 0.5 (2); 0.9 (3); 0.9 (4). The dash straight lines correspond to the dependence $V_c(L)$ for the case when the critical current of a variable-thickness bridge equals the pair-breaking current for the temperatures indicated. The arrows indicate the points where the $I_s(\varphi)$ relationship becomes multivalued.