Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Стрелковский Никита Витальевич

Об одном методе решения задач гарантирующего управления с неполной информацией для линейных динамических систем

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Осипов Юрий Сергеевич**
доктор физико-математических наук, академик, профессор, советник федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия наук»

Официальные оппоненты: **Максимов Вячеслав Иванович,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом дифференциальных уравнений федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук»

Ухоботов Виктор Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Челябинский государственный университет»

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Защита состоится 22 июня 2016 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, город Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан "   "   2016 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.43, доктор физико-математических
наук, профессор Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проблема построения оптимальных стратегий управления с обратной связью в условиях неопределенности возникла во второй половине прошлого века в контексте инженерных задач, прежде всего, задач об автоматическом регулировании техническими системами. Для таких задач характерны два фактора неопределенности – действие на управляемую систему неконтролируемых динамических возмущений и неполнота информации о состояниях системы. В обеих ситуациях (и в комбинированных ситуациях) решения требуют применения принципа управления с обратной связью, позволяющего использовать всю доступную текущую информацию о системе для выработки решений о ее управлении в реальном времени.

Приняты два основных типа описания системных неопределенностей – вероятностный, предполагающий наличие той или иной статистической информации о факторах неопределенности, и детерминированный, предполагающий отсутствие такой информации. В последнем случае факторы неопределенности обычно подчиняют априорным детерминированным ограничениям типа включений.

Настоящая диссертация следует в русле исследований задач управления при детерминированных ограничениях на факторы неопределенности. В рамках этого направления изучение задач управления при неконтролируемых динамических входах привело к созданию во второй половине прошлого века теории антагонистических дифференциальных игр. Большой вклад в ее становление и развитие внесла уральская школа по теории управления, возглавлявшаяся с конца 1960-х до начала 2000 -х Н. Н. Красовским. Созданная этой школой теория позиционных дифференциальных игр [1] [2] [3] [4] [5] [6] разрешает фундаментальные вопросы о существовании равновесий в классах стратегий управления с обратной связью (позиционных стратегий управления), о структуре оптимальных стратегий, предлагает серию оригинальных методов их построения. Теория имеет последователей за рубежом [7] [8].

---

[1] *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. – Москва: Наука, 1985. – 520 с.

[2] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. – Москва: Наука, 1974. – 456 с.

[3] *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. – Москва: Наука, 1991. – 216 с.

[4] *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.

[5] *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-theoretical control problems. – New-York: Springer-Verlag, 1988. – 517 pp.

[6] *Krasovskii A. N., Krasovskii N. N.* Control under lack of information. – Basel: Birkhäuser, 1995. – 322 pp.

[7] Feedback stabilization and Lyapunov functions / F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, L. Rifford, R. J. Stern // *SIAM Journal of Control and Optimization.* – 2000. – Vol. 39, no. 1. – Pp. 25–48.

[8] *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Subbotin A. I.* The synthesis of universal feed-back pursuit strategies in differential games // *SIAM Journal of Control and Optimization.* – 1997. – Vol. 35, no. 2. – Pp. 552–561.

Важную роль в развитии теории линейных дифференциальных игр сыграли фундаментальные работы Л. С. Понтрягина [9] [10] [11], посвященные решению задач преследования, и их развитие и обобщение в трудах Е. Ф. Мищенко [12], М. С. Никольского [13], П. Б. Гусятникова [14], Л .А. Петросяна [15].

Теория позиционных дифференциальных игр позволяет рассматривать задачу управления, стоящую перед каждым из двух игроков-антагонистов, как задачу оптимального гарантирующего управления, в которой воздействия игрока-противника (динамические возмущения) могут формироваться произвольным, не известным управляющему игроку механизмом в пределах априорно заданных детерминированных ограничений. Искомая позиционная стратегия управляющего игрока при этом гарантирует наилучшее (либо требуемое) качество движению системы при наихудшей реализации динамического возмущения. В данном контексте теорию позиционных дифференциальных игр называют также теорией гарантирующего (либо гарантированного) управления.

Теория гарантирующего управления, концентрируясь на задачах управления в условиях неопределенных динамических помех, традиционно предполагает, что управляющие обратные связи используют полную информацию о текущих состояниях системы. В рамках теории рассматривались также подходы к задачам гарантирующего управления при наличии как неконтролируемых динамических возмущений, так и неполной информации о текущих состояниях [16] [17] [18] [19]. Эти исследования позволили дать адекватную формализацию таких задач, сформулировать двойственные задачи, разрешимость которых выступает альтернативой разрешимости исходных задач, и указать общую структуру искомых позиционных стратегий управления.

С этими исследованиями смыкается теория оценивания управляемых систем, нацеленная на синтез максимальной текущей информации о состояниях системы, используемой для выработки управляющих воздействий. Такая информация обычно представляется в

---

[9] *Понтрягин Л. С.* К теории дифференциальных игр // *Успехи мат. наук.* – 1966. – Т. 21, №4(130). – С. 219–274

[10] *Понтрягин Л. С.* О некоторых дифференциальных играх // *Докл. АН СССР.* – 1964. – Т. 156, № 4. – С. 738–741.

[11] *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // *Мат. сборник.* – 1980. –Т. 112, вып. 3. – С. 307–330.

[12] *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // *Дифференц. уравнения.* – 1971. – Т. 7, № 3. – С. 436–445.

[13] *Никольский М. С.* О квазилинейной задаче убегания // *Докл. АН СССР.* – 1975. – Т. 221, №3. – С. 539–542

[14] *Гусятников П. Б.* Об уклонении от встречи в линейной дифференциальной игре // *Прикладная математика и механика.* – 1974. – Т. 38, №3. – С. 417–421

[15] *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 224 с.

[16] *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Задача управления с неполной информацией // *Механика твердого тела.* – 1973. – № 4. – С. 5–14.

[17] *Кряжимский А. В.* Дифференциальная игра наведения в условиях неполной информации // *Украинский математический журнал.* – 1975. – Т. 75, № 4. – С. 521–526.

[18] *Кряжимский А. В.* Альтернатива в линейной игре наведения-уклонения с неполной информацией // *Доклады АН СССР.* – 1976. – Т. 230, № 4. – С. 773–776.

[19] *Krasovskii N. N.* Control under incomplete information and differential games // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. – Helsinki: 1978. – Pp. 152–163.

виде так называемых информационных множеств, объединяющих все состояния системы, не противоречащие текущей истории наблюдений. Для описания информационных множеств привлекаются эволюционные уравнения в бесконечномерных пространствах, аналоги уравнений Гамильтона-Якоби, конструируются аппроксимации множествами заданной структуры [20] [21] [22] [23].

Другой подход к восстановлению не доступной прямому наблюдению информации о системе в процессе ее движения предложен в теории динамического обращения управляемых систем [24] [25] [26] [27] [28] [29]. Теория совмещает методологию позиционного управления с принципом регуляризации из теории некорректно поставленных задач и нацелена, прежде всего, на решение задач идентификации в режиме реального времени текущих значений неконтролируемых переменных входов. Ряд разделов теории посвящен методам динамической идентификации ненаблюдаемых компонент состояний в условиях неполной информации и использованию этих методов для управления с обратной связью. Наконец, следует упомянуть методы, направленные на решение задач стабилизации и адаптивного управления при неполной информации [30] [31].

Среди общих подходов к исследованию задач гарантирующего управления центральное место занимают метод стабильных множеств [1] [2], метод обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби [3] [32], метод программных итераций [4], метод стохастического программного синтеза [1], метод неупреждающих стратегий. Последний метод, восходящий

---

[20] *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – Москва: Наука, 1977. – 392 с.

[21] *Куржанский А. Б.* О синтезе управлений по результатам наблюдений // *Прикладная математика и механика.* – 2004. – № 4. – С. 547–563.

[22] *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. – Москва: Наука, 1988. – 319 с.

[23] *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. – Basel: Birkhäuser, 1995. – 321 pp.

[24] *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О моделировании управления в динамической системе // *Известия АН СССР.* Серия техн. киберн. – 1983. – Т. 21, № 2. – С. 38–47.

[25] *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. – Москва: Изд-во МГУ, 1999. – 237 с.

[26] *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. – Екатеринбург: УрО РАН, 2011. – 291 с.

[27] *Keesman K. J., Maksimov V. I.* On feedback identification of unknown characteristics: a bioreactor case study // *International Journal of Control.* – 2007. – Vol. 81, no. 1. – Pp. 134–145.

[28] *Maksimov V. I., Pandolfi L.* Dynamical reconstruction of unknown inputs in nonlinear differential equations // *Applied Mathematical Letters.* – 2001. – Vol. 14. – Pp. 725–730.

[29] *Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. – London: Gordon and Breach Publishers, 1995. – 625 pp.

[30] On the robust stabilization of nonlinear uncertain systems with incomplete state availability / G. Bartolini, A. Levant, A. Pisano, E. Usai // *Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control.* – 2000. – Vol. 122. – Pp. 738–745.

[31] *Kanellakopulos I., Kokotovic P. V., Morse A. S.* Adaptive non-linear control with incomplete state information // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.* – 1992. – Vol. 6. – Pp. 367–394.

[32] *Lions P. L.* Optimal control and viscosity solutions // *Lecture Notes Math.* – 1985. – Vol. 1119. – Pp. 94–112.

к пионерским работам по формализации дифференциальных игр 1960-70-х годов [33] [34] [35] и развитый школой Н. Н. Красовского в контексте теории позиционных дифференциальных игр [4], служит базой основного метода настоящей работы – метода программных пакетов.

В области исследований по развитию методов позиционного управления и неупреждающих стратегий для решения задач гарантированного управления системами с неопределенностями активно работает группа западных математиков, лидирующую роль в которой играет французский специалист по теории управления М. Кюнкампуа (M. Quincampoix) [36] [37] [38] [39] [40]. Работы этой группы, связанные с методом неупреждающих стратегий, выполняются в традиционной для этого метода парадигме: исследуются варианты его применения при неопределенностях, вызываемых неконтролируемыми переменными входами. При этом сохраняется традиционное определение неупреждающих стратегий – как преобразований программ-входов в программы-управления, подчиненные условию вольтерровости (физической осуществимости, неупреждаемости). Такое определение применяется и в тех случаях, когда к неопределенности, вызываемой воздействием на систему неконтролируемых входов, присоединяется и собственно неполная информация о системе. Предполагается [37], что на управляемую систему действуют два неконтролируемых входа – наблюдаемый и ненаблюдаемый, а состояния системы наблюдениям не доступны. Следует отметить, что такая постановка не затрагивает типичную ситуацию, когда состояния системы наблюдаются частично. Эту же особенность имеет и постановка, где принимается, что неполнота информации заключается в статистическом характере сведений о начальном состоянии [39]. В области исследований по тематике управления распределенными системами следует выделить работы И. Ласецкой (I. Lasiecka) и Р. Триггиани (R. Triggiani) [41], Ф. Трольца (F. Troltzsch) [42] и В. Барбу (V. Barbu) [43]; эти работы связаны с развитием метода динамического программирования, выявлением достаточных условий

[33] *Elliott R. J., Kalton N.* Values in differential games // *Bulletin of the American Mathematical Society.* – 1972. – Vol. 78, no. 3. – Pp. 291–486.

[34] *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games // *Journal of Optimization Theory and Applications* – 1969. – Vol. 3. – Pp. 156–163.

[35] *Rull-Nardzevski C.* A theory of purcuit and evasion // *Advances in Game Theory.* – 1964. – Pp. 113–126.

[36] *Clark J. M. C., Vinter R. B.* On the interpretation of non-anticipative control strategies in differential games and applications to flow control // *Lecture Notes in Control and Information Science.* – 2004. – Vol. 301. – Pp. 29–47.

[37] *Quincampoix M., Veliov V.* Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances // *SIAM Journal of Control and Optimization.* – 2005. – Vol. 43, no. 4. – Pp. 1373–1399.

[38] *Gao Y., Lygeros J., Quincampoix M.* The reachability problem for uncertain hybrid systems revisited: a viability theory perspective // Hybrid Systems: Computation and Control. 9th International Workshop, HSCC 2006, Santa Barbara, CA, USA, March 29-31, 2006. Proceedings. – Springer-Verlag, 2006. – Pp. 242– 256.

[39] *Cardaliaguet P., Quincampoix M.* Deterministic differential games under probability knowledge of initial condition // *International Game Theory Review.* – 2008. – Vol. 10. – Pp. 1–16.

[40] *Buckdahn R., Quincampoix M.* Value function of differential games without Isaacs conditions. An approach with non-anticipative strategies // *International Journal of Game Theory.* – 2013. – Vol. 42. – Pp. 989–1020.

[41] *Lasiecka I., Triggiani R.* Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. Abstract parabolic sustems. – Cambridge University Press, 2000. – 1067 pp.

[42] *Troltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. – American mathematical society, 2010. – 399 pp.

[43] *Barbu V.* Analysis and control of infinite dimensional systems. – Boston: Academic press, 1993. – 476 pp.

оптимальности высокого порядка и усовершенствованием техники уравнений Риккати для задач квадратичной оптимизации.

Центральным инструментом, используемым в диссертационной работе, является метод программных пакетов, предложенный Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским [44] [45]. Данный метод, являющийся новым и оригинальным, представляет собой модификацию метода неупреждающих стратегий из теории позиционных дифференциальных игр, адекватную задачам гарантирующего управления при неполной информации. Традиционные неупреждающие стратегии (известные также, как квазистратегии) отражают основное качественное свойство программных реализаций управлений с обратной связью как реакций на программные реализации динамических возмущений — свойство вольтерровости (неупреждаемости). Его содержание состоит в том, что истории программных реакций управления на разные программные реализации возмущений совпадают между собой, если это имеет место для последних (для реализаций возмущений). Классическая постановка задачи гарантирующего управления с неполной информацией не предполагает воздействия на систему динамических возмущений: неопределенность вызывается лишь дефицитом информации о состояниях системы. При этом программные реализации обратных связей реагируют на реализации начальных состояний и истории управления. Поскольку в этой ситуации единственным неопределенным элементом выступает неизвестное начальное состояние, естественной модификацией неупреждающей стратегии становится отображение «начальное состояние — программная реализация управления» или, что то же, семейство программ управления, параметризованное начальными состояниями (стесненными априори заданным множеством допустимых начальных состояний). Выявление аналога свойства неупреждаемости такого отображения (семейства) не является тривиальной задачей, тем не менее, такое свойство было найдено и формализовано [44] [45]. Семейства программ управления, обладающие данным свойством, стали аналогом неупреждающих стратегий из теории позиционных дифференциальных игр и получили рабочее название программных пакетов. Общая схема применения программных пакетов, реализованная в работах Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского, состоит в следующем. Программные пакеты трактуются как идеализированные процедуры управления, близкие к программным. Исходной задаче о гарантирующем управлении в классе обратных связей сопоставляется аналогичная задача в классе программных пакетов. Устанавливается эквивалентность этих задач. Утверждение об эквивалентности и ряд сопутствующих результатов открывают возможность решения исходной задачи путем решения значительно более простой задачи, поставленной в классе программных пакетов.

[44] *Осипов Ю. С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // *Успехи мат. наук.* – 2006. – Т. 61, № 4 (370). – С. 25–76.

[45] *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 139–157.

В диссертации развивается подход, обозначенный в работе [46] для линейных динамических систем с линейным наблюдаемым сигналом.

Целью данной работы является построение конструктивных условий разрешимости задач гарантированного позиционного наведения в момент и к моменту времени для линейных управляемых систем в условиях неполной информации об их фазовых состояниях, конструктивных алгоритмов построения наводящих пакетов программ и разработка метода конструирования гарантирующего позиционного управления по наводящему пакету программ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Осуществить переход к расширенной задаче программного наведения для линейных управляемых динамических систем и установить ее эквивалентность задаче пакетного наведения.
2. Получить критерий разрешимости расширенной задачи программного наведения в момент времени и к моменту времени.
3. Для задач пакетного наведения, разрешимых в момент времени и к моменту времени, получить достаточные условия существования наводящего пакета программ.
4. Разработать конструктивную процедуру построения гарантирующего позиционного управления линейной динамической системы по наводящему пакету программ при наблюдении линейного сигнала о состояниях этой системы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирована и доказана теорема об эквивалентной разрешимости задачи пакетного наведения и расширенной задачи программного наведения для линейных динамических систем с наблюдаемым линейным сигналом.
2. Сформулирован и доказан критерий разрешимости расширенной задачи программного наведения для линейных управляемых динамических систем в момент времени и к моменту времени.
3. Предложены и обоснованы конструктивные условия для определения элементов наводящего пакета программ в задачах пакетного наведения в момент времени и к моменту времени.
4. Построена процедура построения ε-наводящей позиционной стратегии по наводящему пакету программ.

Научная новизна:

1. Задача о гарантирующем позиционном управлении при неполной информации в заданный момент времени была впервые сведена — через посредство задачи о гарантирующем управлении в классе программных пакетов — к задаче программного управления расширенной управляемой системой (случай линейных систем с линейным наблюдаемым сигналом и конечным множеством допусти-

[46] *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Математическая теория управления и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. – Москва: МАИК, 2012. – Т. 277. – С. 152–167.

мых начальных состояний). На базе решений последней задачи были сконструированы искомые гарантирующие обратные связи.

2. Выполнено исследование задачи о гарантирующем позиционном управлении при неполной информации к заданному моменту времени, в результате которого получен критерий ее разрешимости и условие минимума для определения элементов наводящего пакета программ с семейством допустимых моментов наведения.

Основные методы исследования. В работе используются методы теории линейных дифференциальных уравнений, теории гарантирующего управления, элементы функционального и выпуклого анализа.

Теоретическая и практическая значимость Диссертация носит теоретический характер; представленные в работе алгоритмы могут быть использованы для численных экспериментов.

Апробация работы. Результаты настоящей работы были представлены в виде научных докладов на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Ломоносов» (Москва, 2013, 2014, 2015 гг.);
- научная конференция «Тихоновские чтения» (Москва, 2014, 2015 гг.);
- научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014 г.);
- 13^{th} Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games (Вена, Австрия, 2015 г.);
- научно-исследовательский семинар кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академиков РАН А. В. Кряжимского и Ю. С. Осипова, профессора Н. Л. Григоренко.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 5 — в тезисах докладов [4–8].

Все результаты, вошедшие в диссертацию и в перечень опубликованных работ, получены автором самостоятельно. В совместных работах научному руководителю А. В. Кряжимскому принадлежат постановки задач.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации 103 страницы текста с 7 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 81 наименование.

Содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена задаче гарантированного позиционного наведения с неполной информацией в заданный момент времени.

В **разделе 1.1** дается постановка задачи. Рассматривается линейная управляемая динамическая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \tag{1}$$

здесь t — время, меняющееся на ограниченном фиксированном отрезке $[t_0,\vartheta]$ ненулевой длины, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени t, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значение управления в этот момент; $A(\cdot), B(\cdot), c(\cdot)$ — непрерывные функции, определенные на $[t_0,\vartheta]$ и принимающие значения в $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Пусть $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, описывающий *мгновенный ресурс* управления. Под *программой* понимается всякая ограниченная и измеримая по Лебегу функция $u(\cdot) : [t_0,\vartheta] \mapsto P$. Множество всех программ обозначим $\mathcal{U}$. Для всякой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всякой программы $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения (1), определенное на отрезке $[t_0,\vartheta]$ и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, назовем *движением* системы из начального состояния x_0 под действием программы $u(\cdot)$ и будем обозначать его $x(\cdot|x_0,u(\cdot))$.

Считаем, что управляющей стороне априори известно, что начальное состояние системы содержится в заданном конечном множестве *допустимых начальных состояний* X_0, но само это начальное состояние не известно. Пусть также задано выпуклое замкнутое *целевое* множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и задана кусочно-непрерывная слева *матрица-функция наблюдения* $Q(\cdot)$ на $[t_0,\vartheta]$, принимающая значения в $\mathbb{R}^{q\times n}$.

Перед управляющей стороной стоит *задача гарантированного позиционного наведения*, состоящая в формировании такой программы управления, которая гарантирует попадание состояния $x(\vartheta)$ системы в конечный момент ϑ в заранее заданную сколь угодно малую окрестность целевого множества M. В процессе движения управляющая сторона формирует искомую программу позиционно (по принципу обратной связи), получая в каждый текущий момент времени t сигнал $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии $x(t)$ системы в этот момент. Формально решение задачи ищется в классе позиционных стратегий управления с памятью. В соответствии со стандартным формализмом теории гарантирующего управления задача гарантированного позиционного наведения состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления с памятью, что, каково бы ни было начальное состояние x_0 системы из множества X_0 допустимых начальных состояний, движение $x(\cdot)$ системы, соответствующее выбранной позиционной стратегии и исходящее в момент t_0 из состояния x_0, в момент ϑ приходит в состояние $x(\vartheta)$, принадлежащее ε-окрестности целевого множества M.

В **разделе 1.2** вводится понятие центрального объекта диссертационной работы — пакета программ.

Рассмотрим однородную систему $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, соответствующую (1). По формуле Коши ее решение имеет вид: $x(t) = F(t,t_0)x_0$, где $F(t,s)$, $(t,s \in [t_0,\vartheta])$ — матрица Грина. Для каждого $x_0 \in X_0$ введем обозначение

$$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t,t_0)x_0 \quad (t \in [t_0,\vartheta]),$$

функцию $g_{x_0}(\cdot)$ будем называть *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию $x_0 \in X_0$. Однородный сигнал, соответствующий какому-либо (не специфицированному) допустимому начальному состоянию, будем называть просто *однородным сигналом* и обозначать $g(\cdot)$. Множество всех допустимых начальных состояний $x_0 \in X_0$, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ *до момента времени* $\tau \in [t_0, \vartheta]$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot))$. Таким образом,

$$X_0(\tau|g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0 : g(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau]}\},$$

здесь и далее $g(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$, где $\tau \in [t_0, \vartheta]$, – сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[t_0, \tau]$.

Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ назовем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $x_0', x_0'' \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при почти всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$.

Пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ назовем *наводящим*, если для всякого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ движение из x_0, соответствующее программе $u_{x_0}(\cdot)$, в момент ϑ принимает значение в целевом множестве M: $x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \in M$. Если существует наводящий пакет программ, то считаем, что *задача пакетного наведения разрешима*. С учетом эквивалентности[37] задачи гарантированного позиционного наведения и задачи пакетного наведения, основное внимание в работе уделяется поиску условий разрешимости последней задачи.

Обозначим множество всех однородных сигналов G. Для произвольного однородного сигнала $g(\cdot)$ введем множество

$$G_0(g(\cdot)) = \left\{\tilde{g}(\cdot) \in G : \lim_{\zeta \to +0} (\tilde{g}(t_0 + \zeta) - g(t_0 + \zeta)) = 0\right\}$$

исходно совместимых с ним однородных сигналов и момент времени

$$\tau_1(g(\cdot)) = \max\left\{\tau \in [t_0,\vartheta] : \max_{\tilde{g}(\cdot) \in G_0(g(\cdot))} \max_{t \in [t_0,\tau]} |\tilde{g}(t) - g(t)| = 0\right\}$$

назовем *первым моментом расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$. Продолжая аналогично, для $i = 1,2,\ldots$ введем множество

$$G_i(g(\cdot)) = \left\{\tilde{g}(\cdot) \in G_{i-1}(g(\cdot)) : \lim_{\zeta \to +0} (\tilde{g}(\tau_i(g(\cdot)) + \zeta) - g(\tau_i(g(\cdot)) + \zeta)) = 0\right\}$$

всех однородных сигналов из $G_{i-1}(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента $\tau_i(g(\cdot))$, и момент времени

$$\tau_{i+1}(g(\cdot)) = \max\left\{\tau \in (\tau_i(g(\cdot)),\vartheta] : \max_{\tilde{g}(\cdot) \in G_i(g(\cdot))} \max_{t \in [\tau_i(g(\cdot)),\tau]} |\tilde{g}(t) - g(t)| = 0\right\}$$

назовем $(i+1)$*-ым моментом расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$.

Ввиду конечности множества всех однородных сигналов (следующей из конечности множества допустимых начальных состояний X_0) для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geq 1$ такой, что $\tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$; при этом в случае $k_{g(\cdot)} > 1$ выполняются неравенства $t_0 < \tau_1(g(\cdot)) < \ldots < \tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot))$ и строгие вложения $G_{k_{g(\cdot)}-1}(g(\cdot)) \subset \ldots \subset G_1(g(\cdot)) \subset G_0(g(\cdot))$.

Наконец, введем множество $T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot)) : j = 1,\ldots,k_{g(\cdot)}\}$ всех моментов расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$.

Справедлива следующая характеризация пакетов программ.

Лемма 1. *Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда для всякого однородного сигнала $g(\cdot)$, всякого момента времени $\tau \in T(g(\cdot))$ и всяких начальных состояний $x_0', x_0'' \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при почти всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$.*

Введем множество $T = \bigcup\limits_{g(\cdot)\in G} T(g(\cdot))$ всех моментов расслоения всех однородных сигналов. Представим это множество в виде $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_K\}$, где $\tau_1 < \ldots < \tau_K$.

Для каждого $k = 1, \ldots, K$ множество

$$\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot)) : g(\cdot) \in G\}$$

назовем *кластерной позицией* в момент τ_k, а каждый его элемент – *кластером начальных состояний* в этот момент и будем обозначать кластеры через $X_{0j}(\tau_k), j = 1,\ldots,J(\tau_k)$, где $J(\tau_k)$ — количество кластеров в кластерной позиции $\mathcal{X}_0(\tau_k), k = 1,\ldots,K$.

Из леммы 1 вытекает следующая характеризация пакетов программ.

Лемма 2. *Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ программ является пакетом программ тогда и только тогда, когда для всякого $k = 1, \ldots, K$, всякого кластера $X_{0j}(\tau_k) \in \mathcal{X}_0(\tau_k), j = 1,\ldots,J(\tau_k)$ и произвольных допустимых начальных состояний $x_0',x_0'' \in X_{0j}(\tau_k)$ выполняется равенство $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$ при почти всех $t \in (\tau_{k-1},\tau_k]$ в случае $k > 1$ и при почти всех $t \in [t_0,\tau_1]$ в случае $k = 1$.*

Лемма 2 позволяет трактовать пакеты программ как программные управления, принимающие значения в некотором расширенном пространстве и подчиненные поточечным (геометрическим) ограничениям на значения.

В **разделе 1.3** формулируется расширенная задача программного наведения. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех семейств $(u_{x_0})_{x_0\in X_0}$ векторов из множества P. Всякую измеримую функцию $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0} : [t_0, \vartheta] \mapsto \mathcal{P}$ будем называть *расширенной программой*; измеримость указанной функции понимается в том смысле, что для каждого $x_0 \in X_0$ функция $t \mapsto u_{x_0}(t) : [t_0, \vartheta] \mapsto P$ измерима по Лебегу или, что эквивалентно, является программой. Всякое семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ будем отождествлять с расширенной программой $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$; наоборот, всякую расширенную программу $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ будем отождествлять с семейством программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$. В соответствии с этой трактовкой, для всякой расширенной программы $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ будем использовать также обозначение $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$.

Для каждого $k = 1, \ldots, K$ обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество всех семейств векторов $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_{0j}(\tau_k) \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$, $j = 1, \ldots, J(\tau_k)$ и любых допустимых начальных состояний $x_0', x_0'' \in X_{0j}(\tau_k)$ выполняется равенство $u_{x_0'} = u_{x_0''}$. Расширенную программу $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ назовем *допустимой*, если для каждого $k = 1, \ldots, K$ выполняется $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при почти всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при почти всех $t \in [t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$; множество $\mathcal{P}_k$ будем называть *допустимым расширенным ресурсом* (управления) на полуинтервале $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и на отрезке $[t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$. Для каждого $k = 1, \ldots, K$ множество $\mathcal{P}_k$ есть выпуклый компакт в $\mathcal{R}^m$.

Лемма 3. *Расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима.*

Значения расширенных программ (семейства векторов из множества P) будем далее рассматривать как элементы подходящего конечномерного гильбертова пространства. Через $\mathcal{R}^h$ $(h = 1, 2, \ldots)$ обозначим конечномерное гильбертово пространство всех семейств $(r_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ из $\mathbb{R}^h$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{R}^h}$ вида

$$\langle (r'_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (r''_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}^h} = \sum_{x_0 \in X_0} \langle r'_{x_0}, r''_{x_0} \rangle_{\mathbb{R}^h} \quad ((r'_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (r''_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}^h).$$

Для каждого непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^h$ $(h = 1, 2, \ldots)$ стандартным образом введем в рассмотрение его *нижнюю* опорную функцию $\rho^-(\cdot|\mathcal{E}) : \mathcal{R}^h \mapsto \mathbb{R}$ и *верхнюю* опорную функцию $\rho^+(\cdot|\mathcal{E}) : \mathcal{R}^h \mapsto \mathbb{R}$:

$$\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{E}) = \inf_{(e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{E}} \langle (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}^h},$$

$$\rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{E}) = \sup_{(e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{E}} \langle (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}^h}$$

$$((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}^h).$$

Далее трактуем расширенные программы как отображения из $[t_0, \vartheta]$ в $\mathcal{R}^m$.

Всюду далее $\rho^-(\cdot|P)$ – нижняя опорная функция мгновенного ресурса управления P в пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$\rho^-(l|P) = \min_{u \in P} \langle l, u \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (l \in \mathbb{R}^m).$$

Лемма 4. *Нижняя опорная функция допустимого расширенного ресурса $\mathcal{P}_k$ имеет вид*

$$\rho^-((r_{x_0})_{x_0 \in X_0}|\mathcal{P}_k) = \sum_{X_{0j}(\tau_k) \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0j}(\tau_k)} r_{x_0} \middle| P \right)$$

$$((r_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}^m, \quad k = 1, \ldots, K, \quad j = 1, \ldots, J(\tau_k)).$$

В пространстве $\mathcal{R}^n$ введем в рассмотрение *расширенную систему*, состоящую из экземпляров системы (1), параметризованных допустимыми начальными состояниями; экземпляр, параметризованный допустимым начальным состоянием x_0, имеет x_0 в качестве своего начального состояния и подвержен управляющему воздействию по некоторой программе $u_{x_0}(\cdot)$. Таким образом, расширенная система имеет вид

$$\dot{x}_{x_0}(t) = A(t)x_{x_0}(t) + B(t)u_{x_0}(t) + c(t), \quad x_{x_0}(t_0) = x_0 \quad (x_0 \in X_0). \tag{2}$$

Семейства $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ программ, применяемых для управления расширенной системой, ограничим классом всех допустимых расширенных программ. Для каждой допустимой расширенной программы $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ под соответствующим ей *движением* расширенной системы понимается функция $t \mapsto (x(t|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0} : [t_0,\vartheta] \mapsto \mathcal{R}^n$.

Расширенным целевым множеством назовем множество $\mathcal{M}$ всех семейств $(x_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^n$ таких, что $x_{x_0} \in M$ для всех $x_0 \in X_0$. Допустимая расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы*, если соответствующее ей движение расширенной системы в момент ϑ принимает значение в расширенном целевом множестве: $(x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0} \in \mathcal{M}$. *Расширенная задача программного наведения* разрешима, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы.

Теорема 1. *1) Задача пакетного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима расширенная задача программного наведения. 2) Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы.*

В **разделе 1.4** сформулирован и доказан критерий разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения в момент. В соответствии с теоремой 1 условия разрешимости задачи пакетного наведения сводятся к условиям разрешимости расширенной задачи программного наведения. Расширенная система, для которой поставлена расширенная задача программного наведения, имеет бо́льшую размерность, чем исходная система (1), однако структурно весьма проста: она представляет собой хорошо изученную задачу программного наведения линейной управляемой системы на выпуклое целевое множество в заданный момент времени при выпуклых поточечных (геометрических) ограничениях на программные управления [47]. Условия разрешимости такой задачи получаются применением теоремы об отделимости выпуклых множеств и сводятся к решению конечномерной задачи оптимизации. В данном разделе соответствующая конструкция применяется к расширенной задаче программного наведения.

Пусть $\mathcal{A}$ — *множество достижимости* расширенной системы в момент времени ϑ: $\mathcal{A} = \{(x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0} : (u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0} \in \mathcal{U}_{ext}\}$, где $\mathcal{U}_{ext}$ — множество всех допустимых расширенных программ.

Лемма 5. *Множество $\mathcal{A}$ является выпуклым компактом в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{R}^n$.*

[47] *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. — Минск: Издательство БГУ им. В. И. Ленина, 1973. — 246 с.

Введем обозначение $D(t) = B^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(\vartheta,t) \quad (t \in [t_0,\vartheta])$ и функцию $p(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times X_0 \mapsto \mathbb{R}$:

$$p(l, x_0) = \langle l, F(\vartheta, t_0)x_0\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle l, \int\limits_{t_0}^{\vartheta} F(\vartheta,t)c(t)dt \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad (l \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \in X_0).$$

Далее для каждого семейства $(l_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^n$ положим

$$\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) = \sum_{x_0\in X_0} p(l_{x_0}, x_0) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)} D(t)l_{x_0} \middle| P \right) dt - \sum_{x_0\in X_0} \rho^+(l_{x_0}|M).$$

Пусть $\mathcal{L}$ — какое-либо компактное множество пространства $\mathcal{R}^n$, которое содержит образ единичной сферы $\mathcal{S}^n$ при ее, вообще говоря, неравномерном растяжении вдоль всех направлений, то есть такое, что при некоторых положительных r_1 и $r_2 \geq r_1$ для каждой точки $z \in \mathcal{S}^n$ найдется $r \in [r_1, r_2]$, для которого $rz \in \mathcal{L}$.

Лемма 6. *Пусть функция* $\phi(\cdot) : \mathcal{R}^h \mapsto \mathbb{R}$ *положительно однородна. Тогда* $\sup\limits_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}^h} \phi((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) \leq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \phi((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) \leq 0.$

С использованием лемм 4, 5 и 6 получается основой результат первой главы.

Теорема 2. *Каждая из трех задач – (i) расширенная задача программного наведения, (ii) задача пакетного наведения и (iii) задача гарантированного позиционного наведения — разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) \leq 0. \tag{3}$$

Таким образом, из теоремы 2 следует, что проверку критерия разрешимости (3) можно свести к решению задачи максимизации функции $\gamma(\cdot)$ на множестве $\mathcal{L}$; последнее может быть выбрано таким образом, чтобы облегчить решение данной задачи.

В **разделе 1.5** описана конструктивная процедура построения наводящего пакета программ. Пусть критерий разрешимости (3) расширенной задачи программного наведения выполнен. Введем функцию $\hat{\gamma}(\cdot, \cdot) : \mathcal{R}^n \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$:

$$\hat{\gamma}((l_{x_0})_{x_0\in X_0},a) = \sum_{x_0\in X_0} p(l_{x_0}, x_0) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)} D(t)l_{x_0} \middle| aP \right) dt - \sum_{x_0\in X_0} \rho^+(l_{x_0}|M).$$

Назовем пакет программ $(u^0_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *нулевым*, если $u^0_{x_0}(t)\equiv 0$ $(t\in[t_0,\vartheta], x_0\in X_0)$. Нулевой пакет программ $(u^0_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является наводящим тогда и только тогда, когда

$$x(\vartheta|x_0,u^0_{x_0}(\cdot)) = F(\vartheta,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} F(\vartheta,t)c(t)dt \in M \quad (x_0\in X_0).$$

Лемма 7. *Пусть выполнен критерий разрешимости* (3) *и нулевой пакет программ* $(u^0_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *не является наводящим для расширенной системы* (2). *Тогда существует* $a_*\in(0,1]$ *такое, что*

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \hat{\gamma}((l_{x_0})_{x_0\in X_0},a_*) = 0. \tag{4}$$

Для всякого пакета программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$, произвольного $k=1,\ldots,K$, произвольного кластера $X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}(\tau_k), j=1,\ldots,J(\tau_k)$ и произвольного момента времени $t\in[\tau_{k-1},\tau_k)$ обозначим через $u_{X_{0j}(\tau_k)}(t)$ значения программ $u_{x_0}(t)$, одинаковые для всех $x_0\in X_{0j}(\tau_k)$ (с точностью до классов эквивалентности).

Пусть $(l^*_{x_0})_{x_0\in X_0}$ — семейство векторов, максимизирующее выражение (4). Назовем кластер $X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k), k=1,\ldots,K, j=1,\ldots,J(\tau_k)$ *регулярным*, если вектор

$$\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)} D(t)l^*_{x_0}\neq 0,\ t\in[\tau_{k-1},\tau_k). \tag{5}$$

В противном случае будем называть кластер *особым*.

Теорема 3 (Условие минимума для расширенной задачи программного наведения)**.** *Пусть множество* P — *строго выпуклый компакт*, $0\in int\ P$. *Пусть также выполняется условие* (4) *и пакет программ* $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *удовлетворяет условию* $u^*_{x_0}(t)\in a_*P$ $(t\in[t_0,\vartheta],\ x_0\in X_0)$, *где* a_* – *корень уравнения* (4). *Пусть кластеры* $X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k)$, $k=1,\ldots,K,\ j=1,\ldots,J(\tau_k)$ *регулярны и для каждого из них выполняется равенство*

$$\left\langle D(t)\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)} l^*_{x_0}, u^*_{X_{0j}(\tau_k)}(t)\right\rangle = \rho^-\left(D(t)\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)} l^*_{x_0}\middle| a_*P\right) \tag{6}$$

$$(t\in[\tau_{k-1},\tau_k)).$$

Тогда пакет программ $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *является наводящим.*

Замечание 1. *В случае, если некоторые кластеры* $X_{0\hat{j}}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k)$, $\hat{j}\in 1,\ldots,J(\tau_k)$, $k=1,\ldots,K$ *особые, выражение* (6) *обращается в тождество всюду на* $[\tau_{k-1},\tau_k)$ *и поэтому не дает информации для определения соответствующего элемента* $u^*_{X_{0\hat{j}}(\tau_k)}$ *наводящего пакета программ. Алгоритм поиска элементов наводящего пакета программ для особых кластеров описан в* ***разделе 3.1***.

В **разделе 1.6** приводится численный эксперимент, содержащий проверку критерия разрешимости и вычисление элементов наводящего пакета программ для задачи наведения на заданную область конечного состояния движения материальной точки по прямой в условиях неполной информации о ее начальном положении.

Вторая глава посвящена исследованию задачи гарантированного позиционного наведения с неполной информацией к заданному моменту времени.

В **разделе 2.1** дается постановка задачи. Пусть к условиям задачи (1) дополнительно также заданы непустое множество $W \subset (t_0,\vartheta]$ *допустимых моментов наведения* и для каждого $t \in W$ – непустое выпуклое замкнутое *целевое* множество $M(t) \in \mathbb{R}^n$.

Перед управляющей стороной ставится задача *гарантированного позиционного наведения к моменту*: по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ требуется выбрать такую позиционную стратегию управления с памятью, что для любого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ движение $x(\cdot)$ системы (1), исходящее из этого состояния под действием выбранной позиционной стратегии, в некоторый момент времени $t_{x_0} \in W$ приходит в ε-окрестность целевого множества $M(t_{x_0})$.

В **разделе 2.2** вводятся эквивалентные задачи пакетного наведения к моменту и пакетного наведения с семейством допустимых моментов наведения. Пакет $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ программ будем называть *наводящим к моменту*, если для любого $x_0 \in X_0$ найдется момент $t_{x_0} \in W$ такой, что $x(t_{x_0}|x_0,u_{x_0}(\cdot)) \in M(t_{x_0})$. Если существует наводящий к моменту пакет программ, говорим, что *разрешима задача пакетного наведения к моменту.* Всякое семейство $\omega = (t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ элементов множества W будем называть *семейством допустимых моментов наведения.* Будем говорить, что пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является *наводящим с семейством* $\omega = (t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ допустимых моментов наведения, если для любого $x_0 \in X_0$ выполняется $x(t_{x_0}|x_0,u_{x_0}(\cdot)) \in M(t_{x_0})$. Если существует пакет программ, являющийся наводящим с семейством ω допустимых моментов наведения, будем говорить, что *разрешима задача пакетного наведения с семейством ω допустимых моментов наведения.*

Лемма 8. *1) Пакет программ является наводящим к моменту тогда и только тогда, когда он является наводящим с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

2) Задача пакетного наведения к моменту разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения с некоторым семейством допустимых моментов наведения.

В **разделе 2.3** вводится расширенная задача программного наведения с семейством допустимых моментов наведения. *Расширенным целевым множеством* для семейства $\omega = (t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ допустимых моментов наведения будем называть множество $\mathcal{M}(\omega)$ всех семейств $(x_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}^n$ таких, что $x_{x_0} \in M(t_{x_0})$ для всех $x_0 \in X_0$. Будем говорить, что допустимая расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы с семейством* $\omega = (t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ *допустимых моментов наведения*, если для движения $(x(\cdot|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$, выполняется условие $(x(t_{x_0}|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0} \in \mathcal{M}(\omega)$.

Будем говорить, что разрешима *расширенная задача программного наведения* с семейством ω допустимых моментов наведения, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы с семейством ω допустимых моментов наведения.

Из леммы 3 вытекает следующее.

Теорема 4. *1) Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ с семейством ω допустимых моментов наведения тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

2) Задача пакетного наведения с семейством ω допустимых моментов наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима расширенная задача программного наведения с этим же семейством допустимых моментов наведения.

В **разделе 2.4** приводится критерий разрешимости расширенной задачи программного наведения с заданным семейством допустимых моментов наведения.

Обозначим Ω – множество всех семейств $(t_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ допустимых моментов наведения. Для каждого семейства $\omega = (t_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \Omega$ введем соответствующее ему *множество достижимости* $\mathcal{A}(\omega) = \{(x(t_{x_0}|x_0,u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} : (u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}_{ext}\}$ расширенной системы.

Лемма 9. *Для каждого семейства ω допустимых моментов наведения множество $\mathcal{A}(\omega)$ является выпуклым компактом в $\mathcal{R}^n$.*

Для произвольного допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ и произвольного вектора $l \in \mathbb{R}^n$ введем функцию $p(\cdot,\cdot)$:

$$p(l, x_0, t_{x_0}) = \langle l, F(t_{x_0}, t_0)x_0 \rangle + \left\langle l, \int\limits_{t_0}^{t_{x_0}} F(t_{x_0},t)c(t)dt \right\rangle \quad (l \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \in X_0).$$

Введем обозначение

$$D(t_{x_0}, t) = B^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t_{x_0},t) \quad (x_0 \in X_0,\ t \in [t_0, \vartheta]).$$

Для всякого семейства допустимых моментов наведения $\omega = (t_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ введем множество

$$\bar{X}_k(\omega) = \{x_0 \in X_0 : t_{x_0} \in (\tau_{k-1}, \tau_k]\} \quad (k = 1, \ldots, K)$$

и для любого семейства векторов $l = (l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{L}(\omega)$ положим

$$l_{x_0,\omega}(t) = \begin{cases} l_{x_0}, & t \le t_{x_0} \\ 0, & t > t_{x_0} \end{cases} \quad (t \in [t_0, \vartheta],\ x_0 \in X_0).$$

Для произвольного семейства $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ элементов какого-либо линейного пространства и произвольной числовой функции $f(\cdot)$, определенной на этом линейном пространстве, будем использовать следующие краткие записи:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^1 f(\Sigma_{x_0}^{1,k} l_{x_0}) &= \sum_{X_{0j}(\tau_1)\in\mathcal{X}(\tau_1)} f\left(\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_1)\cap\bar{X}_k(\omega)} l_{x_0}\right) \\
(k &= 1,\ldots,K, j=1,\ldots,J(\tau_1)), \\
\Sigma^r f(\Sigma_{x_0}^{r,k} l_{x_0}) &= \sum_{X_{0j}(\tau_r)\in\mathcal{X}(\tau_r)} f\left(\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_r)\cap\bar{X}_k(\omega)} l_{x_0}\right) \\
(r,k &= 1,\ldots,K,\ k\geq r, j=1,\ldots,J(\tau_r)), \\
\Sigma^1 f\left(\sum_{k=1}^{i}\Sigma_{x_0}^{1,k} l_{x_0}\right) &= \sum_{X_{0j}(\tau_1)\in\mathcal{X}(\tau_1)} f\left(\sum_{k=1}^{i}\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_1)\cap\bar{X}_k(\omega)} l_{x_0}\right) \\
(i &= 1,\ldots,K, j=1,\ldots,J(\tau_1)), \\
\Sigma^r f\left(\sum_{k=r}^{i}\Sigma_{x_0}^{r,k} l_{x_0}\right) &= \sum_{X_{0j}(\tau_r)\in\mathcal{X}(\tau_r)} f\left(\sum_{k=r}^{i}\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_r)\cap\bar{X}_k(\omega)} l_{x_0}\right) \\
(r,i &= 1,\ldots,K,\ i\geq r).
\end{aligned}
$$

Здесь и далее, как обычно, сумма индексированных значений по пустому множеству индексов принимается равной нулю.

Далее для каждого семейства векторов $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}^n$ и семейства допустимых моментов наведения $\omega\in\Omega$ положим

$$
\begin{aligned}
\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0},\omega) &= \sum_{x_0\in X_0} p(l_{x_0},x_0) + \\
&+ \sum_{k=1}^{K-1}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\Sigma^k\rho^-\left(\Sigma_{x_0}^{k,k}D(t_{x_0},t)l_{x_0,\omega}(t)+\sum_{r=k+1}^{K}\Sigma_{x_0}^{k,r}D(t_{x_0},t)l_{x_0}\middle|\ P\right)dt + \\
&+ \int\limits_{\tau_{K-1}}^{\tau_K}\Sigma^K\rho^-\left(\Sigma_{x_0}^{K,K}D(t_{x_0},t)l_{x_0,\omega}(t)\middle|P\right)dt - \sum_{x_0\in X_0}\rho^+\left(l_{x_0}|M(t_{x_0})\right).
\end{aligned}
$$

Теорема 5. *Расширенная задача программного наведения с семейством $\omega=(t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ допустимых моментов наведения разрешима тогда и только тогда, когда*

$$
\max_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}(\omega)}\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0},\omega)\leq 0. \qquad (7)
$$

В **разделе 2.5** описана конструктивная процедура построения наводящего пакета программ с семейством допустимых моментов наведения. Пусть критерий разрешимости (7) расширенной задачи программного наведения некоторым семейством $\omega=(t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ допустимых моментов наведения выполнен. Опишем метод построения наводящего с семейством ω пакета программ.

Введем функцию $\hat\gamma(\cdot,\cdot,\cdot):\mathcal{R}^n\times\Omega\times[0,1]\mapsto\mathbb{R}$:

$$\hat\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0},\omega,a)=\sum_{x_0\in X_0}p(l_{x_0},x_0)+$$
$$+\quad a\sum_{k=1}^{K-1}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\Sigma^k\rho^-\left(\Sigma_{x_0}^{k,k}D(t_{x_0},t)l_{x_0,\omega}(t)+\sum_{r=k+1}^{K}\Sigma_{x_0}^{k,r}D(t_{x_0},t)l_{x_0}\middle|\;P\right)dt+$$
$$+\quad a\int\limits_{\tau_{K-1}}^{\tau_K}\Sigma^K\rho^-\left(\Sigma_{x_0}^{K,K}D(t_{x_0},t)l_{x_0,\omega}(t)\middle|P\right)dt-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+\left(l_{x_0}|M(t_{x_0})\right).$$

Назовем пакет программ $(u^0_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *нулевым с семейством* $\omega=(t_{x_0})_{x_0\in X_0}$, если $u^0_{x_0}(t)\equiv 0$ $(t\in[t_0,t_{x_0}],x_0\in X_0)$. Нулевой пакет программ $(u^0_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ с семейством ω является наводящим тогда и только тогда, когда

$$x(t_{x_0}|x_0,u^0_{x_0}(\cdot))=F(t_{x_0},t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t_{x_0}}F(t_{x_0},t)c(t)dt\in M(t_{x_0})\quad(x_0\in X_0).$$

Лемма 10. *Пусть выполнен критерий разрешимости* (7) *для некоторого семейства допустимых моментов наведения* $\omega=(t_{x_0})_{x_0\in X_0}$ *и нулевой пакет программ* $(u^0_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *с семейством* ω *не является наводящим для расширенной системы. Тогда существует* $a_*\in(0,1]$ *такое, что*

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}(\omega)}\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0},\omega,a_*)=0.\tag{8}$$

Пусть $(l^*_{x_0})_{x_0\in X_0}$ – произвольное семейство векторов, максимизирующее выражение (8).

Теорема 6. *Пусть множество* P — *строго выпуклый компакт,* $0\in int\,P$. *Пусть также выполняется условие* (8) *и пакет программ* $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *удовлетворяет условию* $u^*_{x_0}(t)\in a_*P$ $(t\in[t_0,\vartheta],\;\; x_0\in X_0)$, *где* a_* – *корень уравнения* (8). *Пусть кластеры* $X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k),k=1,\ldots,K,j=1,\ldots,J(\tau_k)$ *регулярны (в смысле определения* (5)*) и для каждого из них выполняются равенства:*

на отрезках $[\tau_{k-1},\tau_k],k=1,\ldots,K-1$*:*

$$\left\langle\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)\cap\bar X_k(s)}D(t_{x_0},t)l^*_{x_0,\omega}(t)+\sum_{r=k+1}^{K}\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)\cap\bar X_r(\omega)}D(t_{x_0},t)l^*_{x_0},u^*_{X_{0j}(\tau_k)}(t)\right\rangle=$$
$$=\quad\rho^-\left(\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)\cap\bar X_k(s)}D(t_{x_0},t)l^*_{x_0,\omega}(t)+\sum_{r=k+1}^{K}\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)\cap\bar X_r(\omega)}D(t_{x_0},t)l^*_{x_0}\middle|a_*P\right),$$

на отрезке $[\tau_{K-1},\tau_K]$*:*

$$\left\langle \sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_K)\cap\bar{X}_K(\omega)} D(t_{x_0},t)l^*_{x_0,\omega}(t), u^*_{X_{0j}(\tau_K)}(t)\right\rangle =$$

$$= \rho^-\left(\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_K)\cap\bar{X}_K(\omega)} D(t_{x_0},t)l^*_{x_0,\omega}(t)\middle| a_*P\right).$$

Тогда пакет программ $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *является наводящим.*

В **разделе 2.6** приводится численный эксперимент, содержащий проверку критерия разрешимости и вычисление элементов наводящего пакета программ для задачи наведения на заданную область к заданному моменту состояния движения материальной точки по прямой в условиях неполной информации о ее начальном положении.

Третья глава посвящена описанию алгоритма решения задачи гарантированного позиционного наведения на основе теории, изложенной в главе 1.

В **разделе 3.1** рассматриваются дискретные методы определения моментов расслоения однородных сигналов $\tau_k,\ k=1,\ldots,K$ и соответствующих им кластеров множества допустимых начальных состояний $X_{0j}(\tau_k)\in\mathcal{X}_0(\tau_k),\ j=1,\ldots,J(\tau_k)$, предлагается модификация градиентного метода [48] для определения коэффициента сжатия a_* мгновенного ресурса управления P и соответствующих максимизирующих векторов $l^*_{x_0},\ x_0\in X_0$. С помощью вычисленных значений с помощью применения условия минимума (6) определяются элементы наводящего пакета программ. Именно, для всех $k=1,\ldots,K$ и каждого $j=1,\ldots,J(\tau_k)$ такого, что кластер $X_{0j}(\tau_k)$ регулярный, найдем

$$u^*_{X_{0j}(\tau_k)}(t)=\arg\min_{u\in a_*P}\left\langle D(t)\sum_{x_0\in X_{0j}(\tau_k)} l^*_{x_0},u\right\rangle,\ t\in[\tau_{k-1},\tau_k].$$

Для обработки случая наличия особых кластеров приводится модификация алгоритма [49] поиска особых управлений в линейных управляемых системах.

В **разделе 3.2** предлагается процедура построения ε-наводящей позиционной стратегии по наводящему пакету программ, решающей исходную задачу гарантированному позиционного управления. Для определенности рассматривается задача наведения в заданный момент времени.

Лемма 11. *Пусть разрешима задача пакетного наведения для системы (1) и* $x^*(\cdot)=x(\cdot|x_0,u^*_{x_0}(\cdot))$ *– движение, исходящее из допустимого начального состояния* $x_0\in X_0$ *под действием программы* $u^*_{x_0}(\cdot)$ *из наводящего пакета программ* $u^*_{x_0}(\cdot)_{x_0\in X_0}$.

[48] *Гиндес В. Б.* К задаче минимизации выпуклого на множестве конечных состояний линейной системы управления // *Журнал вычислительной матемематики и математической физики.* — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 962–970.

[49] *Гиндес В. Б.* Об особом управлении в оптимальных системах // *Известия вузов. Математика.* — 1967. — № 7. — С. 34–42.

Пусть $\tilde{x}^*(\cdot) = x(\cdot|x_0,\tilde{u}^*(\cdot))$ *– движение в управляемом процессе* $(\tilde{x}^*(\cdot),y(\cdot),\tilde{u}^*(\cdot))$ *с начальным состоянием* x_0 *под действием позиционной стратегии* S^**, соответствующей* $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$*, где* $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}, y(t) = Q(t)x(t)$ $(t \in [t_0,\vartheta])$*, и для каждого* $k = 0,\ldots,K$ *выполнено*

$$\tilde{u}^*(t) = \tilde{u}^*(\sigma_k) = U_k(y_{\sigma_k}(\cdot),u_{\sigma_k}(\cdot)) \quad (t \in [\sigma_k,\sigma_{k+1}]).$$

Тогда

$$|\tilde{x}^*(\vartheta) - x^*(\vartheta)| \leq K\delta\mathcal{C},$$

где $\mathcal{C}$ *– неотрицательная постоянная.*

Из леммы 11 вытекает следующая теорема, содержащая основной результат данного раздела.

Теорема 7. *Пусть разрешима задача пакетного наведения для системы (1) и для достаточно малого положительного* δ *выполнено условие* $K\delta\mathcal{C} \leq \varepsilon$*, где* $\mathcal{C}$ *– некоторая положительная постоянная. Тогда позиционная стратегия* $S^* = (\sigma_k, U_k)_{k=0}^{K+1}$*, соответствующая наводящему пакету программ, будет являться* ε*-наводящей.*

В **разделе 3.3** рассматриваются иллюстрирующие алгоритм примеры.

В **заключении** приведены основные результаты работы и рекомендации по их использованию и развитию.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю А. В. Кряжимскому за постановку задач и внимание к работе. Автор благодарит Ю. С. Осипова за поддержку в работе и полезные советы.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Кряжимский А. В., Стрелковский Н. В.* Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 168–177.

2. *Кряжимский А. В., Стрелковский Н. В.* Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 132–147.

3. *Стрелковский Н. В.* Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика.* — 2015. — № 3. — С. 31–38.

4. *Стрелковский Н. В.* К одному методу решения задач гарантирующего управления с неполной информацией для линейных динамических систем // Ломоносов-2013: Материалы XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых

ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика»; 9-12 апреля; Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК: Сборник тезисов. — Москва: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2013. — С. 147–149.

5. *Стрелковский Н. В.* Об условиях разрешимости задачи гарантирующего управления в условиях неполной информации для линейных динамических систем с конечным множеством начальных состояний // Ломоносов-2014: Материалы XXI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика»; 7-11 апреля; Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК: Сборник тезисов. — Москва: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2014. — С. 71–73.

6. *Стрелковский Н. В.* О разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения управляемой системы к моменту времени в условиях неполной информации // Научная конференция "Тихоновские чтения". Тезисы докладов. — Москва: 2014. — С. 41–42.

7. *Стрелковский Н. В.* Построение наводящего пакета программ и соответствующей ему позиционной стратегии в задаче гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Ломоносов-2015: Материалы XXII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика»; 13-17 апреля; Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК: Сборник тезисов. — Москва: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2015. — С. 141–142.

8. *Strelkovskii N. V.* Program packages method for solving closed-loop guidance problem with incomplete information for linear systems // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games. Scientific program. — Vienna: 2015. — P. 104.