

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n , *Матем. сб.*, 1988, том 135(177), номер 3, 373–384

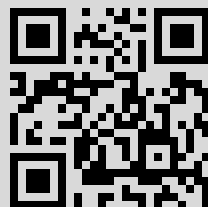
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 5.45.255.70

7 апреля 2016 г., 11:00:18



УДК 519.48

О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n

Белов А. Я.

А. И. Ширшов в работах [1], [2] доказал локальную ограниченность высоты PI-алгебры степени m над множеством слов степени не выше m . Теорема Ширшова имеет непосредственное отношение к проблеме Куроша для PI-алгебр, более того, они эквивалентны. Точное утверждение содержится в теоремах 3, 4 данной статьи. Эквивалентность устанавливается при помощи процедуры «перекачки», позволяющей собирать с помощью цепочки так называемых f -преобразований почти все символы, входящие в набор длинных подслов слова s , в $m-1$ группу, где m — степень тождества f . Метод работает в альтернативном и йордановом случае.

Известна гипотеза Шестакова, доказанная В. А. Уфнаровским [3], о том, что ассоциативная PI-алгебра степени m , у которой все слова степени не выше $[m/2]$ алгебраичны, локально конечна; им же было показано, что $[m/2]$ можно заменить сложностью. Отметим, что гипотеза Шестакова является следствием теоремы 1 данной работы; при этом доказательство носит конструктивный характер.

В связи с теоремой Ширшова возникают задачи. Над какими множествами слов алгебра A имеет ограниченную высоту? Для каких классов неассоциативных алгебр верна теорема о высоте? Представляет интерес случай алгебр над произвольным кольцом.

В тезисах И. В. Львова [9] рассматривался случай алгебр над произвольным кольцом, он доказал ограниченность высоты алгебры A над множеством слов степени не выше $m-1$, им была доказана гипотеза Шестакова при $\deg A=6$. Теорема о высоте для $(-1, 1)$ и альтернативных PI-алгебр доказана С. В. Пчелинцевым [4], однако ограниченность высоты была установлена не над множеством слов.

В настоящей статье описываются базисы Ширшова относительно свободной Φ -алгебры A , ассоциативной или альтернативной, состоящие из слов, при этом Φ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, а многообразие $\text{var}(A)$ не обязательно однородное. Доказывается существование базиса Ширшова, состоящего из слов, для йордановых PI-алгебр.

Особую признательность автор выражает С. В. Пчелинцеву за постановку задачи и деятельное участие, автор благодарен В. Н. Латышеву за полезное обсуждение и ценные замечания.

§ 1. Основные результаты

Через $\#D$ обозначим число элементов множества D .

Везде в статье A — конечно порожденная (к. п.) ассоциативная PI-алгебра над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей; для множества M положим $\langle M \rangle$ — Φ -модуль, порожденный M . Скажем, что

элемент $x \in A$ линейно представим множеством M , если $x \in \langle M \rangle$; A — линейно представима M , если $A = \langle M \rangle$; A имеет существенную высоту h над множеством $Y \subset A$, при этом Y называется s -базисом A , если существует конечное подмножество $D \subset A$ такое, что A линейно представима множеством элементов вида $t_1 t_2 \dots t_N$, где $N \leq h$ и при всех i $t_i \in D$ либо $t_i = b_i^{K_i}$, где $b_i \in Y$; если можно положить $D = \emptyset$, то A имеет высоту h над Y , при этом Y называется базисом Ширшова A .

Заметим, что если множество Y порождает A как алгебру, то элементы из D выражаются через Y ; тогда можно положить $D = \emptyset$ и, если Y — s -базис, то Y — базис Ширшова и наоборот.

Сложностью $\text{Pid}(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ назовем максимальное n такое, что $\text{Mat}_n(F)$ принадлежит $\overline{\mathfrak{M}}$ — многообразию, порожденному однородными компонентами тождеств из $\mathfrak{M}$ для некоторого F — простого фактора Φ .

Для алгебр над бесконечным полем данное определение совпадает с обычным. Степенью $\deg(A)$ алгебры A назовем наименьшее m такое, что в A выполняется тождество f вида

$$x_1 \dots x_m = \sum_{\sigma \neq 1} K_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)},$$

где $K_{\sigma} \in \Phi \ \forall \sigma \in S_m$.

Все рассматриваемые алгебры слов не содержат пустого слова (Λ). Если $c \neq 0$ — однородный элемент, то $\|c\|$ — степень его однородности; если c — слово, то $|c|$ — его длина; $|\Lambda| = \|\Lambda\| = 0$; если $c \neq \Lambda$, то у нас всегда $|c| \geq 1$, $\|c\| \geq 1$. Например, для букв a, b, d , если $\|a\| = 2$, $\|b\| = 3$, $\|d\| = 4$, имеем

$$|a^3(bd)^2| = 7, \quad \|a^3(bd)^2\| = 20.$$

Теорема 1. *Конечно порожденная ассоциативная PI-алгебра сложности n имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше n ; если $n = 0$, то $\dim_{\Phi}(A) < \infty$.*

Приведем следствие, являющееся усилением гипотезы Шестакова:

Следствие. *Пусть A — к.п. ассоциативная алгебра степени m . Тогда A имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше $\lfloor m/2 \rfloor$.*

Везде, где не оговорено противное, будут рассматриваться s -базисы и базисы Ширшова, состоящие только из слов относительно свободной алгебры A . При этом s -базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он содержит образующие. Заметим, что $M \cup \{c^l\}$ — s -базис $\Leftrightarrow M \cup \{c\}$ — s -базис.

Слово вида c^l , где $l > 1$ называется циклическим; два слова c_1 и c_2 называются циклически сопряженными, если

$$\exists d_1, \exists d_2: c_1 = d_1 d_2, c_2 = d_2 d_1.$$

Очевидно, всякий минимальный по включению s -базис не содержит двух циклически сопряженных слов. Задача описания s -базисов и базисов Ширшова равносильна задаче описания редуцированных (т. е. не содержащих циклических слов и минимальных по включению) базисов Ширшова, так как редуцированный s -базис содержит образующие. Ниже Q_K^1 — множество нециклических слов длины не больше K . Отношение циклической сопряженности разбивает Q_K^1 на классы эквивалентности. Систему представителей назовем K -выборкой.

Теорема 2. Пусть A — конечно порожденная относительно свободная Φ -алгебра сложности n . Тогда множество редуцированных базисов Ширшова алгебры A , состоящих из слов, совпадает с множеством n -выборок.

Любой минимальный по включению базис Ширшова получается из редуцированного заменой слов длины больше 1 их степенями. Обозначим через $M^{(K)}$ идеал, порожденный элементами вида m^K , где $m \in M$.

Теорема 3. Пусть A — конечно порожденная, градуированная, ассоциативная PI-алгебра сложности n ; $M \subset A$ — конечное подмножество однородных элементов. Если $A/M^{(n)}$ нильпотентна, то M — s -базис A . Если при этом M порождает A , то M — базис Ширшова алгебры A .

Основная лемма. В условии теоремы 3, если $m = \deg(A)$, $A/M^{(m)}$ нильпотентна, то M — s -базис A .

Это утверждение более слабое, чем теорема 3.

Замечание. Если не требовать однородности, то, как показывает пример алгебры с единицей, утверждение теоремы 3 неверно. Если в алгебре A выполняется однородное тождество сложности n , то при всех l $A/M^{(l)}$ нильпотентна. Пример $A = \text{Mat}_n(F) \otimes_F XF[X]$, F — поле, $M = \{m\}$, m — нильпотент степени n , показывает, что число n в условии теоремы нельзя уменьшить.

Пусть B — вообще говоря, неассоциативная к.п. Φ -алгебра. Тогда $L[B]$ — алгебра ее левых умножений. Для $d \in B$ положим $L(d)$ — оператор левого умножения на d , B_d — подалгебра B , порожденная d . Ниже Mop_l — множество неассоциативных мономов степени не выше l . Например: $\mathcal{R} = ((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)) \in \text{Mop}_4$, $\mathcal{R}(x, y, z, z) = (xy)z^2$. Алгебра B имеет существенную высоту R над множеством M , если существует конечное множество $D \subset B$ такое, что B линейно представима элементами вида $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_N)$, где $\mathcal{R} \in \text{Mop}_R$ и при всех i $t_i \in D$ либо $t_i \in B_{m_i}$ для некоторого $m_i \in M$. Если можно положить $D = \emptyset$, то B имеет высоту R над M ; связь между высотой и существенной высотой та же, что и в ассоциативном случае. Данное определение совпадает с обычным определением высоты для неассоциативных алгебр [4].

Положим $M^{(K)}$ — идеал в B , порожденный $\bigcup_{m \in M} B_m^K$. Будем говорить, что алгебра B имеет L -длину K , если $L[B]$ линейно представимо множеством элементов вида

$$L(p_1) \dots L(p_q), \text{ где } q \leq K.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр, C_l — относительно свободная l -порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется хорошим, если существуют функции $\tau_{\mathfrak{M}}(l)$ и $\pi_{\mathfrak{M}}(l)$ такие, что при всех l :

- (i) C_l имеет L -длину $\tau_{\mathfrak{M}}(l)$;
- (ii) $L[C_l]$ имеет не более $\pi_{\mathfrak{M}}(l)$ образующих;
- (iii) $L[C_l]$ — PI-алгебра.

Теорема 4. Пусть $\text{var}(B)$ — хорошее многообразие, B — градуированная к.п. алгебра, M — конечное множество однородных элементов из B .

Если $\forall i B/M^{(i)}$ нильпотентна, то M — s -базис B . Если к тому же M порождает B как алгебру, то M — базис Ширшова B .

В работе [7] показано выполнение условия (i) для йордановых алгебр. В работе [5] доказано выполнение условия (i) для альтернатив-

ных алгебр, а также условия (iii) для альтернативных и специальных йордановых PI-алгебр; там же показано, что при всех l $B/M^{(l)}$ нильпотентна, где B — альтернативная к. п. алгебра степени m , M — множество ее слов степени не выше m^2 . В работе [6] установлена справедливость (iii) для йордановых PI-алгебр, в [8] — локальная конечность йордановой PI-алгебры степени m с алгебраическими словами степени не выше m^2 . Имеет место

Следствие 1. Пусть B — альтернативная или йорданова к. п. PI-алгебра степени m . Тогда B имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше m^2 .

Из того факта, что любая ассоциативная, йорданова или альтернативная к. п. PI-алгебра, не имеющая идеалов с ненильпотентным фактором, проста, вытекает

Следствие 2. Пусть множество M и алгебра B удовлетворяют предположениям теоремы 4; B — ассоциативная, альтернативная или йорданова алгебра. Тогда M — s -базис $\Leftrightarrow$ каждый простой фактор B содержит ненильпотентный образ элемента из M .

С помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве неоднородного случая теоремы 1, выводится

Теорема 5. Пусть B — относительно свободная к. п. альтернативная PI Φ -алгебра. Тогда множество базисов Ширшова B , состоящих из слов, совпадает с множеством базисов Ширшова ее фактора по ассоциаторному идеалу.

Это следует из того факта, что у алгебры Кэли — Диксона всегда есть ненильпотентное слово от образующих длины не больше 2, для любого набора образующих.

§ 2. Вспомогательная алгебра A_u^Φ

Везде в статье E — алфавит, $W(E)$ — множество слов конечной длины над E , $\Phi\langle E \rangle$ — свободная ассоциативная Φ -алгебра над E . Запись $u_1 \sqsubset u_2$ означает, что слово u_1 есть подслово u_2 . Иначе $u_1 \not\sqsubset u_2$. Если $u \in W(E)$, то u^∞ — бесконечное в обе стороны периодическое слово:

... uuu ... uuu ...

Положим $Wd(u) = \{v \in W(E) \mid v \sqsubset u^\infty\}$. Очевидно, $W(E) \setminus Wd(u)$ — идеал в полугруппе $W(E)$; он порождает идеал I_u^Φ в алгебре $\Phi\langle E \rangle$. Положим $A_u^\Phi = \Phi\langle E \rangle / I_u^\Phi$. Пусть $|c| \geq n$. Обозначим через $(c)_n$ самое левое подслово c длины n , а через $(c)^n$ — самое правое. Очевидно, c представимо в виде $c = (c)_n e$ и $c = d(c)^n$. Если $c = \tilde{c}b$, где b — буква, то положим $\delta(c) = b\tilde{c}$. Очевидно, $\delta^{|c|}(c) = c$.

Замечание. $\delta(c)$ циклически сопряжено с c . Если $c = v^K$, то $\delta^{|v|}(c) = c$; если c нециклическое слово и $|c|$ не делит K , то $\delta^K(c) \neq c$.

Покажем, что все слова длины $l \mid |u|$ из $Wd(u)$ циклически сопряжены. В самом деле, пусть $v_1 \sqsubset u^\infty$, $v_2 \sqsubset u^\infty$, $|v_1| = |v_2| = l \mid |u|$; начальные буквы v_1 и v_2 соседние в слове u^∞ , причем начальная буква v_1 левее. Поскольку буквы в слове u^∞ , находящиеся на расстоянии, кратном n , одинаковы, то $(v_1)_1 = (v_2)^1$, поэтому $v_2 = \delta(v_1)$. Следовательно, если расстояние между начальными буквами v_1 и v_2 равно K и начальная буква v_1 левее, то $v_2 = \delta^K(v_1)$.

Всюду ниже u — нециклическое слово, $n = |u|$, в этом случае два подслова u^∞ длины n циклически сопряжены и совпадают тогда и только тогда, когда расстояние между их начальными буквами кратно n . Поэтому, если $c_1 \sqsubset u^\infty$, $c_2 \sqsubset u^\infty$, $(c_1)_n = (c_2)_n$, то подслова c_1 и c_2 находятся на расстоянии, кратном n . Отсюда следует

Предложение 1. Начальное подслово длины n однозначно определяет слово из $\text{Wd}(u)$. Если $c_1, c_2 \in \text{Wd}(u)$, $(c_1)_n = (c_2)_n$, $|c_1| = |c_2|$, то $c_1 = c_2$. Если $|c_1| > |c_2|$, то $c_1 = c_2 d$. Если $|c| \geq n$, $|d_1| = |d_2|$, $d_1 \neq d_2$, то $cd_1 \in I_u^\Phi$ или $cd_2 \in I_u^\Phi$.

Пусть $v^2 = vv \sqsubset u^\infty$, $|v| \geq n$, $(v)_n = (v)_n$ и в силу сказанного выше начальные буквы левого и правого v находятся на расстоянии $|v|$, кратном n . Получаем

Предложение 2. В алгебре A_u^Φ множество ненильпотентных слов совпадает с множеством слов, циклически сопряженных с некоторой степенью слова u .

Предложение 3. (Комбинаторный аналог утверждения о простоте алгебры матриц.) Пусть $I \neq 0$ — однородный идеал A_u^Φ . Тогда $\exists \lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \in \Phi$, $\exists n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lambda(A_u^\Phi)^n = 0$.

Доказательство. Пусть $s = \lambda_0 c + \sum \lambda_i c_i \in I$, где $\lambda_i \in \Phi$, $|c_i| = |c|$, $c_i \neq c$, $\lambda_0 \neq 0$. Каждое слово из $\text{Wd}(u)$ достаточно большой длины имеет вид $v_1 v_2$, где $|v_1| \geq n$. В силу предложения 1

$$\lambda_0 v_1 c v_2 + v_1 \left(\sum \lambda_i c_i \right) v_2 = \lambda_0 v_1 c v_2 + \sum \lambda_i v_1 c_i v_2 \equiv \lambda_0 v_1 c v_2 \pmod{I_u^\Phi}.$$

Поэтому $\lambda_0 v_1 c v_2 \in I$. Предложение доказано.

Пусть U — Φ -модуль, порожденный словами длины n алгебры A_u^Φ . Положим $e_1 = u$, $e_i = \delta^{i-1}(u)$. Модуль U свободен, $e_1, \dots, e_n$ — его базис.

Теорема 6. $\text{var}(A_u^\Phi) = \text{var}(\Phi[x] \otimes_\Phi \text{Mat}_n(\Phi))$.

Доказательство. Так как $\text{var}(A_u^\Phi)$ — однородное многообразие, для доказательства теоремы достаточно построить отображения h и g такие, что $A_u^\Phi \xrightarrow{h} \text{End}_\Phi(U) \rightarrow 0$, $0 \rightarrow A_u^\Phi \xrightarrow{g} \text{End}_{\Phi[x]}(U \otimes_\Phi \Phi[x])$.

Построим отображение h . Пусть d — слово; $d \in \text{Wd}(u)$. Положим $h(d)(e_i) = (\delta^i(u)d)^n$. Если $|d| > n$, $(d)_n = e_i$, $(d)^n = e_j$, то $h(d)(e_k) = \delta_{ik} e_j$, т. е. $h(d)$ — матричная единица E_{ji} , поэтому h — эпиморфизм.

Построение отображения g . Пусть d — слово из $\text{Wd}(u)$, $f \in U$. Положим

$$g(d)(f \otimes 1) = h(d)(f) \otimes x^{|d|}.$$

Пусть $\varphi: U \otimes_\Phi \Phi[x] \rightarrow U$; $\varphi(f \otimes P(x)) = f \otimes P(1)$. Для любого $d \in A_u^\Phi$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U \rightarrow U \otimes 1 & \xrightarrow{g(d)} & U \otimes \Phi[x] \\ & \searrow h(d) & \downarrow \varphi \\ & & U \end{array}.$$

В силу однородности g и предложения 3 g — вложение.

Отметим, что в более слабой форме теорема 6 была доказана ранее В. В. Борисенко.

Вывод теоремы 2 из теоремы 1. Достаточно показать, что редуцированный базис Ширшова содержит выборку, т. е. для любого

нециклического слова u такого, что $|u| \leq n$, базис Y содержит слово, циклически сопряженное с u .

Поскольку A — относительно свободная алгебра сложности n , по теореме 6 найдется фактор C алгебры A такой, что $C \cong A_n^{\Phi}$. Поскольку образ базиса Ширшова при отображении на ненильпотентную бесконечномерную алгебру содержит ненильпотентный элемент, требуемое утверждение следует из предложения 2.

§ 3. Подготовительные леммы

Ниже $E = \{a_1, \dots, a_s\}$ — алфавит; порядок $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ индуцирует лексикографический порядок на $W(E)$. Положим

$$W^l(E) = \{c \in W(E) \mid |c| \geq l\}; \bar{W}^l = \{c \in W(E) \mid |c| = l\}.$$

Существует единственный изоморфизм ψ упорядоченных множеств $W^l(E)$ с отношением лексикографического порядка и отрезка $[1; s^l]$ натурального ряда. Для $c \in W^l(E)$ положим $N_l(c) = \psi((c)_l)$. Всюду ниже v — фиксированное слово длины n из $W(E)$, $b \notin W(E)$, z обозначает фиксированный элемент $W^{2mn}(E)$; кроме того, мы считаем, что слово $(z)_{2mn}$ не содержит подслов вида q^m , где $|q| \leq n$. Пусть $K = (m+1)n$, $\mathcal{K} = 2mn$.

Предложение 4. Пусть $0 < |q| \leq n$. Тогда $(qz)_K \neq (z)_K$.

В самом деле, если $(z)_K = (qz)_K$, то $(q^s z)_K = (q^{s+1} z)_K$, поэтому $(z)_K = (q^K)_K$, что невозможно в силу выбора z .

Лемма 1. Пусть $\mathcal{T} \sqsubset (vb)^\infty$, $b \sqsupset v$, $\mathcal{T} = t_0 \dots t_{p+1}$, причем $\forall i \mid t_i \rangle > 4n$, $\sigma \in S_p$ и $\mathcal{T}_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$, где $t_0 = \bar{t}_0 b e_0$, $t_i = \bar{f}_i b \bar{t}_i b e_i$ при $1 \leq i \leq p$, $t_{p+1} = \bar{f}_{p+1} b \bar{t}_{p+1}$, $\mathcal{K} = 2mn$, $\mathcal{T}_\sigma \sqsupset \sqsubset (vb)^\infty$ и для любого i $b \sqsupset \sqsubset e_i$, $b \sqsupset \sqsubset \bar{f}_i$. Положим $\sigma(0) = 0$, $\sigma(p+1) = p+1$. Тогда найдется такое i , что $(e_{\sigma(i)} \bar{f}_{\sigma(i+1)} z)_{\mathcal{K}} < (vz)_{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Если $q_1 q_2 = v$, то положим $\bar{N}(q_1) = N_{\mathcal{K}}(q_2 z)$. Пусть $v = q_1 q_2 = q_3 q_4$, $q_2 \neq q_4$, тогда $q_1 q_4 \neq v$, $\forall i \mid q_i \mid \leq n$.

Из предложения 4 следует, что $(q_1 q_4 z)_{\mathcal{K}} \neq (q_1 q_2 z)_{\mathcal{K}} = (vz)_{\mathcal{K}}$, поэтому $\bar{N}(q_1) - N_{\mathcal{K}}(q_4 z) \neq 0$, и если $(\bar{N}(q_1) - N_{\mathcal{K}}(q_4 z)) > 0$, то $(q_1 q_4 z)_{\mathcal{K}} < (q_1 q_2 z)_{\mathcal{K}} = (vz)_{\mathcal{K}}$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=0}^p (\bar{N}(e_{\sigma(i)}) - N_{\mathcal{K}}(\bar{f}_{\sigma(i+1)} z)) = 0,$$

так как $e_j \bar{f}_{j+1} = v$ и $\bar{N}(e_j) = N_{\mathcal{K}}(\bar{f}_{j+1} z)$. Если эта сумма содержит положительный член с номером i , мы имеем $(e_{\sigma(i)} \bar{f}_{\sigma(i+1)} z)_{\mathcal{K}} < (vz)_{\mathcal{K}}$, что и требуется.

В силу равенства суммы нулю достаточно проверить наличие ненулевого члена, но так как $\mathcal{T}_\sigma \sqsupset \sqsubset (vb)^\infty$, то $\exists i$ такое, что $b e_{\sigma(i)} \bar{f}_{\sigma(i+1)} b \neq b v b$. Тогда

$$\bar{N}(e_{\sigma(i)}) - N_{2mn}(\bar{f}_{\sigma(i+1)} z) \neq 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. Пусть в предположении леммы 2 $\widetilde{\mathcal{T}}_\sigma$ получается из $\mathcal{T}_\sigma$ подстановкой $b \rightarrow z$. Тогда $\forall R 2mn \leq R \leq |vz|$ найдется $H \sqsubset \mathcal{T}_\sigma$ такое, что $|H| = R$ и $(H)_{2mn} < (vz)_{2mn}$.

В самом деле, так как $|t_i| > 4n$, можем положить $H = (e_{\sigma(i)} \bar{f}_{\sigma(i+1)} z v z)_R$.

Лемма 2. Пусть u — нециклическое слово, $|u| = n$, f — полилинейное тождество над полем F степени p , $\text{Pid}(f) < n$. Тогда $\exists \mathcal{T} \sqsubset u^\infty$, $\mathcal{T} =$

$= t_0 t_1 \dots t_p t_{p+1}, \forall i \ 4n \leq |t_i| \leq 10n$, такое, что $\mathcal{T}$ линейно представимо по $\text{mod } T(f)$ словами вида $\mathcal{T}_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}, \sigma \in S_p$, такими, что $\mathcal{T}_\sigma \sqsubset u^\infty$.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}$ — тождество, получающееся подстановкой в тождество $x_0 f(x_1, \dots, x_p) x_{p+1}$ вместо переменных x_i мономов степени $4p$, причем все $4p(p+2)$ переменные, входящие в мономы, различны. Очевидно, $\text{Pid}(\tilde{f}) = \text{Pid}(f)$ и по теореме 6 $\tilde{f}$ не выполняется в A_u^F . Поэтому найдется такой набор слов $\{t_0, t_1, \dots, t_{p+1}\}$ каждое степени не ниже $4p$ такой, что $t_0 f(t_1, \dots, t_p) t_{p+1} \not\equiv 0 \text{ mod } I_u^F$. Можно считать, что $\mathcal{T} = t_0 t_1 \dots t_p t_{p+1} \sqsubset u^\infty$. Так как $|t_0| > 4n$, то $\forall \sigma \in S_p \mathcal{T}_\sigma \sqsubset u^\infty \Leftrightarrow \mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}$ по предложению 1. Поэтому существует набор $\{\lambda_\sigma\}$ элементов из F такой, что $\text{mod } T(f) 0 = \sum \lambda_\sigma \mathcal{T}_\sigma \not\equiv 0 \text{ mod } I_u^F$ или

$$\text{mod } T(f) 0 \equiv \left(\sum_{\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}} \lambda_\sigma \right) \mathcal{T} + \sum_{\mathcal{T}_\sigma \sqsubset u^\infty} \lambda_\sigma \mathcal{T}_\sigma \not\equiv 0 \text{ mod } I_u^F.$$

Следовательно,

$$\sum_{\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}} \lambda_\sigma = \lambda \neq 0, \quad \mathcal{T} \equiv \frac{-1}{\lambda} \sum_{\mathcal{T}_\sigma \sqsubset u^\infty} \lambda_\sigma \mathcal{T}_\sigma \text{ mod } T(f).$$

Лемма следует из того, что если $|t_i| > 10n$, то из t_i можно исключить подслово, равное u , при этом для всех $\mathcal{T}_\sigma$ свойство быть подсловом u^∞ или не быть им, сохраняется. Лемма справедлива для всех тождеств, не только полилинейных.

Из леммы 2 и следствия из леммы 1 вытекает

Предложение 5. $\forall k \ 2mn \leq k \leq |vz|$ при $s > (p+2) \cdot 10n$, $(vz)^s$ линейно представимо по модулю $T(f)$ словами c_j , каждое из которых содержит подслово H_j длины k такое, что $(H_j)_{2mn} < (vz)_{2mn}$.

Пусть α — набор слов. Назовем его выделенным, если фактор по идеалу, порожденному α , нильпотентен; его степень нильпотентности обозначим $l(\alpha)$. Если набор $\{u_i\}$ выделенный, $v_i \sqsubset u_i$, то набор $\{v_i\}$ выделенный и $l(\{u_i\}) \geq l(\{v_i\})$. Набор α выделенный тогда и только тогда, когда каждое слово длины не меньше $l(\alpha)$ линейно представимо словами вида $d_1 c d_2$, где $c \in \alpha$.

Лемма 3. (О тиражировании.) Пусть f — полилинейное тождество алгебры A , $\deg f = m$, $\{D_j\}$ — множество слов степени не выше m (в том числе и пустое) от образующих алгебры A и элементов c_i , $\{c_i\}$ — выделенный набор. Тогда $\forall R \in \mathbb{N}$ набор $\{(c_i D_j)^R\} = \alpha_R$ — выделенный, причем $l(\alpha_R) < K(l(\{c_i\}), p, m, R)$ для любого поля F .

Доказательство. Каждое слово длины не меньше $l(\{c_i\})$ линейно представимо словами вида $d_1 c_i d_2$. Воспользуемся этим фактом, а также тем, что каждое слово, имеющее достаточно высокую степень по $\alpha = \{c_i\}$, представимо по теореме Ширшова нужным образом. (Мы пользуемся тем, что $(R+1)$ -я степень слова содержит R -ю степень любого его циклически сопряженного слова, поэтому слова c_i стоят в начале.) Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Полилинейный случай. Пусть $n = \text{Pid}(A)$, $m = \deg A$, Φ — поле, $p = \deg f$, f — полилинейное тождество, выполняющееся в алгебре A , сложности n . В силу основной леммы достаточно проверить, что набор Q_n^m m -х степеней слов степени не выше n является выделенным.

Следующие операции на наборах слов сохраняют свойство «быть выделенным»:

1) замена слова его подсловом; замена слова набором слов, через которые оно линейно представимо;

2) «Тиражирование»; замена набора $\{c_i\}$ набором $\{(c_i D_j)^R\}$, где $\{D_j\}$ — набор слов степени не выше p от c_i и образующих A ;

3) если $R > 20p$, $|c_i| \geq 2mn$, c_i не содержит подслова из Q_n^m , то слово $(c_i D)^R$ можно заменить набором слов вида $\{H_\gamma\}$, где $|H_\gamma| = 2mn$ и $H_\gamma < (c_i)_{2mn}$ (см. предложение 5).

Полилинейный случай следует из того, что с помощью операций 1) — 3) можно из набора всех слов длины $2mn$ сделать набор Q_n^m .

Вывод теоремы 3. Пусть множество M и алгебра A удовлетворяют условиям теоремы 3. Из нильпотентности $A/M^{(m)}$ и леммы 3 следует выделенность для каждого R набора $\{(m_i^n D_j)^R\}$. Из теоремы 1 следует, что при больших R $(m_i^n D_j)^R \subset M^{(m)}$. Воспользуемся основной леммой.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы 1 следует существование функции $\rho(m, n, p, s)$, где $n = \text{Pid } A = \text{Pid } f$, $m = \deg A$, $p = \deg f$, s — число образующих F -алгебры A такой, что все слова длины $\rho(m, n, p, s)$ лежат в $\text{Id}(Q_n^m)$, при этом ρ не зависит от F .

Из приведенного выше доказательства и оценок в работе Ширшова [2] следует, что $\rho(m, n, p, s)$ можно положить равным

$$\exp(\exp(\exp(\exp(\exp(\exp(\exp(mnp s))))))).$$

О б щ и й с л у ч а й. $T(\text{st}_n)$ — идеал, порожденный стандартным тождеством st_n степени n . $\hat{A}_s^F(g)$ — относительно свободная s -порожденная F -алгебра в многообразии, порожденном тождеством g . Через $\text{Alg}(A)$ обозначим множество алгебраических над F элементов A , $I(A)$ — идеал, порожденный однородными компонентами тождеств в A , $\bar{A} = A/I(A)$, π — естественная проекция, N_A — радикал $\bar{A}$, $m = \deg A$.

Л е м м а 4. Пусть A — алгебра степени m . Тогда $\forall n$ найдется конечное множество $Y_n = \{f_1, \dots, f_t\}$, $Y_n \subset T(\text{st}_{2n})$ такое, что A имеет ограниченную высоту над $Q_n^1 \cup \{f_1, \dots, f_t\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что A — градуированная относительно свободная алгебра, $a_1, \dots, a_s$ — ее образующие, $\rho = \rho(2n, n, 2n, s)$. Покажем, что все слова длины ρ в $\mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_s \rangle$ (a , следовательно, и в $\Phi \otimes \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_s \rangle$) лежат в $T(\text{st}_{2n}) + \text{Id}(Q_n^m)$. Пусть L — модуль, порожденный словами длины ρ ,

$$M = L \cap [T(\text{st}_{2n}) + \text{id}(Q_n^m)], \quad N = L/M.$$

Из полилинейного случая теоремы 1 и точности справа тензорного произведения следует, что для любого простого q $N \otimes \mathbb{Z}_q = 0$. Так как N — к. п., $N = 0$. Поэтому найдется такое $W = \{g_1, \dots, g_n\} \subset T(\text{st}_{2n})$, $\#W < \infty$, что набор $Q_n^m \cup W$ выделенный. Осталось применить лемму 3 и основную лемму.

Нам достаточно показать, что если $n = \text{Pid}(A)$, то $T(\text{st}_{2n}) \subset \text{Alg}(A)$; это следует из предложения 7.

П р е д л о ж е н и е 6. Пусть F — поле, $\#F > \deg g$, $F' \triangleright F$, тогда

$$\text{var}(\hat{A}_s^F(g) \otimes_F F') = \text{var}(\hat{A}_s^{F'}(g)), \quad \hat{A}_s^{F'}(g) \simeq \hat{A}_s^F(g) \otimes_F F'.$$

В самом деле, в $\hat{A}_s^F(g)$ выполняются все однородные по каждой переменной компоненты тождества g и все их линеаризации (см. [10, гл. 1]).

Следствие 1. Пусть x — однородная компонента g . Тогда каждый простой фактор A , в котором образ x ненильпотентен, содержит не более $(\deg g)^m = K$ элементов.

Следствие 2. В этом случае $x^{2K!} - x^{K!}$ лежит в радикале A , поэтому x — алгебраический элемент и $I(A) \subset \text{Alg}(A)$.

Предложение 7. Пусть A — относительно свободная алгебра. Тогда $\text{Alg}(A) = \pi^{-1}(N_A)$ — идеал; если Φ — нетерово, то $\exists t \in \mathbb{N}$: $(\text{Alg}(A))^t \subset I(A)$.

Доказательство. Если $x \in \text{Alg}(A)$, то $\pi(x)$ — алгебраический элемент градуированной алгебры $\bar{A}$, он нильпотентен. Существование требуемого t вытекает из теоремы Брауна [12].

§ 5. Процедура «перекачки». Доказательство основной леммы

Рассмотрим игру: дано слово s , первый указывает набор слов, которым оно линейно представимо, второй указывает слово из этого набора, первый хочет привести слово к нужному виду; эта возможность равносильна линейной представимости s словами этого вида.

Рассмотрим игру: есть l групп предметов, $K_1, \dots, K_l$ — числа предметов в этих группах. Первый выбирает m групп и разбивает каждую из них на левую и правую части, второй нетождественно правые части переставляет, после чего левые и правые части объединяются.

Цель первого — добиться того, чтобы не более чем $m-1$ групп содержали не меньше m предметов.

Пусть $K_{i_1}, \dots, K_{i_m} \geq m$. Выберем группы с номерами $i_1, \dots, i_m$ и положим $\bar{K}_{i_q} = K_{i_q} - q$. Тогда $\forall \sigma \in S_m \setminus \{1\}$, вектор

$$(K_1, \dots, \bar{K}_{i_1} + \sigma(1), \dots, \bar{K}_{i_q} + \sigma(q), \dots, \bar{K}_{i_m} + \sigma(m), \dots, K_l)$$

лексикографически больше вектора $(K_1, \dots, K_l)$; стремясь увеличить вектор $(K_1, \dots, K_l)$, первый придет к нужному результату.

Эквивалентная игра: слово отпечатано на ленте, первый режет его на $m+2$ куса, второй нетождественно переставляет средние m . Цель первого — добиться «перекачки» почти всех букв набора длинных подслов слова s в $m-1$ подслово. Легко понять, что заменяя подслово длины k словом, содержащим m -ю степень базисного, и умея «перекачивать» степени базисного вместе, мы можем добиться приведения слова к требуемому определением существенной высоты виду. Перейдем к формальному изложению (определения см. в § 1).

Всюду ниже E — алфавит, возможно, бесконечный, $\Phi\langle E \rangle$ — свободная ассоциативная градуированная алгебра над E . Причем для каждого K $\dim T_K < \infty$, где $T_K = \{x \in \Phi\langle E \rangle \mid \|x\| \leq K\}$. Ниже $\forall i = 1, \dots, p$ B_i — подполугруппа $W(E)$, порожденная буквами, причем при $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$. Положим $A_i = B_i^m$, где $m = \deg f$, f — полилинейное тождество, выполняющееся в алгебре A .

Назовем представление слова $s = c_0 \beta_0 \dots c_R \beta_R c_{R+1}$ правильным, если

а) $\forall j, \forall x \in A_j, x \not\sqsubset c_i$,

б) β_i — максимальные по включению подслова слова s такие, что $|\beta_i| \geq m$ и $\beta_i \in A_{j(i)}$.

Поскольку все B_i порождены буквами, $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$, правильное представление s существует и единственно; поэтому соотношение

$\beta_i \in A_{j(i)}$ однозначно определяет функцию $j(i)$, связанную со словом s . Положим $k_i = |\beta_i|$, очевидно, $k_i \geq m$ при $0 \leq i \leq R$. Положим $N_i = \|\beta_i c_{i+1} \dots c_R \beta_R c_{R+1}\|$ и $k_i = N_i = 0$ при $i > R$. Заметим, что $N_0 > N_1 > \dots > N_R > N_{R+1} = \dots = 0$.

Показателем слова s $\vec{PK}(s)$ назовем вектор из $\mathbb{N}^N$

$$\vec{PK}(s) = (N_0, k_0, N_1, k_1, \dots, N_R, k_R, 0, \dots, 0, \dots).$$

Множество показателей лексикографически упорядочено. Очевидна следующая

Лемма 5. Пусть дано правильное представление слова s

$$s = c_0 \beta_0 c_1 \beta_1 \dots c_R \beta_R c_{R+1}.$$

Тогда

- а) последняя буква s_i и первая c_{i+1} не принадлежит $B_{j(i)}$;
- б) пусть $\|c_i\| = \|c'_i\|$ и $c' = c_0 \beta_0 \dots \beta_{i-1} c'_i \beta_i \dots c_{R+1}$, причем c'_i содержит подслово из A_k для некоторого k . Тогда $\vec{PK}(c') > \vec{PK}(s)$;
- в) пусть $\|c\| = \|c'\|$, слово c' имеет вид $c' = c_0 \beta_0 \dots c_i \beta'_i t$ для некоторого t , причем $|\beta'_i| > |\beta_i|$. Тогда $\vec{PK}(c') > \vec{PK}(s)$.

Для каждого однородного идеала $J \subset \Phi\langle E \rangle$ обозначим через $\mathcal{L}_J$ множество слов, не представимых линейно по mod J словами с бóльшим показателем.

Предложение 8. $\mathcal{L}_J + J$ порождают $\Phi\langle E \rangle$ как Φ -модуль.

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{L}_J$, представим s линейной комбинацией слов с бóльшим показателем: $s = \sum \lambda_i y_i$; $\lambda_i \in \Phi$ $\|y_i\| = \|s\|$. Если $y_i \notin \mathcal{L}_J$, то проведем ту же процедуру с y_i . Конечность числа слов заданной степени однородности обеспечивает остановку процесса.

Всюду ниже $\hat{S}$ — идеал в $\Phi\langle E \rangle$, порожденный $\bigcup_{i=1}^p A_i$.

Предложение 9. Пусть в $\Phi\langle E \rangle / (J + \hat{S})$ все однородные компоненты степени не ниже l нулевые, $s \in \mathcal{L}_J$, $s = c_0 \beta_0 \dots \beta_R c_{R+1}$ — правильное представление s . Тогда $\forall i \|c_i\| \leq l$.

Доказательство. Если $\|c_i\| \geq l$, то c_i линейно представимо словами c_{ik} , где $\|c_{ik}\| = \|c_i\|$, $\vec{PK}(c_{ik}) > (0, 0, \dots)$. Воспользуемся пунктом б) леммы 5.

Лемма 6. Пусть дано правильное представление слова $s = c_0 \beta_0 \dots \beta_R c_{R+1}$, причем существует последовательность $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq R$ такая, что $j(i_1) = j(i_2) = \dots = j(i_m)$. Тогда $s \in \mathcal{L}_{T(f)}$ и

$$f = x_1 \dots x_m + \sum_{\sigma \neq 1} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}, \lambda_\sigma \in \Phi.$$

Доказательство. Представим β_{i_K} в виде $\delta_K \gamma_K$ так, чтобы $|\gamma_1| < |\gamma_2| < \dots < |\gamma_m|$ (это можно сделать, так как $\forall i |\beta_i| \geq m$). Положим

$$t_0 = c_0 \beta_0 \dots c_{i_1} \delta_1, \quad t_m = \gamma_m c_{i_{m+1}} \dots c_{R+1}, \\ t_K = \gamma_K c_{i_{K+1}} \dots c_{i_{K+1}} \delta_{K+1}, \quad 1 \leq K < m.$$

Тогда $s = t_0 t_1 \dots t_m$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\vec{PK}(c_\sigma) > \vec{PK}(s)$, где $\sigma \neq 1$, $c_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(m)}$. Пусть K — наименьшее число такое, что $\sigma(K) \neq K$, тогда $\sigma(K) > K$ и $c_\sigma = t_0 \dots t_{K-1} t_{\sigma(K)} \dots t_{\sigma(m)}$, $\|c_\sigma\| = \|s\|$ и слово c_σ

имеет вид: $c_0 = c_0 \beta_0 \dots c_{i_K} \delta_K \gamma_{\sigma(K)} \omega$ для некоторого ω , $|\gamma_{\sigma(K)}| > |\gamma_K|$. Осталось воспользоваться п. в) леммы 5.

Из леммы 6, принципа Дирихле и предложения 9 следует

Предложение 10. Пусть $J \supset T(f)$. Все однородные компоненты $\Phi\langle E \rangle / (\hat{S} + J)$ степени не ниже l нулевые, $c \in \mathcal{L}_J$. Тогда правильное представление $c = c_0 \beta_0 \dots \beta_R c_{R+1}$ удовлетворяет условиям:

а) $\forall i \|c_i\| \leq l$,

б) $R \leq (m-1)p$ (p — число множеств A_i).

Доказательство основной леммы. Алфавит E будет состоять из букв $\bar{a}_i$, соответствующих образующим алгебры A , и букв $\bar{m}_j$, соответствующих $m_j \in M$, $m_j \in M \subset A$, $\|\bar{a}_i\| = \|a_i\|$, $\|\bar{m}_j\| = \|m_j\|$. Положим $B_j = \{\bar{m}_j^k\}_{k \geq 1}$; тогда $M = \{\bar{m}_j\}_{j=1}^p$, $A_j = \{m_j^k\}_{k=m}^\infty$, $\bar{S} = \bar{M}^{(m)}$. Имеет место точная последовательность $0 \rightarrow J_A \rightarrow \Phi\langle E \rangle \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$, где $\pi: \bar{a}_i \mapsto a_i$, $\bar{m}_j \mapsto m_j$. Идеалы $\hat{S}$, J_A при некотором l удовлетворяют условиям предложения 10, если $A/M^{(m)}$ нильпотентна.

Утверждение предложения 10 означает, что существенная высота слова $c \in \mathcal{L}_{J_A} \leq 2(m-1)p$.

З а м е ч а н и е. Точно так же можно показать, что не более $m-1$ слов c_i могут иметь длину не меньше m , если $c \in \mathcal{L}_{J_A}$ («перекачаем» направо).

§ 6. Неассоциативный случай

Ниже B — алгебра, $M = \{m_i\}_{i=1}^p$ — набор ее элементов, удовлетворяющих предположению теоремы 4; $b_1, \dots, b_s$ — образующие B , $Q = \{q_i\}$ — множество неассоциативных мономов от $b_1, \dots, b_s, m_1, \dots, m_p$, алфавит E состоит из символов $\overline{L(q_i)}$, соответствующих $q_i \in Q$, причем $\|\overline{L(q_i)}\| = \|q_i\|$; f — полилинейное тождество в $L[B]$ вида

$$f(x_1, \dots, x_m) = x_1 \dots x_m + \sum_{\sigma \neq 1} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}, \quad \lambda_\sigma \in \Phi.$$

Ниже B_j — подполугруппа $W(E)$, порожденная $\overline{L(q_s)}$, где $q_s \in B_{m_j}$; $A_j = B_j^m$, $\hat{S} = \text{id} \left(\bigcup_{j=1}^p A_j \right)$. Имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow J_{L[B]} \rightarrow \Phi\langle E \rangle \xrightarrow{\pi} L[B] \rightarrow 0, \quad \pi: \overline{L(q)} \rightarrow L(q).$$

Лемма 7. $\exists k \in \mathbb{N}$ такое, что все однородные компоненты $\Phi\langle E \rangle / (J_{L[B]} + \hat{S})$ степени не ниже k нулевые.

Доказательство теоремы 4. Из леммы 7 и предложений 9, 10 следует, что $\Phi\langle E \rangle$ линейно представимо по $\text{mod } J_{L[B]}$ элементами вида $c_0 \beta_0 \dots \beta_R c_{R+1}$, где $R \leq p(m-1)$, $\|c_i\| \leq k$, $\beta_i \in A_{j(i)}$. В силу ограниченности L -длины B , существует h такое, что любой элемент из $\pi(A_j)$ линейно представим элементами вида $L(q_1) \dots L(q_{\mathcal{H}})$, где $\mathcal{H} \leq h$; $q_i \in B_{m_j}$. Теорема 4 следует из того, что $\forall x \in B$, x линейно представим элементами вида $G \circ b_i$, где $G \in L[B]$, а также определения существенной высоты.

Доказательство леммы 7. Из нильпотентности $B/M^{(1)} \forall l$ и ограниченности L -длины следует, что для каждого h все элементы достаточно высокой степени однородности лежат в идеале, порожденном элементами вида $L(\bar{N}(b_{i_1}, \dots, b_{i_p}, c, b_{i_{p+1}}, \dots, b_{i_k}))$, где $\bar{N} \in \text{MoN}_{k+1}$, $c \in B_{m_i}^h$. В силу условия (ii) для хороших многообразий $L(\bar{N}(b_{i_1}, \dots, b_{i_p}, c, \dots, b_{i_k}))$ лежит в идеале, порожденном элементами вида $L(q_1) \dots L(q_l)$, где $p \in \text{MoN}_{l+1}$ и $l < \pi_{\text{var}(B)}(p+s)$.

Воспользовавшись еще раз условием (ii) и принципом Дирихле, получим, что при достаточно больших h , $L(p(b_{s_1}, \dots, b_{s_r}, c, \dots, b_{s_l}))$, где $c \in B_{m_i}^h$, лежит в идеале, порожденным элементами вида $L(q_1) \dots L(q_j)$, где $q_j \in B_{m_i} \forall j$. Но $L(q_1) \dots L(q_b) \in \hat{S}$.

Из доказательства следует, что условие теоремы 4 можно ослабить, достаточно требовать только нильпотентность $B/M^{(r)}$, где

$$\gamma(\pi_{\text{var}(B)}(p+s))^2 \deg(f).$$

Литература

1. *Ширшов А. И.* О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах//Матем. сб. 1957. Т. 41(83). С. 381—394.
2. *Ширшов А. И.* О кольцах с тождественными соотношениями//Матем. сб. 1957. Т. 43(85). С. 277—283.
3. *Уфнаровский В. А.* Теорема о независимости и ее следствия//Матем. сб. 1985. Т. 128(163). С. 124—132.
4. *Пчелинцев С. В.* Теорема о высоте для альтернативных алгебр//Матем. сб. 1984. Т. 124(166). С. 557—567.
5. *Шестаков И. П.* Конечно порожденные йордановы и альтернативные PI-алгебры//Матем. сб. 1983. Т. 122(144). С. 31—40.
6. *Медведев Ю. А.* Ниль-радикалы конечно порожденных йордановых PI-алгебр. Препринт № 24. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1985.
7. *Скосярский В. Г.* Йордановы алгебры с условием минимальности для двусторонних идеалов. Препринт № 21. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1981.
8. *Зельманов Е. И.* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры //Сиб. матем. журн. 1982. Т. 23. № 6. С. 100—116.
9. *Львов И. В.* К теореме Ширшова о высоте. Всесоюз. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей (тез. докл.) Новосибирск: Изд-во НГУ. 1982.
10. *Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
11. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
12. *Львов И. В.* Теорема Брауна о радикале конечно порожденной PI-алгебры. Препринт № 63. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1984.

Московский горный институт

Поступила в редакцию
6.X.1986