

ОТЗЫВ

официального оппонента о работе

Андрея Александровича Горницкого

"Существенные сигнатуры и мономиальные базисы неприводимых представлений простых алгебр Ли",

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 -- математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация посвящена актуальной проблеме нахождения и исследования свойств базисов в пространствах неприводимых представлений простых комплексных алгебр Ли. Решение этой проблемы представляет интерес в исследованиях по теории представлений групп, геометрии однородных пространств, теории инвариантов, теории специальных функций и математической физике. Есть разные подходы к решению этой проблемы. Для серии A_n известна конструкция базисов Гельфанда-Цейтлина, которая до некоторой степени переносится на ортогональную алгебру Ли и не переносится на другие серии простых алгебр Ли. Решению задачи о нахождении хороших базисов для остальных серий простых алгебр Ли посвящены многочисленные исследования в нашей стране и за рубежом.

Настоящая диссертация посвящена задаче изучения структуры мономиальных базисов ПБВ-типа. Существование таких базисов вытекает из параметризации неприводимых представлений старшими весами и наличия фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта в универсальной обертывающей алгебре. Элементы этих базисов однозначно определяются своими сигнатурами, которые называются существенными сигнатурами. Проблема состоит в конструктивном описании существенных сигнатур. Более того, объединение существенных сигнатур, отвечающих различным старшим весам, имеет структуру полугруппы. Возникают задачи описания структуры этой полугруппы: нахождение системы образующих элементов, реализация полугруппы как полугруппы целых точек многогранного конуса и т.д. Ответы на поставленные вопросы были сформулированы в 3-х гипотезах Э.Б.Винберга. Для серий A_n и C_n эти гипотезы были доказаны в работах Е.Фейгина, Ж.Фурье и П.Литтельмана. Причем первая гипотеза была доказана в своей изначальной формулировке: полугруппа существенных сигнатур порождается сигнатурами фундаментальных весов.

Диссертация А.А. Горницкого состоит из введения, 4-х глав, заключения и списка литературы. Во введении делается обзор различных подходов в задаче построения базисов в пространствах неприводимых представлений простых алгебр Ли и формулируются основные результаты диссертации. В первой главе формулируются гипотезы Э.Б.Винберга, исследуется связь существенных сигнатур и показателей младших членов матричных элементов.

Во второй главе диссертации доказывается критерий того, что полугруппа существенных сигнатур порождается существенными сигнатурами с весами из заданной конечной системы старших весов. Далее формулируется метод применения этого критерия, основанный на проверке выполнения ряда достаточных условий. В последующих главах этот метод используется для доказательства обобщенных гипотез Э.Б.Винберга для ряда простых алгебр Ли.

В третьей главе диссертации исследуется полугруппа существенных сигнатур для простых алгебр Ли серий V_n и D_n . Главной трудностью здесь является обстоятельство, что полугруппа существенных сигнатур, по-видимому, не порождается сигнатурами фундаментальных весов. Это предположение основано на примере группы D_5 , в котором отсутствие образующих заданного типа проверяется на компьютере. В связи с этим можно высказать предположение, что можно расширить систему фундаментальных весов до некоторой системы, состоящей из старших весов, для которой будут справедливы гипотезы Э.Б.Винберга.

Рассматривается система старших весов, которая получается добавлением к системе фундаментальных весов вектора $2\omega_n$ для случая V_n и $\{2\omega_{n-1}, 2\omega_n, \omega_{n-1} + \omega_n\}$ для серии D_n . Доказывается, что полугруппа существенных сигнатур порождается сигнатурами со старшими весами из этой системы весов (обобщенная первая гипотеза Винберга). Доказательство осуществляется методом индукции: показывается, что из предположения, что гипотеза верна для D_n вытекает, что она верна для V_n и D_{n+1} . При этом используются формулы разложения ограничения соответствующих представлений V_n и D_{n+1} на подгруппу D_n . Этот подход является оригинальным и отличается от подхода, основанного на комбинаторике

путей Дика из работ Е.Фейгина, Г.Фурье и П.Литтлмана для серии A_n и И. Махлина для серии B_n .

В третьей главе также доказывається, что полугруппа существенных сигнатур является насыщенной, то есть совпадает с пересечением рационального конуса с целочисленной решеткой (вторая гипотеза Э.Б.Винберга). Найдено представление системы существенных сигнатур с заданным старшим весом в виде множества целочисленных решений системы неравенств, найденной в явном виде (третья гипотеза Э.Б. Винберга).

В заключительной четвертой главе рассматривается случай простой алгебры Ли G_2 . Доказывается, что полугруппа существенных сигнатур порождается сигнатурами фундаментальных весов, доказывається насыщенность этой полугруппы и найдена реализация множества существенных сигнатур с заданным старшим весом как множества всех решений некоторой системы неравенств.

Основные результаты диссертации:

- 1) Критерий для проверки порожденности полугруппы существенных сигнатур сигнатурами с весами из заданной системы старших весов. Разработка метода, основанного на доказательстве ряда достаточных условий, для выполнения этого критерия.
- 2) Для серий B_n и D_n найдены системы старших весов, для которых доказана обобщенная первая гипотеза и гипотезы два и три Э.Б.Винберга.
- 3) Для серии G_2 доказаны все три гипотезы Э.Б. Винберга.

Несколько незначительных замечаний:

- 1) Нечеткое определение представления сигнатуры для серии A_n в виде целочисленной таблицы (стр. 19);
- 2) В определение путей Дика (стр. 20) необходимо добавить, что пути начинаются и заканчиваются простыми корнями (со знаком минус).

Приведенные замечания относятся к обзорной части работы и не влияют на положительную оценку диссертации. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.


Результаты диссертации получены автором самостоятельно. Диссертация хорошо оформлена, содержит обзор результатов по выбранной тематике, все

утверждения снабжены исчерпывающими доказательствами. Результаты опубликованы в 6 статьях, три из которых входят в Scopus и две в Web of Science.

Содержание диссертации Горницкого Андрея Александровича "Существенные сигнатуры и мономиальные базисы неприводимых представлений простых алгебр Ли" соответствует паспорту специальности 01.01.06 -- математическая логика, алгебра и теория чисел, а также критериям, определенным в пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно приложениям №5,6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Считаю, что соискатель Горницкий Андрей Александрович заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 -- математическая логика, алгебра и теория чисел.

Доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой алгебры и геометрии
Самарского национального
исследовательского университета
имени академика С.П.Королева,
Самара, Россия



(А.Н. Панов)

30 апреля 2019 г.

Контактные данные: тел. +7(917) 9430053, email: apanov@list.ru

Адрес места работы: 443086, Самара, Московское шоссе 34, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, тел. +7(846)2674300, email: rector@ssau.ru

