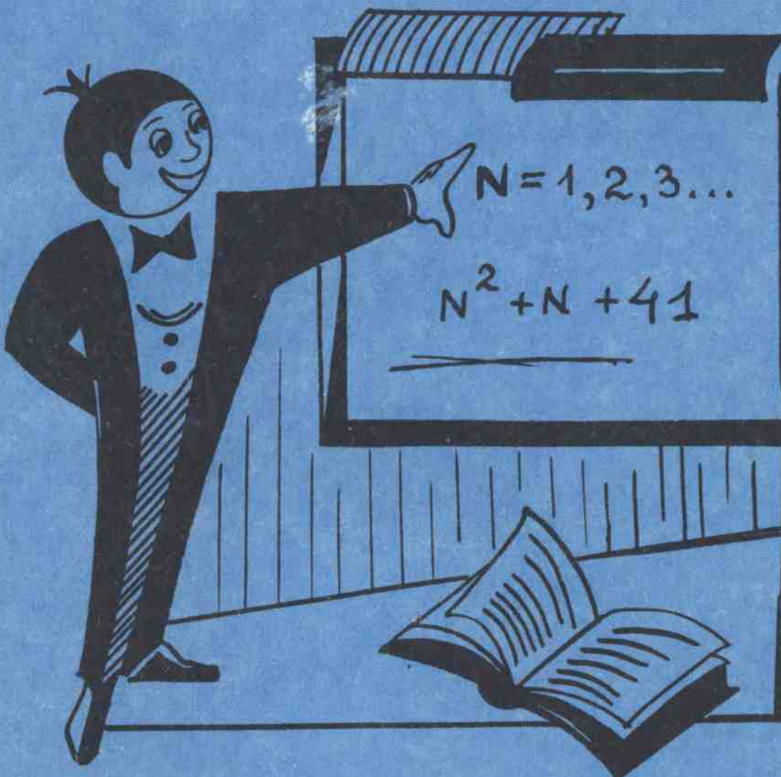
А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи, Н.Б.Васильев

Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года для 8-11 классов



Москва

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ МОСКВЫ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.М.В.ЛОМОНОСОВА

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

"TREADE PUBLISHERS"

1994

А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи, Н.Б.Васильев

Подготовительные задачи
к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года
для 8-11 классов

Москва

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ МОСКВЫ

*

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.М.В.ЛОМОНОСОВА

*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

*

"TREADE PUBLISHERS"

1994

ББК 22.1 Я 721
К19

Составители: Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Васильев Н.Б.
Художник: Шарапанова А.Ю.
Оригинал-макет подготовлен на базе сектора математических методов Дома научно-технического творчества молодежи

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Васильев Н.Б.
К19 Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года для 8-11 классов. — М.: "TREADE PUBLISHERS", 1994. — 80 с.: ил.

Здесь представлены задачи олимпиадного фольклора, прошедшие "естественный отбор". Они отражают основные олимпиадные идеи, ставшие частью общематематической культуры.

Сборник снабжен системой ссылок от задач к идеям решения и от идей к задачам, что позволяет с помощью советов "решателю" использовать его в качестве самоучителя при подготовке к олимпиадам.

ISBN 5-7347-0170-х

Издание является результатом совместной деятельности
Московского института развития образовательных систем (МИРОС),
Московского Государственного Университета,
Московского математического общества
и издательской группы "TREADE PUBLISHERS"
при АО "Триада Трэйдинг Компани".

Подписано в печать 12.02.94. Формат 84х108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура курьер. Печать офсетная. Усл.п.л. 2,5. Тираж 20000. Заказ №766.
Изд.№594.

Издательская группа "TREADE PUBLISHERS" при АО "Триада Трэйдинг Компани". Издательская лицензия №062720. 125047, г.Москва, а/я 214.

Отпечатано в типографии "Новости". г.Москва, ул.Фридриха Энгельса, 46.

ISBN 5-7347-0170-х
ББК 22.1 Я721

Дорогие юные друзья!

В начале 1994 года мы будем рады видеть вас на очередной Московской математической олимпиаде школьников.

Математические олимпиады всегда устраивались как праздники ярких математических идей и красивых рассуждений. Но успех в таком празднике сопутствует тем, кто серьезно к нему готовится. Эта подготовка включает: самостоятельное решение трудных и необычных задач, чтение математической литературы (например, журнала "Квант"), активное занятие в математическом кружке.

Цель настоящего сборника – помочь вам в подготовке к олимпиаде. Причем помочь не только начинающим, но и уже увлеченным математикой.

Как и в любом соревновании, на олимпиаде важен фактор времени – на 6 задач отводится лишь пять часов. Но учиться решению задач лучше в спокойной обстановке без оглядки на часы. При этом бывает полезно отложить "непокорную" задачу и вернуться к ней, скажем, через неделю...

Работа со сборником поможет вам понять, действительно ли вас увлекает поиск ответа на необычные математические вопросы, поможет воспитать в себе упорство в работе, развить нестандартность мышления. И, может быть, вы познаете ни с чем не сравнимую радость победы над задачей, казавшейся сначала абсолютно неприступной!

Олимпиада потому и называется олимпиадой, что в результате все ее участники разделяются на два непересекающихся множества: в одном – очень небольшое число победителей, в другом – очень большое число тех, кто до премии "не дотянул". Победителям будут аплодировать, им дадут грамоты, но не это важно.

История свидетельствует: победа на олимпиаде оказалась началом пути для многих математиков, ставших сегодня гордостью нашей науки. Уверен, и олимпиада 1994 года откроет таланты молодых людей, достижениям которых в будущем мы сможем радоваться.

Но если вас не наградили, то ни в коей мере не считайте себя "побежденными", – олимпиада не знает даже такого термина! Конечно, успех на олимпиаде является серьезным подтверждением математических способностей, однако, "обратная теорема" неверна. Жизнь много сложнее, чем прямолинейная формула: "Первая премия = выдающийся математик". Никакие награды в юности, увы, не гарантируют последующих успехов. Немало известных математиков вышли из тех, кому на олимпиадах "блеснуть" не довелось. Их достижения определила увлеченность наукой, высокое трудолюбие и упорство в продвижении к цели.

Предстоящая олимпиада будет 57-ой. Но, несмотря на свой "некруглый" номер, она станет юбилейной, ибо 60 лет назад весной далекого 1934 года в Ленинграде впервые в России прошла школьная олимпиада по математике. Именно от нее ведет свое начало наша богатая традиция различных математических соревнований.

Сегодняшним школьникам будет любопытно и полезно познакомиться с теми задачами, которые предлагались на олимпиаде 1934 года (мы приводим их в конце книги). А искушенный читатель заметит, как изменились уровень подготовки участников и характер задач.

Отмечая юбилей первой математической олимпиады, мы воздаем должное памяти ее организатора, замечательного математика и педагога, члена-корреспондента АН СССР Бориса Николаевича Делоне. Начиная с 1994 года на Московской математической олимпиаде будет присуждаться Премия имени Б.Н.Делоне за лучшее решение геометрической задачи.

В заключение мне хочется пожелать всем читателям этой книги самого главного – получать истинное наслаждение от решения красивых и трудных математических задач.

Н.Х.Розов,
председатель оргкомитета
LVII Московской
математической олимпиады

Как пользоваться сборником

Успех на олимпиаде связан не только с вашими способностями, но и со знанием классических олимпиадных идей, а главное – с опытом обращения с задачами, отличными от стереотипных упражнений. Поэтому к олимпиаде надо серьезно готовиться.

Но одного труда недостаточно, надо еще понять чему вы собираетесь научиться и как будете оценивать свои успехи. В школе считается, что чем больше решил – тем лучше. Но главное не в количестве решенных задач, а в преодолении встретившихся трудностей. На олимпиаде был случай, когда за решение "только одной" самой трудной задачи присудили первую премию.

Вам может показаться, что долго решая задачу, которую другой решил сходу, вы ничего не достигли. Однако этот другой мог знать заранее основные идеи, и потому мало чему научился, а вы пришли к новому пониманию.

Работа над настоящей задачей отличается от выполнения упражнения. Прежде всего, нет никакой гарантии, что вы ее решите. Поэтому нужно извлекать уроки из своих размышлений. Если вы нашли интересную закономерность или доказали интересный факт или испробовали новый подход, то время потрачено не зря, даже если решение не найдено.

О задачах сборника

Многие олимпиадные задачи обладают самостоятельной ценностью, перенося идеи и сюжеты из "большой науки". Мы отобрали те из них, которые стали олимпиадным "фольклором" и продолжают жить собственной жизнью.

Задачи разделены по классам, а внутри классов – на группы A,B,C,D – по возрастанию трудности.

Мы даем ссылки от задач к идеям решения и от идей к задачам. Тем самым устанавливаются связи между задачами, и более простые задачи служат ступеньками для сложных. Но помните, что нужно научиться самим ставить вспомогательные задачи.

Все задачи сборника широко известны, поэтому мы не указываем их авторов. Мы благодарны С.В.Маркелову и А.А.Шапиро за помощь при составлении и редактировании задач.

Работа со сборником

- Деление задач по классам условно, а трудность задач относительна. Поэтому решайте задачи не только из своего класса.
- Лучше просматривать задачи по порядку, но решать не все, а наиболее интересные для вас.

■ Работа над задачей не исчерпывается ее решением. Свое собственное решение вы можете не понимать! Попробуйте выделить основные идеи , подумайте об аналогиях и обобщениях. Только после такой работы над сравнительно простыми задачами можно получить награду – решить ранее недоступную.

Если задача вызывает трудности, полезно упростить ее условие, посмотреть частные или предельные случаи. Например, если дана доска 8x8, – рассмотрите доску 4x4; если говорится о любом треугольнике, – рассмотрите прямоугольный или правильный, если дана окружность, – рассмотрите точку или прямую.

Задачи последней части очень трудные. Они берутся не приступом, а осадой. Некоторые идеи нужно узнать заранее. Посмотрите в конце сборника ссылку от задачи к идеям решения, затем прочтите описание этих идей, а потом порешайте более простые задачи, в которых эти идеи работают.

О ссылках

Ссылки от задач к идеям не являются единственно возможными, поскольку пути решения могут различаться. Поэтому указание, полезное одному, может помешать другому.

От задач к темам делались только те ссылки, которые, на наш взгляд, могут помочь решению. От тем к задачам делались все ссылки, чтобы помочь в работе над другими задачами.

На олимпиаде

■ Для каждого из нас неизбежна ситуация, когда задача не получается. В этом случае совет: оторвитесь от задачи и оцените положение. Если заметны хоть небольшие продвижения, то можно продолжать, а если мысль бесплодно ходит по кругу, и разорвать его не удается, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).

■ Если Вам не ясно, верно ли некоторое утверждение, – то пытайтесь поочередно его доказывать и опровергать.

■ Если вы решили задачу, то сразу оформляйте решение. Это поможет проверить логику и освободить мысли для других задач.

■ Если задача решилась слишком легко, то, скорее всего, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.

Обозначения

– подумайте об обобщениях задачи или вариантах условия.

* – задача труднее остальных в данном разделе.

11.B.25 – задача для 11 класса в части B под номером 25.

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

8-9 класс. Часть А.

1. Цены снижены на 20%. На сколько больше можно купить товаров на те же деньги?

2. По кругу расположены 9 шестеренок так, что первая сцеплена со второй, вторая с третьей и т.д., девятая с первой. Могут ли эти шестеренки вращаться ?

3 . Можно ли в клетках таблицы 5x5 записать числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительная, а в каждом столбце отрицательная?

4*. Докажите, что в любой компании число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

5 . Сколькими способами 5 разных книг можно поставить на книжную полку?

6 . Сколько диагоналей в правильном 7-угольнике?

7. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

8 . В Москве живут не меньше 10 млн человек в возрасте не больше 100 лет. Докажите, что в Москве найдутся 270 человек, родившихся в один год и один день.

9. В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью лифта попасть с 20 этажа на 1-й? (Когда сверху меньше 8-и этажей, то лифт вверх не поедет. Аналогично, вниз.)

10. Часы показывают полдень. Через какое время часовая и минутная стрелки опять совпадут?

11. По кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?

12. На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 20-й день все озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

13. Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая (отличается по весу). Как с помощью весов с двумя чашками без гирь выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета? (Находить ее не требуется.) Какое наименьшее число взвешиваний понадобится?

14. Изменится ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в три раза?

15. Андрей пошел с папой в тир. Уговор был такой: Андрей делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право еще на 2 выстрела. Всего Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

16 . На столе лежат 20 фантиков. Двое по очереди берут 1 или 2 фантика. Побеждает тот, кто возьмет последний фантик. Кто победит при правильной игре, начинающий или его партнер?

17. 50 борцов играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). За какое наименьшее количество встреч можно определить победителя?

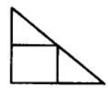
18 . Замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 20.   7,*,*,*,*,*,*,9

19. Решите ребус: (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные).

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} у\,д\,а\,р \\ у\,д\,а\,р \end{array} \\ \hline д\,р\,а\,к\,а \end{array}$$

20. Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

21. Дан прямоугольный треугольник. Впишите в него прямоугольник с общим углом, у которого наименьшая диагональ.



22. Каждая сторона одного треугольника больше каждой стороны другого треугольника. Верно ли, что площадь первого обязательно больше площади второго?

23. У продавца были весы с разными по длине плечами и гири. Половину веса товара он отвешивал на левой чашке, а вторую половину – на правой, и считал, что этим он компенсировал неточность весов. Что получалось на самом деле? Можно ли на этих весах взвесить товар правильно?

24 . На шахматной доске стоит фигура "чуня". Она умеет ходить вверх, вправо и по диагонали вверх-вправо. Двое по очереди делают ход чуней. Кто не сможет пойти – тот проиграл. Предположим, что игроки не делают ошибок. Какие тогда клетки доски являются выигрышными для начинающего, а какие проигрышными? В выигрышных клетках поставьте плюс, а в проигрышных – минус.

25. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали.

26 . Есть три бидона емкостью 14*л*, 9*л* и 5*л*. В большем сосуде – 14*л* молока, остальные пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?

27 . Хулиганы Вася и Петя порвали стенгазету, причем Петя рвал каждый кусок на 5 частей, а Вася на 9. При попытке собрать стенгазету нашли 1988 обрывков. Докажите, что нашли не все обрывки.

8-9 класс. Часть B.

1 . Леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: "В вашем лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После рубки их останется 98% от всех деревьев". Какую часть леса вырубит леспромхоз?

2. Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пришел крестьянин и видит: сад огорожен тремя заборами, и в каждом заборе ворота. Подошел крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: "Иди возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несешь и еще одно". То же сказали ему второй и третий сторож. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?

3 . Можно ли нарисовать квадрат и его диагонали не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одной линии дважды?

4 . Расставьте числа 1,2,...,9 в таблице 3x3 так, чтобы получился "магический квадрат" (сумма трех чисел в любой строке, любом столбце и на диагоналях одна и та же). Как найти эту сумму заранее, не расставляя чисел?

5 . На конференции 85% делегатов знают английский язык, и 75% - испанский. Какая часть делегатов наверняка знает и английский и испанский?

6*. Из стакана кофе в стакан молока перелили одну ложку кофе и размешали. Затем перелили обратно одну ложку смеси. Чего больше: кофе в молоке или молока в кофе?

7. 9 кг ирисок стоят дешевле 10 рублей, а 10 кг тех же ирисок - дороже 11 рублей. Сколько стоит 1 кг этих ирисок?

8. Докажите, что любое целое число рублей, большее семи, можно уплатить только трешками и пятерками.

9. В Эрмитаже есть две лестницы. Высота первой 13*м*, а ее длина (по горизонтали) - 20*м*; у второй соответственно 11*м* и 22*м*. Обе

лестницы покрыты ковровыми дорожками. Какая из дорожек длиннее, если на первой лестнице ступенек вдвое меньше, чем на второй?

10. Сколькими нулями оканчивается произведение чисел от 1 до 30?

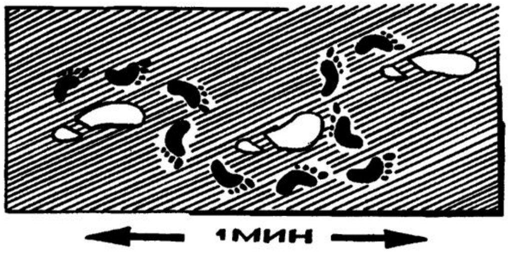
11. Сколько существует различных шестизначных чисел, все цифры которых нечетные?

12. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01 ?

13. В строке написано несколько минусов. Двое по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре?

14. На окружности даны 20 точек. Двое по очереди проводят хорду с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались. Проигрывает тот, кто не сможет провести хорду. Кто победит при правильной игре ?

15. Даны шесть чисел 1,2,3,4,5,6. Разрешается к любым двум числам добавлять 1. Можно ли все числа сделать равными ?



16 . Сколько существует натуральных чисел, меньших 1987, не делящихся ни на 13, ни на 19?

17. Двое по очереди ломают шоколадку 5x5 долек. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто отломит последнюю дольку. Может ли начинающий проиграть?

18. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?

19. В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все они равны.

20 . Найдите последнюю цифру числа 2^{1000}.

21. Полторы курицы за полтора дня снесли полтора яйца. Сколько яиц снесут 6 кур за 6 дней?

22. Путешественник отправился из своего родного города *А* в самый удаленный от него город страны *В*; затем из *В* – в самый удаленный от него город *С* и т.д. Докажите, что если *С* не совпадает с *А*, то путешественник никогда не вернется домой.

23 .
т р о п а
р о п а
о п а
п а
а

Сколькими способами можно прочитать слово "тропа" двигаясь вниз или вправо? (А если длина слова равна 10?)

24. Решите ребус *АХХААХ : ЧУШЬ = ХА* .

25. Из одного города в другой вниз по реке корабль плывет сутки, а обратно – трое суток. За какое время можно добраться из верхнего города в нижний на плоту?

26. Докажите, что число $м(м+1)(м+2)(м+3)$ делится на *24* при любом

натуральном m.

27. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

28. Петя написал на гранях кубика натуральные числа от 1 до 6. Вася кубика не видел, но утверждает, что *а)* у этого кубика есть две соседние грани, на которых написаны соседние числа; *б)* таких пар соседних граней у кубика не меньше двух. Прав ли Вася в обоих случаях? Почему?

29. Петя Иванов придумал новую теорему: если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27. Прав ли он?

30 . Делится ли 243-значное число, составленное из одних единиц, на 243?

31. Постройте треугольник, середины сторон которого будут в данных точках.

32 . Петя Иванов придумал новую теорему: число: $n^2 + n + 41$ – простое при каждом натуральном n. Сможет ли он доказать свою теорему?

33. Весь комплект домино выложили по правилам игры. Известно, что первой стоит пятерка. Какая цифра стоит последней?

34. На доске было написано 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0,2,4,4,6,8,9,11,13,15. Какие числа были написаны?

35. Один из пяти братьев испек маме пирог. Андрей сказал: "это Витя или Толя". Витя сказал: "это сделал не я и не Юра". Толя сказал: "вы оба шутите". Дима сказал: "нет, один из них сказал правду, а другой – нет". Юра сказал: "нет, Дима ты не прав". Мама знает, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Кто испек пирог?

36* . Докажите, что из любых 5 точек на плоскости можно выбрать четыре, которые являются вершинами выпуклого четырехугольника. (Никакие три точки не лежат на одной прямой.)

37. Докажите, что число *абабаб* делится на 7 (*а*,*б* – цифры).

38. Кузнечик попрыгал по прямой и вернулся в исходную точку (длина его прыжка 1*м*). Докажите, что он совершил четное число прыжков.

39 . Про семь чисел известно, что сумма любых 6-ти из них делится на 5. Докажите, что каждое из чисел делится на 5.

40. Может ли прямая пересечь все стороны 11-угольника ровно по одному разу (не проходя через вершины)?

41 . По основанию равнобедренного треугольника движется точка. Докажите, что сумма расстояний от нее до боковых сторон не меняется.

42. В десятичной записи некоторого числа 30 единиц, а остальные цифры – нули. Может ли это число быть полным квадратом?

43*. Шесть гвоздиков соединили попарно проволочками. Каждая проволочка либо красная, либо синяя. Докажите, что некоторые три проволочки образуют одноцветный треугольник.

44. Разложите на множители $x^4 + 4$.

45. Назовем автобусный билет (с шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

46. Дана точка. Нарисуйте *а)* вокруг нее *б)* вне нее многоугольник так, чтобы ни одна его сторона не была видна из этой точки полностью.

47. Можно ли разрезать треугольник на треугольники так, чтобы у соседних треугольников стороны не совпадали?

48*. Найдите хотя бы одно решение уравнения в натуральных числах:

$$x^3 + y^4 = z^5$$

49. Из полного набора домино выбросили все кости с шестерками. Можно ли все оставшиеся кости выложить в цепь?

50. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на доминошки 2x1 клеток.

51. Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники равной площади. Докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм.

52. Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться того, чтобы получившееся число делилось на 9.

53. В числе переставили цифры и получили число в три раза меньше. Докажите, что исходное число делилось на 27.

54. В выпуклом четырехугольнике найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин минимальна.

55 . Докажите, что среди любых 11 целых чисел можно найти 2, разность которых делится на 10.

56. Решите уравнение в натуральных числах: $x + \dfrac{1}{y + \frac{1}{z}} = \dfrac{30}{7}$.

57* . Сколько ладей можно расставить в кубе 8×8×8, чтобы они не били друг друга (максимальное число)?

58. Дан отрезок AB и прямая, пересекающая его. Найдите на прямой такую точку C, чтобы угол ACB делился прямой пополам.

8-9 класс. Часть C.

1. В пруд выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трех других щук (сытых или голодных). Какое максимальное число щук может насытиться? (Съеденная сытая щука считается сытой.)

2. Постройте выпуклый пятиугольник по серединам его сторон.

3. Покажите, что большинство шестизначных чисел не представимо в виде произведения двух трехзначных.

4. Внутри квадрата ABCD находится точка O, причем $\angle OAB=\angle OBA=15°$. Докажите, что треугольник OCD – равносторонний.

5. Все клетки шахматной доски выкрашены в белый цвет. По ней начинает гулять маляр, который, переходя в соседнюю клетку (с общей стороной), перекрашивает ее (из белого – в черный, а из черного – в белый). Может ли он гулять так, чтобы покрасить клетки в шахматном порядке?

6*. Что больше: 200! или 100^{200} ?

7. Докажите, что в любом многоугольнике найдутся две стороны а и в такие, что $1 \le a/в < 2$.

8. Можно ли сократить дробь $(111 \cdot n + 5)/(64 \cdot n + 3)$ при каком-нибудь целом n, и если да, то на какое число?

9*. Докажите, что среди любых 9 человек найдется четверо попарно знакомых или трое попарно незнакомых.

10. Могут ли 1993 числа, идущих подряд, быть составными?

11. На окружности даны 1987 точек. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, которые содержат первую точку, или тех, которые ее не содержат?

12*. На шахматной доске стоят 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на черных полях, четно.

13. Докажите, что при любом натуральном n>1, верно неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

14. По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек. Докажите, что число пар рядом сидящих мальчиков равно числу пар рядом сидящих девочек.

15*. 7 разбойников хотят поделить добычу. Каждый может ее делить на любое число равных (по его мнению) частей, но мнения разбойников различны. Как организовать дележ, чтобы каждому досталось (по его мнению) не меньше одной седьмой всей добычи?

16. Найдите число точек пересечения диагоналей в выпуклом n-угольнике, если известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.

17. Докажите, что $1\cdot1! + 2\cdot2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

18*. В клетках таблицы $m\times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце, были неотрицательными.

19*. Доска 8x8 раскрашена в 4 цвета. При этом в любом квадратике 2x2 встречаются все 4 цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в 4 различных цвета.

20. Докажите, что дроби 1000/1993 и 993/1993 имеют одинаковую длину периодов.

21. Легко распилить кубик 3x3x3 на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если распиливать несколько кусков сразу?

22. У князя Гвидона было трое сыновей. Среди его потомков 93 имели каждый по 2 сына и ни одной дочери, а все прочие умерли бездетными. Сколько всего потомков было у Гвидона?

23. Известно, что $a + в > 1$. Докажите, что $a^4 + в^4 > 1/8$.

24. 10 человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую смог влезть (т.е. не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

25. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон

лежат на одной прямой.

26. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами все различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-то планету никто не наблюдает.

27. Придумайте целое число, которое после возведения в квадрат начинается с 99 девяток.

28. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний до точки B.

29. Перед вами два брата-близнеца. Одного из них зовут Ваня, другого – Веня. Один из братьев всегда говорит правду, а другой всегда врет. Вы можете задать один вопрос одному из братьев, на который тот ответит "да" или "нет". Попробуйте выяснить, кого из близнецов как зовут.

30. Дано 1993 числа. Известно, что сумма любых четырех положительна. Верно ли, что сумма всех положительна?

31. Верно ли, что из любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

32. Верно ли, что для любой точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, сумма расстояний от нее до вершин меньше периметра четырехугольника?

33. Найдите 1000 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

34. В коробке есть карандаши разного цвета и разного размера. Докажите, что в коробке найдутся два карандаша, которые отличаются и по цвету, и по размеру.

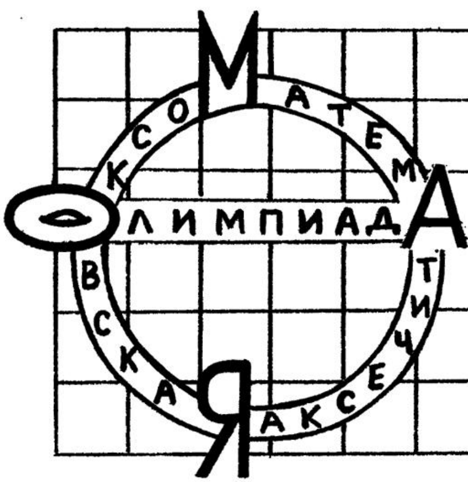
35. В языке дикарей хотийцев всего два звука: "ы" и "у". Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков "ыу" или "ууыы" и добавления в любом месте звуков "уы". Означают ли одно и то же слова "уыу" и "ыуы" ?

36. На сторонах произвольного многоугольника произвольным образом расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

37. 68 алмазов различны по весу. За 100 взвешиваний на чашечных весах без гирь найдите самый легкий и самый тяжелый алмаз.

38. В углах шахматной доски 3 на 3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам): а) поменять местами белых и черных коней? б) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета ?

39. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?



40. (Задача Ньютона). Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров - за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней ? (Коровы поедают траву равномерно).

41. (Задача Эйлера). Некто решил поделить свои сбережения поровну между всеми своими сыновьями и составил завещание: старший получит 1000 руб. и 1/8 часть остатка; следующий - 2000 руб. и 1/8 нового остатка; третий сын - 3000 руб. и 1/8 третьего остатка и т.д. Определите число сыновей и размер завещания.

42. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?

43. Обозначим $s(x)$ сумму цифр числа x. Пусть $a=99^{9}$, $b=s(a)$, $c=s(b)$, $d=s(c)$. Чему равно d?

44. Требуется перевернуть вверх дном 10 чашек, следуя правилу: за один ход разрешается перевернуть ровно 9 чашек (любых). Как за несколько ходов это сделать? А если чашек было 11 и переворачивать можно 10?

45. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей дает квадрат целого числа.

46. Даны 6 разноцветных гирь - 2 зеленые, 2 красные и две синие. В каждой паре одна гиря немного тяжелее другой, причем все тяжелые гири весят одинаково и все легкие тоже. За какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах можно определить все тяжелые гири?

47. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

48. На стороне угла дана точка A. Постройте на этой стороне точку M, которая одинаково удалена от точки A и от другой стороны угла.

49. Проведите через данную точку прямую так, чтобы на данной окружности высечь хорду данной длины.

8–9 класс. Часть D.

50*. Три друга играли в шахматы, причем все сыграли одинаковое число партий. Могло ли так случиться, что у первого больше всех побед, у второго меньше всех поражений, а у третьего больше всех очков? (Победа = 1, поражение = 0, ничья = 1/2).

51. Написано 1993–значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами, делится на 17 или на 23. Последняя цифра числа 1. Какова первая?

52. У борта прямоугольного бильярда стоит шар. Постройте направление, по которому его надо толкнуть, чтобы он, отразившись от трех бортов, попал в начальную точку.

53. Число оканчивается на 2. Если двойку перенести в начало, число удвоится. Найти это число.

54*. 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трех шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (Они стоят целое число копеек.)

55. На сколько частей делят плоскость n прямых в общем положении? (Любые две прямые пересекаются, и никакие три прямые не пересекаются в одной точке).

56*. На плоскости провели несколько прямых. Докажите, что части на которые рассечена плоскость, можно раскрасить в два цвета, чтобы соседние части были покрашены в разные цвета.

57. Из 81 монеты одна фальшивая. за какое минимальное число взвешиваний на весах с двумя чашами можно найти фальшивую монету, если известно, что она легче настоящих?

58. Пусть P – периметр выпуклого четырехугольника, S – сумма длин его диагоналей. Докажите, что: а) $S < P < 2S$.

59. На листе клетчатой бумаги отмечены пять точек, находящихся в узлах клетчатой сетки. Докажите, что середина по крайней мере одного из отрезков, соединяющих отмеченные точки, тоже находится в узле сетки.

60. Из 6 спичек сложите фигуру, в которой можно найти 4 (и даже 8) треугольников со стороной в одну спичку.

61*. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

62. Фабрика окрашивает кубики в 6 цветов (каждую грань в свой цвет). Сколько разновидностей кубиков можно изготовить?

63. Можно ли заполнить таблицу а) 4x4 б) 5x5 числами так, чтобы произведение чисел в каждом столбце было положительно, а в каждой строке – отрицательно?

64. В одну из голов 1000-голового дракона пришла мысль

расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы - это точки на плоскости.)

65*. Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, а полный алмазов - 40 кг. Пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динариев, а килограмм алмазов - 60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести не более 100 кг?

66. Какое наименьшее число выстрелов всегда достаточно, чтобы попасть в трехклеточный корабль при игре в "морской бой"?

67. Квадрат 100 на 100 сложен из домино 1 на 2. Докажите, что некоторые две доминошки образуют квадрат 2 на 2.

68. Поезд двигался в одном направлении 5,5 часов. Известно, что за любой отрезок времени длительностью 1 час он проезжал ровно 100 км. Верно ли, что поезд ехал равномерно? Верно ли, что средняя скорость поезда равна 100 км/ч?

69. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей четно, а число улиц делится на 5. (Улицы соединяют площади).

70*. Каким наименьшим числом гирь и какого веса можно отвесить на чашечных весах любое целое количество граммов от 1 до 40 при условии, что гири можно класть а) на одну чашу б) на обе чаши?

71*. В квадратике 3 на 3 закрашена угловая клетка. Разрешается перекрашивать все клетки в одной строке или в одном столбце на противоположный цвет. Можно ли таким способом сделать все клетки одноцветными?

72. Можно ли замостить доску 10x10 прямоугольниками 4x1?

73*. Монах с 6 утра до 6 вечера поднимался на гору и там ночевал. На следующий день с 6 утра до 2 дня он спускался по той же дороге. Докажите, что в пути было такое место, где он находился в одно и тоже время и на подъеме и на спуске (монах часто отдыхал и шел неравномерно).

74. Круг разбит на 6 секторов, в которых поставлены числа 0,0,1,0,1,0. Разрешается одновременно прибавить по единице к числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать числа во всех секторах равными?

75. Квадрат 8 на 8 выложили из спичек. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля можно было пройти на любое другое, не перепрыгивая через спички?

76*. Передние покрышки автомобиля стираются через 25000 км. пути, а задние - через 15000 км. Когда надо поменять покрышки местами, чтобы автомобиль прошел возможно большее расстояние (с одними и теми же покрышками)?

77*. На остове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встретятся два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. п.) Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

78*. На плоскости даны 1000 точек и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности найдется точка, сумма расстояний от которой до этих точек не меньше 1000.

79. На плоскости нарисована окружность с диаметром. С помощью одной линейки опустите (или восстановите) перпендикуляр к диаметру, проходящий через отмеченную точку.

80. 21 мальчик вместе собрали 200 орехов. Докажите, что какие-то два мальчика собрали одинаковое количество орехов.

81 Школьники одного класса ходили в два похода, причем каждый из них был хотя бы в одном походе. Известно, что среди участников каждого похода было не более 2/5 мальчиков. Докажите, что среди всех учеников класса мальчиков не более 4/7.

82*. Разрежьте тупоугольный треугольник на остроугольные.

83. a, b, c, d - стороны четырехугольника (в любом порядке), S -

его площадь. Докажите, что $S \le \frac{ab + cd}{2}$.

84*. На каждом из 44 деревьев, посаженых по окружности, сидело по одному веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях. Могут ли они собраться на одном дереве?

85*. Можно ли соединить непересекающимися дорожками а) три домика с каждым из трех колодцев? б) пять домиков между собой?

86. После завершения волейбольного турнира по круговой системе (каждая команда играет с каждой) оказалось, что никакая команда не проиграла всех встреч. Докажите, что найдутся команды А, В и С такие, что А выиграла у В, В – у С, а С – у А.

87. В квадрате со стороной 1 отметили 101 точку, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше 1/100.

88*. На шахматной доске 2n X 2n стоят n ладей и король. Ходят по очереди. Докажите, что король сможет либо съесть ладью, либо встать под шах.

89. Над квадратным катком на одной высоте нужно повесить четыре лампы. каждая лампа освещает круг радиуса, равного высоте, на которой она висит. при какой наименьшей высоте можно осветить весь каток ?

90. Из шахматной доски размером 128x128 вырезали одну клетку (в произвольном месте). Докажите, что оставшуюся часть можно замостить уголками из трех клеток.

91. В квадрате 5 на 5 закрасили 16 клеток. Докажите, что найдется квадрат 2 на 2, в котором закрашено не менее трех клеток.

92. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две одноцветных точки на расстоянии 1м.

93. В марсианском метро 100 станций. Забастовочный комитет хочет

закрыть n из них, где 0<n<100. Забастовка считается гуманной, если между всеми незакрытыми станциями остается проезд. Докажите, что при любом n возможна гуманная забастовка.

94. Пете подарили набор "юный паркетчик", состоящий из 12 триминошек . Хулиган Вася заменил одну из них на уголок . Сможет ли Петя сложить квадрат 6×6?

95. Физкультурники построены в 10 колонн и 20 шеренг. В каждой колонне отметили самого высокого, а в каждой шеренге – самого низкого. Затем среди самых высоких отметили самого низкого – Ваню, а среди самых низких – самого высокого – Петю. Может ли Петя быть выше Вани?

96. В клетках таблицы 10x10 записаны числа от 0 до 99 (в первой строке 0,1,...,9, во второй 10,11,...,19 и т.д.). Затем перед каждым числом поставили знак "+" или "–" так, что в каждой строке и в каждом столбце стало поровну плюсов и минусов. Докажите, что сумма всех чисел равна нулю.

9–10 класс. Часть А.

1. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2 . Известно, что $a + b + c = 5$; $ab + ac + bc = 5$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

3. Пусть a и b – целые числа. Докажите, что если $a^2 + 9ab + b^2$ делится на 11, то и $a^2 - b^2$ делится на 11.

4 . Можно ли провести из одной точки на плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых (рассматриваются углы между любыми двумя лучами)?

5. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой. Постройте на этой прямой такую точку K, чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

6. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, у которых одинаковое число знакомых в этой компании (возможно, ни одного).

7*. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1993.

8. Известно, что число $x + 1/x$ целое. Докажите, что число $x^n + (1/x)^n$ тоже целое.

9. Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4,... Приведите пример арифметической прогрессии длины 10, состоящей из членов этой последовательности.

10. 1993 города соединены дорогами так, что из любого города можно доехать до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что построено по крайней мере 1992 дороги.

9–10 класс. Часть В.

1. Постройте трапецию а) по четырем сторонам; б) по двум основаниям и двум диагоналям.

2. К вертикальной стене приставлена лестница, посередине которой сидит котенок. Лестница начинает скользить нижним концом по полу. По какой траектории движется котенок?

3. Автобусные билеты имеют номера от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме последних трех цифр. Докажите, что: а) число всех счастливых билетов четно; б) сумма номеров всех счастливых билетов делится на 999.

4*. Хромой кузнечик делает первый прыжок длиной 1дм, второй – 1/2 дм, третий – 1/3 дм, четвертый – 1/4 дм и т.д. Сможет ли он пропрыгать расстояние больше 100дм?

5. Постройте прямоугольный треугольник по радиусу вписанной окружности и высоте, проведенной к гипотенузе.

6. В треугольнике ABC угол B равен 60°, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что OD = OE.

7*. Полк солдат выстроен в виде прямоугольника так, что в каждой шеренге солдаты стоят по росту. Докажите, что если в каждой колонне перестроить солдат по росту, то в шеренгах они по-прежнему будут стоять по росту.

8. В данный угол впишите окружность, касающуюся данной окружности.

9. Докажите равенство треугольников по трем медианам.

10. На математическом конкурсе предлагалось 20 задач. Оказалось, что каждый из 20 школьников решил две задачи, и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны.

11. Дан деревянный угольник ABC. Угол C – прямой. Точка A скользит по оси OX, точка B – по оси OY (в первой четверти). Угол C торчит наружу. Найдите множество положений точки C.

12 . Докажите, что для всех внутренних точек правильного n-угольника сумма расстояний до сторон одинакова.

13. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90^0. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

14. Пусть M и N середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD и MN = (AD + BC)/2. Докажите, что ABCD – трапеция (параллелограмм).

15 . Несколько прямых общего положения разрезают плоскость на части. Докажите, что к каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник.

16. Докажите, что в игре "крестики-нолики" на бесконечной доске у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

17. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.

18. Может ли сечение куба плоскостью быть правильным

пятиугольником?

19. Стороны нескольких прямоугольников параллельны осям координат. Любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все прямоугольники имеют общую точку.

20 . Плоскость раскрашена в 2 цвета. Докажите, что на ней найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.

21. Остап Бендер организовал в Нью-Васюках раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов профсоюза, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну всем не членам. Оказалось, что существует единственный способ раздать таким образом всех слонов. Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера? (Каждому достался по крайней мере один слон.)

22. На плоскости даны 3000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно построить 1000 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках.

23. Есть два бассейна: один полный, другой пустой. Докажите, что с помощью двух сосудов емкостью 5л и 12л можно перелить любое число литров воды в пустой бассейн.

24. На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

25. Существует ли арифметическая прогрессия с разностью меньше 1990, в которой нашлись бы идущие подряд 11 простых чисел?

26. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

27. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - некоторая перестановка положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$.

28. Докажите, что число $(1000!)/(100!)^{10}$ - целое.

29. В каждой вершине единичного куба записано число. За один шаг

к числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными, если первоначально в четырех попарно несмежных вершинах стояли единицы, а в четырех других - нули?

30. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадет на сторону.

31. На столе лежат одинаковые круглые монеты (без наложений). Докажите, что найдется монета, которая касается не более 3 других.

32 . В компании из k человек ($k>3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k-4$ разговора все они могут узнать все новости.

33. Установлено, что погода на Сириусе в данный день полностью определена предыдущей неделей. Варианты погоды: магнитная буря, метеоритный дождь, штиль. Последнюю неделю шел метеоритный дождь. Докажите, что "дождливые" недели всегда были и будут.

9–10 класс. Часть С.

1. Две телекомпании получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющей собой прямоугольную сетку улиц M на N. Они по очереди ставят на неосвещенный перекресток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до 90 градусов). Премию О.Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре, начинающая или вторая сторона?

2. Даны три попарно пересекающихся окружности. Докажите, что продолжения трех общих хорд пересекаются в одной точке.

3. Окружность окрашена в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с одноцветными вершинами.

4. Могут ли два соседних числа Фибоначчи делиться на 1990? (Числа Фибоначчи: $1,1,2,3,5,\ldots,u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$).

5*. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Каждый обменивается не больше одного раза в день.)

6. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.

7. Даны три сосуда емкостью 6, 7, и 12 литров. Два меньших сосуда заполнены водой. Можно ли в большом сосуде оставить 9л воды?

8. Дан произвольный граф. Надо расставить в его вершинах целые числа так, чтобы выполнялись два условия: 1) если две вершины связаны, то числа в них имеют общий делитель; 2) если две вершины не связаны, то числа в них взаимно просты. Всегда ли можно расставить числа по этим правилам?

9. Даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

10. Найти последнюю ненулевую цифру числа 1000!

11. Известно, что фигура на плоскости имеет ровно две оси симметрии. Какой угол может быть между осями?

12. Докажите, что если в четырехугольнике два каких-то угла тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

13. n точек на плоскости соединили ломаной минимальной длины. Докажите, что найдется несамопересекающаяся ломаная такой же длины.

14. Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$, Набор чисел $\{z_i\}$ есть результат перестановки чисел набора $\{y_i\}$. Докажите, что
$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \geq x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n$

15. В треугольник вписана окружность. Точки касания соединены с противоположными вершинами треугольника. Докажите, что полученные отрезки пересекаются в одной точке.

16. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями с двусторонним движением. Из столицы выходит 101 авиалиния, из города Дальний - 1 авиалиния, а из всех прочих городов - 20 авиалиний. Докажите, что из столицы можно добраться самолетом до города Дальнего (возможно, с пересадками).

17. Докажите, что $(2^m - 1)$ кратно $(2^n - 1)$ тогда и только тогда, когда m кратно n.

18*. Докажите <u>малую теорему Ферма</u>: если простое число p не является делителем целого числа m, то $m^{p-1} - 1$ делится на p.

19*. При каких n число 10^n-1 делится на 3^{1993}?

20*. Можно ли построить выпуклый 2000-угольник с длинами сторон 1,2,...,2000 (возможно в другом порядке), все углы которого были бы равны?

21. Если точку пересечения высот треугольника симметрично отразить относительно его сторон, то полученные три точки лежат

на описанной окружности. Докажите.

22 . Решите неравенство в целых числах $|2^n-3^m| \leq 6$.

23 . а) Некоторый выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы. Докажите, что он центрально симметричен.

б) Правильный 16-угольник разрезали на параллелограммы. Докажите, что среди них будет хоть один прямоугольник. Какова общая площадь всех таких прямоугольников?

24. Существует ли многогранник, все грани которого треугольники, и к каждому его ребру примыкает тупой угол одной из граней?

25. На плоскости живет ограниченная клякса. Каждая точка плоскости в следующую секунду становится черной, если в круге единичного радиуса, ее окружающем, площадь черной области больше площади белой области, в противном случае точка становится белой. Верно ли, что клякса рано или поздно исчезнет?

26. Дан куб 6*6*6. Найти максимально возможное число параллелепипедов 4*1*1, которые можно поместить в этот куб без пересечений.

27 . Сколько слов из букв "а" и "б" длины 10 не содержит сочетания букв "бб"?

28. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две деревни A и B, чтобы путь AMNB был кратчайшим (берега реки - параллельные прямые, а мост перпендикулярен берегам).

29. Существуют ли семь различных натуральных чисел таких, что произведение любых шести из них плюс единица делится на седьмое число?

30. Через точку внутри угла провели прямую, которая отсекла треугольник наименьшей площади. Докажите, что отрезок прямой делится этой точкой пополам.

31. Даны числа: 1 и девять нулей. Разрешается выбирать два числа и заменять каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы?

32. Теорема Дезарга. Прямые AA′, BB′, CC′ пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения прямых AB′ и BA′, BC′ и CB′, A′C и CA′ лежат на одной прямой.

33. Внутри квадрата со стороной 2 расположено 7 многоугольников площади не менее 1 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не меньше 1/7.

34. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причем никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

35. В тридевятом царстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого в любой другой можно проехать не больше, чем по двум дорогам.

36. Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их разностей найдутся четыре одинаковых.

37. Внутри квадрата ABCD расположен квадрат KLMN. Докажите, что середины отрезков AK, BL, CM, DN также являются вершинами квадрата.

38. Есть два больших сосуда. в одном - 1 л спирта, в другом - 1л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60-процентный раствор спирта в том сосуде, где была вода?

39 . Назовем число хорошим, если его можно записать в виде суммы квадратов двух целых чисел. Докажите, что произведение двух хороших чисел - хорошее число.

40. Даны 101 натуральное число, каждое не больше 200. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.

41. Докажите, что из 100 натуральных чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

9-10 класс. Часть D.

1. Докажите, что среди n-угольников данного периметра максимальную площадь имеет правильный.

2. В окружность вписан шестиугольник. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

3 . На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не задев соседей.

4 . Плоскость покрыта конечным числом полуплоскостей (с наложениями). Докажите, что можно выбрать из них три (или две), которые уже покрывают всю плоскость.

5 . Докажите, что а) любой треугольник можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить прямоугольник;

б) любой прямоугольник можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить квадрат;

в) верно ли, что любой многоугольник можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить квадрат?

5 . Решите в целых числах уравнение: $x^2 - 2y^2 = 1$.

6. Дана выпуклая фигура и точка А внутри нее. Докажите, что существует хорда, проходящая через точку А и делящая площадь

фигуры пополам.

7. Рассматривается выпуклый многогранник. Обозначим через В число вершин, через Р – число ребер, через Г – число граней. Докажите, что В – Р + Г = 2 (формула Эйлера).

8. Любые два тома, стоящие на полке, можно поменять местами. Докажите, что четность числа операций, необходимых для их упорядочивания, зависит от начальной расстановки, но не зависит от способа упорядочивания.

9. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

10. Существует ли выпуклый многогранник, все грани которого являются шестиугольниками?

11. Первые два числа Фибоначчи равны единице, а каждое следующее есть сумма двух предыдущих. Докажите, что есть число Фибоначчи, делящееся на 1993.

12. Каким может быть период у суммы двух дробей периода 4 и 12 соответственно?

13. По круглому стадиону прыгает Кентавр. Ширина его прыжка постоянна. Докажите, что Кентавр будет сколь угодно близко подходить к своему начальному положению.

14. Докажите, что для любого действительного числа α найдутся целые p и q такие, что $|\alpha - p/q| < 1/q^2$).

15. В целых точках прямой расположены ямы, ширины 0.01 каждая. Длина прыжка блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$. Докажите, что блоха рано или поздно попадет а яму.

16 . Из 12 монет одна фальшивая, причем не известно, легче она или тяжелее остальных. За какое минимальное число взвешиваний на двух чашечных весах можно найти монету и определить, легче она или тяжелее?

17. Даны три окружности разных радиусов. Докажите, что три точки

пересечения трех пар внешних касательных лежат на одной прямой.

18. Дан выпуклый к-угольник. Докажите, что существует окружность, проходящая через три его вершины и содержащая многоугольник внутри себя.

19. Внутри острого угла с вершиной O дана точка A. Постройте на сторонах угла точки B и C так, что OB + OC = OA и при этом сумма расстояний AB + AC минимальна.

20. На основании AD трапеции ABCD взята точка K. Постройте точку X на основании BC, такую, чтобы площадь пересечения треугольников BKC и AXD была максимальной.

21. Дан треугольник ABC. Провести прямую, которая делит пополам его площадь и периметр.

22. Разбиение плоскости называется правильной мозаикой, если оно состоит из одинаковых правильных многоугольников, причем в каждой вершине сходится одинаковое число их сторон. Дайте полное описание всех правильных мозаик.

23. Три пешехода идут по прямым дорогам, каждый со своей постоянной скоростью. Докажите, что если они три раза оказались на одной прямой, то они все время будут на одной прямой.

24. (Китайская теорема об остатках). Даны n натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, и n попарно взаимно простых натуральных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$, причем $a_k < p_k$ при всех $k = 1,2 \dots n$. Докажите, что всегда найдется натуральное число, дающее остаток a_k при делении на p_k при всех $k = 1, \dots, n$.

25. От каждой стороны квадрата осталось по одной точке. Восстановите квадрат.

26. Докажите, что у вписанного четырехугольника сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей. (Теорема Птолемея)

27. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на его стороны являются вершинами

описанного четырехугольника (если они не попадают на продолжения сторон).

28. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот, центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причем точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2 \cdot MO$.

29. На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

30. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 – на A_3P, из A_3 – на A_4P, из A_4 – на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекается в одной точке.

31. На сторонах призвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

32. (**Теорема Вильсона**). Докажите, что число p – простое, тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1$ делится на p.

33. Обозначим через $\varphi(n)$ число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. Докажите **теорему Эйлера**: если m и n взаимно просты, то $m^{\varphi(n)}-1$ делится на n.

34. В окружность вписан 10-угольник. Из некоторой точки на окружности опущены перпендикуляры на прямые содержащие стороны 10-угольника. Известны длины девяти из этих перпендикуляров. Найдите длину десятого.

35. Докажите, что в числе $\left(6 + \sqrt{37}\right)^{999}$ первые 999 знаков справа после запятой - нули.

36. Дано N целочисленных бесконечных арифметических прогрессий, причем каждые две имеют хотя бы одно общее число. Докажите, что найдется число, входящее во все прогрессии.

37. На плоскости даны 100 точек. Докажите, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше 100, а расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Расстояние между двумя кругами - это расстояние между их ближайшими точками.)

38. Два зеркала образуют угол. Луч света падает на одно из них. Докажите, что луч отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).

39. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее количество игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже игравшие между собой?

40. На пир собрались 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть "матрешка" из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

41. В вершинах треугольника построили три круга, которые покрыли треугольник. Верно ли что, если уменьшить все стороны треугольника, то круги по-прежнему будут покрывать треугольник?

42. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге. Один ставит своим ходом 2 крестика (не обязательно рядом), а другой один нолик. Могут ли крестики поставить 100 знаков в ряд?

43. В тридевятом царстве из каждого замка выходят три дороги, и дороги не пересекаются. Странствующий рыцарь сворачивает по очереди на левую и на правую дороги. Докажите, что через некоторое время он попадет в начальную точку своего путешествия.

44. Докажите, что все решения уравнения $x^2+y^2=z^2$ в целых числах имеют вид $x = 2suv$, $y = s(u^2-v^2)$, (либо $y = 2suv$, $x = s(u^2-v^2)$) $z = s(u^2+v^2)$, где s, u, v - целые.

45. Перед входом в библиотеку стоят две доски. При входе в библиотеку человек считает, сколько народу внутри, и пишет на первой доске число. При выходе человек тоже считает сколько народу внутри и пишет число на второй доске. Докажите, что к закрытию библиотеки множества чисел на досках будут совпадать.

46. Прямой угол разбит на клетки, причем в шести левых нижних клетках стоят фишки. Разрешается за один ход снять любую фишку, а вместо нее поставить фишки на поля сверху и справа от нее, если оба этих поля свободны. Докажите, что за конечное число ходов нельзя освободить все клетки, на которых первоначально стояли фишки.

47 . Двое играют на шахматной доске 8х8. Начинающий - ставит на любую клетку пешку. Далее они по очереди ее двигают на любую соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, причем нельзя ставить пешку на поле, где она уже побывала. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выиграет при правильной игре - начинающий или его партнер?

48 . В точках числовой прямой с целыми координатами стоят числа от 0 до 1, каждое из которых есть среднее арифметическое своих соседей. Докажите, что все числа равны друг другу.

б**) Та же задача, но числа стоят в точках координатной плоскости с целыми координатами. (Точки соседние, если расстояние между ними равно 1.)

Московская математическая олимпиада школьников

10–11 класс. Часть А.

1. Найти наименьшее значение функции

$$y = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-n|$$

2. Что больше $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}}$ или $2\cdot\sqrt[3]{2}$?

3. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} n$?

4. Докажите, что $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot100} < \dfrac{1}{10}$.

5. Докажите, что функция, заданная на всей прямой, может быть представлена как сумма четной и нечетной функции.

6. Сколько цифр имеет десятичная запись а) 2^{100}, б) 2^{1000} ?

7. Докажите, что в любой бесконечной возрастающей арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с единицы.

8. Докажите, что число 0.123...10111213... иррационально (подряд записаны все натуральные числа).

9. Может ли проекция правильного тетраэдра быть квадратом?

10-11 класс. Часть B.

1. Петя склеил многогранник, затем разрезал его по ребрам на отдельные грани, сложил в конверт и послал Ване. Верно ли, что Ваня склеит такой же многогранник, какой был у Пети?

2. O – центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, X – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overline{OA}_1+\ldots+\overline{OA}_n = \overline{0}$ и $\overline{XA}_1+\ldots+\overline{XA}_n = n\cdot\overline{XO}$.

3. Докажите, что график кубического многочлена имеет центр симметрии.

4. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, O – центр описанной окружности. Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ – действительные числа, взятые в порядке возрастания. Докажите, что $n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

6. Докажите, что многочлен P(x) с целыми коэффициентами, принимающий при трех различных целых x значение 1, не имеет целых корней.

7. а) Найдите первые 100 знаков числа: $\sqrt{0,\underbrace{99\ldots99}_{100}}$.
   б*) Найдите 101-й и 199-й знаки.

8. Что больше 4^n или $(2n)!/(n!)^2$ (число сочетаний из 2n по n)?

10-11 класс. Часть C.

1. Возможно ли, перегнув произвольный треугольник по средним линиям, получить тетраэдр (не обязательно правильный)?

2. С помощью циркуля раствором не больше 10см. и линейки длинной 10см. соедините точки, удаленные друг от друга на 1м.

3. В тридевятом царстве несколько городов, и некоторые из них соединены дорогами. Из каждого города выходит нечетное число дорог. В каждом городе есть ратуша, а на ратуше – один из двух флагов. Каждое утро в одном из городов происходит революция: жители поднимают на ратуше вместо старого флага тот, который

поднят на большинстве ратуш тех городов, с которыми этот город соединен дорогами. Докажите, что рано или поздно революции прекратятся.

4. Отрезки AB и CD - диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

5. Докажите, что при $0 \le x < \pi/2$ выполнено неравенство $tg(x) > x$.

6. В трех вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвертую вершину квадрата?

7. Докажите, что число $e = 1 + 1/2! + \ldots + 1/n! + \ldots$ иррационально.

8. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональные.

9. Даны 100 чисел, изменяющихся на промежутке $[0;1]$. Найдите максимум суммы модулей попарных разностей этих чисел.

10. Многочлен $P(x,y)$ принимает всюду положительные значения. Может ли он принимать все положительные значения?

11. Докажите, что в десятичной записи следующих чисел одинаковое количество цифр:

а) 1990^n и $1990^n + 2^n$,   б*) 1992^n и $1992^n + 2^n$

12. Докажите, что $1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ не целое число при любом n.

13. Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что число α^β рациональное?

14. По веточке ползет червячок со скоростью 1мм/сек., а веточка, в это время, растет со скоростью 1м/сек. Сможет ли червячок проползти всю веточку? (Веточка растет равномерно, так что ее середина удаляется от концов со скоростью 0.5м/сек.)

15 . Докажите, что любое целое число представимо в виде суммы пяти кубов целых чисел.

16. Произведением двух слов (т.е. последовательностей букв) назовем результат приписывания одного к другому. Пусть U и V – слова, причем UV = VU; тогда они оба являются степенями одного и того же слова S. Докажите.

17 . Многочлен третьей степени с натуральными коэффициентами при любом целом x делится на 5. Докажите, что все его коэффициенты делятся на 5.

18. а) Дан треугольник. Постройте точку, сумма расстояний от которой до всех вершин минимальна.

б) Соедините вершины квадрата набором отрезков минимальной суммарной длины.

19. В вершинах куба написаны числа. вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найдите все такие числа.

20. Над планетой, имеющей форму шара летают 3 спутника. Докажите, что в любой момент есть точка на планете, из которой они все не видны.

21. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

22. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, больших своего номера в этой последовательности.

23. Решите уравнение в целых числах: $x^y = y^x$.

24. На клетчатой плоскости дана фигура площади меньшей 1. Докажите что эту фигуру можно перенести так, чтобы внутри нее не оказалось ни одного узла решетки.

25. В треугольник вложен параллелограмм, а в параллелограмм вложен треугольник. Найти наибольшее отношение площади вложенного треугольника к площади исходного.

26. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой прямой, проходящей через его центр, есть величина постоянная.

27. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

28. На сторонах треугольника единичной площади отмечено по точке. Если вырезать треугольник с вершинами в этих точках, то отпадет еще три треугольника. Докажите, что площадь одного из отпавших не больше 1/4.

29. Докажите, что замкнутую ломаную длины 1 можно накрыть кругом радиуса 1/4.

10-11 класс. Часть D.

1. Что больше: e^{π} или π^{e} ?

2. Стороны сферического треугольника, расположенного на единичной сфере, образованы дугами больших окружностей. Докажите, что сумма его углов (в радианах) минус π равна его площади.

3. Дан произвольный многогранник. Каждой его грани ставят в соответствие перпендикулярный ей торчащий наружу вектор, длина которого равна ее площади. Докажите, что сумма всех таких векторов равна нулю.

4. Докажите, что цепочку из N одинаковых кирпичей, поставленных друг на друга, можно выдвинуть сколь угодно далеко. (Кирпичи расположены горизонтально, цепочка не должна опрокидываться.)

5. Докажите, что если в шестиугольник можно вписать окружность, то его главные диагонали пересекаются в одной точке.

6. При каких n на клетчатой бумаге можно нарисовать правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки?

7. Всякий ли трехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

8. В одну из граней единичного куба вписана окружность, около соседней грани описана окружность. Найдите наименьшее расстояние между точками этих двух окружностей.

9. Пусть $m > n$. Докажите неравенство:

$$((x_1^m+x_2^m+\ldots+x_k^m)/k)^{1/m} \geq ((x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n)/k)^{1/n}$$

10. Из шахматной доски вырезали одну угловую клетку. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать эту фигуру?

11. Докажите, что в треугольнике середины сторон и основания высот лежат на одной окружности.

12. Можно ли плоскость разрезать на выпуклые семиугольники? На одинаковые выпуклые семиугольники?

13. Два многочлена с вещественными коэффициентами принимают целые значения в одних и тех же точках. Докажите, что либо их сумма, либо их разность есть константа.

14. В парламенте у каждого депутата не более 3 врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, чтобы у каждого депутата было не больше одного врага в своей палате (если А - враг Б, то Б - враг А).

15. Дан параллелограмм с вершинами в целых точках, причем внутри или на границе больше целых точек нет. Докажите, что его площадь равна единице.

16. В гостинице бесконечное число номеров: ... ,−2,−1,0,1,2, ... В некоторых из них живут пианисты. В некоторый момент два пианиста, живущие в соседних номерах n и $n+1$, решают, что они мешают друг другу, и расселяются в номера $n-1$ и $n+2$ (если эти номера свободны). Докажите, что рано или поздно переселения прекратятся.

17. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторых кружках налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое и т.д. После семи разливаний в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

18. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого замкнутого многогранника равна $360° \cdot (n-2)$, где n - число вершин.

19. Существует ли две ломаные, не имеющие общих звеньев и не самопересекающиеся, занимающие клетчатый лист?

20 . Докажите, что с помощью одной линейки нельзя
а) опустить из данной точки на прямую перпендикуляр;
б) провести через данную точку прямую параллельную данной прямой.

21. На Олимпе есть игра: всем богам наливают поровну амброзии, затем один бог переливает другому столько амброзии, сколько у того уже было и это повторяется несколько раз. Однажды удалось слить всю амброзию в чашу Зевса. Докажите, что число богов было степенью двойки.

22. Докажите, что из конечного числа различных кубиков нельзя сложить кирпич.

23. $\cos\alpha = 1/3$. Докажите, что градусная мера угла α иррациональна.

24. Докажите, что при всех $\{a_i\}$ следующее уравнение имеет корень $a_n \cos nx + a_{n-1} \cos (n-1)x + \ldots + a_1 \cos x = 0$.

25. На кольцо нанизаны одинаковые шарики, которые абсолютно упруго соударяются. Докажите, что их расположение периодически повторяется.

26. В пятиугольнике площади всех пяти треугольников, отрезаемых диагоналями, равны 1. Найдите площадь пятиугольника.

27. Дана фигура площади больше k. Докажите, что в ней найдутся k точек, разности соответствующих координат которых - целые числа.

28. Каждая диагональ пятиугольника отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей треугольников больше площади пятиугольника.

29. Докажите, что существуют числа, представимые в виде суммы 2001 слагаемых - 2000-х степеней целых чисел более чем 10^{1993} способами.

Для профессионалов. Часть А.

1. Дано n магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и 1 пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот).

2. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

3. Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией?

4. На единичной сфере расположен кривая длины большей πk. Докажите, что найдется экватор, пересекающий ее не менее чем в k точках.

5. На плоскости дано множество А, площадь которого меньше 1, и N точек. Докажите, что множество А можно сдвинуть на вектор, длина которого меньше $\sqrt{N/\pi}$, где $\pi=3,14159...$, так, что множество, полученное в результате сдвига, не будет покрывать ни одной из данных N точек.

6'. Пусть $F(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального числа M, большего 1, числа M, F(M), F(F(M)), F(F(F(M))),... попарно взаимно просты.

7. На кольцевой дороге стоят бензоколонки, причем бензина во всех бензоколонках хватит автомобилю на целый круг. Покажите, что существует бензоколонка, начав от которой, автомобиль сможет проехать весь круг.

8. В Москве 9 высотных зданий. Приезжий математик хочет найти точку, из которой они все видны в заданном порядке (считая от здания МГУ по часовой стрелке). Для любого ли заданного порядка это возможно?

9. Дан тетраэдр. 4 шара с центрами в его вершинах покрывают его весь. Ребра тетраэдра не увеличили, оставив те же шары в соответствующих вершинах. Верно ли, что шары также покрывают тетраэдр?

10. Докажите, что степень двойки может начинаться с любой комбинации цифр.

11 . Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров, а за 7 проверок их всегда можно обнаружить.

12. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 1 - X_1^2 = X_2 \\ 1 - X_2^2 = X_3 \\ \dots \\ 1 - X_n^2 = X_1 \end{cases}$

13 . Докажите, что найдется такое число C, что для любых целых p и q выполняется неравенство:

$$|p/q - \sqrt{2}| > 1/(C \cdot q^2)$$

14 . Сумма диаметров набора многоугольников на плоскости меньше диаметра их объединения. Докажите, что их можно разделить прямой.

15. При каких n можно непрерывно отобразить круг с n дырками на

себя без неподвижных точек?

16*. На окружности записаны 128 целых чисел. За один ход между каждой парой соседних чисел записывается их сумма, а сами эти числа стираются. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на 128.

17. Найдите все многочлены с натуральными коэффициентами, обладающие свойством: $F(p)$ – простое при всяком простом p.

18*. Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных положительных слагаемых столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы одинаковых или различных, но нечетных положительных слагаемых.

19 . Первый член последовательности a_k равен 1, остальные вычисляются по правилу: $a_{k+1}=a_k+1/a_k$. Докажите, что $a_{100}>14$.

20. Числа $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ все разные. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся образуют монотонную последовательность.

21. Треугольник, все углы которого не превосходят 120°, разбит на треугольники. Докажите, что хотя бы в одном из треугольников разбиения все углы также не превосходят 120°.

22. На Солнце расположены непересекающиеся круглые пятна, каждое из которых занимает меньше половины поверхности. Докажите, что найдутся две противоположные не закрытые пятнами точки.

23*. Бесконечное множество точек на плоскости таково, что все попарные расстояния целые. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

24. Докажите, что на единичной окружности можно указать бесконечное множество точек, все попарные расстояния между которыми рациональны.

25. Из A в B ведут две непересекающиеся дороги. Если два автомобиля, связанные тросом длины 2L могут проехать по разным

дорогам из A в B не порвав трос, то могут ли разминуться два воза, едущие навстречу друг другу по разным дорогам?

26˙. Правда ли, что если все грани выпуклого многогранника – параллелограммы, то он имеет центр симметрии?

27. На книжной полке стоит в беспорядке полное собрание сочинений неизвестного классика. Пьяный библиотекарь выбирает наугад том, стоящий не на своем месте, и ставит его на место (при этом часть томов сдвигается). Всегда ли он может поставить тома по порядку?

28. **(Лемма Минковского)** Если центрально-симметричная выпуклая фигура на плоскости, площади больше 4 содержит ноль, то она содержит еще хотя бы одну целую точку. Докажите.

Для профессионалов. Часть B.

1. Можно ли расположить в правильном треугольнике со стороной 1.5 без пересечений по внутренним точкам правильные треугольники со сторонами 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,...?

2˙. Двое игроков по очереди ставят крестики и нолики в клетки бесконечного листа клетчатой бумаги. Первый ходит одним крестиком и стремится к тому, чтобы какие-нибудь 4 крестика образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй отвечает 10 нуликами и старается помешать ему. Может ли первый игрок выиграть?

3. На пир при дворе короля Артура собрались N рыцарей, они либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у всех рыцарей друзей больше чем врагов (среди собравшихся). Можно ли рассадить рыцарей за круглым столом так, чтобы справа и слева от каждого сидел друг?

4. Докажите, что выпуклую фигуру можно разрезать на три фигуры меньшего диаметра.

5. Даны несократимые дроби $a/b < c/d$, между которыми нет дробей p/q где $q < \max(b,d)$. Докажите, что $ad-bc = 1$ $(a,b,c,d,p,q > 0)$.

6. В кучках лежат камни. За один ход можно взять произвольное число камней из какой-то одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7 . Восемь точек принадлежат кубу со стороной 1. Расстояние между любыми двумя из них больше или равно 1. Докажите, что эти точки - вершины куба.

8. Дана выпуклая кривая постоянной ширины L. Найдите длину ее границы. (Шириной кривой по данному направлению называется наименьшее расстояние между двумя прямыми этого направления, между которыми лежит кривая.)

9. Прямоугольник разрезан на конечное число прямоугольничков. У каждого прямоугольничка есть целая сторона. Докажите, что у прямоугольника тоже есть целая сторона.

10. 100 замов получили взыскания от 100 завов. При этом каждый зав наложил по одному взысканию на 15 замов, а каждый зам получил по одному взысканию от 15 завов. Докажите, что директор может снять часть взысканий так, что у каждого зама останется по одному взысканию, и все взыскания будут наложены разными завами.

11. На плоскости отмечено бесконечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тогда найдется выпуклая кривая, проходящая через его бесконечное подмножество. Докажите.

12. На плоскости отметили N точек и N-2 непересекающихся отрезка. Докажите, что найдутся две точки, которые "видят" друг

друга (точки не лежат на отрезках).

13. Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}$

14. Существует ли такое n, что любое рациональное число между 0 и 1 представимо в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}$, где $a_i \in \mathbb{N}$?

15. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде конечной суммы попарно различных членов гармонического ряда 1, 1/2, 1/3, 1/4,...
конс

16. **(Теорема Менгера)** В городе Метрополисе каждая линия метро соединяет две станции. При закрытии любых девяти с каждой станции можно добраться до каждой. Докажите, что 10 путешественников могут проехать от площади Чернова до площади Белова попарно не пересекающимися маршрутами (нет общих станций).

17. У 3 алкоголиков есть бесконечно большие стаканы. В каждом из них натуральное число литров. Один может переливать другому столько, сколько у того уже есть. Всегда ли они могут перелить всю жидкость в 2 стакана?

18. На плоскости расположен бесконечный коридор шириной один метр, который поворачивает под прямым углом. Найдите наибольший диаметр фигуры, которую можно протащить через этот поворот.

19. Множество содержит 1000 различных элементов. Каково наибольшее количество его подмножеств, не содержащих друг друга?

20. 45 спичек разложили на несколько кучек. Из каждой кучки взяли по одной спичке и сделали новую кучку, затем снова взяли по одной спичке и сделали новую кучку и т. д. Докажите, что рано или поздно получатся 9 кучек с числом спичек 1,2,3,4,5,6,7,8,9...

21. **(Теорема Рамсея)** Все ребра полного графа с N вершинами покрасили в M цветов. Докажите, что в нем найдется полный подграф с K вершинами, все ребра которого покрашены в один цвет, при условии, что M и K заданы, а N достаточно большое.

22. Задана возрастающая положительная геометрическая прогрессия X_n. Может ли дробная часть $\{X_n\}$ стремиться, скажем, к 1/2 при $n \to \infty$?

23. В стаде 101 корова. Любые 100 из них можно разделить на 2 стада по 50 коров так, что общие веса стад будут равны. Докажите, что веса всех коров равны.

24. Докажите, что число $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$ – иррациональное $(n>1)$.

25. Можно ли расположить в пространстве систему окружностей так, чтобы через каждую точку проходила ровно одна окружность?

26. **(Лемма Шпернера)** Треугольник с разноцветными вершинами произвольным образом триангулирован и вершины триангуляции окрашены в цвет одной из из вершин треугольника так, что вершины триангуляции, лежащие на стороне треугольника, имеют цвет одной из вершин, которые эта сторона соединяет. Докажите, что число треугольников триангуляции с разноцветными вершинами нечетно.

27. Существует ли бесконечная последовательность из трех букв, такая, что никакая комбинация из букв не повторится два раза подряд?

28. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках, и разрывная во всех иррациональных?

29. Если прямоугольник можно разрезать на квадраты, то его можно разрезать и на равные квадраты. Докажите.

30. Луч прожектора на маленьком острове имеет в тумане длину 1 км (отрезок длиной 1 км) и вращается со скоростью 1 об/мин. Катер хочет высадить десант на остров. Какова должна быть минимальная скорость катера, чтоб он мог это сделать?

31. Дан многочлен $P(X)$. Для любого $X>0$: $P(X) > 0$. Докажите, что $P = Q/T$, где Q и T – многочлены с неотрицательными коэффициентами.

32. Из резисторов собрана цепь. Докажите, что если один из проводов перерезать, то сопротивление между двумя точками A и B не уменьшится.

33 . Сколькими способами в слове из n символов можно правильно расставить скобки?

34. Докажите, что для любого n найдется окружность, на которой лежит ровно n узлов клетчатой бумаги.

35 . В вершинах n-угольника расположено по прожектору, каждый из которых освещает угол $2\pi/n$. Докажите, что прожекторы можно повернуть так, что они осветят всю плоскость.

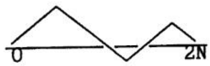
36. С помощью одной линейки построить касательную к окружности.

37. Докажите, что среди n точек общего положения на плоскости можно отметить 100, образующие вершины выпуклого 100–угольника, если число n достаточно большое.

Указание. Докажите сначала существование точек A, B и сотни точек $\{C_i\}$, таких, что любой четырехугольник с вершинами в точках .A, B и $\{C_i\}$ выпуклый. Затем докажите существование одной точки D и аналогичного множества $\{D_i\}$.

38. Вершины конечного графа раскрашены в два цвета. Каждую секунду каждая точка меняет свой цвет на тот, в который окрашено большинство ее соседей. Докажите, что начиная с некоторого момента часть точек начнет менять свой цвет каждую секунду, а часть перестанет менять свой цвет вообще.

39. Рассмотрим множество непрерывных функций (ломаных) на отрезке $[0,2N]$, таких, что $F(0)=0$ и на любом отрезке $(K,K+1)$, K–целое, производная равна $+1$ либо -1. Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $F(2N)=0$?



НАВОДЯЩИЕ ИДЕИ

8-9 класс. Часть А.

2. чередование
3. инвариант, двумя способами
4. четность, сумма
7. четность
8. Дирихле
9. граф
12. с конца
16. дополнение
17. спуск
18. цикл
21. поворот
23. соответствие
24. с конца
26. граф
27. четность

8-9 класс. Часть В.

1. инвариант
2. с конца
3. четность
4. инвариант
6. крайний, инвариант
8. индукция
9. проекция, соответствие, инвариант
10. делимость, цикл
13. симметрия
14. симметрия
15. четность
16. пересечение
17. соответствие
19. крайний
20. остатки, цикл
21. редукция
27. симметрия
28. Дирихле
29. делимость, конструирование
30. индукция
33. четность
34. крайний
40. четность
42. делимость, признак
43. Дирихле
45. крайний
48. редукция
49. четность
50. раскраска, сумма, двумя способами
52. дополнение
53. признак
55. Дирихле, остатки
56. алгоритм Евклида
57. редукция
58. с конца, симметрия

8–9 класс. Часть C.

1. граф
4. с конца
5. индукция
6. пары
8. алгоритм Евклида
9. Дирихле
14. блоки
15. индукция
16. соответствие
17. индукция
18. полуинвариант
21. крайний
22. граф
24. граф
26. граф, крайний
28. четность
35. четность
36. четность, двумя способами
38. граф инвариант
42. соответствие
43. делимость
44. четность
45. симметрия
49. поворот

8–9 класс. Часть D.

50. редукция
51. граф
52. симметрия
55. индукция
56. индукция
59. четность, Дирихле, комбинаторика
61. крайний, Дирихле
63. четность, двумя способами
64. крайний
65. линейность
66. раскраска, двумя способами
67. процесс, крайний
68. конструирование
69. двумя способами, делимость
70. комбинаторика
71. инвариант, редукция
72. раскраска, инвариант
73. фазовое пространство
74. раскраска, инвариант
75. соответствие
76. соответствие
77. делимость, инвариант
78. пары, Дирихле
80. Дирихле
81. редукция
83. редукция
84. инвариант
85. граф, раскраска
86. граф
87. Дирихле
88. редукция
89. покрытие
90. индукция
93. граф, крайний
94. раскраска, инвариант
96. редукция

НАВОДЯЩИЕ ИДЕИ

9–10 класс. Часть А.

1. средняя линия
3. делимость
5. симметрия
6. Дирихле
7. остатки, Дирихле
8. индукция
9. делимость
10. редукция

9–10 класс. Часть В.

1. перенос
3. пары
5. ГМТ
7. редукция, пары
8. редукция, подобие
9. перенос
10. граф, цикл
11. вписанные, углы
12. площади
13. соответствие, четность
15. край
16. передача, хода
17. ГМТ
18. пары
19. редукция
20. Дирихле, заготовки
22. упорядочение
23. алгоритм Евклида
24. симметрия, Дирихле
25. остатки
29. четность
30. край
31. край
33. цикл

9–10 класс. Часть С.

1. передача хода
4. обратный ход
5. граф, цикл, симметрия
6. цикл, обратный ход
7. конструирование
13. процесс, полуинвариант
16. граф, четность
17. алгоритм Евклида
18. остатки, индукция
19. остатки
21. счет углов
22. делимость, остатки
24. край
25. редукция
26. раскраски, инвариант
28. перенос
29. процесс
31. край, редукция
33. Дирихле
34. край, Дирихле
36. Дирихле
38. инвариант
40. Дирихле
41. Дирихле

9–10 класс. Часть D.

1. оптимизация
3. край
4. покрытие
6. симметрия
7. граф, редукция
8. четность, инвариант
10. двумя способами
11. цикл
12. цикл
13. цикл, дельта
14. Дирихле
15. цикл, дельта
17. выход в пространство
18. край
19. симметрия
23. выход в пространство
24. остатки, Дирихле
25. поворот
26. вписанные углы
29. разрезание
32. остатки, пары
33. остатки
34. редукция
35. сопряжение
36. редукция
37. процесс
38. симметрия, выпрямление
40. край, редукция
41. конструирование
42. заготовки
43. цикл, обратный ход
45. край
46. инвариант
47. пары

НАВОДЯЩИЕ ИДЕИ

10–11 класс. Часть A.

1. оптимизация, линейность
3. цикл
4. дополнение
8. цикл

10–11 класс. Часть B.

3. сдвиг
5. индукция

10-11 класс. Часть C.

1. контрпример
2. приближение
3. инвариант
6. четность
7. оценка
8. система уравнений
9. оптимизация, линейность
11. оценка
12. край
14. малый сдвиг, оценка
15. конструирование
16. алгоритм Евклида, цикл
17. остатки
18. оптимизация
20. край
22. Дирихле
23. оптимизация, оценка
24. разрезание, покрытие
25. оптимизация, редукция
27. Дирихле
29. конструирование

10-11 класс. Часть D.

1. функция, оптимизация
3. редукция
4. конструирование
6. спуск
9. оптимизация
10. оптимизация
12. перенос, двумя способами асимптотика
14. конструирование, полуинвариант
15. перенос, двумя способами
17. линейность
18. граф
19. конструирование
20. инвариант
21. инвариант
22. край
24. оценка
27. перенос, Дирихле
28. линейность
29. Дирихле, асимптотика

НАВОДЯЩИЕ ИДЕИ

Для профессионалов. Часть А.

1. четность, инвариант
2. обратный ход
3. цикл
4. Дирихле
5. перенос, Дирихле, фазовое пространство
6. остатки
7. редукция, обратный ход
8. Дирихле, клетки, фазовое пространство
9. конструирование
10. цикл
12. оценка
13. цикл, Дирихле
14. процесс
16. линейность
20. граф, см.людоедов
21. двумя способами
22. покрытие, край
23. фазовое пространство
24. конструирование
25. фазовое пространство, см.монах
26. см.о параллелограмме
27. край, полуинвариант
28. перенос, двумя способами, покрытие

Для профессионалов. Часть В.

1. процесс
2. конструирование
3. процесс
6. исследование
7. процесс
8. двумя способами
9. раскраска, линейность, инвариант
10. процесс, оценка
12. граф, Дирихле, Эйлер
14. край
15. спуск
16. процесс, редукция
18. оптимизация
19. край, редукция, оптимизация
20. край
21. процесс, редукция
22. процесс, конструирование
23. линейность, редукция
24. край, редукция
25. конструирование
26. редукция
27. процесс, конструирование
29. линейность
30. оптимизация
31. редукция, процесс
32. линейность, полуинвариант
35. полуинвариант, оптимизация
37. редукция
38. полуинвариант, фазовое пространство
39. симметрия

КОММЕНТАРИИ И УКАЗАНИЯ

Задача становится проще, если ее окружить родственными задачами. Поэтому в качестве указаний мы устанавливаем связи между задачами, приводя краткое описание основных идей вместе с номерами соответствующих задач. Отметим, что понять эти описания можно только обратившись к задачам.

Звездочкой (*) отмечены задачи для профессионалов.

Общее положение точек на плоскости: Никакие три точки не лежат на одной прямой.

Общее положение прямых на плоскости: Никакие три прямые не проходят через одну точку и любые две пересекаются (любые три образуют треугольник).

Четность. Часто некоторая величина должна быть всегда четной (или нечетной). Из этого сразу следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую четность, невозможны. 8.a.2, 8.b.40, 8.b.50, 8.c.12, 8.c.26, 8.c.36, 8.c.63, 9.d.8. Четность часто выступает в роли инварианта: 8.a.4, 8.a.7, 8.a.27, 8.b.15, 8.b.38, 8.b.49, 8.c.35, 8.c.44, 8.c.71, 10.c.6, *.a.1, *.b.26. См. инвариант, делимость, подсчет двумя способами.

Конструирование. Это задачи на построение примера или контрпримера. Построение нужного объекта бывает непосредственным и бывает поэтапным (с помощью некоторого процесса). Задачи на построение примера 8.c.10, 8.c.63, 8.c.66, 9.a.4, 9.a.9, 10.b.1, 10.d.7 или контрпримера 8.a.20, 8.a.22, 8.b.12, 8.b.29, 8.b.45, 8.b.46, 8.c.31, 8.c.32, 8.c.50, 8.c.63, 8.c.68, 9.c.24, 10.c.1, 10.c.19, 10.d.4, *.a.3, *.a.9. Непосредственное конструирование 8.a.25, 8.b.4, 8.b.18, 8.b.47, 8.b.48, 8.c.33, 8.c.42, 8.c.46, 8.c.53, 8.c.60, 8.c.70, 8.c.82, 8.c.91, 9.4.16. Поэтапное конструирование с помощью некоторого процесса 8.c.15, 8.c.37, 8.c.90, 9.b.23, 9.b.32, 9.c.29, 10.d.14, 10.d.19, *.a.24, *.b.1, *.b.2, *.b.17, *.b.22, *.b.27. Прочие задачи на конструирование: 8.a.26, 9.c.8, 10.a.8, 10.c.2, 10.c.15, *.a.15, *.b.15, *.b.25

Подсчет двумя способами. Некоторую величину оценивают (или подсчитывают) двумя способами и результаты сравнивают. При этом получается уравнение или неравенство, которое бывает ключом к решению. Эта идея тесно связана с идеей инварианта. Она бывает источником противоречия (рассуждение от противного) 8.a.4, 8.a.7, 8.b.49, 8.b.50, (8.c.12), 8.c.36, 8.c.69, *.b.8 . Бывает полезна при использовании принципа Дирихле 8.b.49, 9.d.10, 10.d.12, 10.d.15, *.a.21, *.a.28

Принцип Дирихле. Соотношение между двумя множествами, которое можно выразить так: "Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдется ящик, в котором сидят не меньше, чем n/k кроликов, и найдется ящик, в котором сидят не больше, чем n/k кроликов."

Принцип Дирихле бывает непрерывным: Если n кроликов съели m кг травы, то какой-то кролик съел не меньше m/n кг и какой-то съел не больше m/n кг (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего).

Отметим, что несмотря на кажущуюся очевидность этого принципа, задачи, его использующие, не всегда легкие, - очень трудно бывает выделить объекты именуемые "ящиками" и "кроликами".

8.a.8, 8.b.28, 8.b.43, 8.b.55, 8.c.59, 8.c.61, 8.c.80, 8.c.87, 9.a.6, 9.a.7, 9.b.24, 9.c.33, 9.c.34, 9.c.36, 9.c.40, 9.c.41, 9.d.14, 9.d.15, 9.d.24, 10.c.22, 10.c.27, 10.d.27, 10.d.29, *.a.4, *.a.5, *.a.8, *.a.17, *.b.12.

Доказательство от противного. Если мы предположим, что исходное утверждение неверно и выведем из этого противоречие, то тем самым докажем исходное утверждение.

Математическая индукция. - Метод доказательства бесконечной последовательности утверждений. Первое утверждение обычно легко проверить (оно называется **базой индукции**). Затем доказывается **индуктивный переход** (или шаг индукции):

Допустим, что мы уже доказали утверждение с номером n, *тогда мы можем доказать следующее,* (n+1)*-ое утверждение.*

Если доказана база индукции и доказан индуктивный переход, то все утверждения верны (это аксиома или **принцип математической индукции**).

Иногда шаг индукции выглядит так: *Допустим, мы уже доказали все утверждения с номерами от 1 до* n, *тогда мы можем доказать* (n+1)*-ое утверждение*. Иногда применяют **индуктивный спуск**: Если утверждение с номером n > 1 всегда можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами, и первое утверждение верно, то все утверждения верны.

8.b.8, 8.b.30, 8.c.15, 8.c.17, 8.c.55, 8.c.56, 8.c.90, 9.a.8, 9.b.32, 10.a.7, 10.d.9, *.a.16, *.b.21, *.b.24, *.b.37.

Оценки. Более сложное оценивается более простым. Например, нижняя оценка суммы получается путем замены каждого члена на минимальный. Часто используют неравенства для средних (арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое), свойства монотонности и выпуклости функций, конкретные неравенства: $(1+x)^n > 1+nx$, $\sin(x) < x$, при $x > 0$.

Оценка бывает целью задачи: 8.b.19, 8.b.51, 8.b.54, 8.c.6, 8.c.7, 8.c.13, 8.c.23, 8.c.27, 8.c.28, 8.c.43, 8.c.54, 8.c.58, 8.c.78, 9.d.14, 10.a.4, 10.a.6, 10.b.7, 10.b.8, 10.c.7, 10.c.11, 10.c.14, 10.d.1, 10.d.4, *.a.13, *.a.19, *.b.5, *.b.31, а может выступать, как метод решения (например, при подсчете двумя способами). 10.c.21, 10.c.23, 10.d.10, 10.d.24, 10.d.29, *.a.4, *.a.5, *.a.7, *.a.8, *.a.12, *.a.28, *.b.10, *.b.12, *.b.22, а также задачи 9.c.14, 10.a.7, 10.c.5, 10.d.9.

Алгоритм Евклида. Это процесс последовательного построения остатков. Например, если даны два натуральных числа n_1 и n_2, ($n_1 > n_2$) и операции сложения и вычитания, то можно получить число n_3 – остаток от деления n_1 на n_2, а значит и n_4 – остаток от деления n_2 на n_3. Алгоритм Евклида помогает устанавливать делимость и взаимную простоту, находить НОД. Отметим, что этот алгоритм может оперировать не только с натуральными числами, но и с многочленами, комплексными числами и т.д.

8.a.28, 8.b.8, 8.b.57, 8.c.8, 9.b.23, 9.c.17.

Делимость и остатки. Остаток произведения или суммы двух чисел определяется их остатками – это создает "арифметику остатков". Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр), и ряд задач решается путем перебора остатков. Иногда нужен перебор остатков. Остатки от деления на взаимно простые числа ведут себя "независимо" (Китайская теорема об остатках) 9.d.24, 9.c.8.
Задачи 9.c.18, 9.c.19, 9.d.32, 9.d.33, относятся к групповым свойствам остатков. Другие задачи на остатки – 8.a.14, 8.b.10, 8.b.26, 8.b.32, 8.b.39, 8.b.48, 8.b.52, 8.b.53, 8.b.55, 8.c.43, 8.c.54, 8.c.77, 9.a.3, 9.a.7, 9.b.25, 9.c.18, 10.c.17, *.a.6. Прочие задачи на делимость – 8.c.10, 8.c.69, 9.b.21, 9.b.26, 9.c.8, 9.c.22, 9.c.29

Евклидова геометрия. Типичные приемы – подсчет углов (теорема о вписанных углах). В задачах на построение бывает полезно сначала построить похожий (подобный) объект. Часто используется подсчет площадей, геометрические места точек.

Покрытие. – Множество M покрыто семейством множеств $A_1,\ldots,A_n$, если каждая точка из M покрыта некоторым A_i. При этом одну точку можно покрывать многократно.

Замощение (обычно одинаковыми фигурами). – Покрытие, при котором каждая точка покрыта ровно один раз .

Разбиение. – Представление множества в виде нескольких непересекающихся подмножеств.

8.a.25, 9.d.47, 10.c.29, *.a.22, *.a.28, *.b.1, *.b.4.

Раскраска. – Сопоставление каждому элементу некоторого цвета. Отметим, что раскраску можно рассматривать как разбиение. Часто раскрашивают клетки, а число одноцветных клеток выполняет роль инварианта.

Числа закрашеных клеток могут дать нужный инвариант 8.c.66, 8.c.72, 8.c.74, 8.c.94. Встречается шахматная раскраска 8.b.50, 9.c.25, *.b.9. Раскраска может дать **разметку**, сделать ситуацию обозримой. Прочие задачи на раскраску 8.c.9, 8.c.19, 8.c.56, 8.c.85, 8.c.92, 9.b.20, 9.c.3, *.b.21, *.b.26, *.b.37, *.b.38

Игры. – Основные идеи решения: 1. Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Выигрышными позициями, определенными на очередном шаге, являются те, из которых можно получить ранее определенную проигрышную позицию, а проигрышные – те, любой ход из которых ведет к попаданию на ранее определенную выигрышную позицию. 8.a.16, 8.a.24.

2. Соответствие. Наличие удачного ответного хода может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа. 8.a.16, 8.b.13, 8.b.14, 8.b.17, 8.b.27, 8.b.52, 8.c.42, 9.d.47.

3. Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию, которая выигрышная для противника. 9.b.16, 9.c.a.

4. Идея "многих заготовок" (на бесконечном поле) и другие идеи. 9.d.42, *.b.2, *.b.30. Отметим, что процедуру оптимизации часто можно рассматривать как своего рода игру.

Идея соответствия. Объект может стать более естественным, если он снабжен парой. Например, вместе с иррациональностью $x + y\sqrt{D}$ рассматривают сопряженную иррациональность $x - y\sqrt{D}$ (2.d.35). Такое соответствие может давать симметрия. Соответствие может обеспечивать ответный ход в играх, сравнивать количества и доказывать четность. Нужное противоречие может обеспечивается рассогласованием при соответствии, когда осуществляется подсчет двумя способами. 8.a.16, 8.a.17, 8.a.23, 8.b.9, 8.b.17, 8.c.11, 8.c.16, 8.c.20, 8.c.35, 8.c.21, 8.c.75.

См. подсчет двумя способами, игры.

Граф. - Это система точек, соединенных линиями. Построение графа выделяет в чистом виде объекты и связи и потому часто оказывается полезным 8.a.9, 8.a.26, 8.c.75, 9.c.38, 9.c.51. Отметим, что очень многие олимпиадные задачи в сущности являются фактами из теории графов. Свойства обходов ребер графа отражены в задачах 8.b.3, 9.c.16, свойства ориентированных графов и отношение порядка - 8.c.86, и пара связанных задач 9.d.40 и *.a.20. Теорема Эйлера - в задачах 9.d.7, 9.d.10, 10.d.18, *.b.12, теорема Холла о паросочетаниях - задача *.b.10, теорема Менгера - задача *.b.16. Другие задачи 8.a.17, 8.c.1, 8.c.22, 8.c.26, 8.c.51, 8.c.85, 8.c.93, 9.a.10, 9.b.10, 9.c.5, 9.c.8, 9.c.22, 9.c.35, 9.d.39, *.a.2, *.a.17, *.b.38. Отметим, что в сложных задачах на графы используется процесс спуска или редукции.

Теория Рамсея *.b.21 см 8.b.36, 8.b.43, 8.c.9, *.b.37

Линейность. Линейная функция имеет максимум и минимум только на границе 8.c.65, 10.a.1, 10.a.28. Если она принимает равные значения в нескольких точках общего положения, то является константой 8.b.41, 9.b.12. Линейная суперпозиция дает представление общего случая в виде суммы элементарных и позволяет осуществить редукцию к более простому случаю *.a.16. Задачи на линейность: 8.c.96, 10.d.17, *.b.23, *.b.29, *.b.32.

Процессы и операции. Очень часто сама процедура, производимая над каким-то объектом, становится объектом изучения 8.c.14, 10.d.6, 10.d.14, *.a.7, *.b.c. *.b.29. Когда требуемый объект не удается указать непосредственно, его строят поэтапно – с помощью процесса 9.c.13, 9.c.29, 9.d.37, 10.d.14, *.a.24, *.b.1, *.b.3, *.b.10, *.b.11, *.b.16, *.b.22, *.b.27. Иногда приходится сводить задачу к изучению **шага** подобного процесса. Конечность (остановка) процесса доказывается обычно с помощью **полуинварианта**. Иногда вместо конечных пользуются сходящимися процессами *.b.22, *.b.27. Бывают процессы редукции *.b.16, *.b.19, *.b.21, *.b.37. Отметим, что спуск и индукция тоже являются процессами. Задачи, в формулировках которых встречается процесс: 8.c.15, 10.c.14, 10.c.21, 10.d.17, 10.d.25, *.a.14, *.a.27, *.b.7, *.b.19, *.b.20, *.b.30, *.b.38. Задачи про операции: 8.a.21, 8.b.39, 8.c.18, 8.c.74, 8.c.77, 8.c.84, 9.c.25, 9.c.38, 9.d.46, 10.c.3, 10.c.6, 10.d.21, *.a.1, *.a.6, *.a.11, *.a.16.

Обратный ход. – Если в задаче указан некоторый процесс, и его можно провести в обратном порядке, то нередко это дает ключ к решению. (Например, можно ли вынести диван из комнаты? Можно, поскольку его туда как-то внесли.)

Решение с конца. – 1) Используется в играх при анализе выигрышных и проигрышных ситуаций. 8.a.24
2) Предполагают, что требуемое верно, и идут от него к исходным данным. 8.a.12, 8.b.2, 8.c.4, 10.d.21.

Правило крайнего. Особые, крайние объекты часто служат "краеугольным камнем" решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угол многоугольника, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты 8.b.6, 8.b.19, 8.b.28, 8.b.29, 8.b.34, 8.c.21, 8.c.61, 8.c.64, 8.c.67, 9.b.7, 9.b.15, 9.b.30, 9.b.31, 9.c.31, 9.c.34, 9.d.3, 9.d.18, 9.d.40, 9.d.45, 10.c.20, 10.d.16, 10.d.22, *.a.22, *.b.14, *.b.19, *.b.20, *.b.24. или рассматривать ситуацию в асимптотике, на бесконечности 10.c.13, 10.d.12, 10.d.13, 10.c.12, 10.c.22, 10.c.27, 10.d.16, 10.d.29, *.a.28, *.b.28. В указанных выше задачах на спуск принцип крайнего работает как метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в подходящем смысле контрпример. И если окажется, что его можно еще уменьшить, то получится искомое противоречие.

Цикличность. Если нечто может находиться только в конечном числе состояний и состояние в данный момент времени однозначно определяет состояние в следующий момент времени, то, начиная с некоторого момента, состояния начнут периодически повторяться 8.b.20, 9.b.33. Если же число состояний конечно, и каждое состояние однозначно определяет как последующее, так и предыдущее, то в последовательности состояний предпериод отсутствует. 9.c.4, 9.c.6, 9.c.18, 9.d.11, 9.d.43. Иногда полезно обозначать состояния точками, а переход – стрелками. Задачи на цикл в графах 8.a.2, 9.b.10, 9.c.5, *.a.26. Обобщение этой идеи на непрерывный случай помогает устанавливать почти возвращаемость 9.d.13. С этой задачей связан ряд результатов теории диофантовых приближений 9.d.14, 9.d.15, 10.a.3, *.a.10, *.a.13. Задача на итерацию функций *.a.12, задачи на непериодичность 10.a.9, *.b.27. Разные задачи на периодичность 8.a.18, 8.c.20, 8.c.53, 9.d.12, 10.c.16, 10.d.25, *.a.3, *.b.38.

Фазовое пространство. Рассмотрение множества возможных ситуаций как единого целого и его удачное описание часто оказывается очень полезным. Для этого может использоваться идея **графа** (см.задачи в которых помогает само введение понятия графа). 8.a.24, 8.c.57, 8.c.73, 9.b.33, 9.c.7, 9.c.16, 9.d.43, 10.c.6, 10.c.18, 10.d.27, *.a.5, *.a.8, *.a.25, *.b.38.

Редукция. В процессе решения задачу приводят к наиболее удобному виду, например, формулируют ее условие на более удобном "языке" (например, на языке графов). Часто общую задачу сводят к ее частному случаю. Редукция может осуществляться поэтапно с помощью процесса. 8.b.30, 8.c.14, 8.c.15, 8.c.71, 8.c.81, 8.c.83, 8.c.88, 9.a.10, 9.b.14, 9.b.19, 9.c.25, 9.c.31, 9.d.36, 9.d.40, 10.c.25, *.a.7, *.b.16, *.b.19, *.b.21, *.b.23, *.b.24, *.b.26, *.b.31, *.b.37. С идеей редукции тесно связана **отимизация**, позволяющая находить нужные объекты или изучать их свойства 8.a.13, 8.a.21, 8.b.5, 8.c.1, 8.c.24, 8.c.46, 8.c.57, 8.c.65, 8.c.76, 8.c.81, 8.c.89, 9.b.17, 9.d.1, 9.d.20, 10.a.1, 10.b.8, 10.c.9, 10.c.29, 10.d.10, *.b.18, *.b.19, *.b.30, *.b.35.

Инвариант – величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться **четность** или **раскраска**. В задачах про сумму цифр используются остатки по модулю 3 или 9. 8.a.3, 8.a.18, 8.a.21, 8.b.1, 8.b.4, 8.b.6, 8.b.9, 8.b.22, 8.b.42, 8.b.53, 8.c.28, 8.c.43, 8.c.66, 8.c.72, 8.c.74, 8.c.77, 8.c.84, 8.c.94, 9.b.12, 9.b.29, 9.c.25, 9.d.46, 10.c.26, 10.d.18, 10.d.20, 10.d.21, *.b.9. **Полуинвариант** – величина, изменяющаяся только в одну сторону. Используется при доказательствах остановки процессов. 8.c.18, 9.c.13, 9.c.38, 9.d.8, 10.c.3, 10.d.14, *.b.32, *.b.35, *.b.38.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К 60-летию первой в России математической олимпиады школьников

Подробную информацию о математической олимпиаде школьников, проведенной в 1934 году в Ленинграде, можно найти, например, в следующих публикациях:

- "Математическое просвещение". Сборник статей по элементарной и началам высшей математики. Выпуск третий. М.-Л.: ОНТИ, 1935. Стр. 59-69.
- "Квант", 1984, N8, стр. 56-58; N9, стр. 52-53.

Задачи математической олимпиады школьников в 1934 году.

1. Решить систему уравнений: $$x^2 = a + (y-z)^2$$ $$y^2 = b + (z-x)^2$$ $$z^2 = c + (x-y)^2$$

2. Доказать, что уравнение $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ имеет решение при любых действительных a, b, c.

3. Доказать, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

4. Доказать для натуральных n и m тождество:
$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+m}{(n+m+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+m+1)!}$$

5. Исключить α и β из уравнений: $$a\cdot\sin^2\alpha + b\cdot\cos^2\alpha = m$$ $$b\cdot\sin^2\beta + a\cdot\cos^2\beta = n$$ $$a\cdot\operatorname{tg}\alpha = b\cdot\operatorname{tg}\beta$$

6. Доказать, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то уравнение:
$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\cdot x + c^2 = 0$$
не имеет решений в действительных числах.

7. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

8. Пересечь данную трехгранную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

9. Найти предел величины $\left(\cos\frac{a}{n}\right)^n$ при натуральном $n \to \infty$.

10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(a+x) - \mathrm{tg}(a-x)}{\mathrm{arctg}(a+x) - \mathrm{arctg}(a-x)}$.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Механико-математический факультет (мех-мат) является ведущим учебно-научным центром. Выпускников мех-мата отличает наиболее высокий уровень фундаментальной подготовки в области математики и механики, который позволяет им учиться дальше или решать сложные прикладные задачи.

Мех-мат имеет два отделения: математики и механики. Выпускники могут получить одну из трех квалификаций:

"математик, математик-прикладник",

"математик, математик-прикладник в области экономики",

"механик, математик-прикладник".

Традиционно около трети выпускников распределяется в аспирантуру.

На первом курсе программа общая для всех студентов. На втором – студенты разделяются по специальностям. На третьем – по кафедрам. Каждый студент выбирает научного руководителя. Студенты и аспиранты публикуют результаты своих исследований в ведущих научных журналах.

Бытует мнение, что поступить и учиться на мех-мате могут только вундеркинды. Это ни в коей мере не соответствует действительности. Никаких требований, выходящих за рамки программы средней школы, к поступающим на экзаменах не предъявляется. Конечно, для поступления нужно хорошо владеть школьным материалом, а для учебы – иметь склонность к точным наукам.

Справки по всем вопросам по телефону:
939-37-39 (с 13^{00}до 16^{00})

М И Р О С
Московский институт
развития образовательных систем

МИРОС создан Департаментом образования Москвы в феврале 1992 года.

МИРОС ставит своей целью разработку альтернативных учебных планов и программ, подготовку и издание комплектов учебников нового поколения, выпусков литературы для учителей и школьников.

МИРОС объединяет опытных учителей и квалифицированных ученых, методистов, психологов и педагогов.

МИРОС обеспечивает сочетание исследовательского поиска, педагогического эксперимента и издательской деятельности.

МИРОС всегда открыт для сотрудничества с потенциальными авторами оригинальных предложений.

Справки о имеющейся в продаже литературе - по телефону
915-69-75

Адрес: 109004,Москва,ул.Нижняя Радищевская,д.10
(метро "Таганская-кольцевая").

ДНТТМ

ДОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО
ТВОРЧЕСТВА МОЛОДЕЖИ

117419, Москва, Донская,37
тел. 954-0012

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им.М.В.ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики является ведущим учебным центром России по подготовке кадров в области фундаментальных исследований по прикладной математике, вычислительной математике и информатике.

Подготовка специалистов ведется по следующим направлениям: математическая физика, математическое моделирование, вычислительная диагностика, численные методы, исследование операций и системный анализ, оптимизация и оптимальное управление, теория вероятностей и математическая статистика, математическая кибернетика, математическое и программное обеспечение проблемно ориентированных систем, архитектура вычислительных систем и сетей, математическое и программное обеспечение вычислительных машин и систем. computer science.

Студенты факультета ВМиК получают фундаментальную математическую подготовку и проходят обучение по широкому спектру курсов, связанных с вычислительной техникой и информатикой. Значительное место в учебном плане занимает практическая подготовка и работа на современной вычислительной технике.

Студенты факультета ВМиК учатся по многоступенчатой системе. Первая ступень (4 года) заканчивается защитой дипломной работы и сдачей государственного экзамена по специальности. Выпускнику вручается диплом об окончании МГУ. Прием на вторую ступень (двухгодичная магистратура) производится из числа выпускников факультета ВМиК на конкурсной основе. За время обучения на второй ступени студенты проходят углубленную специализацию, сдают экзамены кандидатского минимума. Выпускникам второй ступени, защитившим магистрскую диссертацию, вручаются дипломы магистра Московского университета. Для них возможно дальнейшее обучение в двухгодичной аспирантуре.

Выпускники факультета ВМиК получают квалификацию "математик" по специальности "прикладная математика".

Студенты факультета имеют возможность на добровольной основе обучаться на военной кафедре.

В состав факультета ВМиК входят 14 кафедр и 14 лабораторий, одна из которых создана совместно с фирмой SUN Microsystem.

Факультетом ВМиК и российско-американским СП "Диалог" создан Высший колледж "Компьютерные технологии". В колледж принимаются студенты, закончившие два курса факультета.

В составе факультета имеется оснащенный современной техникой учебно-научный вычислительный комплекс.

Факультет имеет соглашения с рядом зарубежных университетов о сотрудничестве и обмене студентами, а также готовит выпускников для работы в зарубежных фирмах.

Сочетание глубокой теоретической подготовки с активной практической и научно-исследовательской работой делает выпускников факультета ВМиК МГУ желанными сотрудниками в научно-исследовательских, производственных, коммерческих и других организациях.

Добро пожаловать на наш факультет!

Прекрасно подготовленные, трудоспособные выпускники МФТИ активно и успешно работают над всеми ключевыми проблемами современной физики и математики, электроники и космонавтики, химии и биологии, энергетики и экономики. Поистине, где Физтех — там успех.

Н. В. Карлов,
ректор МФТИ, член-корреспондент РАН
(Из Проспекта МФТИ)

Московский физико-технический институт готовит научных работников для современных направлений науки и техники по существующей только в МФТИ единой специальности **«Прикладная математика и физика»**. Институт дает своим выпускникам качественное образование на уровне известнейших зарубежных университетов и институтов. Диплом МФТИ котируется в мировом научном сообществе. По окончании института его выпускники получают квалификацию инженер-физик или инженер-математик.

- Подготовка специалистов осуществляется совместно с ведущими отраслевыми и академическими научно-исследовательскими институтами и научно-производственными объединениями страны (базовыми организациями МФТИ).
- Преподавание ведут крупнейшие ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук.
- Срок обучения — 5 лет 10 месяцев.
- Вечернего, заочного и подготовительного отделений институт не имеет.
- В институте имеется 9 факультетов: радиотехники и кибернетики (ФРТК), общей и прикладной физики (ФОПФ), аэрофизики и космических исследований (ФАКИ), молекулярной и химической физики (ФМХФ), физической и квантовой электроники (ФФКЭ), аэромеханики и летательной техники (ФАЛТ), управления и прикладной математики (ФУПМ), проблем физики и энергетики (ФПФЭ), физико-химической биологии (ФФХБ).
- Вступительные экзамены (проводятся с 1 по 9 июля): математика (письменно и устно), физика (письменно и устно), сочинение.
- В конце марта институт проводит пробные письменные экзамены по математике и физике. Кроме этого, пробные письменные и устные экзамены проводятся с 24 по 30 июня. При успешной сдаче результаты пробных экзаменов по желанию абитуриента засчитываются в качестве вступительных.
- Объявление приказа о зачислении — не позднее 13 июля.
- Прием документов с 20 по 30 июня.
- Абитуриенты из всех стран СНГ поступают на общих основаниях. Обучение в МФТИ бесплатное.
- Адрес института: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., д. 9.
- Телефон приемной комиссии — 408-48-00.

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Независимый Московский университет создан летом 1991 года по инициативе ведущих московских ученых — математиков и математических физиков. Основу университета составляют его факультеты — Математический Колледж и Высший Колледж Математической Физики. В настоящее время в стадии создания находится Колледж Общей Физики (на базе Физического института им. П.Н. Лебедева РАН).

Независимый университет действует на основании Закона Российской Федерации об образовании (лицензия выдана 25 января 1993 г.). В 1993/94 учебном году в университете обучается около 100 студентов на первом, втором и третьем курсах.

Обучение в университете бесплатное. Некоторые студенты получают стипендию. Приём в университет производится на основании вступительного письменного экзамена по математике, состоящего из двух туров.

Математический Колледж

Декан — профессор А.Н. Рудаков

Это небольшое высшее учебное заведение, предназначенное для подготовки профессиональных математиков. Научное руководство Колледжем осуществляет Научный Совет во главе с академиком РАН В.И. Арнольдом. В состав Совета входят академики РАН Л.Д. Фаддеев, С.П. Новиков, Я.Г. Синай, профессора А.А. Бейлинсон, Р.Л. Добрушин, Б.А. Дубровин, А.Г. Хованский, А.А. Кириллов, А.Н. Рудаков, М.А. Шубин.

Помимо обязательных курсов в Колледже читается большое число специальных курсов.

В сентябре 1993 года Колледж произвел первый набор аспирантов — семь человек.

Обучение в Колледже продолжается 5 лет. При успешном окончании выпускник получает диплом о высшем образовании по специальности «математик».

Высший Колледж Математической Физики

Декан — профессор О.И. Завьялов

Колледж работает на базе Математического Института им. В.А. Стеклова РАН.

В Колледже читают лекции ведущие российские специалисты в области математической физики. Среди них академик РАН С.П. Новиков, профессора О.И. Завьялов, Р.А. Минлос, А.Н. Кириллов, И.М. Кричевер.

Обучение в Колледже продолжается 4 года. При успешном окончании выпускник получает диплом бакалавра.

Справки о НМУ: Николай Николаевич Константинов, 146-21-38