

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Московский физико-технический институт (государственный
университет)»;

Факультет инноваций и высоких технологий

Кафедра «Анализ данных»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 010400 Прикладная математика и информатика

Внешние бильярд

студента 993 группы
Руховича Филиппа Дмитриевича

Научный руководитель: д.ф-м.н., проф. МИОО Канель-Белов А.Я.

Москва

2015

Содержание

Введение	3
Глава 1. Литературный обзор	7
Глава 2. Внешние бильярды на многоугольниках: общие сведения	26
Глава 3. Внешний бильярд вне квадрата	31
Глава 4. Внешний бильярд вне правильного восьмиугольника	34
Глава 5. Внешний бильярд вне правильного двенадцатиугольника	41
Выводы	53
Литература	54
Приложение	56

Введение

Для любой гладкой строго выпуклой кривой на плоскости можно определить отображение внешности этой кривой в себя, называемое внешним бильярдом. А именно, обозначим кривую γ , и пусть x — точка вне ее. Существуют две касательные к γ прямые, проходящие через x ; выберем одну из них, например правую относительно x , и, отразив x относительно точки касания, получим новую точку Tx :

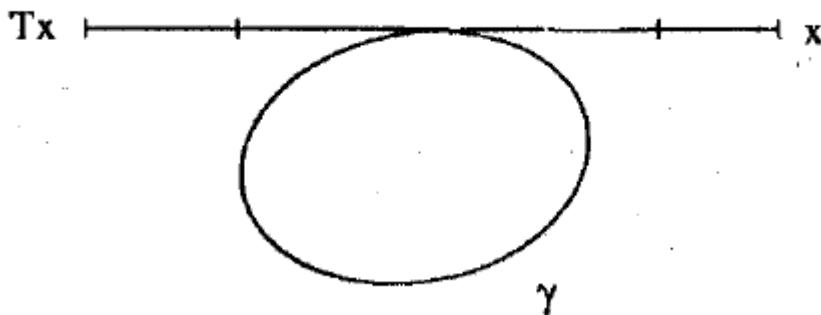


Рис.1 Определение внешнего бильярда

Отображение T называется *внешним бильярдом*; кривая γ называется *кривой внешнего бильярда*. Множество точек $T^n x$, где n — неотрицательное целое число, будем называть *траекторией*, или *орбитой*, внешнего бильярда точки x относительно стола γ .

В данной работе столами являются многоугольники, преимущественно правильные. В этом случае, точка правого касания определена неоднозначно, если она лежит на соответствующем продолжении одной из сторон стола; будем считать, что для таких точек преобразование внешнего бильярда не определено.

Точку x вне фигуры γ назовем *периодической*, если существует такое натуральное n , что $T^n x = x$, а периодом этой точки — минимальное такое n . В случае многоугольных столов, точки можно разбить на три типа: конечные

(точки с конечной траекторией, т. е. такие точки x , что для некоторого целого неотрицательного n $T^n x$ не определено), периодические и аperiodические (точки с бесконечной аperiodической траекторией; такие точки мы иногда будем называть бесконечными).

Целью данной работы являются исследование внешних бильярдов вокруг правильных многоугольников.

Задачами работы являются обнаружение самоподобных структур, а также поиск точек с бесконечной аperiodической траекторией для внешних бильярдов вокруг правильных восьми- и двенадцатиугольника.

Внешние бильярды интересны своей наглядностью. В данной работе почти не будет формул, а значительной частью доказательств будут являться картинки. Такая наглядность действительно редко встречается в современной математике, как видится автору. Кто-то может заявить об «игрушечности» этой темы – да, это всего лишь игра. Но разве математика не является одной большой прекрасной игрой? И есть ли лучшее средство для развития, чем игра? К тому же одним из наиболее общих методов исследования в науке является метод построения игрушечных моделей с последующим их усовершенствованием этих моделей. За примером далеко ходить не надо: сам внешний бильярд на заре своего существования рассматривался Мозером как игрушечная модель движения планет, ибо орбита точки вокруг стола внешнего бильярда напоминает орбиту небесного тела. Как и в случае планетарных движений, динамику двойственного бильярда легко определить, но трудно проанализировать; в частности, совсем не ясно, может ли орбита точки уйти на бесконечность или же «упасть» на стол (цит. по [2]); этот вопрос был первоначально поставлен Б.Нейманом, который, по видимому, и ввёл внешние (или «двойственные») бильярды в конце 1950-х годов.

В той же книге [2] Табачников приводит две мотивации к изучению внешних бильярдов. Приведем их, почти без изменений, и мы.

«Начнем с двух мотиваций. Сначала... дадим интерпретацию двойственной

бильярдной системы как механической системы, а именно импульсного осциллятора... Рассмотрим гармонический осциллятор на прямой, то есть частицу, координата которой, как функция времени, есть линейная комбинация $\sin t$ и $\cos t$. Имеется также 2π -периодически движущаяся массивная стена слева от частицы, положение которой $p(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $p''(t) + p(t) = r(t)$, где $r(t)$ — это неотрицательная периодическая функция, которая удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} r(t) \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} r(t) \cos t \, dt = 0.$$

Когда частица ударяется о стену, происходит упругое отражение так, что скорость частицы относительно стены мгновенно меняет знак.

Эта механическая система изоморфна двойственному бильярду относительно замкнутой выпуклой кривой $\gamma(t)$, параметризованной углом, образованной касательной с горизонтальным направлением, радиус кривизны которой $\rho(t)$. Выберем начало координат O внутри γ и пусть $p(t)$ — опорная функция. Как мы уже знаем... $p''(t) + p(t) = r(t)$. Пусть x — точка вне γ и пусть плоскость вращается с постоянной угловой скоростью относительно начала координат O . Рассмотрим проекции x и γ на горизонтальную прямую. Положение вращающейся точки определяется как функция времени t соотношением $(R\cos(t+t_0), R\sin(t+t_0))$. Следовательно, проекция этой точки x есть гармонический осциллятор на прямой, правая концевая точка проекции γ есть «стена» $p(t)$. Когда осциллятор и стена соударяются, касательная из x в γ будет вертикальной. Для того чтобы в проекции было упругое отражение, точка x должна отражаться от точки касания (см. рис. 2).

Второй мотивацией и объяснением термина «двойственный бильярд» является сферическая двойственность... Напомним, что на единичной сфере имеет место двойственность между точками и ориентированными прямыми (то есть большими окружностями): полюсу соответствует ориентированный экватор (см. рис. 3). Заметим, что сферическое расстояние AB равно углу между линиями a и b .

Как и проективная двойственность..., сферическая двойственность распространяется на гладкие кривые: кривая γ определяет однопараметрическое семейство касательных, а каждая прямая определяет двойственную точку. Результирующее однопараметрическое семейство точек образует двойственную кривую γ^* ...

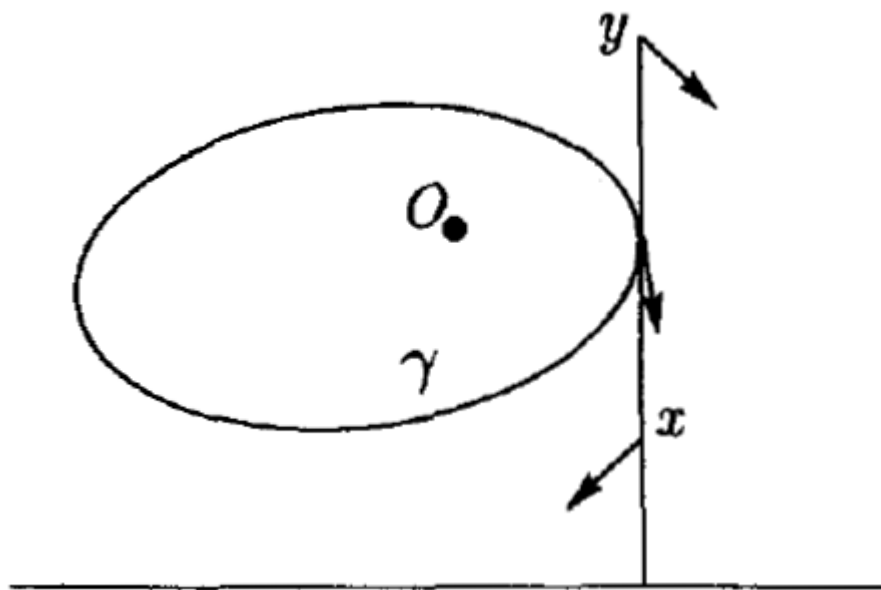


Рис. 2. Двойственный бильярд как импульсный осциллятор

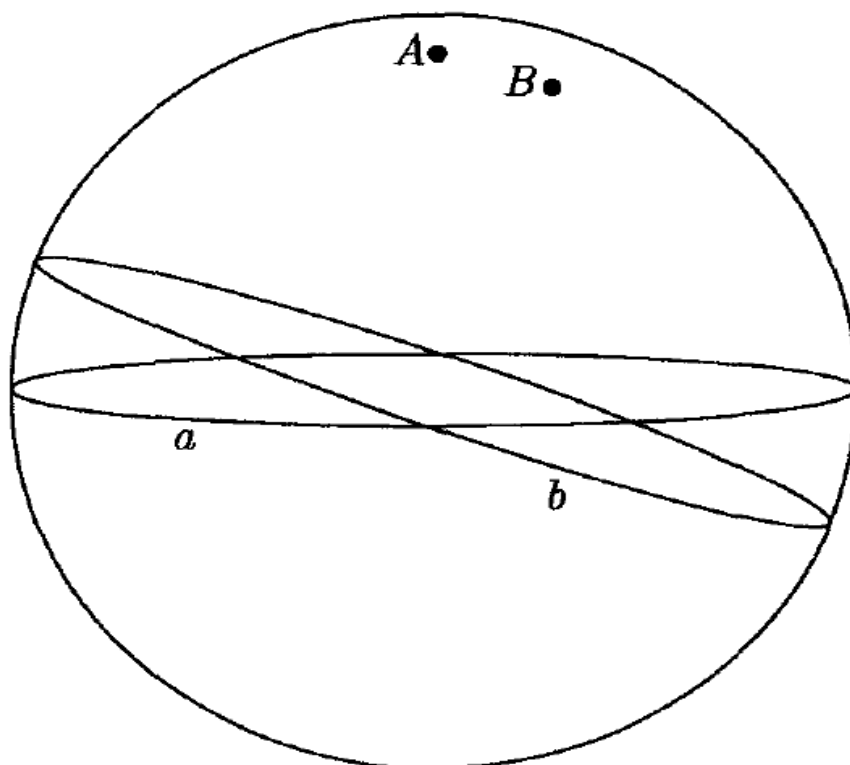


Рис.3. Сферическая двойственность

Рассмотрим бильярдное отражение от кривой γ (см. рис. 4). Закон бильярдного отражения читается: угол падения равен углу отражения. В терминах двойственной картины это означает, что $AL = LB$, и, следовательно, двойственное бильярдное отражение относительно двойственной кривой γ^* переводит A в B . Таким образом, внутренний и внешние бильярды сопряжены сферической двойственностью и две системы изоморфны на сфере. В плоскости внутренний и внешний бильярды не зависят друг от друга так непосредственно и не существует прямой связи между системами ... »

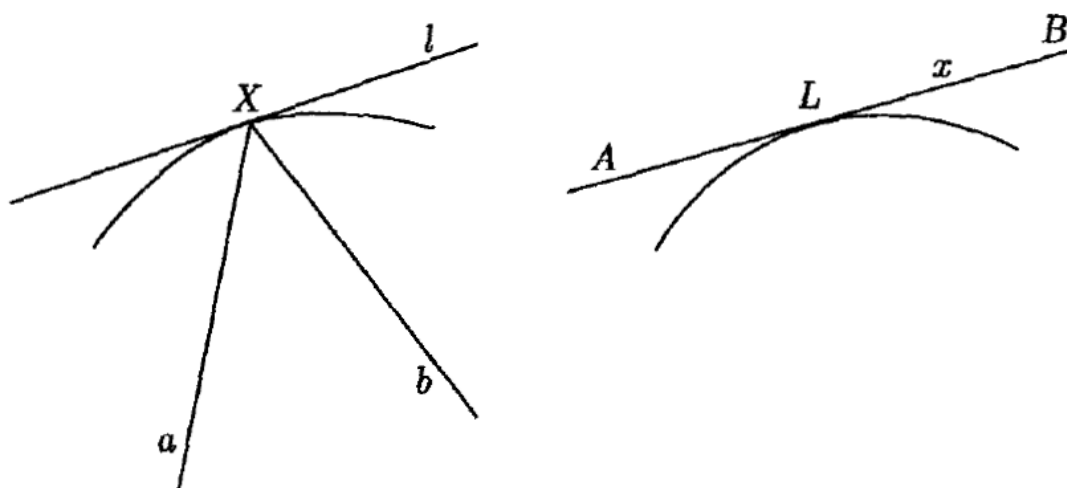


Рис. 4. Двойственность между внутренним и внешним бильярдами.

Глава 1. Литературный обзор

Как уже было замечено во введении, внешние бильярды стали популярны благодаря Ю.Мозеру. Он же ([4, 5]) письменно зафиксировал поставленный устно Нейманом вопрос: может ли траектория внешнего бильярда уходить на бесконечность, т. е. быть неограниченной?

Первым, неформальным в строгом математическом смысле, ответом оказались компьютерные эксперименты, поставленные в начале девяностых годов XX века, для случая, когда столом является полуокружность. На Рис.5а черным цветом выделены точки разрыва отображения T ; эти точки «окружают» большие области, содержащие точки с нечетным периодом;

помимо этого, на рисунке видны и более мелкие области, которые, согласно экспериментальным данным, состоят из уходящих по спиралевидной траектории на бесконечность. Эти данные позволили Табачникову и Монро [6] предположить, что в случае полуокружности существует неограниченная траектория; одна из таких траекторий изображена на рис. 5б. Однако строгое в математическом смысле доказательство существования неограниченной траектории внешнего бильярда относительно полуокружности удалось получить лишь в 2009 году [7].

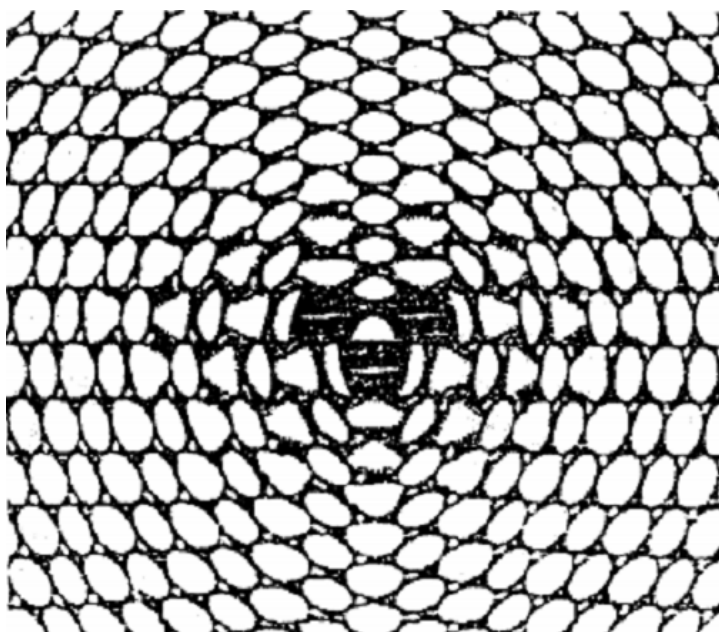


Рис. 5а. Внешний бильярд вокруг полуокружности: точки разрыва

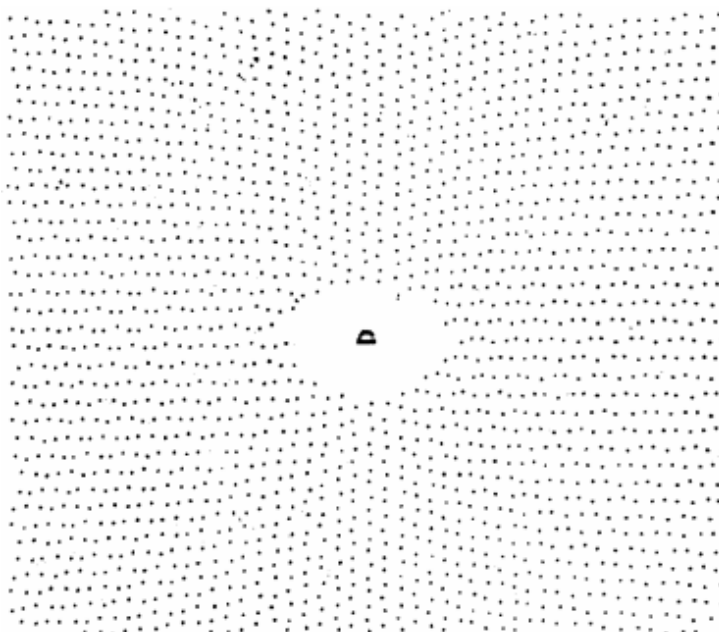


Рис. 5б. Внешний бильярд вокруг полуокружности: неограниченная траектория

Неограниченная траектория может существовать и для внешних бильярдов относительно многоугольников. Так, в 2007 году Р.Шварц доказал, что таким свойством обладает внешний бильярд вокруг «воздушного змея»(kite) — четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, x)$, где x — некоторое иррациональное число, принадлежащее интервалу $(0, 1)$. Заметим, что ограничение на величину x здесь несущественно, ибо преобразование внешнего бильярда коммутирует с (сохраняющими ориентацию) аффинными преобразованиями; следовательно, аффинное преобразование сохраняет такие свойства (или антисвойства) орбиты, как конечность, периодичность и ограниченность; так как воздушные змеи с различными иррациональными x аффинно-эквивалентны, то ограничение $x < 1$ можно снять.

Таким образом, утверждение об ограниченности траекторий внешнего бильярда в общем случае неверно; тем не менее, найдены важные частные случаи внешних бильярдов, в которых все орбиты ограничены. Чтобы описать эти частные случаи внешних бильярдов, поговорим немного в динамике внешних бильярдов на бесконечности. Пусть точка x далека от стола γ , тогда прямые (x, Tx) и (Tx, T^2x) практически параллельны; зафиксируем точку x , а кривую γ будем сжимать посредством гомотетии к некоторой точке O внутри стола γ . Тогда сдвиг (x, T^2x) будет стремиться к нулю, а траектория будет стремиться к некоторой непрерывной замкнутой кривой Γ (рис. 6).

Например, в случае, когда стол является квадратом, Γ также становится квадратом, повернутым на 45 градусов относительно стола; в случае треугольника и шестиугольника Γ есть шестиугольник, стороны которого параллельны сторонам фигуры. Для полукруга же предельной кривой являются две параболы, пересекающиеся под прямым углом (рис.7).

Сейчас мы попробуем понять, как должна выглядеть предельная траектория Γ для многоугольника. Рассмотрим произвольный выпуклый

многоугольник. Плоскость вне его разбивается на «части», т.ч. T^2 есть композиция симметричных отражений с центрами в двух вершинах, фиксированных для каждого из множеств. Т.к. описанная композиция является параллельным переносом, то при T^2 каждая из «частей» будет сдвигаться на фиксированный вектор, равный по длине удвоенной диагонали (либо стороне) многоугольника.

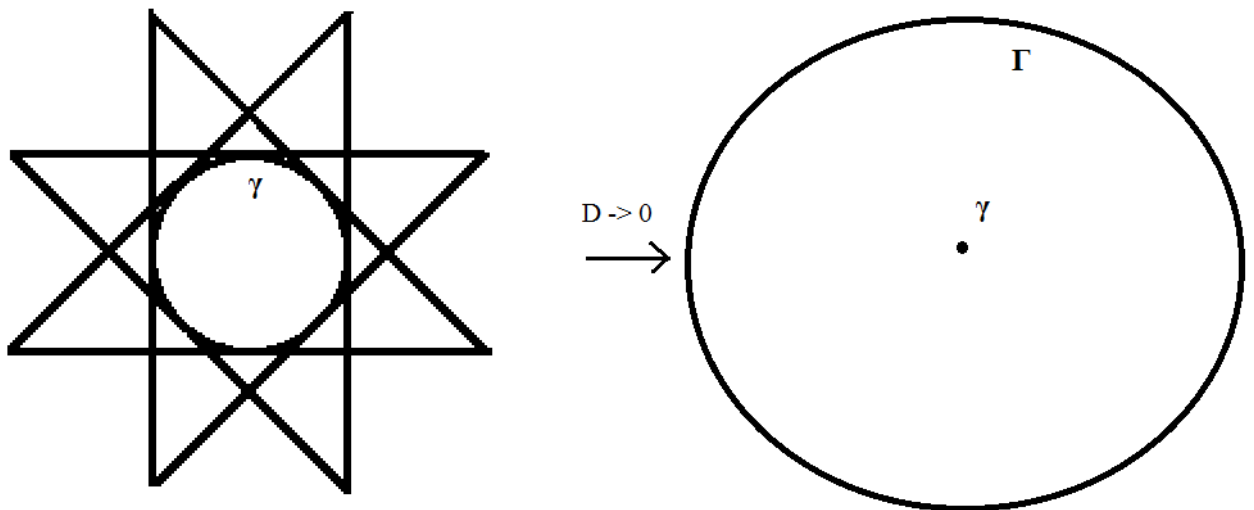


Рис. 6. Предельный переход для случая окружности

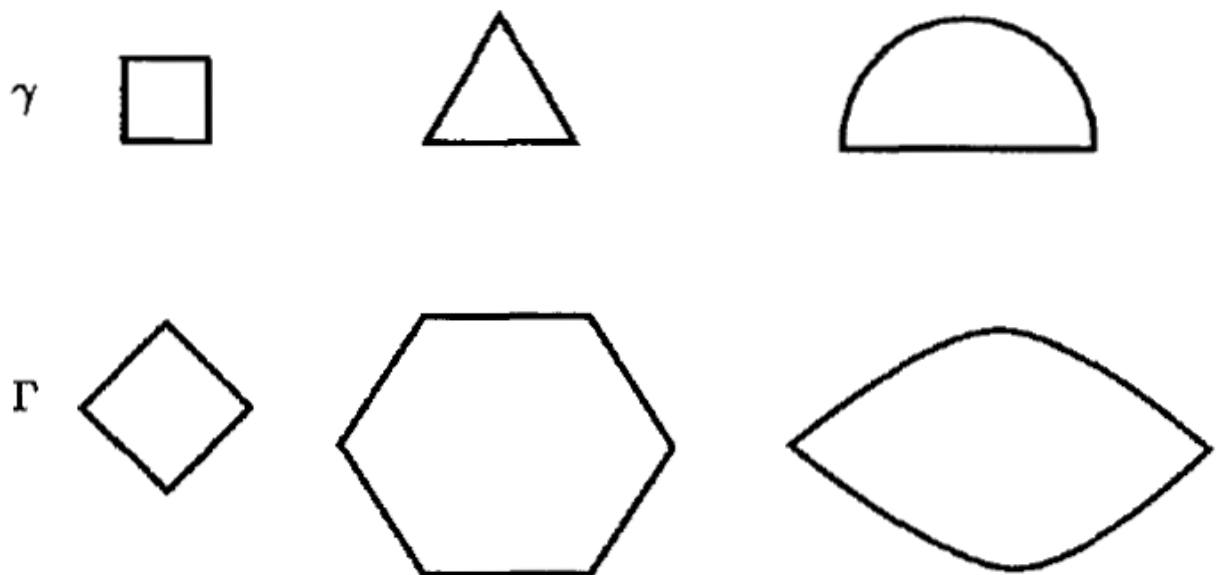


Рис. 7. Предельные кривые (экспериментальные данные)

В качестве примера рассмотрим преобразование T^2 вокруг квадрата, изображенное на рис.8. При уменьшении многоугольника конечные «части» и «полосы», будут «схлопываться», в пределе исчезая. В остальных же «частях» направление сдвига меняться не будет, и в пределе Γ будет двигаться по каждой такой «части» параллельно соответствующей диагонали, что и приводит нас к имеющемуся результату. В случае квадрата Γ будет замкнутой. Верно ли это в случае произвольного многоугольника?

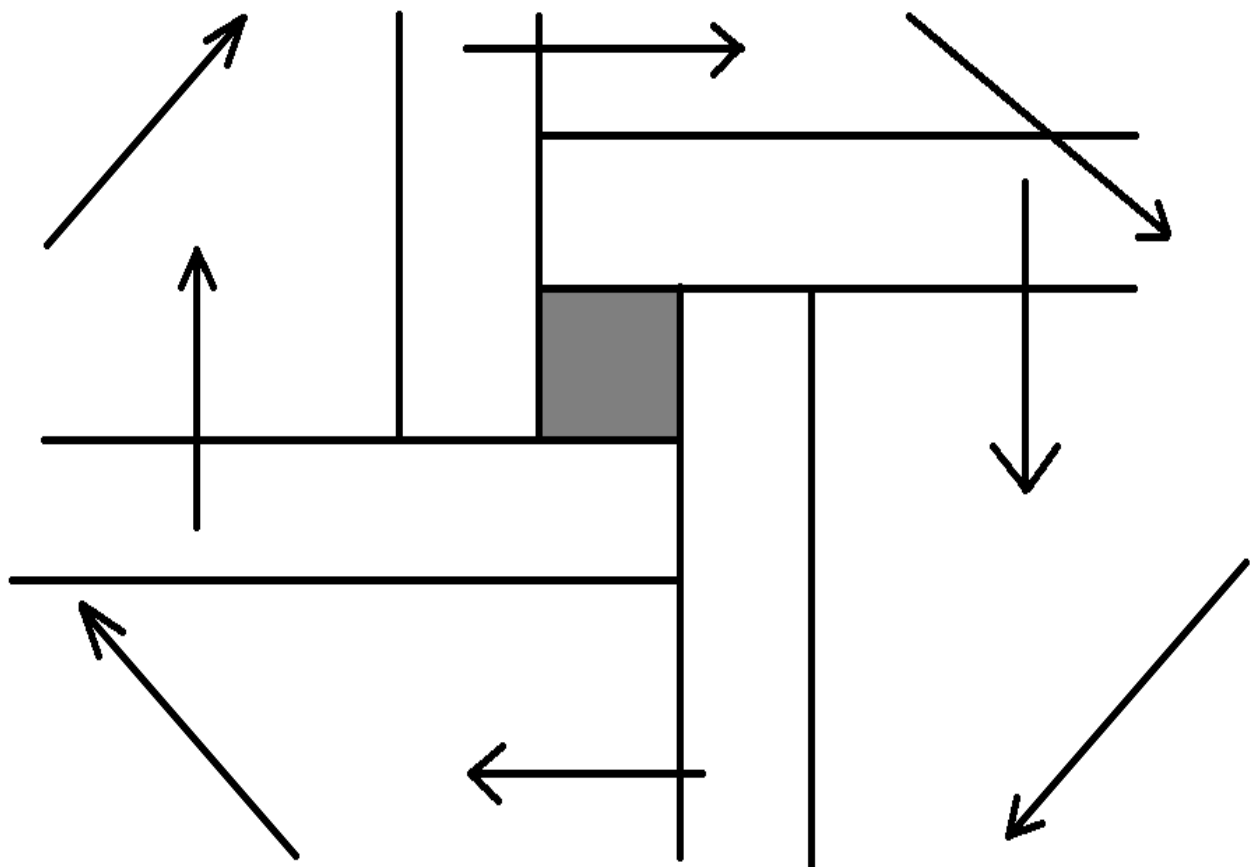


Рис.8. T^2 для квадрата

Чтобы ответить на этот вопрос, попробуем найти какое-нибудь выражение Γ . Будем рассуждать в «полуфизическом» стиле. Пусть γ – строго выпуклая гладкая кривая, и точка $A = A(t)$ лежит на Γ . Рассмотрим две касательные к γ , параллельные $OA(t)$. Заметим, что угол между этими касательными и прямыми $(A, T(A))$ и $(T(A), T^2(A))$ стремится к нулю. Следовательно,

скорость точки должна быть пропорциональна $v(t)$, где $v(t)$ – вектор, соединяющий точки касания параллельных касательных (рис. 9).

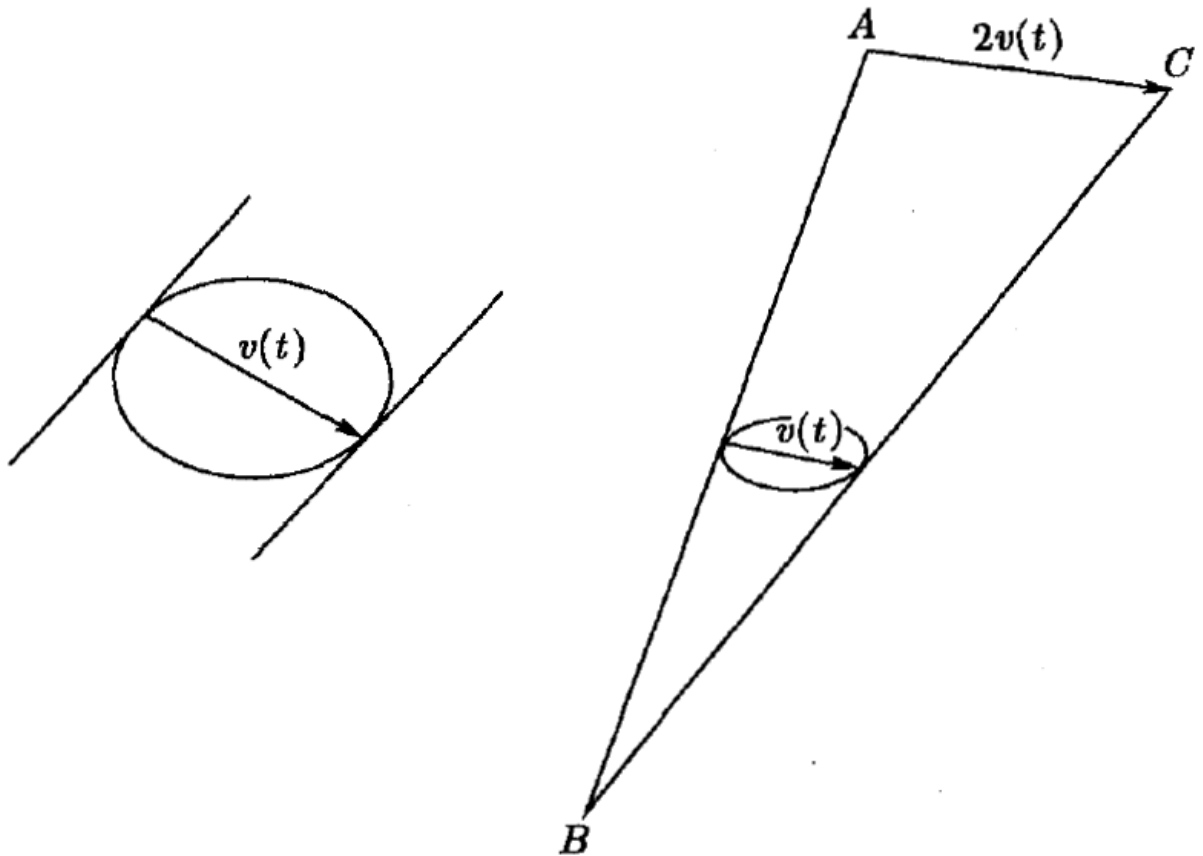


Рис.9. Определение $v(t)$

Итак, Γ задается уравнением вида

$$\Gamma'(t) = a(t)v(t),$$

где $a(t)$ – некая числовая функция. Т.к. в каждой точке направление задано, то решение существует и единственно (с точностью до гомотетии). Этим решением является, как несложно проверить,

$$\Gamma(t) = \frac{v'(t)}{[v(t), v'(t)]},$$

где $[\dots, \dots]$ – векторное произведение. Заметим, что точка A движется со скоростью $2v(t)$, а $[v(t), \Gamma(t)] = 1$. Следовательно, выполняется второй закон Кеплера: вектор $ОГ(t)$ заметает одинаковую площадь в единицу времени. Этот же закон верен и для многоугольника. Следовательно, Γ замкнута, ибо наличие двух различных сонаправленных векторов $ОГ(t_1)$ и $ОГ(t_2)$ и равенство $v(t_1)$ и $v(t_2)$ противоречат второму закону Кеплера. Также очевидна и центральная симметричность кривой Γ .

Итак, нам удалось в первом приближении описать асимптотическое поведение второй итерации внешнего бильярдного отображения на бесконечности. Разумеется, это лишь приближение, но оно имеет важные следствия [далее цит. по [2]].

Первое следствие заключается в том, что если кривая γ достаточно гладкая (по [2], достаточно C^5), то, используя теорию Колмогорова – Арнольда – Мозера, можно показать, что преобразование внешнего бильярда вне γ имеет сколь угодно далекие от бильярдного стола инвариантные кривые, которые обеспечивают ограниченность бильярдных траекторий.

Второе следствие касается случая, когда бильярдный стол – выпуклый многоугольник. В этом случае, как уже было выяснено, Γ – центрально-симметричный выпуклый многоугольник (определенный с точностью до гомотетии. Каждой стороне Γ соответствует «время» t_i , за которое точка «проходит» эту сторону; набор чисел $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ определен с точностью до общего множителя. Внешний бильярд называется квазирациональным, если t можно сделать целочисленным вектором. Доказана (см. [11, 12, 13])

Теорема 1: *Если внешний бильярдный стол – квазирациональный многоугольник, то ни одна орбита внешнего бильярдного отображения не*

уходит на бесконечность.

Также заметим, что квазирациональными многоугольниками являются, в частности, решеточные многоугольники (т.е. многоугольники, аффинно-эквивалентные многоугольникам с рациональными координатами). Таким образом, траектории внешних бильярдов относительно решеточных и правильных многоугольников ограничены; в частности, ограничены все траектории и внешних бильярдов относительно “воздушных змеев” Шварца с рациональными x .

Стоит сказать несколько слов о проблеме наличия *периодической* траектории вокруг различных столов. Разберем этот вопрос подробно для случая строго выпуклого стола γ . В этом случае верна

Теорема 2: для любой гладкой замкнутой выпуклой кривой γ , т.ч. не существует (невырожденных) отрезков, лежащих целиком на кривой γ , и для любого натурального числа $n \geq 3$ существует периодическая точка с периодом n .

Доказательство проведем в «полуфизическом» стиле. Рассмотрим n -угольник минимальной площади, описанный вокруг фигуры γ . Пусть это многоугольник $A_1A_2\dots A_n$, а отрезок A_1A_2 касается γ в точке B . Пусть B' – бесконечно близкая к B точка кривой, находящаяся «ближе» к точке A_2 . Проведем через B' касательную к γ , и пусть эта касательная пересекает лучи A_nA_1 и A_3A_2 в точках A_1' и A_2' соответственно (рис.10).

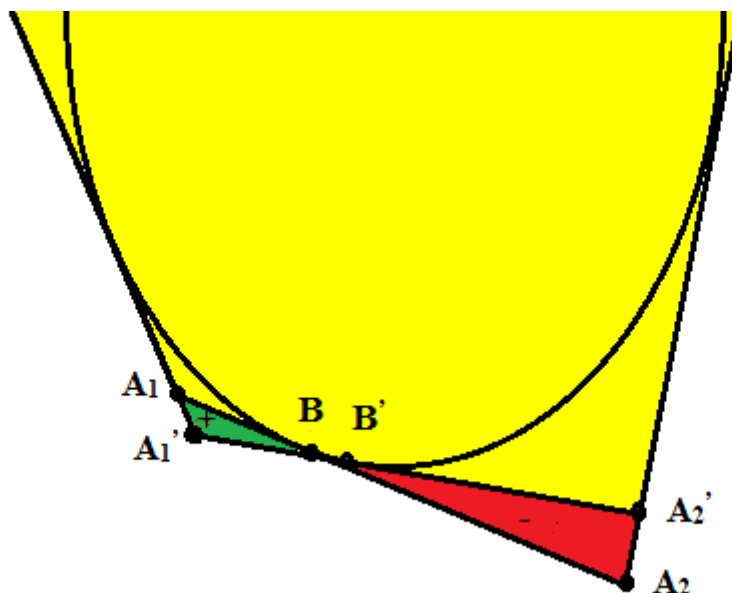


Рис.10. Изменение касательной на бесконечно малую величину

Тогда в первом порядке малости имеем

$\Delta S := S_{A_1'A_2'A_3\dots A_n} - S_{A_1A_2\dots A_n} \approx \frac{1}{2} * d\alpha * (|A_2B|^2 - |A_1B|^2)$, где $d\alpha$ – угол между прямыми A_1A_2 и $A_1'A_2'$. В силу минимальности площади $A_1A_2\dots A_n$ имеем $\Delta S \geq 0$, откуда $|A_2B| \geq |A_1B|$. Аналогично можно показать, что $|A_1B| \geq |A_2B|$; следовательно, $|A_2B| = |A_1B|$. Таким образом, в минимальном по площади описанном многоугольнике точки касания делят стороны пополам; следовательно, вершины этого многоугольника суть траектория внешнего бильярда, что и требовалось доказать.

Более того, аналогичным способом можно показать, что существуют и траектории нужного периода, «обходящие» фигуру не один раз, а любое нужное нам число раз! Соответствующая теорема выглядит следующим образом:

Теорема 3: для любой гладкой замкнутой выпуклой кривой γ , т.ч. не существует (невырожденных) отрезков, лежащих целиком на кривой γ , и для любых натуральных чисел n и k , т.ч. $n \geq 2*k+1$ существует периодическая точка с периодом n , причем её траектория «обходит» фигуру ровно k раз.

Теоремы 2 и 3 неверны в случае, если стол γ есть выпуклый многоугольник. Например, как мы увидим позже, если стол γ является

квадратом, то периодами для γ являются лишь числа, делящиеся на 4. Однако, из теорем следует, что внешние бильярды вне строго выпуклых фигур обладают периодическими траекториями. Обладают ли таким свойством многоугольные столы?

Для внешнего бильярда вокруг правильного n -угольника орбита строится тривиальным образом. В случае же решетчатого многоугольника заметим, что не существует бесконечных апериодических траекторий. Действительно, пусть, без ограничения общности, стол есть многоугольник с целыми координатами, и пусть точка P с координатами (x, y) лежит вне стола, и ее траектория не является конечной. Тогда преобразование T^2 сохраняет дробные части x и y , т.е. «четная часть» орбиты P находится на некотором «сдвиге» целочисленной решетки; так как орбита P ограничена по теореме 1, то траектория P периодична, что и требовалось показать. В силу же того, что размерность Хаусдорфа всех точек с конечной траекторией есть 1, то для решетчатого многоугольника почти все точки являются точками с периодической траекторией. Существует доказательство и более общего факта [14]: для любого выпуклого многоугольника существует периодическая траектория. Вопрос о существовании же периодической траектории внешнего бильярда для произвольного выпуклого стола, по-видимому, остается открытым.

Еще одной открытой проблемой является основная для нашего исследования проблема существования бесконечной апериодической траектории вокруг правильного n -угольника. В случаях $n = 3, 4, 6$ стол является решетчатым; следовательно, согласно доказанному ранее, бесконечных апериодических траекторий не существует. В случае же $n = 5$ в 1993 г. Табачников [1] провёл детальнейший анализ «первой компоненты» и показал, что размерность Хаусдорфа множества непериодических точек (т. е. точек с конечной или бесконечной апериодической траекториями) есть $\log(6) / \log(\sqrt{5} + 2)$ - число, большее единицы; следовательно, точки с бесконечной

апериодической траекторией существуют и обладают той же размерностью (рис.10).

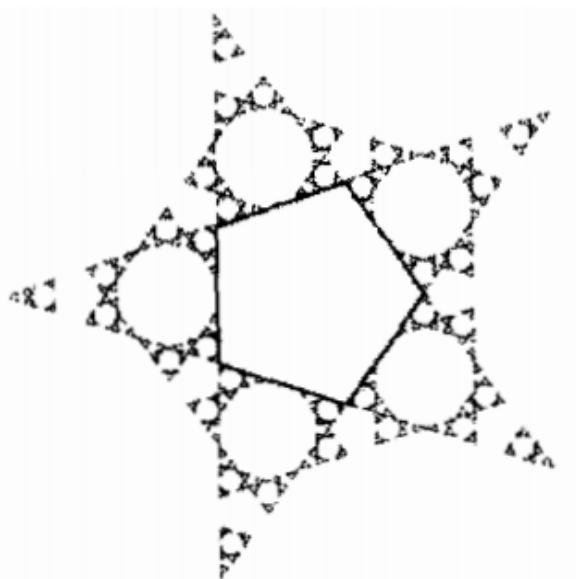


Рис.10: одна из апериодических траекторий вокруг пятиугольника

В статье [3] Табачников приводит результаты компьютерных экспериментов, дающие возможность предположить существование точки с бесконечной апериодической траекторией для правильных n -угольников с $n > 6$ (рис. 11-13), однако строгого анализа до сих пор нет. Таким образом, вопрос о существовании точки с бесконечной апериодической траектории для внешнего бильярда относительно правильного n -угольника при $n > 6$ остается открытым.

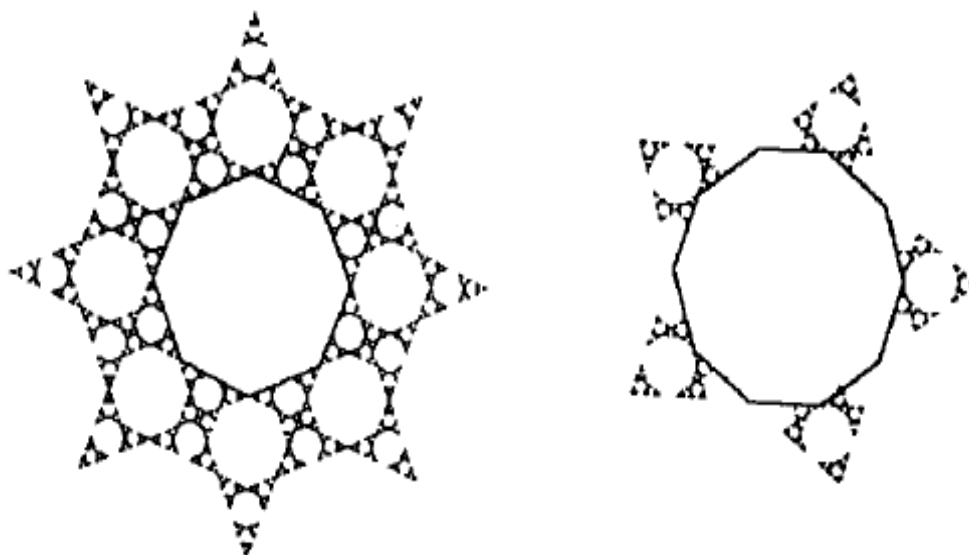


Рис.11. Эксперименты для восьми- и десятиугольника

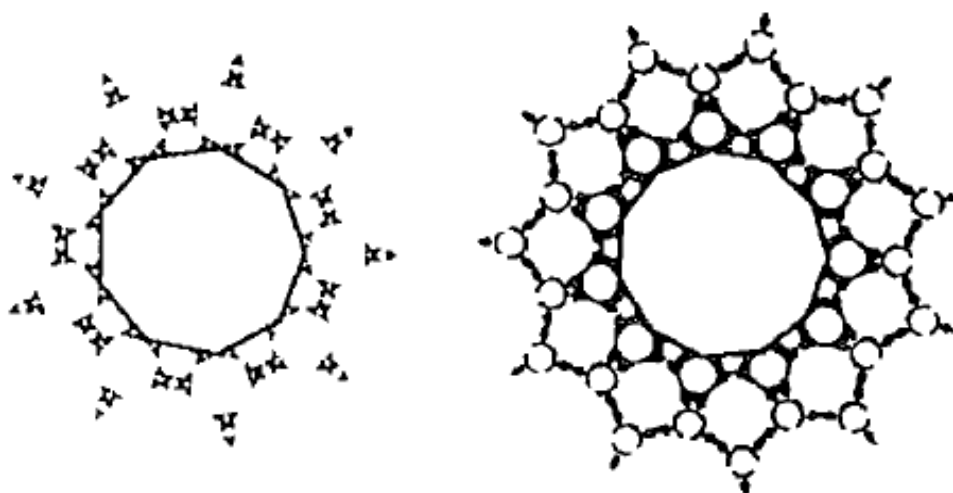


Рис.12. Эксперименты для девяти- и одиннадцатиугольника

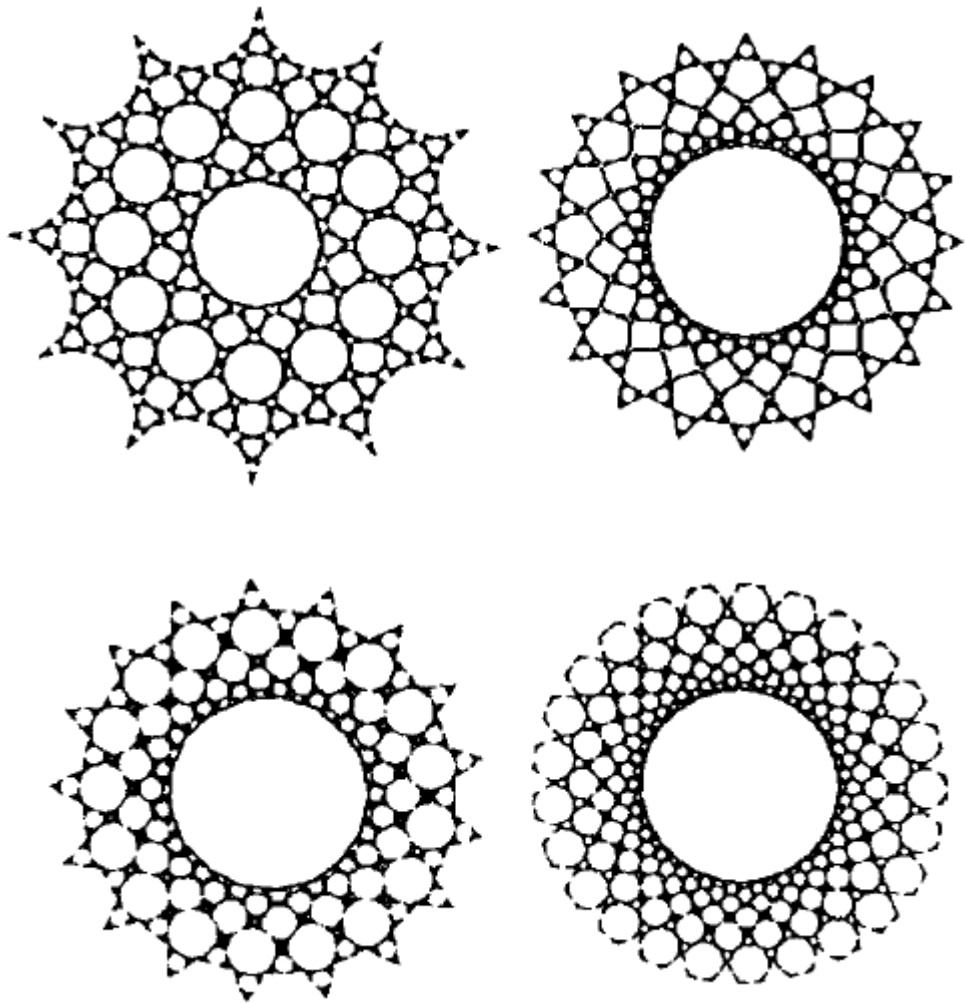


Рис.13 Эксперименты для фигур с большим числом углов

Следующим по сложности исследования является, по-видимому, правильный восьмиугольник. В своей большой статье [10] Р. Шварц проводит большое исследование внешнего бильярда относительно восьмиугольника; в частности, он провел анализ преобразования, задающегося следующим образом. Рассмотрим правильный восьмиугольник и многоугольник X , заданный на рис. 14. Этот многоугольник можно разбить двумя способами на два равнобедренных прямоугольных треугольника A_1 и B_1 либо A_2 и B_2 , изображенные на рис.15. Существует и единственно движение φ_A , переводящее A_1 в A_2 ; это преобразование является поворотом на $3\pi/4$ радиан вокруг центра маленького восьмиугольника на рис.14. Аналогично, существует единственное движение φ_B , переводящее B_1 в B_2 , являющееся

поворотом на $\pi/4$ радиан вокруг центра большого восьмиугольника. Преобразование $\varphi: X \rightarrow X$ Шварц определяет как объединение ограничений φ_A на A_1 и φ_B на B_1 ; такое преобразование определено корректно всюду, кроме общего отрезка треугольников φ_A и φ_B .

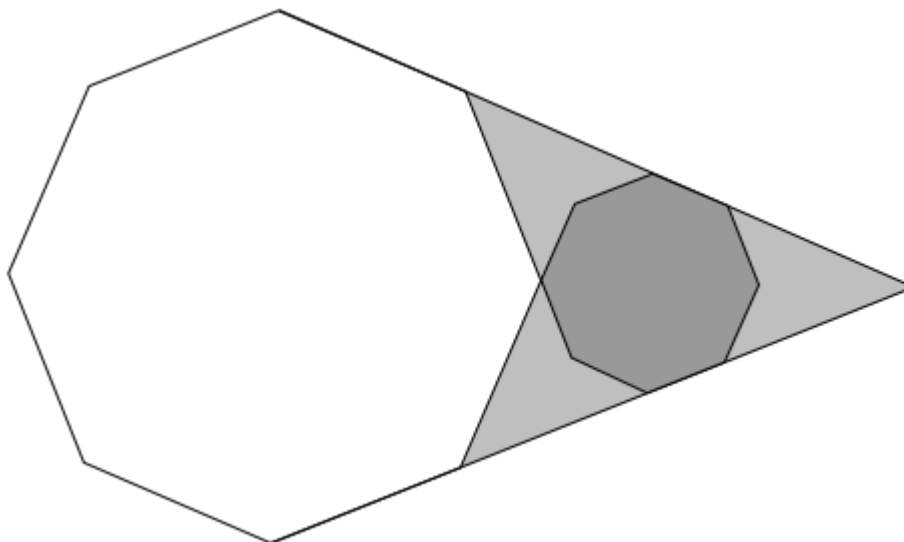


Рис.14. Многоугольник X

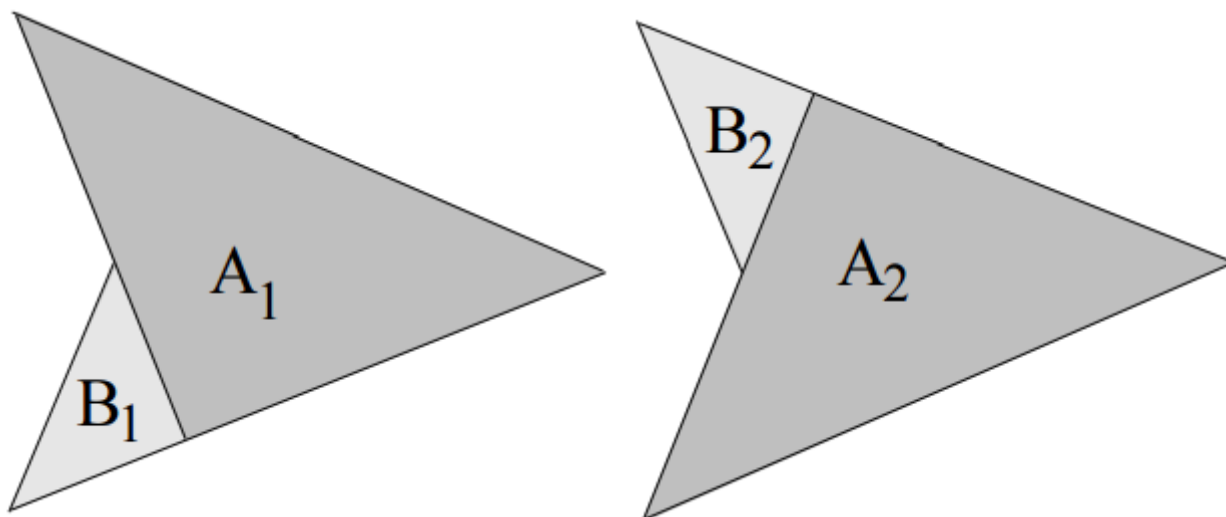


Рис.15. Два разбиения фигуры X

Именно для такого преобразования Шварцу удастся получить результаты, аналогичные полученным Табачниковым для правильного восьмиугольника; в частности, ему удастся получить т.н.

«ренормализационную схему»(The Renormalization Scheme) и соответствующее самоподобное преобразование, с помощью которых удается классифицировать все периодические компоненты (многоугольники с одинаковой «орбитой») и показать существование бесконечной аперiodической траектории. Однако преобразование ϕ и четырехугольник X не связаны напрямую с внешним бильярдом вокруг восьмиугольника и рассматриваются Шварцем исключительно в качестве игрушечной модели (Toy Model). Таким образом, вопрос о существовании бесконечной аперiodической траектории для внешнего бильярда вокруг правильного восьмиугольника остается открытым.

Хотя напрямую связанная с внешним бильярдом «ренормализационная схема» описана лишь в случае правильного пятиугольника ([1]), авторы предполагают, что такая схема существует. Так, в той же статье [10] Шварц рассуждает о том, что внешние бильярды для правильных n -угольников в случаях $n = 5, 10, 8, 12$, очень похожи друг на друга; в частности, в этих случаях Шварц предполагает существование эффективных ренормализационных схем, которые дают возможность получить («как минимум в принципе») полное представление о поведении преобразования внешних бильярдов. Выбор именно таких четырех чисел обусловлен особыми свойствами этих чисел; в частности, функция Эйлера, а вместе с ней и степень расширения поля $[Q(\exp(2\pi i/n)) : Q]$ равна 4 для этих, и только для этих, чисел. Заметим, что случаи $n = 8$ и 12 также оказываются наиболее удобными (после 3, 4 и 6) случаями и для точных компьютерных исследований, ибо координаты всех возникающих в этих случаях точек, включая вершины многоугольника, координаты первой компоненты и т. п. лежат в полях $Q(\sqrt{2})$ и $Q(\sqrt{3})$ соответственно. Однако повторимся, что существование эффективных ренормализационных схем для случаев $n > 6$, до сих пор не доказано, равно как и существование аперiodических траекторий внешних бильярдов в этих случаях.

Что касается остальных случаев, то компьютерные исследования Шварца, изложенные в [15], обнаруживают существенно более сложное поведение динамики внешнего бильярда. Например, в случае $n = 7$ Шварц обнаружил совершенно нетипичные для случаев $n = 5, 8, 10, 12$ периодические компоненты; например, на рис. 16 изображены периодические пятиугольники, имеющие период 57848 и диаметр порядка 0.0003 (при радиусе семиугольника 1); также Шварцу обнаружить и гораздо более «странные» периодические фигуры, обладающими периодами до 1048756, изображенные на рис.17. Из своих экспериментальных данных Шварц делает вывод о том, что полной ренормализационной схемы для внешнего бильярда относительно правильного семиугольника не существует; также Шварц полагает, что вопрос о существовании бесконечного числа неподобных периодических компонент напрямую связан с неразрешенным на текущий момент вопросом на тему того, является ли ограниченным множество целых чисел, появляющихся в записи числа $e^{2\pi i/7}$ в цепную дробь.

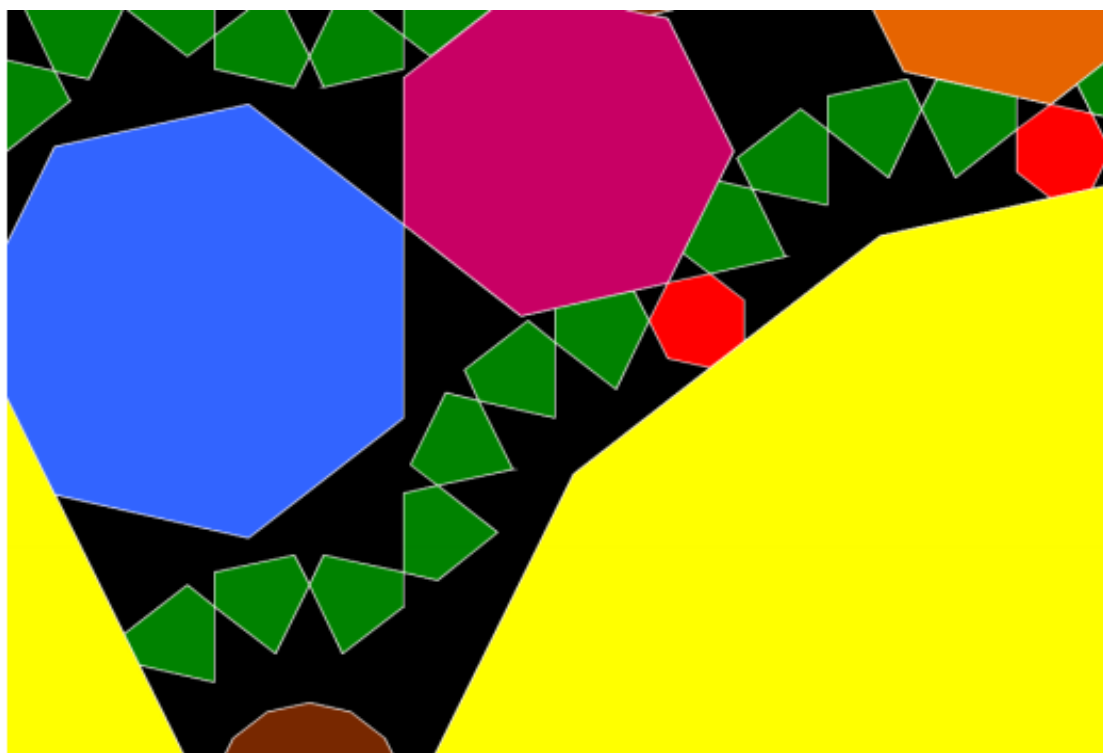


Рис.16. Асимметричные периодические компоненты внешнего бильярда
вокруг правильного семиугольника

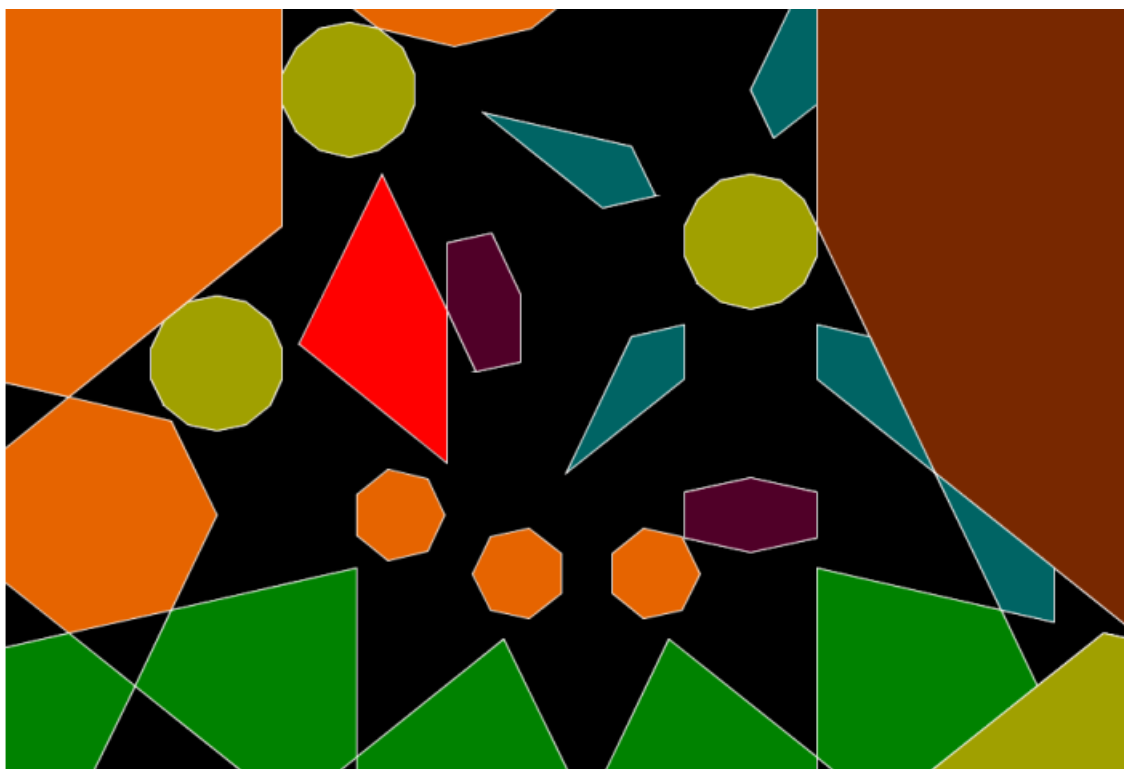


Рис.17. Некоторые «экзотические» периодические компоненты внешнего бильярда вокруг правильного семиугольника

Исследования вокруг внешнего бильярда ведутся и в других направлениях. Например, в (уже упомянутой) недавней работе [15] Ин-Джи Ёнг(In-Jee Jeong) проводит исследования внешнего бильярда со сжатием (outer billiard with contraction), т. е. преобразования T_λ , $0 < \lambda \leq 1$, строящегося следующим образом. Пусть дан стол γ и точка x вне стола. Проведем из точки x правую касательную к столу γ ; пусть v — точка касания. Тогда $y = T_\lambda x$ есть такая точка на продолжении луча xv , что $|vy| / |xv| = \lambda$. Нетрудно видеть, что T_1 есть имеющееся у нас преобразование внешнего бильярда. В статье [15] исследуются внешние бильярды со сжатием вокруг правильных n -угольников для $n = 3, 4, 5, 6, 8, 12$. Одним из основных результатов статьи является λ -стабильность всех периодических траекторий, т. е. для каждой периодической относительно T_1 орбиты существует $\varepsilon > 0$, т.ч. для всех λ , т.ч. $1 - \varepsilon < \lambda < 1$ существует периодичная относительно T_λ орбита с той же последовательностью вершин отражения; также доказана сходимоть

компонент при $\lambda \uparrow 1$ в Хаусдорфовой топологии; в случаях же $n = 3, 4, 6$ для T_λ при $0 < \lambda < 1$ доказано существование конечного числа периодических орбит, к которым все остальные орбиты сходятся. Доказательство первого из этих утверждений для $n = 5, 8, 12$ базируется на существовании полной ренормализационной схемы для «обычных» внешних бильярдов и рассмотрено лишь для случая $n = 5$; таким образом, чтобы завершить доказательства для $n = 8$ и 12 , требуются полные ренормализационные схемы. Что касается случая правильного семиугольника, компьютерные эксперименты, проведенные Ёнгом, позволяют установить, что точки изображенной на рис.16 пятиугольной компоненты не являются λ -стабильными. Этот факт даёт возможность предполагать, что не имеет места быть и сходимости компонент в случае правильного семиугольника. Впрочем, отсюда не следует отсутствие ренормализационной схемы для других n .

Обсуждая внешние бильярды вокруг многоугольников, нельзя также не упомянуть о «схеме развертки», аналоге метода развертки для внутренних бильярдов. Во внутреннем случае, при попадании шара в стенку, мы вместо отражения траектории от «стенки» отражаем сам стол относительно оси, содержащей «стенку»; во внешнем случае, мы оставляем на месте шар, а относительно точки касания центрально-симметрично отражаем сам стол (рис.18).

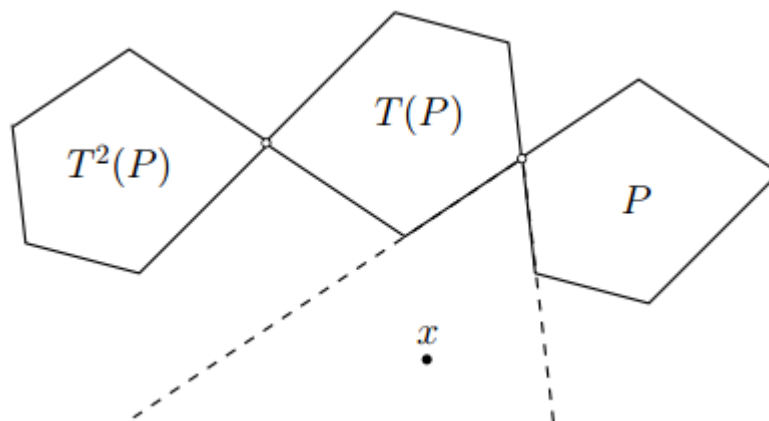


Рис. 18. Схема развертки

Заметим, что этот метод позволяет для каждой точки найти множество точек той же траектории. Действительно, отражение относительно фиксированной вершины может произойти в том и только в том случае, когда точка расположена внутри связанного с вершиной угла, изображенного на рис.18.. Следовательно, все точки, обладающие такой же траекторией, должны лежать в пересечении таких углов, причем такое условие является и достаточным. Такой подход даёт алгоритм, позволяющий для каждой периодической точки найти её периодическую компоненту абсолютно точно.

Закончим литературный обзор рассмотрением связи внешних бильярдов относительно многоугольников и символической динамикой. Перенумеруем вершины многоугольника числами от 1 до n ; тогда орбита суть конечное или бесконечное слово, состоящее из букв алфавита $\{1, 2, 3, \dots, n\}$; множество всех конечных подслов всех слов, получающихся таким образом, составляют язык преобразования внешнего бильярда вокруг заданного многоугольника; сложность $p = p(l)$ языка есть натуральнозначная функция, ставящая в соответствие числу l количество различных слов длины l в языке.

В [16] Гуткину и Табачникову удалось показать, что:

1) если стол внешнего бильярда — правильный n -угольник, то существуют две положительные константы a, b такие, что для всех натуральных l верно

$$a \cdot l \leq p(l) \leq b \cdot l^{r+2},$$

где r есть функция Эйлера $\varphi(n)$;

2) если стол внешнего бильярда — решеточный n -угольник, то существуют две положительные константы a, b такие, что для всех натуральных l верно

$$a \cdot l^2 \leq p(l) \leq b \cdot l^2.$$

В [17] для случаев $n = 3, 4, 5, 6$ удается найти точные описания языков

внешних бильярдных относительно правильных n -угольников и найти их сложность; для случая $n = 10$ же доказывается биективность между языками для десяти- и пятиугольника; во всех случаях существует константа $C > 0$ (для каждого случая своя), т.ч. $p(l) \sim C \cdot l^2$.

Глава 2. Внешние бильярды на многоугольниках: общие сведения

Как уже было замечено во введении, при рассмотрении отображения внешнего бильярда (будем называть его по-прежнему T) для многоугольников возникает проблема некорректности определения T на продолжениях сторон многоугольника; в этом случае будем говорить, что T не определено для таких точек. Таким образом, область определения T для n -угольника распадается на n областей D_i , в каждой из которых T есть центральная симметрия относительно соответствующей вершины A_i многоугольника (рис. 19).

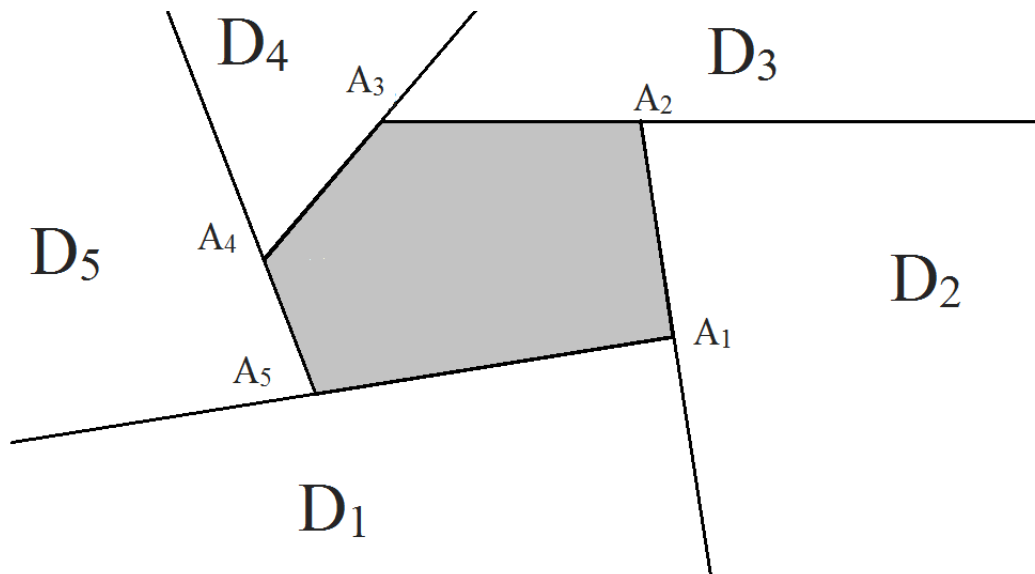


Рис.19 Области определения внешнего бильярда для многоугольника

Напомним также, что в случае многоугольника точки вне стола можно разбить на следующие три типа: 1) точки с конечной траекторией (случай, когда на очередном шаге мы попадаем в точку, в которой T не определено); 2) точки с периодической траекторией; 3) точки с аперiodической траекторией (аперiodические, или бесконечные, точки).

Рассмотрим несколько простых свойств внешнего бильярда:

1. Множества точек каждого типа инвариантны относительно T (с точностью до точек, в которых T не определено);

2. Пусть B_i – множество точек, т.ч. T^i определено, а T^{i+1} нет. Тогда а) $B_{i+1} = T^{-1}(B_i \setminus \{\text{множество точек, в которых } T^{-1} \text{ не определено}\})$; б) множество точек первого типа есть $A_0 := \{\text{объединение всех } B_i\}$; в) A_0 есть счетное объединение открытых отрезков и лучей; очевидным следствием является тот факт, что размерность Хаусдорфа множества A_0 равна 1;

3. Если точка x имеет периодическую траекторию, то существует окрестность этой точки, состоящая целиком из периодических точек; например, можно взять (открытую) ε -окрестность точки x , где ε – минимальное из расстояний от точек траектории до границ соответствующих D_v и половин попарных расстояний между точками траекторий; более того, если период x четен, то период точек проколотой окрестности будет совпадать с периодом x ; в противном случае период точек окрестности будет вдвое больше;

4. A_0 разбивает плоскость на компоненты, являющиеся открытыми выпуклыми фигурами (возможно, нулевой меры); каждая из этих компонент при преобразовании T переходит в равную компоненту;

5. Последовательность вершин стола, относительно которых происходит отражение при построении траектории точки, зависит лишь от компоненты, в которой лежит эта точка; следовательно, понятия “типы 2 и 3” можно применять к компонентам;

6. Компонента нулевой меры не может быть компонентой 2-го типа (прямое следствие свойства 3);

7. Все точки периодической компоненты имеют один и тот же четный период,

кроме, возможно, одной точки; в этом случае компонента является центрально-симметричной, а «выколотой» точкой является центр симметрии компоненты, причем его период нечетен и равен половине периода остальных точек (при каждом применении T компонента переходит в центрально-симметричную; следовательно, в тот момент, когда она перейдет сама в себя, либо все точки вернутся в свое первоначальное положение (первый случай), либо все точки перейдут в симметричные относительно центра симметрии компоненты (второй случай). Четности периодов всех точек в обоих случаях очевидны; заметим, что центрально-симметричная компонента не обязана иметь выколотый в смысле периода центр – контрпример мы увидим далее);

8. Если траектория компоненты ненулевой меры ограничена, то она (траектория) периодична (ибо на ограниченном пространстве существует лишь ограниченное число равных фигур);

9. T^2 есть параллельный перенос вдоль некоторой стороны либо диагонали; длина вектора переноса есть удвоенная длина этой диагонали или стороны (как композиция центрально-симметричных отражений);

10. Компонента есть ограниченное множество. Действительно, предположим, что одна из компонент бесконечна. Применим аффинное преобразование так, чтобы вершина A_1 отражения T для этой компоненты (назовем её C) была самой «правой» вершиной многоугольника (рис.20).

Очевидно, что T^2 сдвинет компоненту «влево-вверх» либо строго «влево», причем длины сдвигов «влево» и «вверх» отделены от нуля. Заметим, что сдвиг строго «влево» при T^2 возможен лишь в случае, если вторая вершина отражения есть A_n , т.е. $T(C)$ лежит в D_n (рис.21, 22).

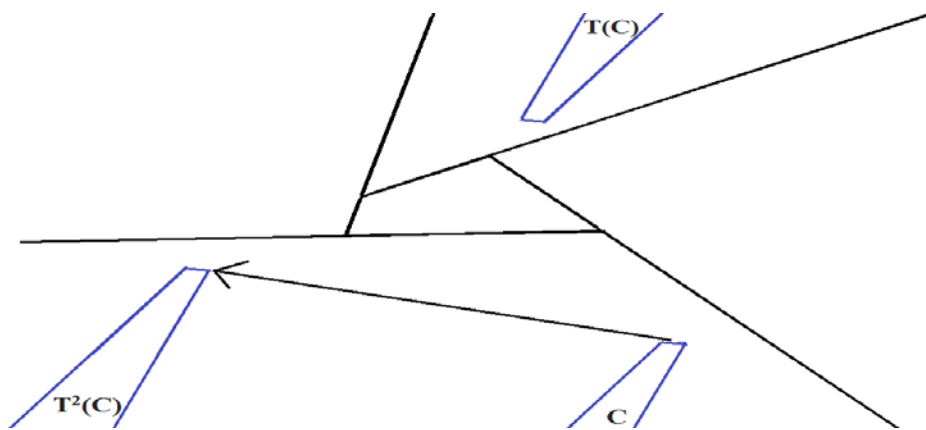


Рис. 20. Сдвиг бесконечной компоненты при T^2 «влево-вверх»

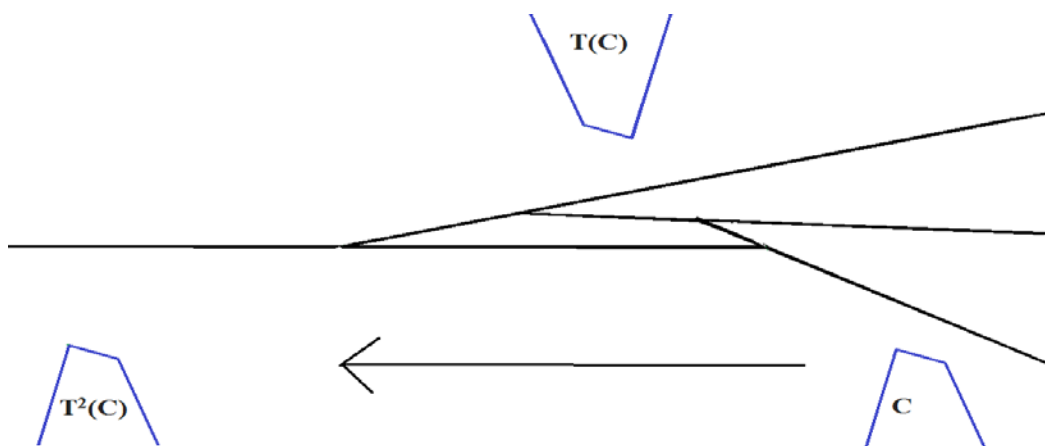


Рис. 21. Сдвиг бесконечной компоненты при T^2 «влево»

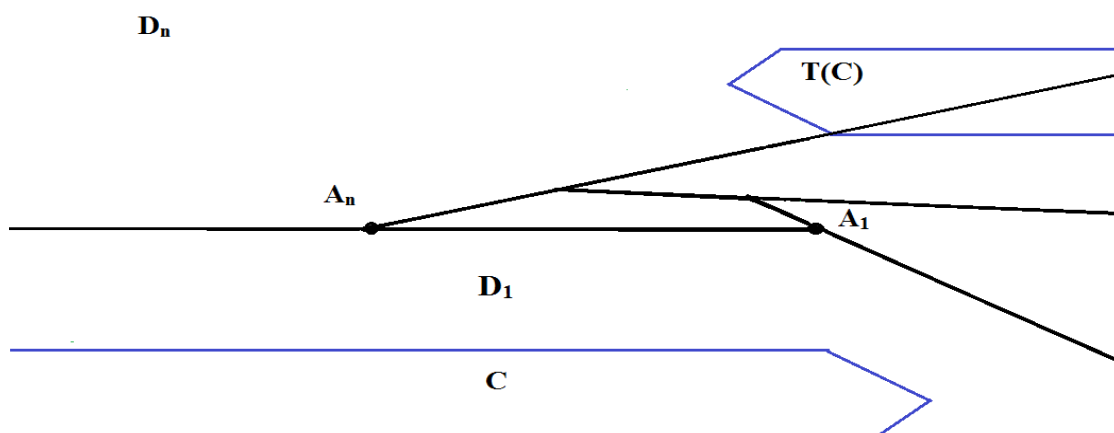


Рис. 22. «Бесконечная только влево» компонента

По мере применения $T^2(C)$ сдвигается влево, а $T(C)$ – вправо, причем на постоянную величину. Следовательно, через несколько итераций $T(C)$ покинет D_n , причем навсегда (ибо $T(C)$ сдвигается либо строго «вправо», либо «вправо-вниз»). Это означает, что T^2 , начиная с некоторого момента, будет двигать C «влево-вверх». Отсюда, в свою очередь, следует, что рано или поздно C покинет D_1 и переместится в D_n . Т.к. D_n ограничена снизу, то и C не может быть неограниченной снизу. Т.к. C в исходном состоянии ограничена лучом A_1A_n сверху и A_2A_1 справа, то она (C) неограничена слева. Применим к C последовательность операций T , переводящие C в D_n , после чего «повернем» картинку так, чтобы ребро $D_{n-1} D_n$ стало «нижним»; тогда и C окажется «неограниченной снизу»; повторение рассуждений доказывает свойство.

Однако для этого свойства существует ещё одно интересное доказательство, использующее «схему развертки». Действительно, будем вместо отражения относительно точки касания точки-шара отражать стол; тогда вся компонента содержится в углу между лучами — продолжениями последовательных сторон (см. рис. 18). Более того, компонента является пересечением всех таких углов. Соединим последовательные точки отражения отрезками; очевидно, что каждый вышеописанный угол лежит в полуплоскости, задаваемой прямой — продолжением соединяющего вершину угла с предыдущей точкой отражения отрезка; так как точка обладает бесконечной (возможно, периодичной) траекторией, то стол, а вместе с ним и последовательность «обойдет» точку хотя бы раз; следовательно, пересечение полуплоскостей, задаваемых ребрами, а также и целиком лежащая в этом пересечении компонента, суть ограниченные множества, QED.

11. Каждая компонента представляет собой либо (открытый) выпуклый многоугольник, стороны которого параллельны сторонам многоугольника, либо отрезок, параллельный одной из сторон многоугольника, либо точку (очевидное следствие применения схемы развертки).

Относительно этого свойства отметим, что автор не встречался со случаем компоненты отрезка. Теоретически, ни одно из свойств напрямую не противоречит ситуации, когда компонента ненулевой площади имеет уходящую в бесконечность траекторию; однако в силу Теоремы 1 выполнено следующее свойство:

12. Траектории внешнего бильярда вне решеточных и правильных многоугольников ограничены.

13. Все компоненты для решеточного многоугольника суть невырожденные многоугольники (ибо верно УТВ.: расстояния между параллельными прямыми, содержащими лучи либо отрезки множества A_0 , отделены от нуля. Докажем УТВ. для лучей, параллельных ребру $A_n A_1$ произвольного выпуклого решеточного многоугольника. Переведем $A_n A_1$ в горизонтальный отрезок так, чтобы вершины многоугольника остались целочисленными. При таком преобразовании расстояния между всеми парами прямых, содержащих параллельные $A_n A_1$ лучи/отрезки, а) домножились на одну и ту же константу; б) превратились в натуральные числа, т.е. стали больше либо равны 1 (в силу коммутативности T и аффинного преобразования). Следовательно, УТВ. доказано, а с ним и свойство).

14. Все компоненты решеточного многоугольника есть невырожденные компоненты типа 2 (прямое следствие свойств 8, 12, 13).

Вооруженные таким мощным багажом знаний о внешних бильярдах, мы можем перейти к изучению конкретных примеров многоугольников.

Глава 3. Внешний бильярд вне квадрата

По-видимому, квадрат является если не самым простым для исследования внешнебильярдным столом, то по крайней мере самым простым многоугольным столом. Попытки нарисовать A_0 вручную, равно как

и компьютерные эксперименты, дают возможность предполагать, что множеством A_0 в случае квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ является целочисленная сетка (т.е. набор прямых вида $x = C$ и $y = D$, где C и D – целочисленные константы) (рис.23).

Прямым следствием этой гипотезы является тот факт, что получившиеся «квадратики» должны стать компонентами. Попробуем доказать такую гипотезу.

Факт о том, что при преобразовании T квадратик переходит в квадратик, вполне очевиден. Однако напрямую это означает лишь то, что каждый квадратик принадлежит одной компоненте, но не то, что каждый квадратик есть отдельная компонента. Но из рис.24 очевиден следующий факт: при применении T не изменяется «манхэттенское расстояние» от квадратика до стола.

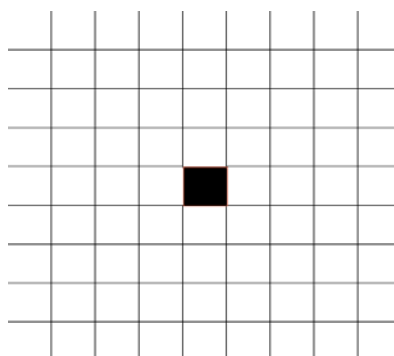


Рис. 23: Потенциальное множество точек первого типа

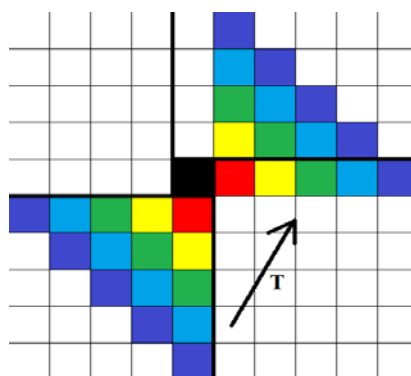


Рис. 24. Иллюстрация инвариантности «манхэттенского» расстояния до стола

Итак, каждый квадратик движется строго по «ожерелью» из $4d$ квадратиков, находящихся на (манхэттенском) расстоянии d . Если раскрасить все эти квадратик в шахматном порядке (рис. 25), то становится видно, что 1) преобразование T меняет цвет квадратика; 2) преобразование T^2 перемещает квадратик по ожерелью на два квадратика по часовой стрелке.

Последние два факта позволяют заключить, что период каждого квадратика есть ровно $4d$, а так как любые два соседних квадратика имеют разные периоды, то граница между ними состоит из точек лишь первого типа (ибо в какой-то момент квадратик будут отражаться от разных точек), что и приводит нас к итоговой картинке, ранее предсказанной компьютерными экспериментами, изображенными на рис.26.

Аналогичным образом можно провести анализ для случаев правильных треугольника и шестиугольника. Здесь можно увидеть и компоненты с выколотым по периоду центром, и нецентрально-симметричные компоненты. В случае шестиугольника можно видеть, что шестиугольные компоненты одного периода делятся на две орбиты, по $3 \cdot \text{level}$ шестиугольников в каждом, а треугольные есть единая орбита из $12 \cdot \text{level} - 6$ треугольников. В треугольном же случае мы имеем орбиты из $6 \cdot \text{level} - 3$ шестиугольников и $12 \cdot \text{level}$ треугольников. Компьютерные эксперименты в этих случаях изображены на рис.26.

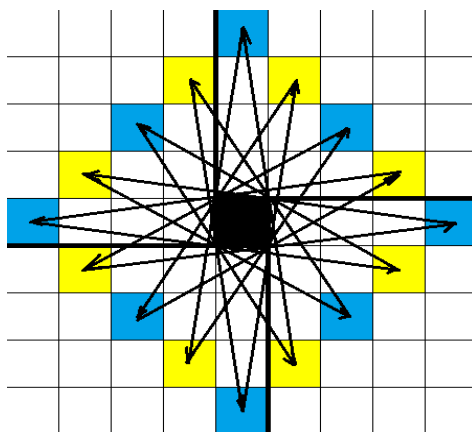


Рис. 24. Траектория одного из квадратиков

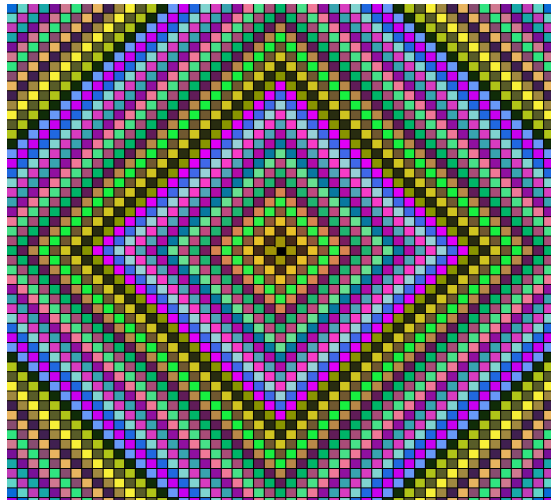


Рис. 25: Зоопарк точек внешнего бильярда вне четырехугольника

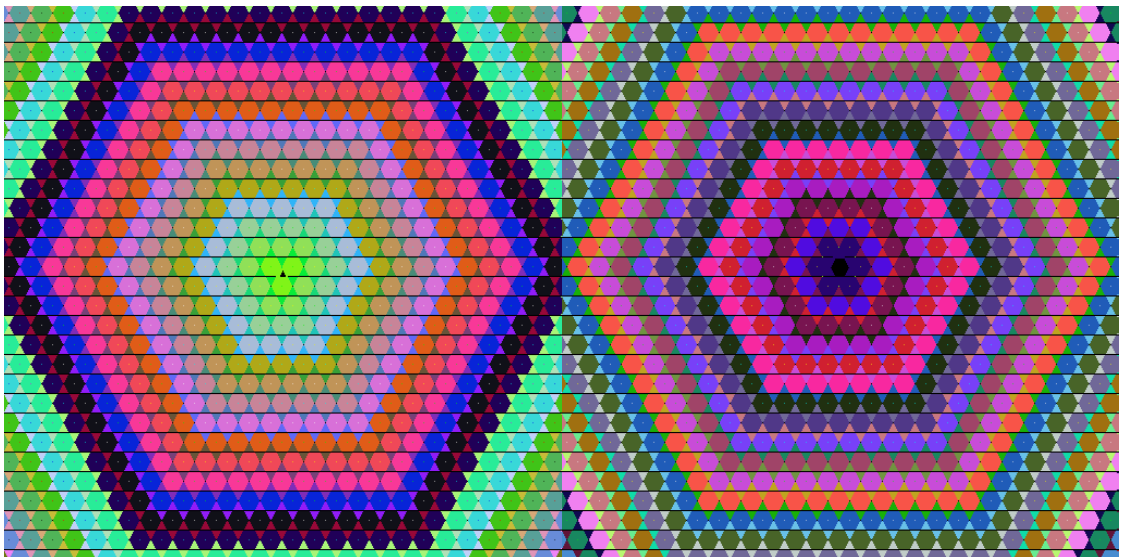


Рис. 26. Внешний бильярд вне правильных шестиугольника и треугольника

Глава 4. Внешний бильярд вне правильного восьмиугольника

Простейшим случаем правильного нерешеточного многоугольника является правильный пятиугольник. Этот случай был подробно исследован в, например, [1]. Мы же проведем аналогичное исследование для правильного восьмиугольника.

Рассмотрим следующую изображенную на рис.27 инвариантную

относительно T компоненту :

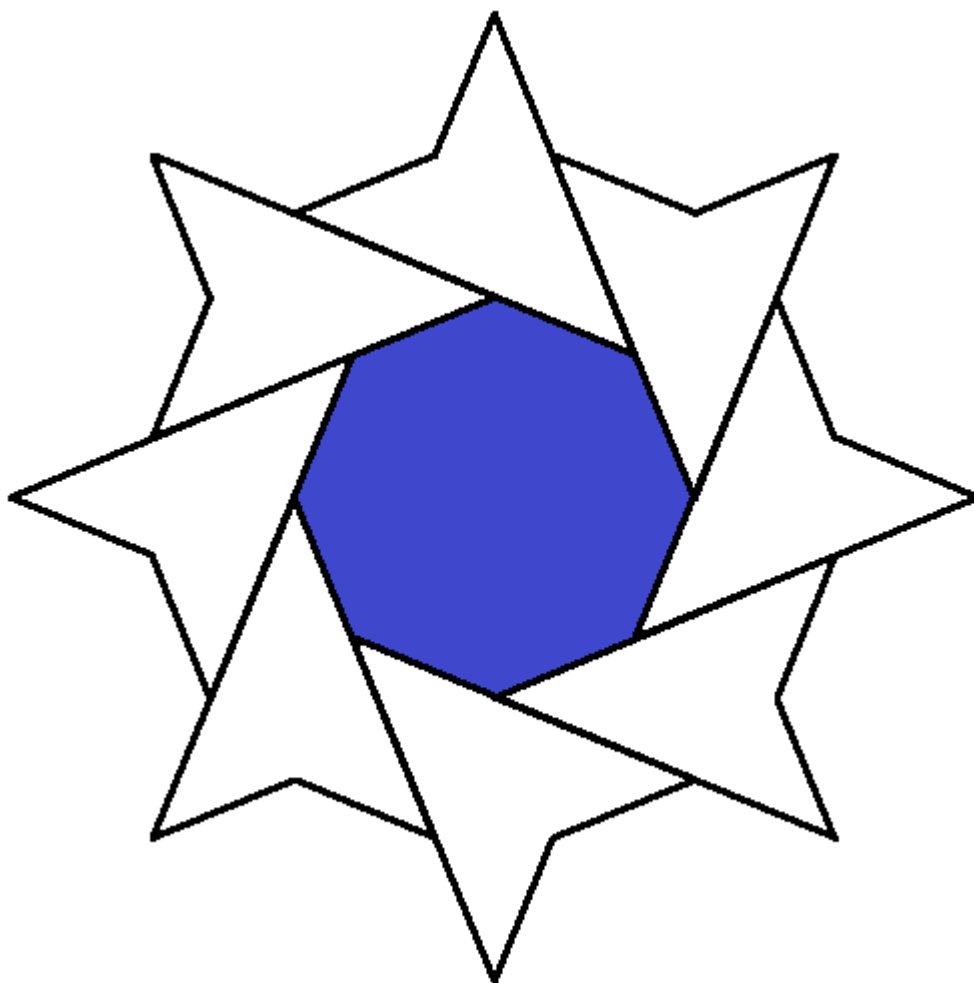


Рис.27. Инвариантная относительно T компонента

Разделим ее на 8 равных частей, как показано на рис.27, и отождествим их относительно поворота на $45n$ градусов; будем понимать под T производное отображение на получившейся фигуре. Как видно из рис. 28., преобразование T поворачивает треугольник POQ на 135 градусов относительно точки U , четырехугольник $KPQR$ – на 90 градусов вокруг V , а треугольник LRM – на 45 градусов вокруг точки W (во всех случаях поворачиваем против часовой стрелки). Назовем эти повороты u , v и w соответственно.

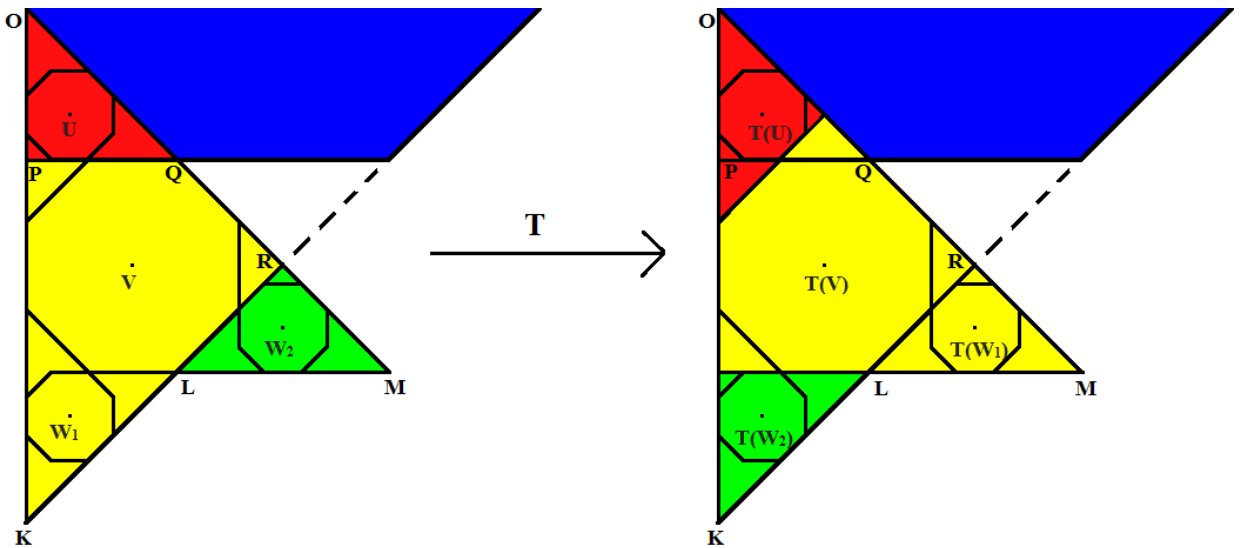


Рис.28 Модифицированное преобразование внешнего биллиарда

Заметим, что четырехугольник OKLM можно разбить на «вписанный» в него правильный восьмиугольник с центром в точке V и три равные фигуры, подобные OKLM. Каждую из этих фигур можно разбить рекурсивно (рис.29).

Заметим, что центральный восьмиугольник инвариантен относительно T. Верно также и то, что множество точек, лежащих в восьмиугольниках одного размера, также инвариантно относительно T. Не будем проводить доказательство этого (очевидного) факта; вместо этого сосредоточимся на дальнейшем анализе. Введем преобразование Г, являющееся сжатием с центром в т. О и переводящим OKLM в OK'L'M' (рис.30).

Из рис.21 очевидно получается следующая

Лемма 1: $\Gamma T x = T^k \Gamma x$, где $k = 15$ для x -ов треугольника OPQ, 9 для x -ов четырехугольника KPQR и 3 для x -ов треугольника LRM. Более точно,

$$\Gamma u(x) = uvvwwvwwvwwvwwvu\Gamma x, \Gamma v(x) = uvvwwvwwvu\Gamma(x), \Gamma w(x) = uuu\Gamma(x)$$

Для дальнейшего анализа введем понятие ранга. Рангом точки x назовем максимальное n такое, что $\Gamma^{-n}x$ еще лежит в четырехугольнике OKLM, а рангом орбиты – максимум среди рангов всех ее точек.

Лемма 2: любая траектория ранга $n > 0$ может быть получена из траектории ранга $n-1$ путем подстановки по правилу Γ из леммы 1.

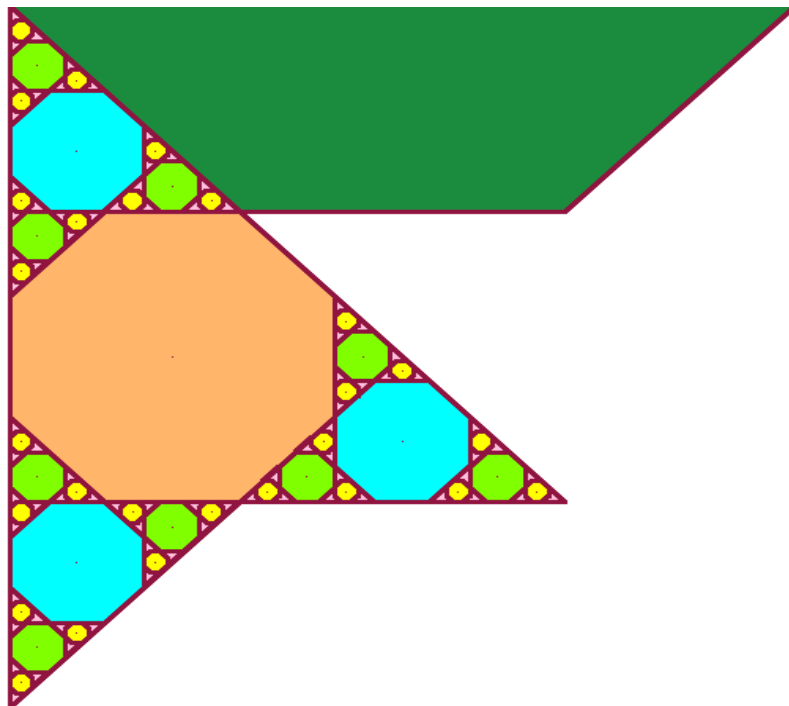


Рис.29. Самоподобие фигуры

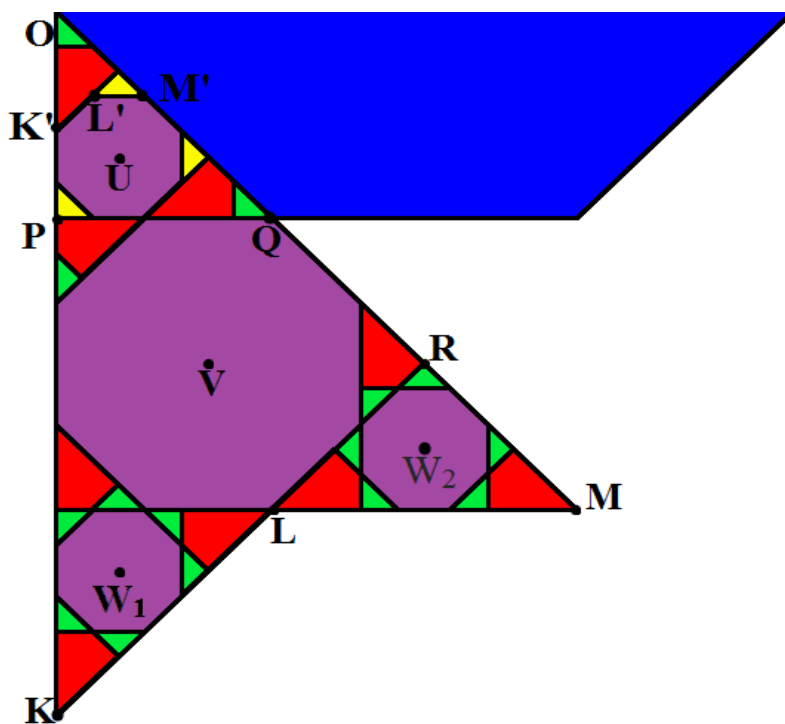


Рис.30. Доказательство леммы 1

Доказательство: рассмотрим орбиту ранга n , и пусть x – точка ранга n этой орбиты, а $y = \Gamma^{-1}x$. Тогда по лемме 1, $\Gamma T^k y = \Gamma^{f(k)}x$, где $f(k)$ – некая возрастающая функция. Т.к. ни одна из точек $\Gamma T^k y$ не имеет ранга $> n$, то ранг траектории y не превышает $n-1$, а т.к. ранг y есть $n-1$, то лемма доказана.

Лемма 2 означает, что любая периодическая траектория ранга n получается из траектории ранга 0 путем n применений операции Γ . Заметим также, что при применении Γ две соседние точки x_1 и x_2 орбиты превращаются в две точки орбиты ранга выше, между которыми появляется несколько (2, 8 или 14, если быть точнее) вершин ранга 0 (очевидно из рис.30). Это дает нам возможность посчитать размер любой орбиты. Сделаем это следующим образом. Пусть в текущей периодической орбите для получения следующего элемента a_k раз применяется оператор u , b_k раз применяется оператор v , c_k раз применяется оператор w (k – ранг траектории). Тогда из леммы 1 несложно увидеть, что после применения к орбите Γ получаем:

$$a_{k+1} = 2a_k + 2b_k + 3c_k, \quad b_{k+1} = 8a_k + 5b_k, \quad c_{k+1} = 5a_k + 2b_k.$$

Разрешая эту систему, получаем:

$$a_k = (1 + 4(-3)^k + 3 \cdot 9^k)a_0 + (-2 + 2 \cdot 9^k)b_0 + (3 - 4(-3)^k + 9^k)c_0,$$

$$b_k = (-2 - 4(-3)^k + 6 \cdot 9^k)a_0 + (4 + 4 \cdot 9^k)b_0 + (-6 + 4(-3)^k + 2 \cdot 9^k)c_0,$$

$$c_k = (1 - 4(-3)^k + 3 \cdot 9^k)a_0 + (-2 + 2 \cdot 9^k)b_0 + (3 + 4(-3)^k + 9^k)c_0,$$

а величина орбиты ранга k есть

$$a_k + b_k + c_k = (1.5 \cdot 9^n - 0.5 \cdot (-3)^n)a_0 + 9^n b_0 + (1.5 \cdot 9^n + 0.5 \cdot (-3)^n)c_0.$$

Остается лишь рассмотреть, какие траектории ранга 0 имеются в наличии; все они перечислены в таблице 1 (окрестностью в каждом случае является

соответствующий восьмиугольник; траектории ранга 0 на рис.30 раскрашены в фиолетовый цвет).

Таким образом, множество точек, имеющих периодические орбиты n-го уровня, есть, как несложно видеть, набор из $4 \cdot 9^n$ восьмиугольников, причем размер орбиты экспоненциально растет с ростом ранга.

Нетрудно видеть, что существуют точки четырехугольника OKLM, не лежащие внутри одного из таких восьмиугольников или на их границах; среди них и нужно искать точки с бесконечной аperiodической траекторией.

Таблица 1. Траектории ранга 0 и их характеристики

Положение стартовой точки	Маршрут	a_0	b_0	c_0	Период соответствующей траектории ранга n
Точка V	v	0	1	0	9^n
Окрестность V	vvvv	0	4	0	$4 \cdot 9^n$
Точка U	U	1	0	0	$1.5 \cdot 9^n - 0.5 \cdot (-3)^n$
Окрестность U	Uuuuuuuu	8	0	0	$12 \cdot 9^n - 4 \cdot (-3)^n$
Точка W_1	vw	0	1	1	$1.5 \cdot 9^n + 0.5 \cdot (-3)^n$
Окрестность W_1	$(vw)^8$	0	8	8	$12 \cdot 9^n + 4 \cdot (-3)^n$

Рассмотрим одну из таких точек, являющуюся пределом самоподобной последовательности точек, начинающейся с точек c_0, c_1, c_2 (см. рис. 31), и

продолжающейся аналогичным образом в подобном $OKLM$ четырехугольнике, находящемся внутри треугольника $c_0c_1c_2$ (т.е. есть перевести с помощью сжатия $OKLM$ в такой четырехугольник, то c_0 , c_1 и c_2 перейдут в c_3 , c_4 и c_5 , соответственно; дальнейшим сжатием получим c_6 , c_7 и c_8 и т.д.); назовем эту точку C . Эта точка не может обладать периодической орбитой (ибо иначе C должна обладать проколотой окрестностью точек одинакового периода, что в данном случае неверно), равно как и конечной орбитой (ибо в таком случае должен существовать отрезок, содержащий строго внутри себя C , содержащий точки с орбитами того же размера, что также не выполняется); следовательно, эта точка является точкой с бесконечной аperiodической траекторией.

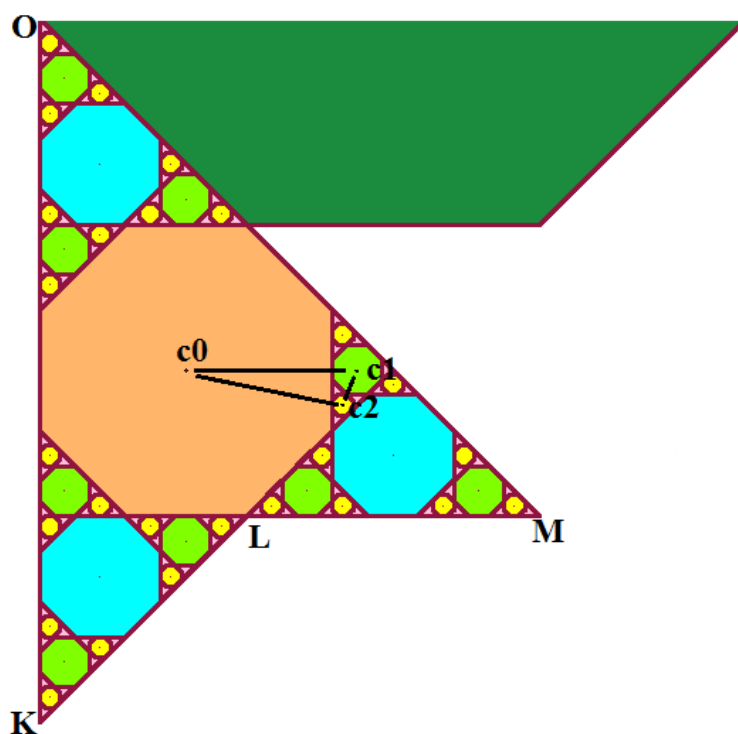


Рис.31. Периодические точки T.

Таким образом, мы показали, что существует точка с бесконечной аperiodической траекторией для преобразования внешнего бильярда относительно правильного восьмиугольника.

Глава 5. Внешний бильярд вне правильного двенадцатиугольника

Исследуем на предмет нахождения бесконечной аperiodической траектории внешний бильярд относительно двенадцатиугольника. Для начала выделим первую T -инвариантную компоненту, отождествим точки в этой компоненте, получающиеся друг из друга поворотом на 30 градусов, и рассмотрим фигуру, на которой определяется производное преобразование T (рис.32).

Мы видим, как «самолёт» для восьмиугольника превратился в «ракету» для двенадцатиугольника; преобразование T делит «ракету» на пять частей, или «зон T », как мы их иногда будем называть; верхняя часть является равнобедренным треугольником, три средние похожи на «воздушных змеев» Шварца, и действительно являются ими; пятая же часть оказывается невыпуклой, что является первым важным отличием случая двенадцатиугольника от случаев пяти- и восьмиугольника, где область определения T делилась лишь на выпуклые фигуры. Перенумеруем зоны T от 0 до 4 в порядке удаления от вершины «ракеты»; тогда для зоны T номер i преобразование T является поворотом на $150 - 30 \cdot i$ градусов.

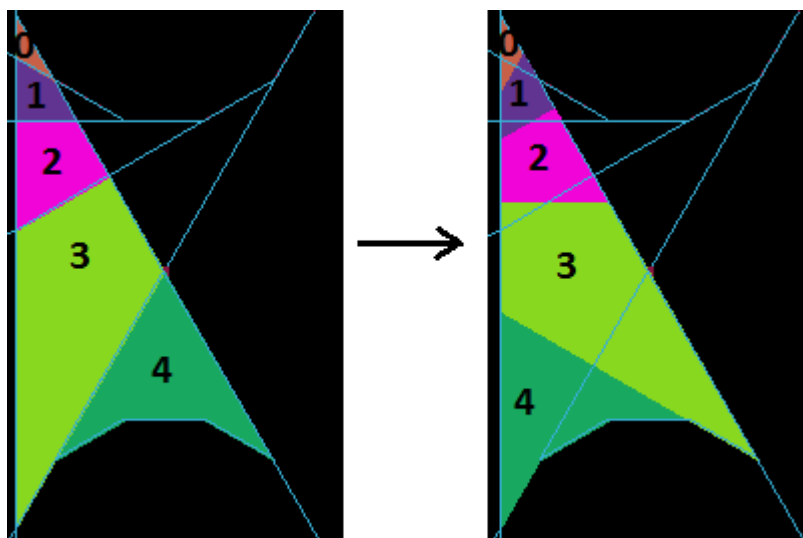


Рис.32. Ограничение преобразования внешнего бильярда для правильного двенадцатиугольника

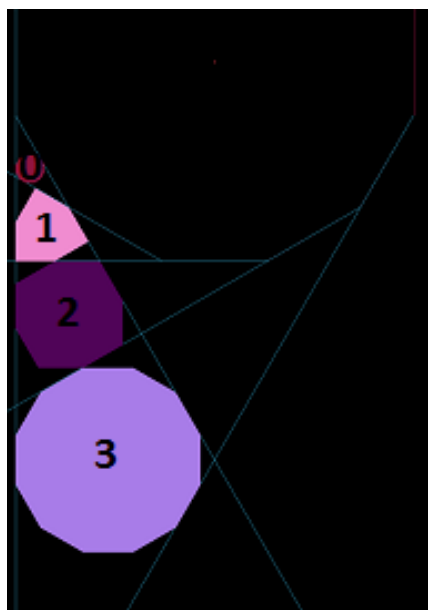


Рис.33: Инвариантные фигуры зон 0, 1, 2, 3

Заметим, что образы первых четырех зон T при применении T имеют пересечения с прообразами. Последовательно применяя преобразование T и пересекая образ с изначальной зоной, для каждой из этих четырех зон можно получить «инвариантную фигуру зоны i преобразования T » - часть зоны, инвариантную относительно T . Такие инвариантные фигуры изображены на рис. 33.

Здесь обнаруживается еще одно принципиальное отличие случая двенадцатиугольника. А именно: в случае пятиугольника все периодические компоненты являются правильными пяти- и десятиугольниками; в случае восьмиугольника все компоненты суть правильные восьмиугольники; в случае же внешних бильярдов относительно правильного двенадцатиугольника инвариантные многоугольники могут быть неправильными! Более точно, только две из инвариантных фигур являются правильными двенадцатиугольниками. Инвариантная фигура номер один (нумерация аналогична оной для зон T') равносторонним, но неправильным шестиугольником с углами по 90 и 150 градусов, инвариантным относительно поворота на 120 градусов; инвариантная же фигура номер два

оказывается неправильным равносторонним восьмиугольником с углами по 150 и 120 градусов, инвариантным относительно поворота на 90 градусов.

По аналогии со случаем восьмиугольника, оказывается целесообразным ввести преобразование Γ_λ , сжимающее большую ракету в подобную ей маленькую, располагающуюся на инвариантной фигуре зоны 0 и изображенную на рис. 34; коэффициент сжатия λ равен $7 - 4\sqrt{3} \approx 0.072$.

Поймём, каким образом могут выглядеть периодические компоненты компоненты ранга 0 (относительно Γ_λ). По аналогии с восьмиугольником, такими компонентами являются уже известные нам инвариантные фигуры, а также фигуры, получающиеся из изначальных путем поворота на 150 градусов вокруг центра инвариантной фигуры зоны номер 3; все эти фигуры и их нумерация изображены на рис.35.

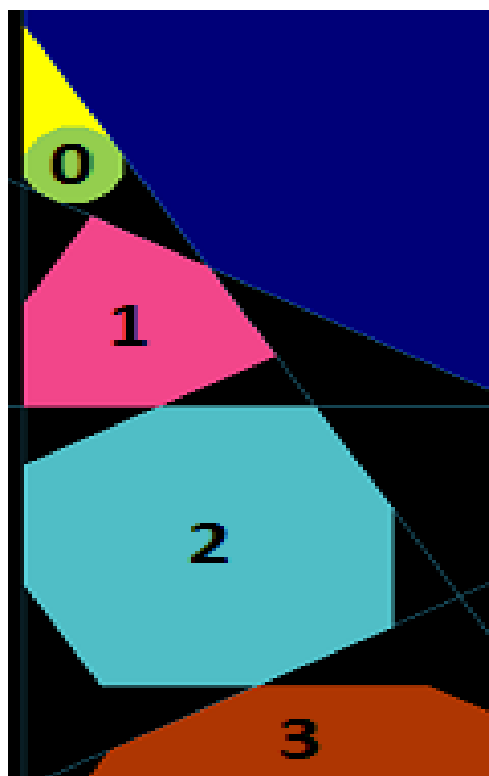


Рис. 34. Область значений преобразования Γ_λ (маленькая ракета)]

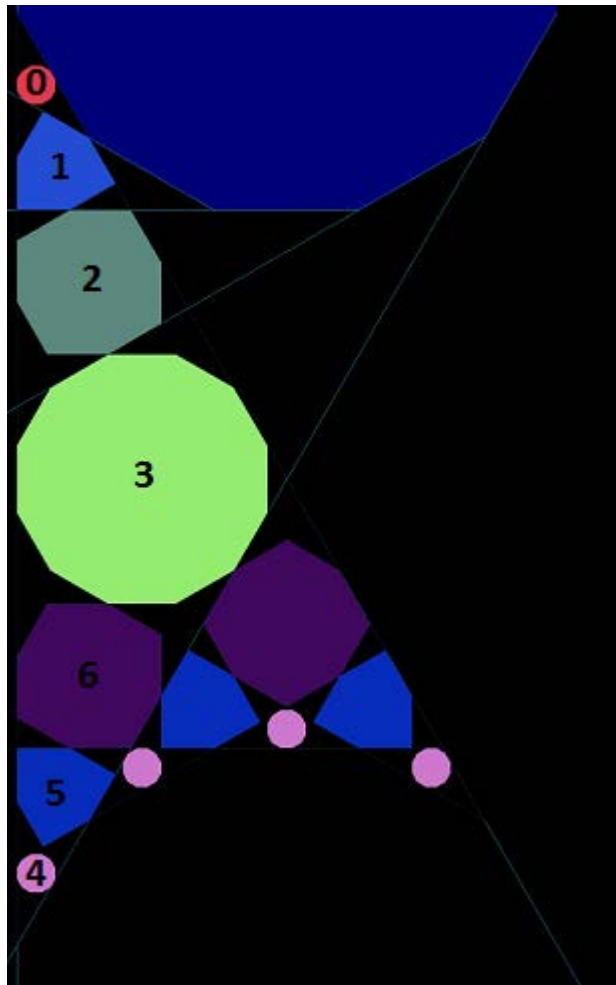


Рис. 35. Первые 7 периодических компонент

Отметим, что уже на этом этапе мы видим периодические траектории компонент с периодами 3 и 4. Можно заметить, что существуют еще две достаточно большие компоненты ранга 0; эти компоненты (и их траектории) изображены на рис.36.

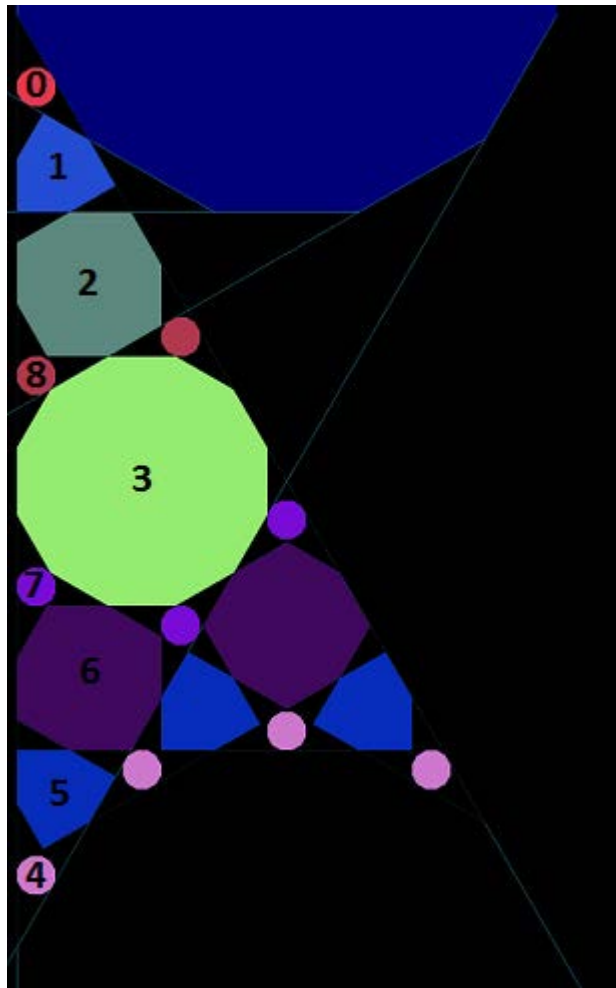


Рис. 36. Первые девять периодических компонент.

Возникает гипотеза о том, что только эти компоненты являются компонентами ранга 0. Проверим её. Для этого сожмем имеющиеся компоненты в λ (точнее, в $1/\lambda$) раз и рассмотрим траектории получившихся фигур на рис. 37. Из рисунка видно, что какие-то компоненты ранга 0 мы упустили; например, таковой компонентой может являться двенадцатиугольник, равный по размеру сжатой инвариантной фигуре зоны 0, на “кончике хвоста” большой ракеты; самым же интригующим здесь является наличие “солнечной короны” вокруг двенадцатиугольников – членов траектории компоненты номер 4; по-видимому, внутри набора этих корон существуют и другие периодические траектории ранга 0; не будем углубляться далее в этот вопрос.

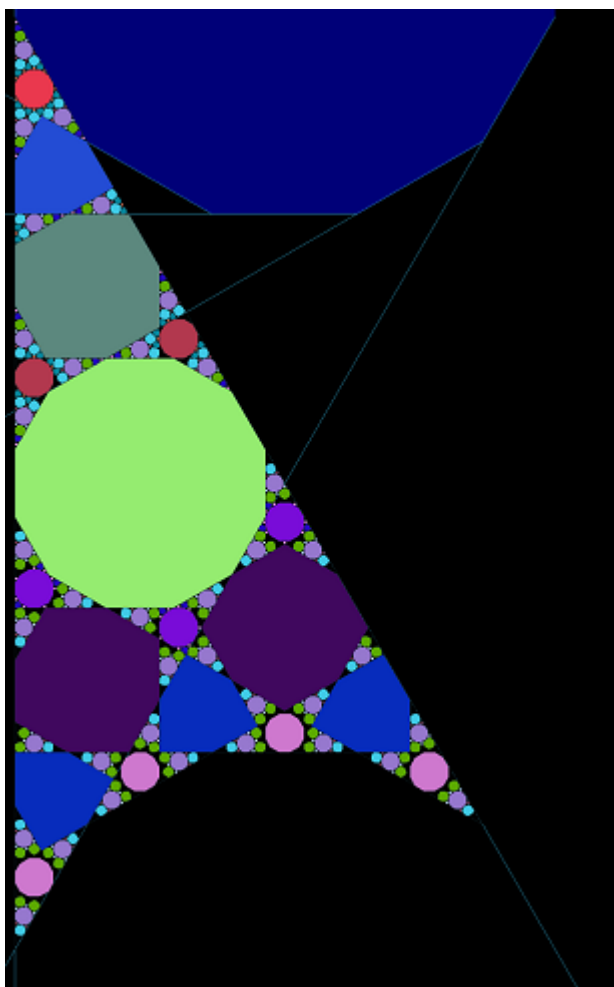


Рис. 37. Периодические траектории ранга 1

Хотя нам не удалось получить все траектории первого уровня, мы видим определенное самоподобие среди траекторий первого уровня. В случае восьмиугольника найденная бесконечная аperiodическая точка являлась пределом некоторой спиралеобразной последовательности компонент; в случае же двенадцатиугольника последовательность может выглядеть следующим образом. На рис.38 изображены три периодические компоненты, окружающие “меньшую ракету”, подобную исходной. Пусть Γ – преобразование, переводящее “большую ракету” в “меньшую”; данные из предыдущих рисунков дают возможность предположить, что три выделенные компоненты при применении Γ перейдут в три многоугольника, также являющихся периодическими компонентами; более того, при последовательном применении Γ таким образом, по-видимому, можно

получить все новые периодические компоненты с возрастающим периодом. Компьютерные эксперименты подтверждают эту гипотезу; последовательность периодов компонент, участвующих в “спирали”: 1, 1, 2, 37, 63, 100, 961, 1423, 2384, 26173, 39443... .

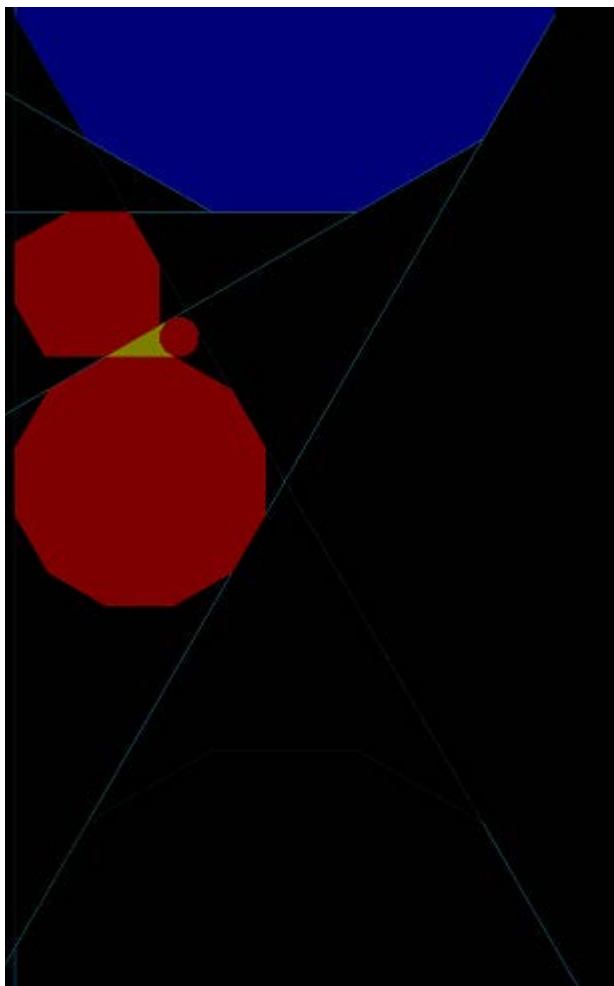


Рис.38. «Меньшая ракета»

Приступим к поиску бесконечной аperiodической траектории. Для этого сформулируем алгоритм, который уже помог нам обнаружить аperiodическую траекторию для правильного восьмиугольника. В уже имеющихся терминах, для двенадцатиугольника алгоритм выглядит следующим образом:

1) Найти в «ракете» подобную ей меньшую «ракету» и преобразование подобия Γ , что для всех точек внутри маленькой «ракеты» $\Gamma T x = T^{k(x)} \Gamma x$;

заметим также, что для точки $y = \Gamma x$ преобразование $T^{k(x)}y$ является преобразованием первого возвращения (first return map) относительно преобразования T . Таким образом, преобразование T' первого возвращения для маленькой «ракеты» должно быть устроено так же, как и преобразование T , т. е. должно выполняться свойство $\Gamma T = T' \Gamma$;

2) Ввести относительно преобразования Γ ранг орбиты; найти все периодические орбиты ранга 0;

3) Показать, что Γ инвариантно относительно каждого из трех типов точек; вывести отсюда, что все периодические орбиты можно получить из орбит ранга 0 с помощью «подстановочного» преобразования Γ ; понять, как устроены периодические компоненты и их периоды;

4) Найти удачную последовательность сходящихся к некоторой компоненте возрастающего периода; показать, что такая точка не может быть ни периодической, ни обладать конечной траекторией; вывести отсюда, что такая предельная точка обладает бесконечной аperiodической траекторией.

Попробуем реализовать такой алгоритм. По аналогии со случаями пяти- и восьмиугольников «хорошим» должно оказаться преобразование Γ_λ , рассмотренное нами выше. Однако, компьютерные эксперименты показывают, что преобразование первого возвращения для «маленькой ракеты» выглядит совершенно по-другому.

Как видно из рис.39, преобразование первого возвращения делит «маленькую ракету» на десять многоугольников; количества углов итераций до первого возвращения этих многоугольников описаны в таблице 2. Разумеется, хорошего преобразования Γ в данном случае не существует.

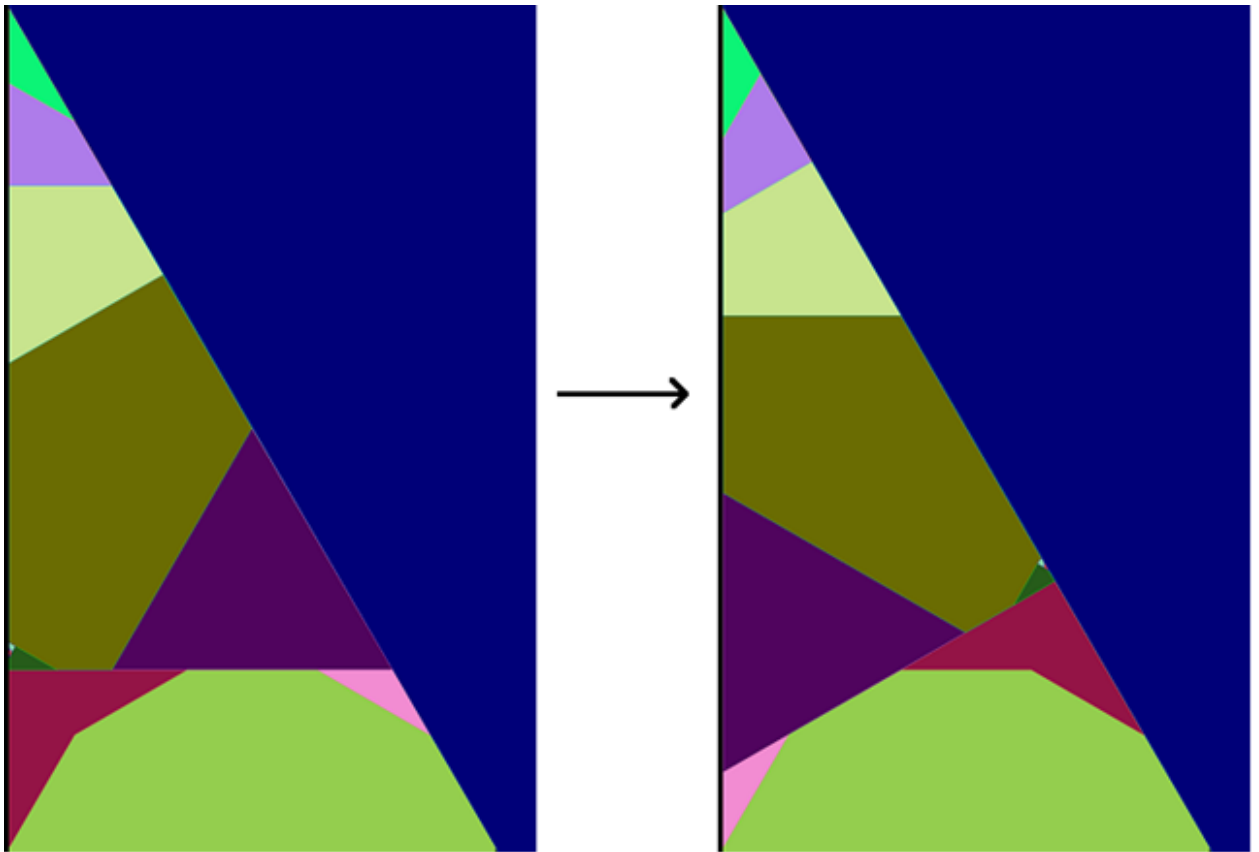


Рис. 39. Преобразование первого возвращения для маленькой ракеты

Таблица 2. Преобразование первого возвращения для маленькой ракеты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество сторон многоугольника	4	3	3	4	3	6	4	4	4	3
Количество итераций до первого возвращения	2	3	11	20	35	37	63	185	269	479

Но заметим, что наряду с большой и маленькой ракетами можно выделить и «среднюю», опирающуюся на стабильную зону номер 3 (рис. 40). Для неё преобразование первого возвращения выглядит гораздо более структурированным, нежели для «маленькой ракеты»; многоугольников оказывается восемь; большие четыре из них возникают естественным образом из разбиения большой ракеты на зоны; поведение же остальных

многоугольников очень похоже на поведение больших четырех зон, с той лишь разницей, что маленькие многоугольники перемещаются (рис. 41). Так или иначе, самоподобия с другими рассмотренными ракетами не наблюдается.

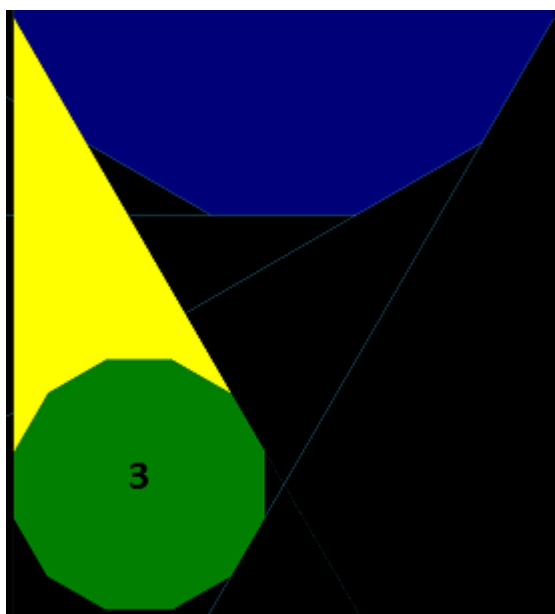


Рис.40. «Средняя ракета»

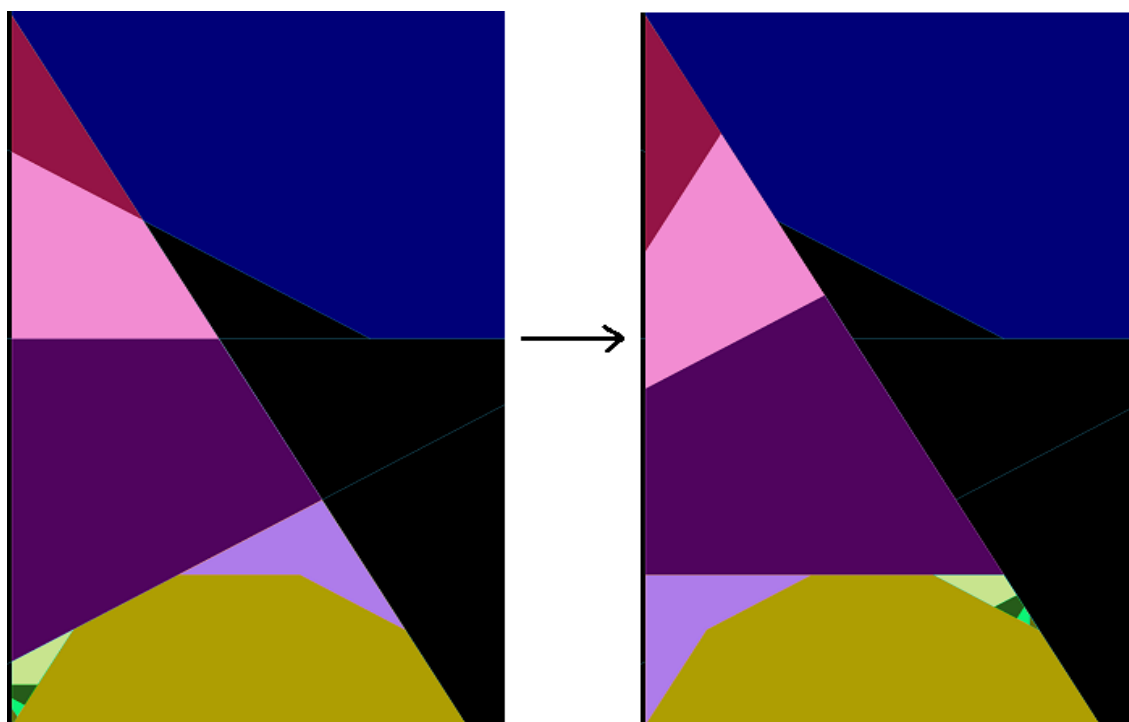


Рис. 41. Преобразование первого возвращения для «средней» ракеты

Однако заметим, что «большую и маленькую ракеты» в механизме можно обобщить до двух подобных фигур, обладающих похожими преобразованиями первого возвращения T . В связи с этим целесообразно рассмотреть «маленькую среднюю» ракету — ракету, подобную с коэффициентом λ средней ракете и имеющую с последней общую вершину. Оказывается, что преобразование первого возвращения T для такой новой ракеты полностью (с точностью до подобия) совпадает с аналогичным преобразованием для средней ракеты! Более формально, если $T_{\text{ср}}$ - преобразование первого возвращения для средней ракеты, $T_{\text{мал.ср}}$ - его аналог для маленькой средней ракеты, а Γ — сжатие с центром в вершине «ракет» и коэффициентом λ , то для каждой точки x средней ракеты, для которых определено преобразование $T_{\text{ср}}$, выполняется равенство $T_{\text{мал.ср}} \Gamma x = \Gamma T_{\text{ср}} x$!

Перейдем ко второму шагу алгоритма. Чтобы понять, какие точки «средней ракеты» обладают траекториями ранга ноль, т. е. не попадающими в «маленькую среднюю», изобразим траектории точек последней (рис.42):

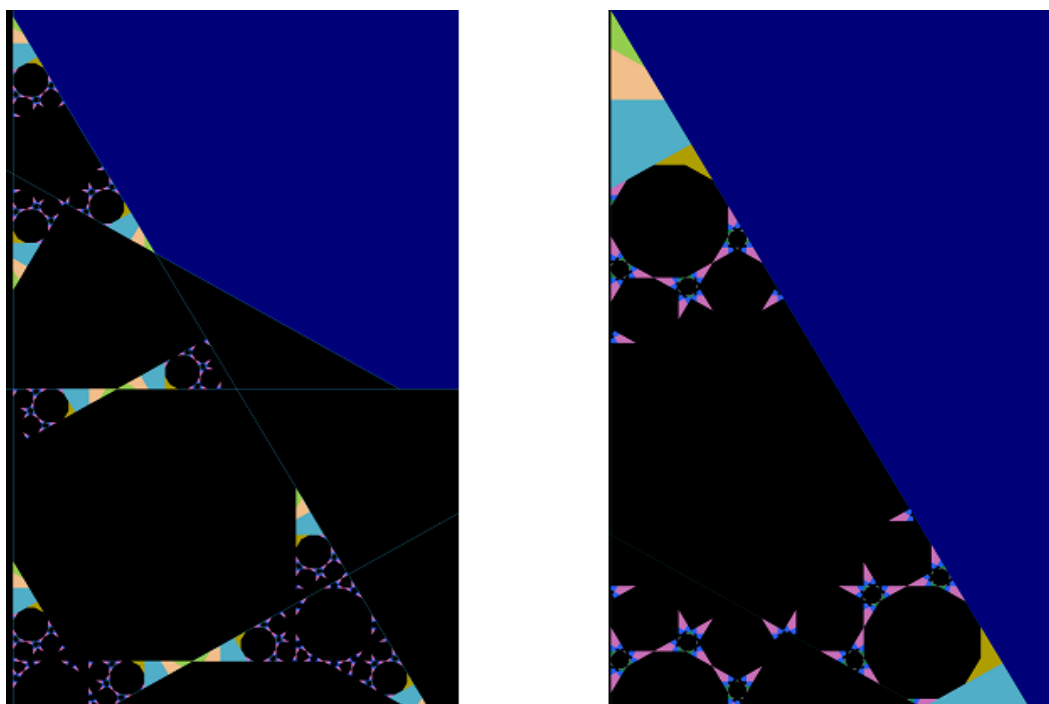


Рис. 42. Траектории точек «маленькой средней» ракеты (справа – в большем масштабе)

Из рисунка можно увидеть некоторые периодические компоненты ранга 0, аналогичные инвариантным зонам; однако для того, что алгоритм сработал, требуется, чтобы вся «средняя ракета» состояла только из выделенных компонент нулевого уровня и следов траекторий точек первого и выше уровней; пустые (черные) зоны на рис.42 не сводятся (по крайней мере, явным образом) к набору выпуклых многоугольников, являющихся периодическими компонентами; это обстоятельство делает невозможным применение второго шага алгоритма.

Разумеется, не только приведенные пары «ракет» могли бы образовывать искомое самоподобие. В приложении можно найти все многоугольники, для которых было проведено исследование преобразование первого возвращения; некоторые пары из них также образуют «хорошее» самоподобие, но по тем же причинам их этих самоподобий не следует существование бесконечной апериодической траектории.

Выводы

Подведем итоги. В данной работе:

1) рассмотрены простые случаи внешнего бильярда вне правильных решеточных многоугольников; доказано, что в этих случаях не существует бесконечной аперидической траектории;

2) детально исследован внешний бильярд вокруг правильного восьмиугольника; обнаружена ренормализационная схема, исследованы периодические орбиты; построена последовательность, пределом которой является точка с бесконечной аперидической траекторией;

3) экспериментально исследован внешний бильярд вокруг правильного двенадцатиугольника; экспериментально подтверждено существование бесконечной аперидической траектории вокруг двенадцатиугольника.

Литература

1. Табачников С. Внешние бильярды // Успехи математических наук, т.48, вып. 6(294). 1993 г.
2. Табачников С. Геометрия и бильярды // Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», АНО «Ижевский институт научных исследований», М. - Ижевск, 2011 г.
3. S. Tabachnikov. On the dual billiard problem. *Advances in Math.*, 115(1995), 221-249.
4. J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems*, *Ann. Of Math. Stud.*, 77, Princeton, 1973.
5. J. Moser. Is the solar system stable? *Math. Intell.* 1 (1978).
6. Tabachnikov S., Monroe I. Asymptotic Dynamics of the dual Billiard Map. An Example of a Semicircle, 1992.
7. D. Dolgopyat, B. Fayad. Unbounded orbits for semicircular outer billiard. *Ann. Henri Poincare* 10 (2009), p. 357-375.
8. R. Schwartz. Unbounded orbits for outer billiards. *J. Mod. Dyn.* 1 (2007), p.371-424.
9. R. Schwartz. Outer Billiards on kites. *Annals of Mathematics Studies*, 171. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
10. R. Schwartz. Outer Billiards, arithmetic graphs, and the octagon. Preprint arXiv: 1006.2782
11. Shadienko A., Vivaldi F. Global Stability of a class of discontinuous dual Billiards // *Comm. Math. Phys.* 1987. V. 110. P. 625-640.
12. Kolodziej R. The Antibilard Outside a Polygon // *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 1989. V. 37. P. 163-168.
13. Gutkin E., Symany N. Dual Polygonal Billiards and Necklace Dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1991. V. 143. P. 431-450.
14. Tabachnikov S. A proof of Culter's theorem on existence of periodic orbits

- in polygonal outer billiards // *Geom. Dedicata*, 129(1): 83-87(2007)
15. In-Jee Jeong. Outer Billiards with Contraction: Regular Polygons. arXiv:1502.02359v1.
 16. Gutkin E., Tabachnikov S. Complexity of piecewise convex transformations in two dimensions, with applications to polygonal billiards on surfaces of constant curvature // *Moscow Mathematics journal*, 6:673–701, 2006.
 17. N. Bedaride, J Cassaigne. Outer billiard outside regular polygons. arXiv:0912.5263

Приложение

В данном приложении находятся данные о преобразованиях первого возвращения для различных фигур.

Начнем мы с «самолётика», находящегося над инвариантной фигурой номер один, и его «маленького» аналога, т.е. образа исходного самолётика при применении Γ_λ ; их преобразования первого возвращения совпадают (с точностью до Γ_λ).

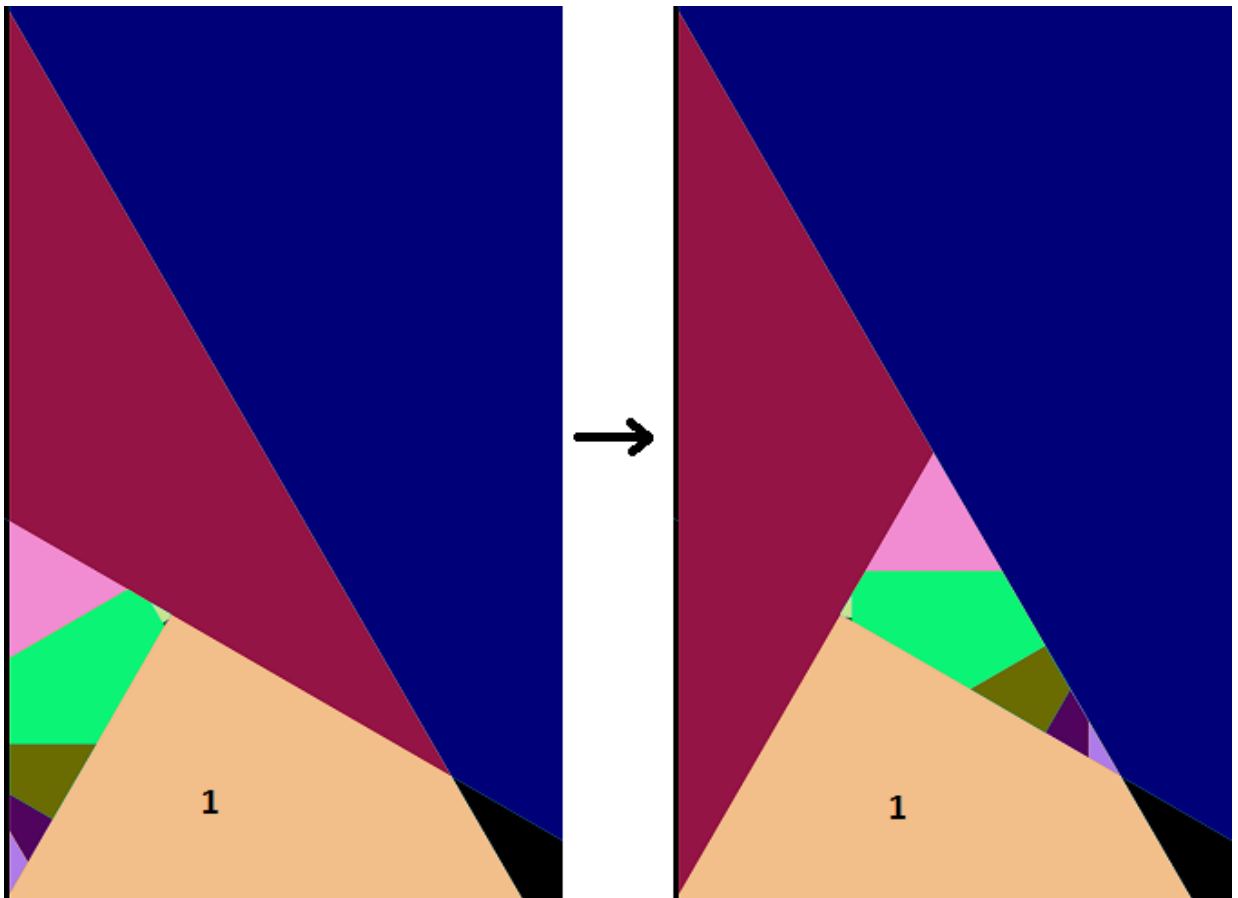


Рис.1. Преобразование первого возвращения для «самолетика»

Таблица 1. Преобразование первого возвращения для «большого самолетика»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество сторон многоугольника	3	3	4	3	6	4	4	4	3
Количество итераций до первого	1	9	18	33	35	61	183	267	477

возвращения									
-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Таблица 2. Преобразование первого возвращения для «маленького самолетика»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество сторон многоугольника	3	3	4	6	3	4	4	4	3
Количество итераций до первого возвращения	35	429	684	891	1109	1353	4939	7463	13773

Следующим мы рассмотрим «зону 0» и её «средний» аналог – «среднюю зону 0» (образ зоны 0 при преобразовании большой ракеты в среднюю).

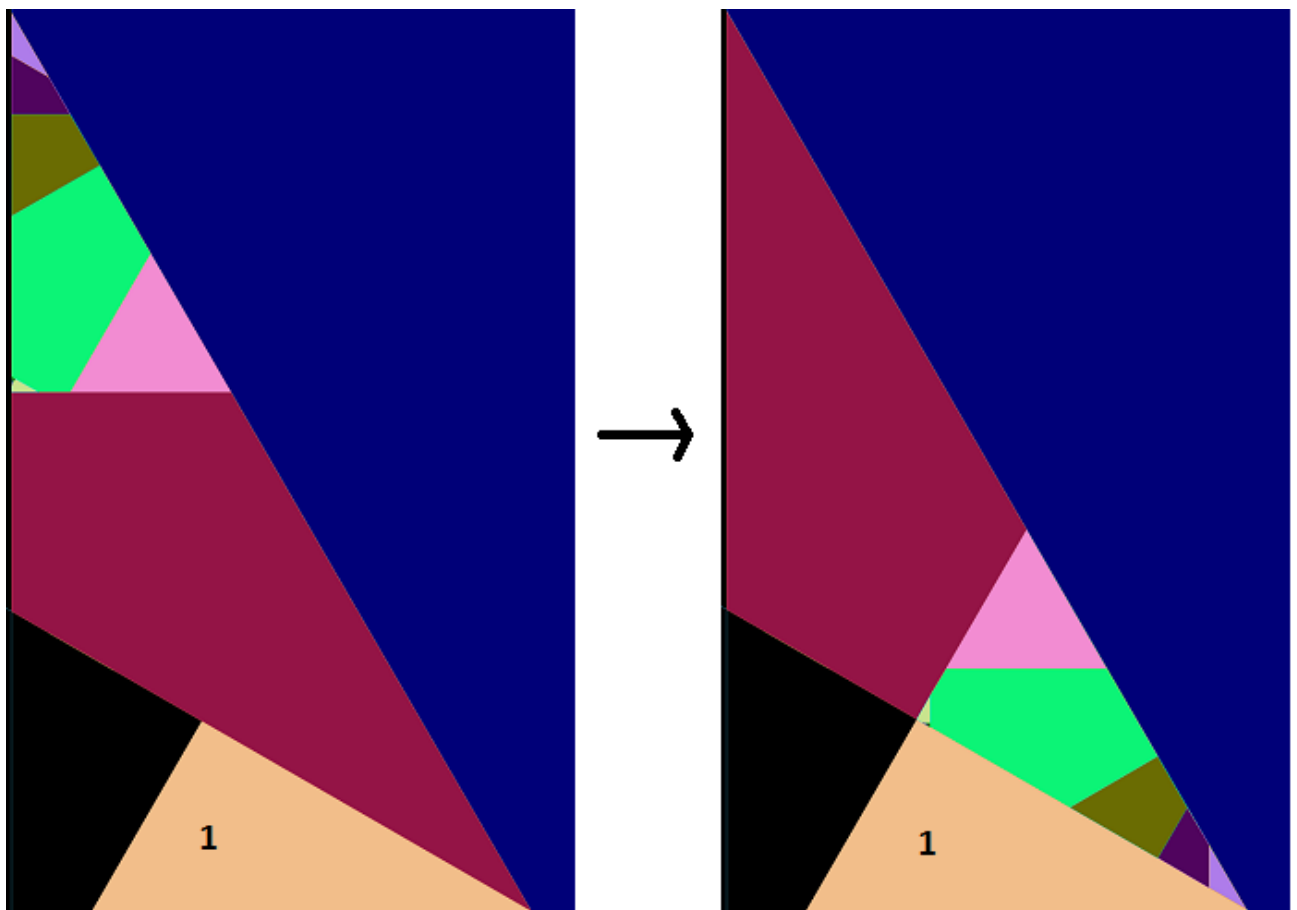


Рис.2. Преобразование первого возвращения для «зоны 0»

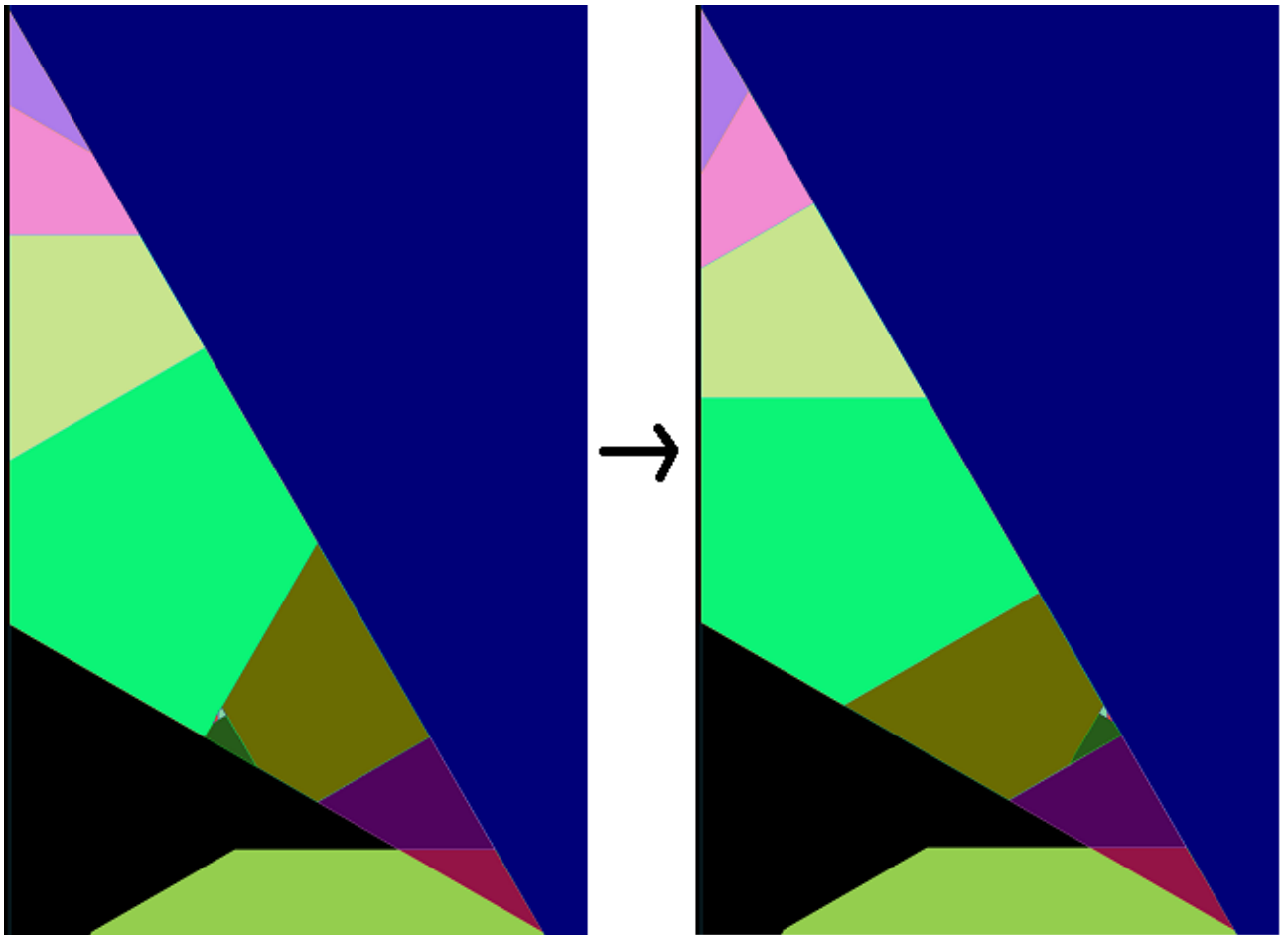


Рис.3. Преобразование первого возвращения для средней «зоны 0»

Таблица 3. Преобразование первого возвращения для «зоны 0»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество сторон многоугольника	4	3	4	3	6	4	4	4	3
Количество итераций до первого возвращения	1	10	19	34	36	62	184	268	478

Таблица 4. Преобразование первого возвращения для средней «зоны 0»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество сторон многоугольника	3	4	4	3	5	5	4	4	4	3
Количество итераций до первого возвращения	18	20	24	35	37	48	63	196	280	490

В конце, приведем данные о преобразованиях первого возвращения для различных «ракет». Данные для «маленькой» ракеты приведены ранее; здесь же мы рассмотрим «маленькую-маленькую» ракету (полученную из «маленькой» с помощью Γ_λ); преобразование первого возвращения которой

подобно «маленькой» ракете; также в поле нашего зрения попадут преобразования первого возвращения для «средней» и «маленькой средней» (аналогично) ракетам.

Таблица 5. Преобразование первого возвращения для средней «зоны 0»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество сторон многоугольника	4	3	3	4	6	3	4	4	4	3
Количество итераций до первого возвращения	70	105	499	754	961	1179	1423	5009	7533	13843

Таблица 6. Преобразование первого возвращения для средней ракеты

	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество сторон многоугольника	3	4	4	4	4	3	4	4
Количество итераций до первого возвращения	1	1	1	1	10	25	27	53

Таблица 7. Преобразование первого возвращения для средней ракеты

	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество сторон многоугольника	4	3	4	4	4	4	3	4
Количество итераций до первого возвращения	20	35	37	63	318	525	743	987