

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Физический факультет

На правах рукописи

Лихачёв Григорий Васильевич

**Оптические частотные гребенки и солитоны в
микрорезонаторах**

Специальность 01.04.01 —
«Приборы и методы экспериментальной физики»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Городецкий Михаил Леонидович
доктор физ.-мат. наук, профессор
Биленко Игорь Антонович

Москва — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	11
1.1 Современное состояние исследований оптических частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах	11
1.2 Выводы к главе 1	25
Глава 2. Численное моделирование	26
2.1 Теоретическое описание керровских гребенок в микрорезонаторах	26
2.1.1 Оптическая нелинейность в микрорезонаторах	26
2.1.2 Отдельная мода	27
2.1.3 Несколько мод. Система связанных уравнений	29
2.1.4 Уравнение Луджиато-Лефевра	31
2.2 Численные методы исследования	33
2.2.1 Метод Рунге-Кутты	33
2.2.2 Фурье метод расщепления по параметрам (SSFM)	35
2.2.3 Ускорение вычислений для системы связанных уравнений	36
2.3 Результаты моделирования	39
2.3.1 Используемые программы	39
2.3.2 Моделирование по экспериментальным данным	40
2.3.3 Сравнение моделирования разными методами	44
2.3.4 Учет нагрева резонатора.	46
2.3.5 Отсутствие генерации гребенки.	47
2.3.6 Различные сценарии моделирования	48
2.3.7 Влияние дисперсии резонатора	50
2.3.8 Моделирование генерации дисперсионной волны по экспериментальным данным	54
2.3.9 Моделирование уравнения Луджиато-Лефевра методом конечных разностей	55

2.4	Моделирование возбуждения оптических частотных гребенок и платиконов в микрорезонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости	56
2.5	Генерация оптических частотных гребенок и платиконов при двухчастотной и амплитудно-модулированной накачке	62
2.6	Выводы к главе 2	66

Глава 3. Экспериментальное исследование оптических частотных гребенок в кристаллических микрорезонаторах

3.1	Изготовление кристаллических микрорезонаторов методом алмазного точения и полировки	68
3.1.1	Практические замечания по изготовлению кристаллических микрорезонаторов	78
3.2	Экспериментальное наблюдение оптических частотных гребенок и солитонов в резонаторах из MgF_2	82
3.2.1	Экспериментальная установка и результаты генерации солитонов	82
3.2.2	Методы достижения односолитонного режима	90
3.2.3	Исследование зависимости свойств солитонов от отстройки частоты лазера накачки	95
3.2.4	Исследование метода долговременной стабилизации частоты повторения солитона	98
3.3	Экспериментальное наблюдение вынужденного комбинационного рассеяния и рассеяния Мандельштама-Бриллюэна в кристаллических микрорезонаторах	98
3.4	Выводы к главе 3	104

Глава 4. Методы генерации двойных оптических гребенок и солитонов в кристаллических микрорезонаторах

4.1	Генерация двух солитонных оптических гребенок в двух резонаторах на одном цилиндре	105
4.2	Генерация солитонных оптических гребенок в одном резонаторе на разных семействах мод в одном направлении	109

4.3	Генерация солитонных оптических гребенок в одном резонаторе на разных семействах мод в противоположных направлениях . .	115
4.4	Генерация солитонных оптических гребенок в одном резонаторе на одном семействе мод в противоположных направлениях	120
4.5	Выводы к главе 4	123
Заключение		124
Список литературы		125

Введение

Открытие в 2007 году оптических частотных гребенок в оптических микрорезонаторах [1] и последующая демонстрация в 2014 году оптических временных солитонов [2] с низким уровнем фазового шума вызвали волну интереса и исследований в области микрорезонаторов и частотной метрологии [3;4]. Оптическая частотная гребенка в микрорезонаторе (далее также называемая керровской частотной гребенкой или оптической гребенкой) представляет собой набор эквидистантных спектральных линий, получающихся каскадно при накачке микрорезонатора из нелинейного материала с помощью лазера непрерывного излучения. Керровские частотные гребенки имеют расстояния между линиями 5-1000 ГГц и позволяют достичь минимальных габаритов устройств, недостижимых для оптических гребенок, полученных с помощью фемтосекундных лазеров с синхронизацией мод. В последние годы наблюдается быстрый и значительный прогресс в этой области. За прошедшее с открытия время был проведен теоретический анализ и обширное численное моделирование богатой нелинейной динамики процесса формирования оптических гребенок. Солитонный режим оптических гребенок был продемонстрирован в кристаллических резонаторах из MgF_2 [2], в интегральных микрорезонаторах из Si_3N_4 [5], Si [6], SiO_2 [7], LiNbO_3 [8]. Ширина оптической гребенки из интегрального микрорезонатора достигла октавы [9], солитоны были продемонстрированы в ближнем ИК на границе видимого [10], телекоммуникационном диапазоне на 1.55 мкм [2] и среднем ИК [11]. Оптические частотные гребенки в микрорезонаторах характеризуются сложной динамикой и привели к наблюдению различных эффектов: генерации светлых солитонов [2], темных солитоноподобных импульсов [12], излучения дисперсионных волн [5], Рамановского самовоздействия и сдвига частоты [13], Стоксовых солитонов [14], бризерных режимов [15], солитонных кристаллов [16]. Были проведены эксперименты, демонстрирующие их разнообразные практические применения: калибровка эшелле-спектрографов для поиска экзопланет [17], прямая спектроскопия поглощения веществ методом двойной гребенки [18], оптические часы [19], источник каналов в телекоммуникации с рекордной пропускной способностью [20], компактный радиофотонный

источник СВЧ сигнала с низким уровнем фазового шума [21], источник импульсов для быстрого измерения расстояний с высокой точностью (ЛИДАР) [22], полностью интегральный синтезатор оптических частот [23].

Количество публикаций с 2014 по 2018 годы с ключевыми словами "солитоны в оптических резонаторах" составило около 600, из них несколько десятков в самых высокорейтинговых научных журналах. В случае преодоления нескольких нерешенных проблем, оптические частотные гребенки из микрорезонаторов могут стать востребованным коммерческим продуктом.

Несмотря на обширное изучение оптических частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах, остаются нерешенными важные задачи: генерация оптической гребенки шириной в октаву с расстоянием между линиями менее 100 ГГц, доступном для детектирования современной электроникой и полная ее стабилизация; создание генератора гребенки в полностью интегральном исполнении, включая лазер накачки; повышение энергетической эффективности процесса нелинейного преобразования частот, повышение мощности оптической гребенки; детерминированная генерация оптических гребенок с малыми шумами при нормальной дисперсии групповой скорости резонатора, детерминированная генерация односолитонных режимов как в одном, так одновременно и в нескольких резонаторах.

Целью данной работы является поиск методов генерации оптических частотных гребенок в микрорезонаторах при различной дисперсии групповой скорости на различных длинах волн накачки, экспериментальное получение солитонов в кристаллических микрорезонаторах и изучение их возможных приложений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать численный метод моделирования динамики оптических частотных гребенок в микрорезонаторах.
2. Разработать методику изготовления кристаллических микрорезонаторов с высокой добротностью.
3. Создать экспериментальную установку для изучения свойств кристаллических микрорезонаторов.
4. Экспериментально получить солитонный режим генерации керровской гребенки, изучить его свойства и продемонстрировать практические применения.

Научная новизна:

1. На основе численного моделирования были указаны ограничения на ширину оптической гребенки в зависимости от дисперсии групповой скорости резонатора и на влияние эффекта нормального расщепления мод на возможность генерации солитонов.
2. На основе численного моделирования был предложен оригинальный метод генерации оптических частотных гребенок при нормальной дисперсии групповой скорости в резонаторе при отклонении дисперсионного закона от параболического вида.
3. На основе численного моделирования был предложен оригинальный метод генерации оптических частотных гребенок при нормальной дисперсии групповой скорости в резонаторе при использовании двух-частотной или амплитудно-модулированной накачки.
4. Впервые была продемонстрирована методика изготовления идентичных по форме кристаллических микрорезонаторов высокой добротности с различием по диаметру не более 1 мкм.
5. Впервые продемонстрирована возможность одновременной генерации солитонов в идентичных микрорезонаторах, расположенных на одном кристаллическом цилиндре.
6. Впервые продемонстрирована возможность одновременной генерации нескольких солитонов в одном резонаторе на разных семействах пространственных мод, распространяющихся как в одном, так и в противоположных направлениях. Продemonстрирована применимость данного метода для спектроскопии поглощения веществ.
7. Впервые продемонстрирована возможность долговременной стабилизации частоты повторения солитона с помощью эффекта захватывания на боковую линию амплитудной модуляции лазера накачки.

Практическая значимость разработанной методики изготовления кристаллических микрорезонаторов заключается в возможности повторяемо изготавливать высокодобротные микрорезонаторы с заданными характеристиками. Экспериментальная демонстрация генерации двойных оптических гребенок в одном резонаторе на разных семействах мод имеет прямое приложение в устройствах спектроскопии поглощения и устройствах быстрого измерения расстояний. Экспериментальная демонстрация стабилизированного солитонного

режима имеет прямое практическое применение как источника высокостабильного СВЧ сигнала на частоте повторения солитона.

Методология и методы исследования. В работе использовались как общенаучные методы: анализ, наблюдение, сравнение, эксперимент, так и специальные методы численного компьютерного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработанный вычислительный пакет программ, основанный на решении системы уравнений для нелинейно связанных мод, дает точную картину процесса генерации оптических частотных гребенок и солитонов в резонаторах из материалов с кубичной нелинейностью. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными по режимам генерации оптических частотных гребенок и их свойствам.
2. Использование двухчастотной или амплитудно-модулированной накачки с разницей частот, кратной области свободной дисперсии резонатора, приводит к возможности генерации темных солитоноподобных структур в микрорезонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости.
3. Разработанный метод изготовления кристаллических микрорезонаторов с помощью алмазного точения и полировки алмазными суспензиями позволяет воспроизводимо изготавливать идентичные по форме микрорезонаторы с добротностью более 5×10^8 с различием по диаметру не более 1 мкм.
4. В двух микрорезонаторах из MgF_2 оптимизированной формы, изготовленных на одном кристаллическом цилиндре, возможна воспроизводимая одновременная генерация оптических временных солитонов, обладающих узкими СВЧ сигналами биений так, что разность частот повторений солитонов в этих двух микрорезонаторах не превышает 2 МГц.
5. Высокодобротные кристаллические микрорезонаторы из MgF_2 поддерживают одновременную генерацию оптических временных солитонов на разных пространственных семействах мод, распространяющихся как в одном, так и в противоположных направлениях. Результирующий СВЧ сигнал мультигетеродинирования двух оптических солитонов

может использоваться для проведения спектроскопии поглощения веществ для оптических линий, находящихся в области спектрального покрытия солитонов.

Достоверность полученных результатов определяется адекватностью использованных физических моделей и математических методов, выбранных для решения поставленных задач, корректностью использованных приближений, а также соответствием результатов теоретических и численных расчетов и экспериментальных данных. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Численная модель основана на решении системы нелинейных дифференциальных уравнений, полученных из уравнений Максвелла. Использовались широко известные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе экспериментальных исследований лежали классические методы оптики и методики измерений физических величин.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Microresonator Frequency Combs and Applications, Аскона, Швейцария 2014
2. CLEO/QELS US, Сан-Хосе, США 2014
3. PQE-2015, Сноуберд, США 2015
4. CLEO US, Сан-Хосе, США 2015
5. XV Всероссийская школа-семинар "Физика и применение микроволн" имени профессора А.П. Сухорукова ("Волны-2015"), Красновидово, Россия 2015
6. Third International Conference on Quantum Technologies (ICQT 2015), Москва, Россия 2015
7. SPIE Photonics West, Сан-Франциско, США 2016
8. 2016 International Conference Laser Optics (ICLO), Санкт-Петербург, Россия 2016
9. SPIE Photonics West, Сан-Франциско, США 2017
10. Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2017 in St Petersburg), Санкт-Петербург, Россия 2017
11. XVI Всероссийская школа-семинар "Физика и применение микроволн" имени профессора А.П. Сухорукова ("Волны-2017"), Красновидово, Россия 2017
12. CLEO Europe and EQEC, Мюнхен, Германия 2017

13. XVII Всероссийская школа-семинар "Физика и применение микроволн" имени профессора А.П. Сухорукова ("Волны-2018"), Красновидово, Россия 2018
14. Photonics West, Сан-Франциско, США 2018
15. CLEO US, Сан-Хосе, США 2018
16. 2018 International Conference Laser Optics (ICLO), Санкт-Петербург, Россия 2018
17. European Frequency and Time Forum, Турин, Италия 2018
18. CLEO Pacific Rim 2018, Гонконг 2018
19. Frontier in Optics 2018, Вашингтон, США 2018

Личный вклад. Все результаты, вошедшие в диссертационную работу, получены либо лично автором, либо совместно с соавторами работ, опубликованных по теме диссертации, при этом вклад автора был определяющим или равным с основным соавтором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 11 из которых изданы в журналах, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

1. Herr T., Brasch V., Jost J.D., Mirgorodskiy I., Lihachev G., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. Mode spectrum and temporal soliton formation in optical microresonators // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 113. — P. 123901
2. Lobanov V.E., Lihachev G., Kippenberg T.J., Gorodetsky M.L. Frequency combs and platons in optical microresonators with normal GVD // Opt. Express. — 2015. — Vol. 23. — Pp. 7713–772
3. V.E. Lobanov, G. Lihachev, M.L. Gorodetsky. Generation of platons and frequency combs in optical microresonators with normal GVD by modulated pump // EPL. — 2015. — Vol. 112. — P. 54008.
4. Lobanov V.E., Lihachev G.V., Pavlov N.G. et al. Harmonization of chaos into a soliton in Kerr frequency combs // Optics Express. — 2016. — Vol. 24, no. 24.— Pp. 27382–27394.
5. Brasch V., Geiselmann M., Herr T., Lihachev G., Pfeiffer M.H.P., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. Photonic chip based optical frequency comb using soliton induced Cherenkov radiation // Science. — 2016. — Vol. 351, no. 6271. — Pp. 357–360.
6. Guo H., Karpov M., Lucas E., Kordts A., Pfeiffer M.H.P, Brasch V., Lihachev G., Lobanov V.E., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. Universal

- dynamics and deterministic switching of dissipative Kerr solitons in optical microresonators // *Nature Phys.* — 2017. — Vol. 13, no. 1. — P. 94–102
7. Pavlov N.G., Lihachev G., Koptyaev S., Lucas E., Karpov M., Kondratiev N.M., Bilenko I.A., Kippenberg T.J., Gorodetsky M.L. Soliton dual frequency combs in crystalline microresonators // *Optics Lett.* — 2017. — Vol. 42, no. 3. — Pp. 514–517.
 8. M. Anderson, N. G. Pavlov, J. D. Jost, G. Lihachev, J. Liu, T. Morais, M. Zervas, M. L. Gorodetsky, T. J. Kippenberg. Highly efficient coupling of crystalline microresonators to integrated photonic waveguides // *Opt. Lett.* — 2018. — Vol. 43, no. 9. — Pp. 2106–2109
 9. E. Lucas, G. Lihachev, R. Bouchand et al. Spatial multiplexing of soliton microcombs // *Nature Photonics.* — 2018. — Vol. 12, no. 11. — Pp. 699–705.
 10. N. G. Pavlov, S. Koptyaev, G. V. Lihachev et al. Narrow-linewidth lasing and soliton Kerr microcombs with ordinary laser diodes // *Nature Photonics.* — 2018. — Vol. 12, no. 11. — Pp. 694–698
 11. W. Weng, E. Lucas, G. Lihachev et al. Spectral Purification of Microwave Signals with Disciplined Dissipative Kerr Solitons // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 122. — P. 013902

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения. Полный объём диссертации составляет 139 страниц, включая 82 рисунка и 2 таблицы. Список литературы содержит 152 наименования.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Современное состояние исследований оптических частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах

Открытие и развитие оптических частотных гребенок на основе фемтосекундных лазеров с синхронизацией мод оказало сильное влияние на метрологию и различные другие технологии с момента их первоначальной демонстрации в 2000 году [24; 25]. Это открытие было отмечено Нобелевской премией по физике в 2005 г [26]. Помимо приложений в прецизионной частотной метрологии и для создания атомных часов [27–30], возможность эффективного контроля амплитуды и фазы точно определенных спектральных линий открыла новые подходы для генерации аттосекундных импульсов, спектроскопии веществ [31–34], обработки оптических сигналов и радиофотоники [35; 36], калибровки астрономических эшелле-спектрографов [37] и синтеза спектрально чистых СВЧ сигналов [38].

Открытые в лаборатории профессора Т. Киппенберга в 2007 году оптические частотные гребенки в микротороидах из плавленого кварца [1] вызвали новую волну интереса и исследований в области микрорезонаторов и частотной метрологии [3]. Оптическая частотная гребенка в микрорезонаторе представляет собой набор эквидистантных спектральных линий, получающихся каскадно при накачке высокодобротной моды пассивного микрорезонатора из материала с кубичной нелинейностью с помощью мощного, узкополосного и перестраиваемого лазера непрерывной мощности. Керровские частотные гребенки имеют расстояния между линиями 5-1000 ГГц и позволяют достичь минимальных габаритов устройств, недостижимых для оптических гребенок, полученных с помощью фемтосекундных лазеров с синхронизации мод. Над развитием этой новой области работают около 10 экспериментальных групп и еще несколько теоретических групп. За 11 прошедших с открытия лет был проведен обширный теоретический анализ и численное моделирование богатой нелинейной динамики процесса формирования оптических гребенок, были проведены эксперименты, демонстрирующие их фундаментальные свойства и важнейшие

практически применения. Количество публикаций с 2014 по 2018 годы с ключевыми словам солитоны в оптических резонаторах составило около 600, из них несколько десятков в самых высокорейтинговых научных журналах. В случае преодоления нескольких нерешенных проблем, оптические частотные гребенки из микрорезонаторов могут стать востребованным коммерческим продуктом.

В отличие от частотных гребенок, получаемых при синхронизации мод фемтосекундного лазера, произвольные оптические частотные гребенки из микрорезонатора не представляют собой уединенные короткие импульсы во временном представлении из-за недетерминированных фазовых соотношений между отдельными спектральными линиями, появляющимися в процессе каскадного формирования гребенки [39; 40]. Некогерентные шумные оптические гребенки были продемонстрированы в различных структурах, в том числе в кристаллических резонаторах из различных фторидов (MgF_2 , CaF_2 , BaF_2 , SrF_2 , LiF) при накачке в ближнем ИК [41–45], в том числе шириной в октаву [46], в интегральных микрорезонаторах из нитрида кремния (Si_3N_4) [47–50], в планарных системах, изготовленных из стекла Hydex [51; 52], а также в других диэлектрических материалах: нитриде алюминия AlN [53], фосфиде галлия GaP [54] и алмазе [55]. Важным типом резонаторов являются кольцевые волоконные резонаторы (SiO_2), в которых динамика гребенок описывается теми же уравнениями, и возможно прямое измерение профиля поля внутри резонатора благодаря длительности импульса в 5 – 10 пс. Именно в волоконных кольцевых резонаторах было впервые продемонстрировано формирование и распространение солитонов, но при накачке затравочным импульсом [56].

Большим прорывом стало теоретическое предсказание и экспериментальная демонстрация высококогерентных частотных гребенок, линии которых синхронизированы по фазе [2]. Такая малозумная оптическая гребенка соответствует оптическому временному солитону, распространяющемуся внутри микрорезонатора. Для стационарного режима распространения солитонов необходим баланс между дисперсией групповой скорости и нелинейностью в микрорезонаторе, а также между потерями и накачкой через параметрическое преобразование частоты. Предложенный метод основан на перестройке частоты лазера накачки непрерывной мощности из области синей отстройки от моды микрорезонатора в красную сторону, в область существования солитона. Этот метод позволил генерировать когерентные и широкополосные

оптические гребенки, которые могут быть достигнуты повторно. Эта работа показала возможность генерации фемтосекундных оптических импульсов с малым джиттером из вакуумных флуктуаций мод микрорезонатора. С помощью этого метода оптические солитоны были получены в кристаллических цилиндрических микрорезонаторах [2] и кварцевых микротороидах [7] при накачке на длине волны около 1550 нм. В этих же двух работах было произведено частотно-разрешенное оптическое стробирование (FROG) для экспериментального подтверждения импульсного временного профиля электрического поля в микрорезонаторе. В работе [5] впервые показали формирование оптического солитона и генерацию высоко когерентной гребенки спектральной шириной в 2/3 октавы в Si_3N_4 кольцевом микрорезонаторе, интегрированном на чип. Также солитонная гребенка была продемонстрирована в интегральном кольцевом резонаторе из кремния Si при накачке в среднем ИК диапазоне, где двухфотонное поглощение в материале мало [6], настройка на солитонный режим достигалась путем инъекции свободных носителей в PIN структуру и мониторинга тока на ней. Недавняя работа показала возможность генерации оптических солитонов в интегральном резонаторе из ниобата лития LiNbO_3 [8], где квадратичная нелинейность не равна нулю, так что одновременно с солитонной гребенкой с центром на 1550 нм образовывалась гребенка на удвоенной частоте (длина волны 775 нм). Таким образом по состоянию на конец 2018 г. солитонный режим оптических гребенок был продемонстрирован в меньшем количестве материалов (MgF_2 , Si_3N_4 , Si, SiO_2 , LiNbO_3), чем шумная оптическая гребенка.

В последние годы было продемонстрировано несколько методов, позволяющих обойтись без быстрой перестройки частоты лазера накачки для генерации солитонного режима: один из них базируется на использовании фазово модулированной накачки [57], второй на тепловых эффектах с использованием дополнительного нагревательного элемента [58]. При нагреве микрорезонатора происходит сдвиг резонансных частот микрорезонатора относительно частоты лазера накачки, что эквивалентно ранее описанному процессу перестройки частоты лазера накачки. Была показана возможность детерминированного получения односолитонного режима с гладкой огибающей спектра, важного для практических применений, например, в спектроскопии с помощью двух гребенок. Это осуществлялось либо контролируемым нагревом и охлаждением нагревательного элемента для резонатора [58], либо обратной медленной перестройкой частоты лазера накачки [59].

Было опубликовано множество работ, посвященных численному моделированию динамики генерации солитонов [60; 61], анализу устойчивости решений [62], детерминированной генерации состояний с заданным числом солитонов [63], численному предсказанию бризерных режимов [64], эффективности нелинейного преобразования мощности накачки в линии солитонной гребенки [65]. Экспериментально были продемонстрированы состояния оптических гребенок, где все линии находились в постоянных фазовых соотношениях, но динамика такой синхронизации была отличной от формирования солитонов [66; 67]. Экспериментально были продемонстрированы солитонные кристаллы - состояния, при которых в микрорезонаторе распространяется максимально возможное количество солитонов, эти состояния имеют сложный спектр и другую тепловую динамику генерации [16]. Эксперименты с оптическим пинцетом во временном представлении для "записывания и удаления" солитонов из последовательности в волоконном кольцевом резонаторе [68]. Численно исследовалось влияние дисперсии высоких порядков [69] на свойства солитонов. В работе [70] описаны механизмы, препятствующие образованию солитонов в микрорезонаторах: большая по модулю дисперсия групповой скорости и эффекты нормального расщепления мод вблизи моды накачки.

В работе [71] продемонстрирована солитонная гребенка из микрорезонатора и привязка лазера накачки к стабилизированной гребенке из фемтосекундного лазера, тем самым достигается полностью стабилизированная оптическая гребенка из кристаллического микрорезонатора. В последующей работе [72] была продемонстрирована привязка солитона из кристаллического микрорезонатора на себя с использованием сильно нелинейного волокна для уширения спектра солитона до октавы. Таким способом были когерентно привязаны оптическая частота лазера накачки 190 ТГц и СВЧ частота повторения солитона 14 ГГц. Позже в работе [73] была продемонстрирована привязанная на себя гребенка, получаемая из солитона на Si_3N_4 чипе, без внешнего уширения спектра, а с использованием техники 2f-3f, когда удвоенная частота синего края спектра гребенки была близка к утроенной частоте красного края спектра, и результирующий сигнал биений стабилизировался.

Отдельно необходимо выделить работу [74], в которой впервые продемонстрирован оптический солитон в компактном микрорезонаторе при накачке не лазером непрерывной мощности, а оптическим импульсом, совпадающим

по частоте повторения с межмодовым расстоянием микрорезонатора. Микрорезонатором служил высокодобротный одномодовый резонатор Фабри-Перо, выполненный из куска обычного оптоволокна SMF, с напылением по торцам. Наблюдалось возникновение фемтосекундных солитонных импульсов поверх резонансно-усиленных импульсов накачки. При этом солитон был привязан к накачивающим импульсам, что позволяло контролировать частоту его повторения и отстройку фазы несущий от максимума огибающей солитона.

Ширина полосы параметрического усиления ограничена только окном прозрачности материала микрорезонатора, что потенциально позволяет генерировать гребенки от видимого до среднего ИК диапазонах при достижении аномальной дисперсии групповой скорости в резонаторе и наличии достаточно мощного лазера накачки на заданной длине волны. Одной из приоритетных задач является расширение спектрального покрытия существующих керровских частотных гребенок. Были продемонстрированы когерентные солитонные гребенки в ближнем ИК диапазоне в микротороидах из плавленого кварца с добротностью $8 \cdot 10^7$ [75] и интегральном Si_3N_4 микрокольце с оптимизированной дисперсией [10] при накачке лазером на длине волны 1 мкм. Синий край спектра достигал значений 776 нм.

При накачке лазером на длине волны 1.55 мкм (телекоммуникационный С-диапазон) и 1.3 мкм (О-диапазон) интегральных резонаторов из Si_3N_4 были получены оптические солитоны, спектр которых перекрывает октаву [9; 76]. Оптимизируя процесс фабрикацию резонатора с областью свободной дисперсии (ОСД) 1 ТГц, была достигнута гребенка шириной в октаву, т.ч. по краям спектра наблюдались более интенсивные дисперсионные волны на тех частотах, где дисперсия меняла знак благодаря специально подобранному дизайну сечения резонатора. Максимальная ширина гребенки составила 200 ТГц при мощности накачки в волноводе всего около 100 мВт.

Другим направлением исследований является генерация керровских частотных гребенок в среднем ИК диапазоне. Этот диапазон интересен тем, что в нем находятся колебательные уровни многих органических молекул, из-за чего его называют диапазоном “молекулярной дактилоскопии” [32; 77]. Средний ИК изучается в основном с помощью инфракрасных-Фурье спектрометров [78]. Технология генерации керровских гребенок в среднем ИК остается сравнительно слабо развитой, особенно в сравнении с оптическими частотными гребенками из

квантово-каскадных лазеров на чипе [79]. Количество публикаций, посвященных этой проблеме, сравнительно мало. При использовании параметрического усилителя непрерывного излучения в качестве накачки была показана возможность генерации оптических гребенок в среднем ИК на длине волны 2.5 мкм в кристаллическом микрорезонаторе [80], ширина гребенки составила 200 нм, с расстоянием между линиями около 100 ГГц. Также генерация гребенки со спектральной шириной, превышающей половину октавы, была продемонстрирована в микрорезонаторах из CaF_2 и MgF_2 при накачке квантово-каскадным лазером на длине волны 4.3 мкм [81]. Этот результат не был воспроизведен в других группах, т.к. фурье спектрометры на данный диапазон имеют низкий динамический диапазон и плохое разрешение (более 10 ГГц). Любая малая амплитудная флуктуация лазера накачки отображается как набор спектральных компонент. Также было показано [82], что MgF_2 имеет добротность не более 10^7 на длине волны 4.5 мкм, что недостаточно для генерации гребенки при имеющейся мощности квантово-каскадного лазера (QCL). Самые лучшие результаты были достигнуты в интегральных структурах из кремния (микрокольца), выполненных по CMOS совместимой технологии. При накачке на длине волны 2.6 мкм мощностью 1.2 Вт была достигнута шумная гребенка шириной от 2100 до 3500 нм, с расстоянием между линиями в 100 ГГц [83]. В работе [11] при накачке на длине волны 3 мкм продемонстрирована генерация гребенки шириной 2.4-4.3 мкм. Большим преимуществом в работе было использование PIN структуры на кремниевом волноводе одновременно для контроля динамики гребенки через контроль времени жизни свободных носителей и для детектирования индуцированного тока трехфотонного поглощения. Измеряя спектр сигнала на таком интегрированном PIN диоде был сделан вывод о состоянии гребенки с малыми фазовыми шумами. В качестве материала, пригодного для генерации частотных гребенок в среднем ИК, изучались фториды бария, стронция и кальция, различные ZBLAN стекла [82; 84; 85].

Еще одним важным направлением исследований является возможность генерации когерентных гребенок в режиме нормальной дисперсии групповой скорости [86], т.к. материальная дисперсия большинства исследуемых материалов в видимом и ближнем ИК диапазоне длин волн является нормальной. В видимом диапазоне керровские частотные гребенки с большим межмодовым расстоянием (>10 ГГц) могут, в частности, использоваться для

калибровки эшелле спектрографов [87; 88] и приложений рамановской спектральной визуализации. Видимый диапазон привлекателен тем, что в нем возможно детектирование биологических веществ [10], из-за наличия в нем окна спектра пропускания воды, и он характеризуется большими сечениями комбинационного рассеяния. В основном до настоящего времени для генерации частотных гребенок в видимом диапазоне использовалось совместное действие квадратичной и кубической нелинейностей в кристаллических или интегральных микрорезонаторах [89; 90].

Из-за наличия пиков поглощения в УФ многие диэлектрические материалы имеют нормальную дисперсию групповых скоростей (ДГС) в видимом диапазоне и ближнем ИК, что препятствует генерации светлых солитонов. Теоретически и экспериментально узкие керровские частотные гребенки при нормальной ДГС изучались в кристаллических микрорезонаторах [91–93] и микрокольцах на чипе [12; 94], было сделано утверждение о достижении низкого уровня фазового шума оптических линий. Также было теоретически и экспериментально продемонстрировано существование темных временных импульсов [62; 95]. В работе [95] существование темных солитонов было связано с наличием волн переключения между двумя решениями постоянной величины. Было показано, что в системе с двумя связанными микрорезонаторами можно управлять динамикой генерации темных импульсов через контроль связи между резонаторами [96]. В работе [97] экспериментально продемонстрированы бризерный режимы темных импульсов. Однако на момент начала данной работы полное понимание динамики, в том числе механизмов, обеспечивающих генерацию керровских частотных гребенок с малым шумом в режиме нормальной дисперсии, отсутствовало.

Еще одним направлением исследований в области микрорезонаторных частотных гребенок является разработка методов увеличения их ширины. Одним из исследуемых в последнее время способов является взаимодействие временных солитонов и дисперсионных волн, иногда по аналогии с классическим эффектом Черенкова называемых индуцированными солитонами черенковским излучением [98–100]. При накачке микрорезонатора в области аномальной дисперсии возможна генерация светлого солитона. Если его длительность достаточно мала, то его спектр распространяется в область нормальной дисперсии и солитон может генерировать дисперсионную волну – пик излучения вблизи точки нулевой дисперсии. Формирование дисперсионной волны в присутствии

солитона может способствовать уширению полосы генерации гребенки в область нормальной дисперсии без потери когерентности [5;9;101]. Дисперсионные волны возникают и при наличии сильных эффектов нормального расщепления мод (взаимодействие различных пространственных семейств мод микрорезонатора) [102; 103]. Показано, что самовоздействие солитона, может сдвигать частоту дисперсионной волны.

Для генерации и реализации эффективного взаимодействия солитонов и дисперсионных волн должны выполняться определенные дисперсионные соотношения, поэтому разрабатывается множество методов получения оптимальной дисперсии (dispersion engineering). Дисперсия резонатора может быть специально задана с помощью подбора размеров сечения планарного кольца [9; 104], или с помощью микроструктурирования его формы при точении кристаллов [42; 105; 106]. Теоретически показана возможность достижения аномальной дисперсии в октавном диапазоне для резонаторов с ОСД меньше 100 ГГц, что позволит напрямую измерить частоту повторения светлого солитона с помощью современной СВЧ электроники.

Совершенно новым динамическим методом управления дисперсией групповой скорости интегрального микрорезонатора стало покрытие его графеном. Так в работе [107], на дугу интегрального микрокольца из Si_3N_4 был нанесен ионный гель и монослой графена, управляя напряжением на затворе получившегося транзистора, можно управлять хроматической дисперсией микрорезонатора, изменяя Ферми уровень графена в пределах 0.45-0.65 эВ при усилении с помощью ионного транспорта и тепловых эффектов в ионном геле. При напряжениях в диапазоне от 0 до -2 В линейное поглощение в графене на длине волны 1600 нм мало из-за блокады Паули. Добротность структуры сохранялась на уровне 1×10^6 . Было экспериментально измерено изменение дисперсии второго порядка (от $-62 \text{ фс}^2 \text{ мм}^{-1}$ до $+9 \text{ фс}^2 \text{ мм}^{-1}$), изменение эффективного показателя преломления микрорезонатора в зависимости от приложенного напряжения на затворе. Были продемонстрированы режимы генерации модуляционной неустойчивости, шумной гребенки с дисперсионной волной, многосолитонный режим, солитонные кристаллы при изменении напряжения на затворе. Также для режима модуляционной неустойчивости была показана модуляция амплитуды оптических линий с частотой до 60 кГц с помощью модуляции напряжения на затворе.

Большой интерес вызывает возможность использования эффектов вынужденного комбинационного (рамановского) и бриллюэновского рассеяния (Мандельштама-Бриллюэна) для генерации частотных гребенок и контроля их свойств. Активно исследуется влияние рамановского рассеяния на генерацию и свойства диссипативных солитонов в оптических микрорезонаторах: эффект сдвига спектрально максимума солитона (Raman induced soliton self-frequency shift) [13; 108–111]. Также в работах [112; 113] исследовалась возможность генерации оптической частотной гребенки в полосе рамановского рассеяния в области нормальной дисперсии групповой скорости. В работе [112] экспериментально была продемонстрирована генерация оптической частотной гребенки в кристаллическом резонаторе из MgF_2 при накачке на 1064 нм в присутствии интенсивного спектрального максимума, вызванного вынужденным комбинационным рассеянием.

Уникальным результатом стала демонстрация впервые в оптических системах Стоксовских солитонов, при накачке микротороида из плавленого кварца SiO_2 на длине волне 1550 нм, и одновременно индуцированного им солитона в области рамановского пика на 1650 нм [14]. Солитоны были образованы на разных поперечных модах микрорезонатора, и достигались благодаря оптимизации условий Рамановского взаимодействия во времени и пространстве.

Отдельно отметим работы, в которых изучались бризерные режимы солитонов [64], в кристаллах [15], в интегральных резонаторах [114; 115], как при аномальной [115], так и нормальной дисперсиях микрорезонатора [97]. Хотя во всех численных моделированиях бризерный режим легко получается, и были приведены убедительные экспериментальные измерения амплитуды и периода бризеров, детальная достоверная классификация и теоретическое описание этих сложных режимов для микрорезонаторов сделаны пока не были.

Наблюдение диссипативных керровских солитонов в микрорезонаторах вызвало не только интерес к изучению богатой нелинейной физики солитонов, но и демонстрации множества применений в высокоточной метрологии и других технологиях. Перечислим основные экспериментально продемонстрированные применения.

Важным лабораторным применением могут быть оптические часы. Экспериментальная демонстрация таких часов дана в [19]. Модулированный по амплитуде лазер с максимальной мощностью 140 мВт возбуждает микродиск из плавленого кварца. Генерируется гребенка, покрывающая 20 нм интервал

около накачки на 1560 нм. Межмодовое расстояние составило 33 ГГц. Далее гребенка расширяется до 200 нм при ее пропускании через сильно нелинейное волокно. Новый спектр покрывает частоту рубидиевого стандарта (после удвоения частоты). Выбираются две линии гребенки на расстоянии 108 мод друг от друга (1560 и 1590 нм соответственно), которые привязываются через дополнительные лазеры к рубидиевым переходам. Выходным сигналом часов является разность частот между линиями гребенки. Она составила 33 ГГц. Стабильность выходного сигнала лучше, чем у рубидиевого перехода в 108 раз. Девияция Аллана достигала 5×10^{-12} при измерении за 10^4 сек.

Солитонные оптические гребенки были использованы для калибровки астрономических эшелле-спектрографов в телекоммуникационном С-диапазоне [17; 116]. Этими двумя группами независимо были предприняты попытки детектирования периодических Допплеровских спектральных сдвигов известных экзопланет на телескопах на Канарских и Гавайских островах. Для обнаружения экзопланет с длинным периодом требуется точность измерения радиальной скорости менее 10 см/с на временах порядка года. В работе [116] использовался кварцевый микротороид, несущая солитона был привязана к линии поглощения цианида водорода, а частота повторения после деления к рубидиевому стандарту. Расстояние между линиями составило 22 ГГц, что очень удобно для калибровки спектрографов в отличие от гребенок из фемтосекундных лазеров с типичным межмодовым расстоянием в сотни МГц. В статье [17] использовался солитон из интегрального кольца из нитрида кремния, привязанный по несущей к стабилизированной гребенке из фемтосекундного лазера. Была достигнута точность калибровки эквивалентная радиальной скорости в 25 см/с, что существенно лучше, чем при калибровке катодной газовой лампой. Однако, никакого измерения спектрального сдвига известных экзопланет в статьях не дано, причиной указана нестабильность самого спектрографа.

Солитонные оптические гребенки были успешно применены в прямой спектроскопии поглощения веществ с использованием двух гребенок, слабо отличающихся по межмодовому расстоянию (dual comb spectroscopy) в ближнем [18] и среднем ИК диапазоне [117]. В этом методе сбиваются два одинаковых источника оптических частотных гребенок в ближнем или среднем ИК с немного различными частотами повторения, и генерируется сигнал биений на фотодетекторе в форме гребенки, но уже в радио диапазоне частот, что может

быть использовано для восстановления профилей поглощения веществ в быстром, компактном устройстве без подвижных механических частей. Оптическое разрешение определяется межмодовым расстоянием гребенок, а скорость измерения определяется разностью между частотами повторений. Одна гребенка используется как локальный осциллятор, другая используется для получения оптической спектральной картины исследуемого образца. Результирующие биения двух гребенок дают радиочастотный сигнал, содержащий информацию о линиях поглощения. Первая демонстрация спектроскопии с использованием двух солитонных гребенок в двух отдельных микрорезонаторах из плавленного кварца была дана в [18], оптические гребенки шириной 4 ТГц с центром на 1.5 мкм были перенесены в радиодиапазон, проведена спектроскопия произвольного сигнала вейвшейпера (оптического генератора сигнала произвольной формы) и линий поглощения ячейки с газом синильной кислоты HCN. В работе [118] была продемонстрирована сканирующая оптическая спектроскопия при одновременном сканировании по частоте всех линий одной гребенки. В работе [119] была продемонстрирована прямая спектроскопия атомного перехода в рубидии с помощью оптической гребенки, а также стабилизация всех линий гребенки на этот переход, т.ч. флуктуации абсолютной частоты каждой линии составили единицы кГц на временах 1 секунды и меньше 1 МГц за сутки.

Генерация оптических гребенок с высокой мощностью на каждую линию (> 1 мВт) и межмодовым интервалом в 10,25,50,100 ГГц может использоваться в многоканальной оптической телекоммуникации на длинах волн 1450–1750 нм. Микрорезонатор и один мощный лазер может заменить индивидуальные лазеры для каждого телекоммуникационного канала. В работе [120] экспериментально продемонстрировано использование оптических гребенок в микрорезонаторе в роли оптического источника в установке для спектрального уплотнения телекоммуникационных каналов и когерентной передачи данных с использованием амплитудно- и фазово-модулированных несущих. Достигнута пропускная способность 392 Гбит/с. Существенное улучшение этого результата было сделано в [20] с использованием солитона из интегрального резонатора. Узкие линии солитонной оптической гребенки могут успешно заменить множество независимых лазеров в качестве несущих для каналов в системах телекоммуникации высокой пропускной способности. Вместо сотен независимых источников использовался один компактный интегральный чип для генерации 179 оптических линий, с расстоянием между ними в 50 ГГц. Пропускная способность составила

50 Тбит/с. Также продемонстрировано применение второго оптического солитона, полученного в другом микрорезонаторе, и на стороне приемника, первый солитон являлся источником для WDM мультиплексирования, а второй солитон как локальный осциллятор для когерентного детектирования. В работе [121] была показана возможность использования в телекоммуникации гребенок, полученных из интегрального микрорезонатора с нормальной дисперсией групповой скорости. Основным их преимуществом является более высокая мощность каждой линии.

Сигнал биений между линиями солитонной гребенки на быстром фотодетекторе может служить источником СВЧ сигнала высокой спектральной чистоты. В работе [21] использовался солитон из кристаллического микрорезонатора, частота повторения составила 10 ГГц, фазовый шум составил -60 дБн Гц⁻¹ на отстройке 10 ГГц, -90 дБн Гц⁻¹ на отстройке 100 ГГц, -170 дБн Гц⁻¹ на отстройке 1 МГц. Стабильность сигнала, полученная измерением девиации Аллана, составила 10⁻¹⁰ на временах 1-100 с. Таким образом был продемонстрирован компактный радиофотонный источник микроволнового излучения с низкими фазовыми шумами. Этот результат может быть улучшен методами оптического деления частоты.

Перспективным применением можем стать использование компактных источников гребенок для быстрого измерения расстояний. В работах [22;122] было продемонстрировано использование интегральных оптических гребенок для ЛИДАР (LIDAR). В работе [122] продемонстрировано измерение расстояния по времени пролета. Из одного кварцевого микрорезонатора с помощью одного лазера накачки генерировались 2 солитона на одной пространственной моде, распространяющихся в противоположных направлениях [123], солитоны были привязаны по фазе и имели разность в частотах повторения порядка 5 кГц. Первый солитон посылался на удаленную мишень (статичное зеркало), отраженный свет через циркулятор сбивался с опорным первым солитоном и далее со вторым солитоном, так чтобы получились биения в низком радиочастотном диапазоне. На детекторе наблюдалась периодическая интерференционная картина, расстояние между опорными пиками соответствует разности между частотами повторения солитонов. Задержка на время полета до мишени вычисляется по сдвигу второго пика от опорного. Интерференционная картина накапливается за необходимое время (2 сек) и далее обрабатывается. При усреднении по 500 мс достигается точность измерения расстояния в 500 нм при

максимально измеримом расстоянии без неопределенности в 16 мм. Однако для того чтобы повысить максимально измеримое расстояние без неопределенности (соответствующее удвоенной частоте повторения солитона в 10 ГГц), необходимо поочередно посылать на мишень солитоны, распространяющихся внутри резонатора в противоположных направлениях. Таким образом было достигнуто измерение расстояния в 26.3729 ± 0.466 м с диапазоном без неопределенности 26 км. Для уменьшения погрешности и увеличения быстродействия необходимо пропорционально увеличивать разность между частотами повторения солитонов, что невозможно сделать в предложенной схеме, но легко достигается при генерации пары солитонов на разных семействах мод или поляризациях. Так в работе [22] использовались 2 солитона из разных интегральных чипов при накачке независимыми лазерами, разность между частотами повторения составила около 100 МГц. Было проведено измерение расстояния аналогичным предыдущей статьи методом до статичной мишени с девиацией Аллана 12 нм при усреднении по 13 мкс. И отдельно проведено быстрое измерение со скоростью сбора данных в 100 МГц, что позволило измерить профиль пролетающей пули из духового ружья со скоростью 150 м/с. Основным недостатком солитонов из микрорезонаторов является малая мощность линий (порядка 1-10 мкВт), т.ч. в реальных применениях для ЛИДАР потребуется оптический усилитель.

Основным итогом работы по крупному гранту, финансировавшему развитие данной тематики в США, стала демонстрация интегрального синтезатора оптических частот [23], состоящего из двух солитонных гребенок и интегрального перестраиваемого лазера. Первая солитонная гребенка из интегрального Si_3N_4 чипа имеет межмодовое расстояние 1 ТГц и ширину больше октавы, она стабилизирована на себя с помощью техники $f-2f$. Второй солитон из интегрального кварцевого микротороида имеет ОСД 22 ГГц и привязан к стабилизированной гребенке, он предоставляет абсолютные частотные оптические реперы для перестраиваемого интегрального лазера с диапазоном перестройки 1530-1570 нм. Измеренная точность интегрального синтезатора оптической частоты составила 7.7×10^{-15} и стабильность $(9.2 \pm 1.4) \times 10^{-14}$ на 1 с.

В работе [125] была продемонстрирована возможность генерации солитонной гребенки при накачке микрорезонатора с помощью простого лазерного диода типа Фабри-Перо. При этом продольно-многомодовый лазер, имеющий широкий дискретный спектр и большую суммарную мощность, сначала переходит в режим излучения на одной линии благодаря эффекту затягивания на

высокодобротную моду микрорезонатора, с подавлением всех остальных линий в спектре в соответствии с эффектом Богатова, далее эта результирующая мощная линия является накачкой для генерации солитона в микрорезонаторе. Таким образом высокодобротный микрорезонатор одновременно выступал в роли внешнего резонатора для стабилизации лазера и в роли нелинейной среды для генерации солитонов. Проведена демонстрация солитонов в интегральном микрокольце из нитрида кремния при накачке многочастотным диодом, поднесенным к торцу волновода. Так как добротность интегрального резонатора почти на 3 порядка ниже, чем у кристаллических микрорезонаторов, то затягивание частоты слабее, а нелинейное преобразование частоты такое же, т.к. нелинейность n_2 выше на 2 порядка, т.ч. при перестройке тока диода можно было последовательно переключать режимы: многочастотная генерация лазера, одночастотная генерация, режим модуляционной неустойчивости, бризерный режим, односолитонный режим. Этот результат позволяет говорить о возможной полной интеграции генератора оптических гребенок на чипе.

Интересным продвижением к полностью интегрированному и компактному генератору оптических гребенок на чипе стала работа [126], в которой продемонстрировано устройство, выдающее солитонную оптическую гребенку с центральной частотой 1550 нм, с межмодовым расстоянием 194 ГГц при потреблении всего 98 мВт электрической мощности. Устройство состояло из интегрального чипа полупроводникового усилителя с выходным краем, скошенным под углом. На другом интегральном чипе были изготовлены Вернье фильтр, волновод и высокодобротный микрорезонатор из Si_3N_4 , к каждому элементу сверху был нанесен металлический электрод как микронагреватель. Оптический Вернье фильтр перестраивался с помощью перестройки теплом зазора между кольцами фильтра, выходным зеркалом лазера являлся сам высокодобротный микрорезонатор. Настраивая микронагревателем частоту резонатора на частоту фильтра можно наблюдать генерацию солитонов. Важным элементом является нагреватель на входном участке волновода, он используется для контроля фазы отраженной от микрорезонатора волны, попадающей обратно в полупроводниковый усилитель.

Исчерпывающее описание работ, посвященных оптическим частотным гребенкам и солитонам в микрорезонаторах даны в обзорах [3; 4; 127–129].

Несмотря на обширное изучение оптических частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах, остаются нерешенными важные практические задачи:

генерации оптической гребенки шириной в октаву с межмодовым расстоянием <100 ГГц, доступном для детектирования современной электроникой, и привязка такой гребенки к себе (f - $2f$ стабилизация); полная интеграция генератора гребенки на чип, включая лазер накачки; повышение энергетической эффективности процесса нелинейного преобразования частот, повышение мощности солитона; детерминированная генерация оптических гребенок с малыми шумами при нормальной дисперсии групповой скорости. Возможно новыми экспериментальными демонстрациями применений оптических солитонов из микрорезонаторов станут оптическая когерентная томография, когерентная антистоксовая рамановская спектроскопия, фотонный аналого-цифровой преобразователь.

1.2 Выводы к главе 1

В данной главе представлен обзор статей в журналах, посвященных вопросам генерации оптических частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах. Рассмотрены работы, посвященные теоретическому исследованию богатой нелинейной динамики генерации оптических частотных гребенок, а также основные экспериментальные применения. Несмотря на большое количество работ в данной области, остаются недостаточно исследованными методы генерации гребенок в области нормальной дисперсии групповых скоростей, возможность генерации двойных гребенок в одном резонаторе.

Глава 2. Численное моделирование

2.1 Теоретическое описание керровских гребенок в микрорезонаторах

2.1.1 Оптическая нелинейность в микрорезонаторах

Поскольку оптические моды типа шепчущей галереи в резонаторах сочетают малый объем локализации поля с высокой добротностью, то порог проявления различных нелинейных эффектов оказывается низким [130]. Одним из таких эффектов является нелинейный эффект четырехчастотного взаимодействия, приводящий к формированию оптической гребенки: два фотона переходят в боковые линии (рис. 2.1). Если накачка достаточно велика, то гребенка формируется благодаря каскадному процессу образования таких боковых линий, как суммы взаимодействий всевозможных 4 фотонов, удовлетворяющим частотным требованиям. Эффект возникает из-за материальной Керровской нелинейности среды.

Разложим вектор поляризации в ряд:

$$P(t) = \varepsilon_0[\chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots] = P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots, \quad (2.1)$$

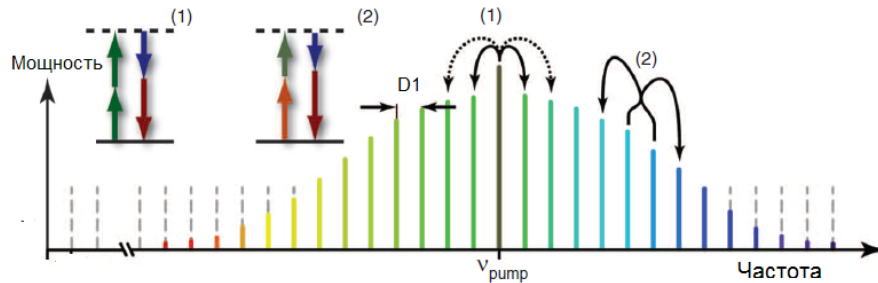


Рисунок 2.1 — Эффект четырехволнового взаимодействия. (1) - вырожденный случай (два фотона одинаковой частоты переходят в фотоны большей и меньшей частоты), (2) - невырожденный случай (все четыре фотона имеют разные частоты).

где $\chi^{(1)}$ – линейная восприимчивость, $\chi^{(2)}, \chi^{(3)}, \dots$ – нелинейные восприимчивости второго, третьего порядков. $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), P^{(3)}(t)$ – линейная и нелинейные поляризации второго и третьего порядков. Электрическая индукция в среде

$$D(t) = \varepsilon E(t) = \varepsilon_0 E(t) + P, \quad (2.2)$$

диэлектрическая проницаемость и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ оказываются зависимыми от напряженности поля:

$$\varepsilon = 1 + \chi^{(1)} + \chi^{(2)} E(t) + \chi^{(3)} E^2(t) + \dots, \quad (2.3)$$

$$n = n_0 + \frac{1}{2n_0} \chi^{(2)} E(t) + \frac{1}{2n_0} \chi^{(3)} E^2(t) + \dots \quad (2.4)$$

В кристаллах с центром симметрии и в изотропных веществах из соображений симметрии $\chi^{(2)} = 0$, так что основной вклад вносит кубическая нелинейность, при которой изменение показателя преломления материала пропорционально квадрату напряженности электрического поля. Эта нелинейность может быть обусловлена различными механизмами: ориентационным, электронным, стрикционным – вместе все они называются в литературе Керровской нелинейностью. Эффект четырехволнового взаимодействия относится к типу эффектов, в которых наведенная поляризация не колеблется с частотой падающего поля [130].

2.1.2 Отдельная мода

Рассмотрим действие кубической нелинейности среды на отдельную высокочастотную моду микрорезонатора. Уравнения для амплитуды поля моды можно получить исходя из уравнений электродинамики:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.6)$$

Подставим (2.6) в (2.5) получим волновое уравнение в среде в общей форме:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

где член в правой части, играющий роль силы учитывает накачку, нелинейность и дисперсию в среде. Слагаемое

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

в нелинейном случае нельзя свести к одному векторному оператору Лапласа, т.к. $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ из-за нелинейной связи векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Пренебрегаем этим членом ввиду его малости. Выделим из поляризации линейную часть, тогда волновое уравнение можно записать в виде:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{n^2(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_p}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{P}_{NL} = \varepsilon_0 \chi^3 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$, а $\mathbf{P}_p$ описывает поляризацию, вызванную полем накачки. Пусть невозбужденное поле некоторой моды (с номером μ) в линейном случае описывается уравнением

$$\nabla \times \nabla \times e_\mu - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} e_\mu = 0, \quad (2.10)$$

и e_μ нормировано на максимум так, что $\max(e_\mu) = 1$, $\int |e_\mu|^2 dV = V_{eff}$. Представим поле моды в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [a(t) e_\mu(\mathbf{r}) e^{-i\omega_p t} + \text{к.с.}], \quad (2.11)$$

где ω_p – частота накачки, близкая к собственной частоте ω_μ .

Подставляя в (2.9), домножая его на e_μ^* и интегрируя по всему объему, получаем, отбрасывая члены второго порядка малости [130]:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + [-i\Delta\omega - i\eta|a|^2 + \frac{\kappa_0}{2} + \frac{\kappa_c}{2}]a = iF, \quad (2.12)$$

$$\eta = \frac{3\omega_\mu \chi^{(3)}}{8n^2} \frac{V_{eff}}{V_{jj}}, \quad (2.13)$$

$$V_{jj} = \frac{(\int_V |e_\mu|^2 dV)^2}{\int_V |e_\mu|^4 dV}. \quad (2.14)$$

Здесь $\Delta\omega = \omega_p - \omega_\mu$ и вручную добавлены собственные потери $\kappa_o = \kappa_a + \kappa_s = \frac{\omega_0}{\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_c}}$, включающие потери на поглощение κ_a и на рассеяние κ_s , которые можно получить, вводя мнимую часть диэлектрической проницаемости, и потери

в элемент связи κ_c (Q_0 - собственная, Q_c - нагруженная добротности резонатора), а F – сила, учитывающая нагруженность связи и мощность, заходящую в резонатор P_{in}

$$F = \sqrt{\frac{2P_{in}\kappa_c}{\varepsilon_0\varepsilon V_{eff}}} \quad (2.15)$$

Для мод шепчущей галереи [130] $V_{jj} \simeq 2V_{eff}$.

2.1.3 Несколько мод. Система связанных уравнений

Рассмотрим процесс генерации гребенки, когда лазер накачки с постоянной мощностью изначально отстроен в область более высоких частот от резонансной частоты. Далее отстройка постепенно уменьшается, в некоторый момент достигается граница параметрической генерации и образуется первая пара боковых мод гребенки.

Пусть ω_p – частота накачки лазером, A_μ амплитуды мод, нормированные, т.ч. $|A_\mu|^2$ число квантов в моде μ . Все номера мод определены относительно моды накачки $\mu = 0$. Выражение для собственных мод резонатора с частотами с точностью до кубического члена дисперсии [39]:

$$\omega_\mu = \omega_0 + D_1\mu + \frac{1}{2}D_2\mu^2 + \frac{1}{6}D_3\mu^3, \quad (2.16)$$

где D_1 - область свободной дисперсии (ОСД) резонатора, D_2 - дисперсия второго порядка (разница между двумя соседними ОСД на центральной частоте ω_0). Представим теперь решение в виде:

$$E(r,t) = \sum_\mu \frac{1}{2}A_\mu(t)e^{i\omega_\mu t}e_\mu(r) + \frac{1}{2}A_{ext}e^{i\omega_p t}e_0 + \text{к.с.} \quad (2.17)$$

где μ – номер рассматриваемой моды, определенный набором ортонормированных собственных мод e_μ с частотой ω_μ и амплитудой $A_\mu(t)$. Нормировка здесь выбрана так, чтобы $|A_\mu|^2$ соответствовало числу фотонов в моде. Направление накачки A_{ext} определяется единичным вектором e_0 . Пространственные и временные части поля разделяются, мода имеет одинаковую амплитуду по всему пространству. Амплитуда моды меняется медленно $|\dot{A}_\mu(t)| \ll 2\omega_\mu|A_\mu(t)|$.

Внешняя накачка ω_p близка к резонансной частоте системы. Пренебрегаем зависимостью $n_\mu(\omega)$ и другими типами взаимодействий мод, кроме четырех-частотного. Рассмотрим левую часть (2.9), учитывая (2.10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\nabla^2 A_{\mu} e^{i\omega_{\mu} t} e_{\mu} + \text{к.с.}) - \frac{1}{2c^2} \sum_{\mu} (\ddot{A}_{\mu} e_{\mu} e^{i\omega_{\mu} t} + (i\omega_{\mu})^2 e^{i\omega_{\mu} t} A_{\mu} e_{\mu} + \text{к.с.}) = \\ \sum_{\mu} i\omega_{\mu} n^2 \dot{A}_{\mu} e^{i\omega_{\mu} t} e_{\mu} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Домножим на $\frac{1}{2}(e_{\mu} + e_{\mu}^*)$ и проинтегрируем по всему пространству, учитывая ортогональность мод:

$$\int (\sum_{\mu} i\omega_{\mu} n^2 \dot{A}_{\mu} e^{i\omega_{\mu} t} e_{\mu} + \text{к.с.}) e_{\mu} dV = \frac{i\hbar\omega_{\mu}^2}{2\varepsilon_0 n^2} \dot{A}_{\mu} e^{i\omega_{\mu} t} + \text{к.с.} \quad (2.19)$$

Для правой части (2.9) после возведения в куб и домножения на $\frac{1}{2}(e_{\mu} + e_{\mu}^*)$ оставляем члены вида $e_{\alpha} e_{\beta} e_{\gamma}^* e_{\mu}^* e^{i(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta} - \omega_{\gamma} - \omega_{\mu})t}$

Окончательно можно получить выражения, определяющие динамику амплитуд [39] [131].

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial t} = -\frac{k}{2} A_{\mu} + \delta_{\mu 0} \sqrt{k_{ext}} s e^{-i(\omega_p - \omega_0)t} + ig \sum_{\mu', \mu'', \mu'''} \Lambda D A_{\mu'} A_{\mu''} A_{\mu'''}^* e^{-i(\omega_{\mu'} + \omega_{\mu''} - \omega_{\mu'''} - \omega_{\mu})t}, \quad (2.20)$$

где $\kappa = \kappa_0 + \kappa_{ext}$ - формально добавленные потери в резонаторе как сумма внутренних потерь κ_0 и связи с волокном κ_{ext} . Начальная фаза накачки 0, $s = \sqrt{P_{in}/\hbar\omega_0}$ описывает амплитуду накачки P_{in} , $\delta_{\mu 0}$ - символ Кронекера. $D = 2$ при $\mu' \neq \mu''$, в других случаях $D = 1$.

$$\Lambda = \frac{\int e_{\mu'} e_{\mu''} e_{\mu'''}^* e_{\mu}^* dV}{\int |e_{\mu}|^4 dV} \quad (2.21)$$

Коэффициент нелинейной связи:

$$g = \frac{\hbar\omega_0^2 c n_2}{n_0^2 V_{eff}} \quad (2.22)$$

описывает кубическую нелинейность среды с показателем преломления n_0 , нелинейной частью показателя преломления n_2 , эффективным нелинейным объемом резонатора V_{eff} . Физически g показывает сдвиг частоты каждого фотона из-за керровской нелинейности среды. Для четырехчастотного взаимодействия

$\hbar\omega + \hbar\omega' \rightarrow \hbar\omega'' + \hbar\omega'''$. Это условие всегда выполняется для эквидистантных мод, однако для мод шепчущей галереи (МШГ) четырехчастотное взаимодействие возможно при $|\omega + \omega' - \omega'' - \omega'''| \ll \Delta\omega_\mu$. Поэтому суммирование проводится по всем индексам, удовлетворяющим $\mu = \mu' + \mu'' - \mu'''$.

В [132] показывается, что уравнение (2.20) можно получить, решая задачу с нелинейным Гамильтонианом.

Систему (2.20) можно переписать, убрав явную временную зависимость в правой части, и перенормировать все переменные и коэффициенты в единицах ширины резонансов $\kappa/2$, сделав их безразмерными [39]. Получим:

$$f = \sqrt{\frac{8\eta g}{\kappa^2 s}}, \quad (2.23)$$

$$d_2 = \frac{D_2}{\kappa}, \quad (2.24)$$

$$\zeta_\mu = \frac{2(\omega_\mu - \omega_p - \mu D_1)}{\kappa} = \zeta_0 + d_2 \mu^2, \quad (2.25)$$

$$\tau = \frac{\kappa t}{2}, \quad (2.26)$$

$$a_\mu = A_\mu \sqrt{\frac{2g}{k}} e^{-i(\omega_\mu - \omega_p - \mu D_1)t}, \quad (2.27)$$

$$\eta = \frac{k_{ext}}{k} = \frac{1}{2}. \quad (2.28)$$

Окончательно получим систему уравнений для численного моделирования:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -[1 + i\zeta_\mu]a_\mu + i \sum_{\mu' \leq \mu''} (2 - \delta_{\mu'\mu''})a_{\mu'}a_{\mu''}a_{\mu'+\mu''-\mu}^* + \delta_{0\mu}f. \quad (2.29)$$

2.1.4 Уравнение Луджиато-Лефевра

Задачу можно рассматривать в пространственно-временном представлении. Система в этом виде описывается уравнением Луджиато-Лефевра (LLE) [133]. Это уравнение получается из нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) добавлением слагаемых, отвечающих за диссипацию и накачку. Можно сказать, что оно же является частным случаем комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау [134]. НУШ описывает распространение коротких световых импульсов в

нелинейной среде с дисперсией [135]. НУШ является интегрируемой системой, для поиска решений которой используется метод обратной задачи рассеяния [136]. Уравнение Луджиато-Лефевра не является интегрируемой системой. Вывод уравнения LLE дан в [137], [138].

Рассмотрим медленно меняющуюся амплитуду суммарного поля:

$$A(\varphi, t) = \sum_{\mu} A_{\mu}(t) e^{i(\omega_{\mu} - \omega_0)t - i(\mu - \mu_0)\varphi}, \quad (2.30)$$

где $\varphi = [-\pi, \pi]$ азимутальный угол. Частные производные:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{\mu} (\dot{A}_{\mu} + i(\omega_{\mu} - \omega_0)A_{\mu}) e^{i(\omega_{\mu} - \omega_0)t - i(\mu - \mu_0)\varphi}, \quad (2.31)$$

$$i^n \frac{\partial^n A}{\partial \varphi^n} = \sum_{\mu} (\mu - \mu_0)^n A_{\mu} e^{i(\omega_{\mu} - \omega_0)t - i(\mu - \mu_0)\varphi}. \quad (2.32)$$

Ограничиваясь вырожденным случаем $D = 1$ подставим (2.30)-(2.32) в (2.20). Производя замену $d_2 = D_2/\kappa$, $\theta = \varphi \sqrt{\frac{1}{2d_2}}$, $\tau = \kappa t/2$, $\psi(\tau, \theta) = \sum a_{\mu}(\tau) e^{i\mu\theta}$ получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -(1 + i\zeta_0)\psi + i|\psi|^2\psi - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + f, \quad (2.33)$$

где ζ_0, f совпадают с (2.29). Для уравнения LLE неизвестны точные аналитические решения. Для численного решения существует несколько способов. Для стационарного случая [134] $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$ делается Фурье преобразование, полученная система алгебраических уравнений решается методом Ньютона. Другим используемым методом является Фурье метод расщепления по параметрам (Split Step Fourier Method - SSFM).

Хорошим приближенным стационарным решением для многосолитонного стационарного режима может служить выражение:

$$\psi(\theta) = C_1 + C_2 \sum_j^N \text{sech}\left(\sqrt{\frac{\zeta_0}{d_2}}(\theta - \theta_j)\right), \quad (2.34)$$

где константа C_1 определяет постоянный фон, на котором распространяются N солитонов. Эта аппроксимация хорошо описывала экспериментальные данные.

2.2 Численные методы исследования

2.2.1 Метод Рунге-Кутты

Уравнения для моделирования (2.29) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений существуют метод Рунге-Кутты, экстраполяционный метод Ричардсона, метод предиктор-корректор и др [139].

Метод предиктор-корректор хорошо работает для гладких функций. В нем сохраняются все предыдущие рассчитанные значения функции и используются для оценки значения на следующем шаге. В методе Ричардсона используются экстраполяция рассчитанного значения функции к другому значению, которое получилось бы, если бы шаг сетки был меньше текущего. Эти методы сложнее в реализации и требуют большей вычислительной мощности.

В работе использовался широко известный метод Рунге-Кутты. Рассмотрим систему:

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.35)$$

где функции f_i известны. Заданы начальные условия $y_i(x_s)$, требуется найти $y_i(x_f)$ в конечной точке или во всех точках сетки.

Наиболее часто используется метод Рунге-Кутты 4 порядка (4ый порядок точности). Используется фиксированный шаг h по x . Для проверки точности работы алгоритма можно сравнивать результаты, полученные при величинах шага h и $\frac{h}{2}$. Такое сравнение требует значительного вычислительного времени, поэтому лучше ввести адаптивный контроль за работой алгоритма, изменять размер шага во время счета и следить за полученной ошибкой. Фелберг [139] предложил метод пятого порядка с 6 вычислениями функции, т.ч. другая комбинация этих функций дает метод четвертого порядка точности. Разница между двумя вычисленными $y(x+h)$ используется для оценки ошибки и корректировки шага. Общий вид формул метода Рунге-Кутты пятого порядка:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (2.36)$$

$$k_2 = hf(x_n + a_2h, y_n + b_{21}k_1), \quad (2.37)$$

...

$$k_6 = hf(x_n + a_6h, y_n + b_{61}k_1 + \dots + b_{65}k_5), \quad (2.38)$$

$$y_{n+1} = y_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 + O(h^6). \quad (2.39)$$

Формула для четвертого порядка:

$$y_{n+1}^* = y_n + c_1^*k_1 + c_2^*k_2 + c_3^*k_3 + c_4^*k_4 + c_5^*k_5 + c_6^*k_6 + O(h^5). \quad (2.40)$$

Ошибка выражается как:

$$\Delta \equiv y_{n+1} - y_{n+1}^* = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*)k_i. \quad (2.41)$$

Значения коэффициентов, полученных Cash-Karp 1, [139]:

Таблица 1 — Cash-Karp коэффициенты.

i	a_i			b_{ij}			c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
	$j =$	1	2	3	4	5		

Введем требуемую точность Δ_0 , если при шаге h_1 получилась ошибка Δ_1 , то [139]:

$$h_o = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2}. \quad (2.42)$$

Если $\Delta_1 > \Delta_0$, то (2.42) показывает насколько нужно уменьшить шаг и повторить расчет текущего шага. Если $\Delta_1 < \Delta_0$, то (2.42) показывает насколько можно увеличить шаг для следующего вычисления. Поскольку Δ_0 – вектор требуемой точности, то сравнение можно проводить по отклонению каждого элемента.

В программе был добавлен параметр минимальный шаг, ниже которого адаптивное уменьшение запрещено - программа переходит к расчету на следующий узел времени. На практике в большинстве симуляций адаптивность

работала на увеличение шага на гладких участках амплитудных кривых, и на уменьшение шага в областях хаотического режима. Количество повторных пересчетов с уменьшенным шагом в среднем составляло около 10% от общего числа шагов по времени.

Адекватность использования метода Рунге-Кутты была проверена хорошим совпадением результатов численного моделирования и эксперимента [2]. Однако по результатам симуляции видно, что решение чувствительно к малым изменениям параметров. Области генерации могут отличаться даже при новом случайном затравочном шуме в каждой моде.

2.2.2 Фурье метод расщепления по параметрам (SSFM)

Для решения НУШ наиболее быстрым является Фурье метод расщепления по параметрам. Применим его к уравнению Луджиато-Лефевра:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + |\psi|^2\psi = (-i + \zeta_0)\psi + if. \quad (2.43)$$

Выделим линейную $\hat{L}$ и нелинейную $\hat{N}$ части оператора:

$$\hat{N} = i|\psi|^2\psi + f, \quad (2.44)$$

$$\hat{L} = \frac{i}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - (i\zeta_0 + 1)\psi. \quad (2.45)$$

Решение на следующем шаге по времени дается выражением:

$$\psi(\theta, t + \tau) \approx \exp(i\tau(\hat{L} + \hat{N}))\psi(\theta, t). \quad (2.46)$$

Это выражение является точным, если $|\psi|^2 = \text{const}$. Далее происходит разделение по времени:

$$\exp(i\tau(\hat{L} + \hat{N}))\psi(\theta, t) \approx \exp(i\tau\hat{L}) \times \exp(i\tau\hat{N})\psi(\theta, t). \quad (2.47)$$

Это выражение является точным, если $\hat{L}$ и $\hat{N}$ коммутируют. Данную схему можно рассматривать как последовательное решение уравнения для нелинейного оператора (2.48), подстановку полученного значения в (2.50) начальным

условием. Далее решается уравнение для линейного оператора, решение подставляется начальным условием обратно в (2.48), процедура повторяется.

$$\psi_t = \hat{N}\psi, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\psi}(\theta, t + \tau) = C \exp(i|\psi|^2\tau) - \frac{f}{i|\psi|^2}, \quad (2.49)$$

$$\psi_t = \hat{L}\psi, \quad (2.50)$$

$$\psi(\theta, t + \tau) = F.T^{-1}[\exp(-\tau(ik^2 + i\zeta_0 + 1))F.T.[\tilde{\psi}(\theta, t + \tau)]]. \quad (2.51)$$

2.2.3 Ускорение вычислений для системы связанных уравнений

Пусть гребенка состоит из $2K + 1$ мод, тогда количество нелинейных членов в сумме в (2.29) для всех уравнений равно:

$$\frac{1}{3}(K + 1)(8K^2 + 7 + 3). \quad (2.52)$$

Время счета для всех мод $T \propto K^3 + O(K^2)$. Время счета однопоточной программы может быть значительным (больше суток) уже при $K = 200$, поэтому возникла необходимость ускорить вычисления путем распараллеливания.

Существуют методы распараллеливания на CPU, использующие POSIX-треды операционной системы с моделью общей памяти (shared-memory). Другой способ - использовать протокол MPI (Message Passing Interface) и модель распределенной памяти (distributed memory). На вычислительном кластере МГУ возможен запуск программ, написанных на языке C или Fortran с использованием MPI библиотек.

Была написана программа на языке C с использованием стандарта MPI, которая реализует метод Рунге-Кутты с адаптивным шагом для уравнения (2.29). В программе предусмотрена перестройка частоты накачки, рост амплитуды накачки во времени, все входящие в уравнение коэффициенты настраиваются. Результатом работы программы являются зависимости амплитуд мод от отстройки накачки (меняющейся во времени).

Сумма в правой части (2.29) $\sum_{\mu' \leq \mu''} (2 - \delta_{\mu'\mu''}) a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu'+\mu''-\mu}^*$ считается параллельно на нескольких CPU. Каждый из них считает суммы для определенных набора своих мод μ . Корневой процесс (root) рассылает и получает

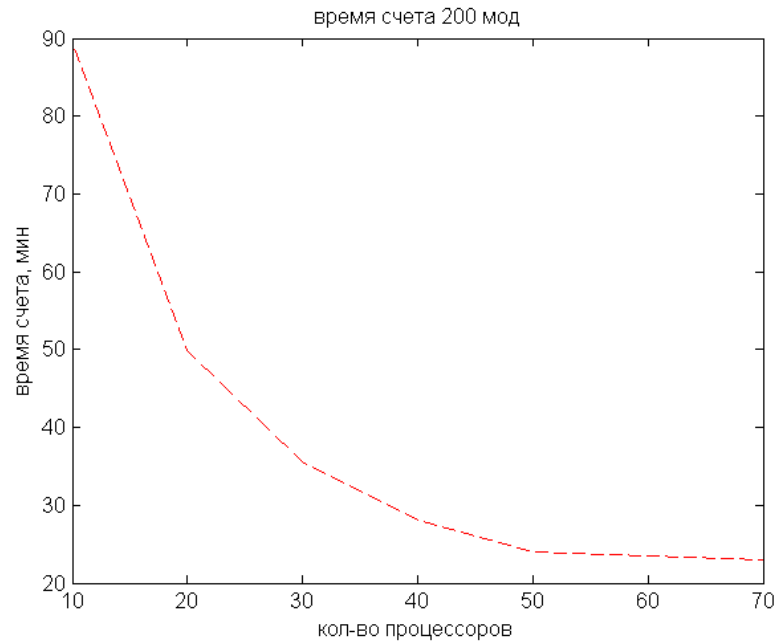


Рисунок 2.2 — Ускорение счета.

массив амплитуд a_i от других процессов. Далее `root` рассчитывает значение функции на следующем шаге методом Рунге-Кутты.

Программа была скомпилирована и запущена на ubuntu (реализация OpenMPI-1.6.3), Windows (реализация MPICH2 32bit и 64bit версии) и на суперкомпьютере Ломоносов (OpenMPI-1.5.5). На локальном компьютере быстрее всего работала 64 битная версия под Windows, хотя linux версия запускалась в виртуальной машине. На Ломоносове при равном количестве процессоров программа считает быстрее, чем на ноутбуке. Однако существуют ограничения для пользователя - время счета не более 3 суток, максимальное число процессоров около 100. При таких ограничениях не удалось провести симуляцию для 1000 мод.

На рис. 2.2 представлена зависимость времени счета для 200 мод от количества задействованных процессоров. Заметного улучшения производительности не наблюдается уже при 40 и более процессорах. Это можно объяснить тем, что суммы в нелинейных членах считаются для 200 мод достаточно быстро, корневой процесс, считающий сам метод Рунге-Кутты, не успевает вычислять и рассылать значения массива мод на новом шаге по времени. Дочерние процессы в это время бездействуют.

В целом время счета нелинейно зависит от диапазона перестройки и сценария симуляции. Заранее оценить его для запуска на кластере проблематично.

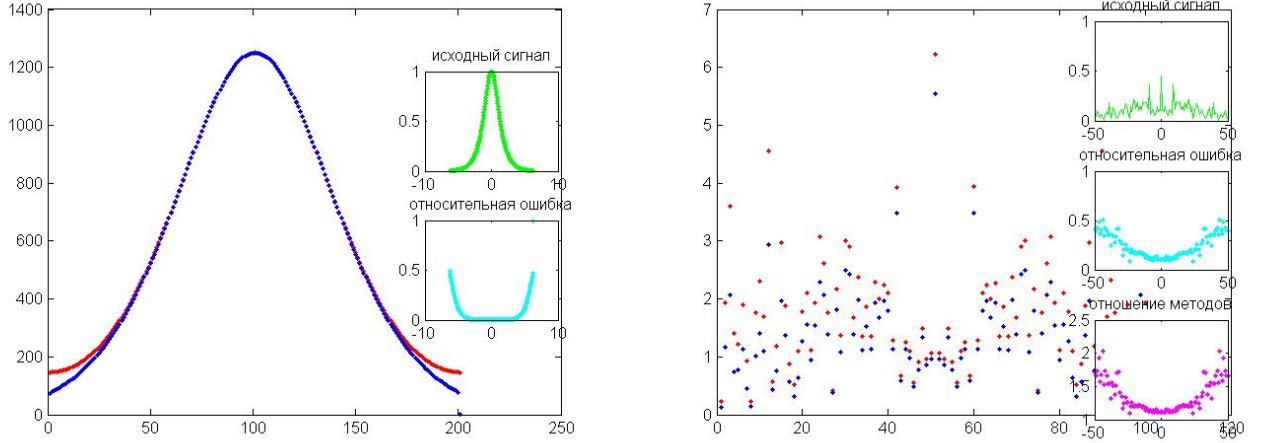


Рисунок 2.3 — Сравнение методов вычисления суммы. Синим обозначено прямое суммирование. Красным - с использованием (2.53). Исходный сигнал изображен на верхней вкладке ($\text{sech}(x)$ на левом рисунке и спектр реальной гребенки на правом).

Существенное сокращение времени счета было достигнуто методом, предложенным в статье [140]. Сумма в правой части (2.29) преобразуется с хорошей точностью к виду:

$$\sum_{\mu' \leq \mu''} (2 - \delta_{\mu' \mu''}) a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu' + \mu'' - \mu}^* \approx F.T^{-1}[|f_j|^2 f_j] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (|f_j|^2 f_j) e^{i2\pi j \mu / N}, \quad (2.53)$$

где прямое дискретное преобразование Фурье

$$f_j = F.T[a_\mu] = \sum_{j=0}^{N-1} a_\mu e^{-i2\pi j \mu / n}. \quad (2.54)$$

Было проведено численное сравнение двух методов вычисления правой части. Для гладкого спектра, обращающегося в 0 на концах, совпадение двух результатов хорошее. Для реального спектра, генерируемого в резонаторе, результат, полученный через Фурье преобразование, всегда больше, чем при прямом вычислении суммы. Для мод, близких к центральной моде накачки, относительная ошибка приблизительно постоянна и составляет до 25%. Результаты сравнения даны на рис. 2.3.

Несмотря на выявленное отличие, конечные результаты симуляции гребенки двумя методами хорошо совпадают - одинаковы области генераций и наблюдаемые режимы. Тем самым затратное вычисление суммы заменяется на выполнение быстрого прямого и обратного Фурье преобразования. Предыдущая версия программы была переделана под расчет правой части уравнений

с использованием стандартных FFT библиотек. Была реализована программа для NVIDIA GPU с использованием библиотеки CuFFT, однако она не дала заметных преимуществ по скорости счета и удобству последующей обработки данных, поэтому основное моделирование проводилось в среде MATLAB.

2.3 Результаты моделирования

2.3.1 Используемые программы

1. Многопоточная программа под OpenMPI для симуляции связанных уравнений с суммой в правой части системы (2.29). Скомпилированная (win32) программа доступна по [ссылке](#).
2. Однопоточная программа для связанных уравнений с Фурье преобразованиями в правой части (2.53), использующая GPU для быстрого Фурье преобразования. Скомпилированная (win32) программа доступна по [ссылке](#).
3. MATLAB программа для связанных уравнений с Фурье преобразованиями в правой части (2.53).
4. MATLAB программа для моделирования уравнения LLE (2.33) методом SSFM.
5. Пакет Mathematica использовался для решения уравнения LLE (2.33) методом конечных разностей в функции NDSolve[].
6. Графический пользовательский интерфейс CombGUI, написанный в MATLAB, объединяющий оба метода симуляции и позволяющий задавать параметры системы, сохранять промежуточные результаты на диск для последующей обработки и визуализации. Скриншот интерфейса представлен на рис. 2.4.

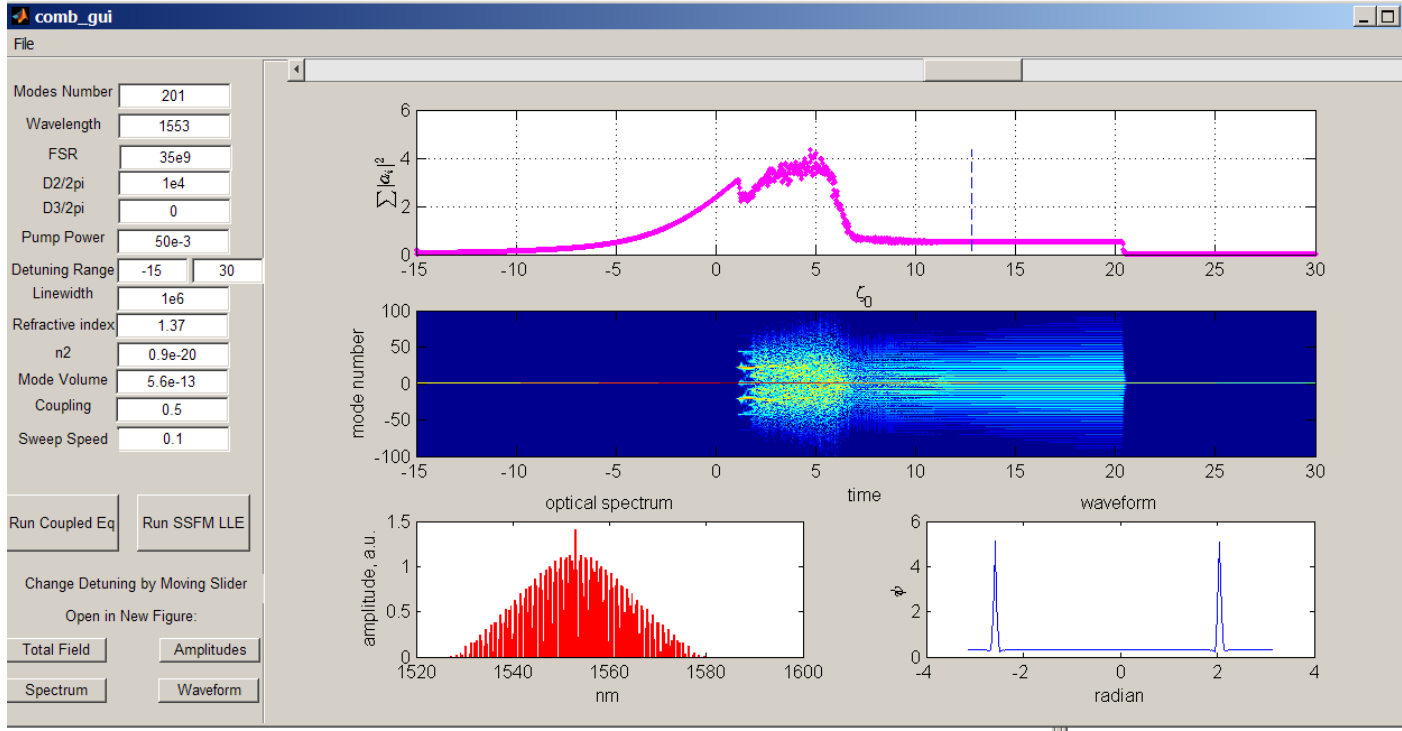


Рисунок 2.4 — Пользовательский интерфейс программы для численного моделирования CombGUI.

2.3.2 Моделирование по экспериментальным данным

Рассмотрим дисковый резонатор из MgF_2 с параметрами из статьи [2]. Проверим адекватность теоретической модели путем сравнения результатов моделирования с экспериментальными наблюдениями (экспериментальные данные из [2]). Начальным условием при решении системы связанных уравнений выступал затравочный шум в каждой моде, имеющий нормальное распределение, - приближение к квантовым нулевым флуктуациям в каждой моде. Используемые параметры:

$$Q_0 = Q_c = 5 \times 10^8, \quad (2.55)$$

$$P_0 = 100 \text{ мВт}, \quad (2.56)$$

$$\lambda_0 = 1.553 \text{ мкм}, \quad (2.57)$$

$$\omega_0 = 1.213 \times 10^{15} \text{ Гц}, \quad (2.58)$$

$$n_0 = 1.376, \quad (2.59)$$

$$V_{eff} = V_0 = 5.6 \times 10^{-13} \text{ м}^3, \quad (2.60)$$

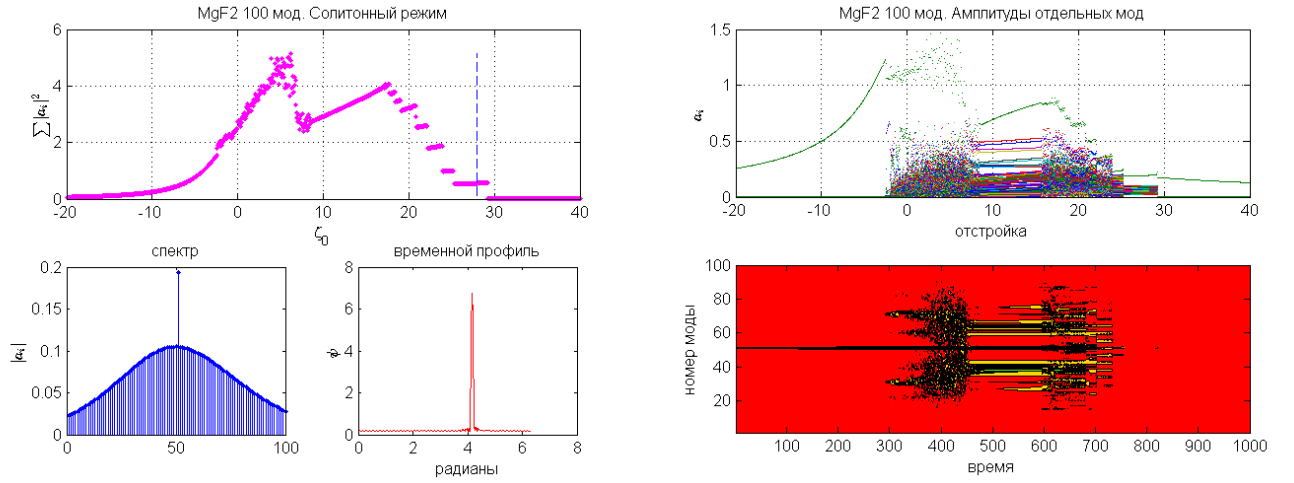


Рисунок 2.5 — Моделирование 100 мод.Резонатор из MgF₂. Накачка 100 мВт.

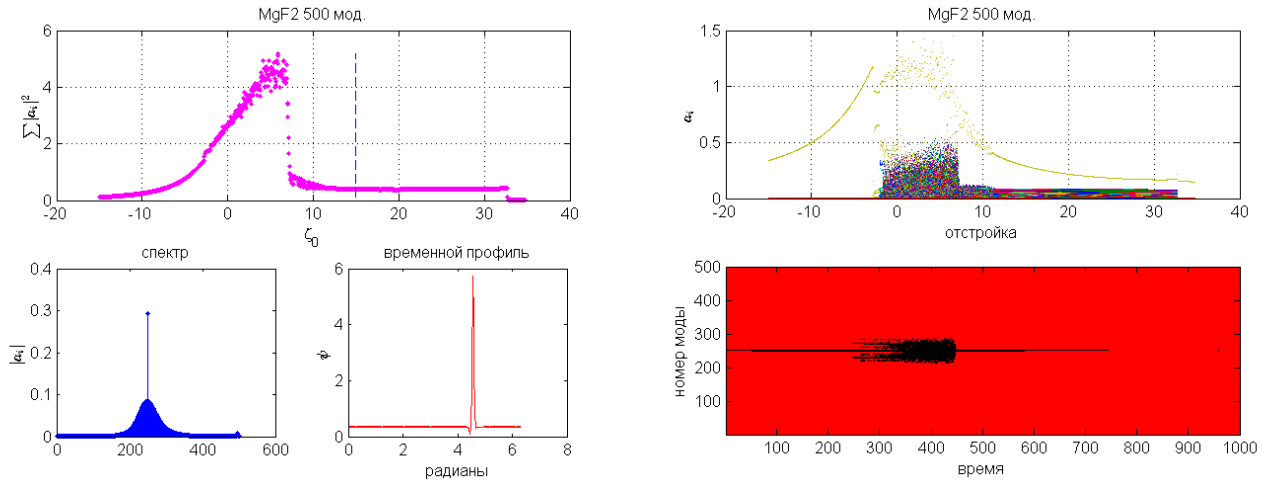


Рисунок 2.6 — Моделирование 500 мод.Резонатор из MgF₂. Накачка 100 мВт.

$$\kappa = \frac{\omega}{Q_0} = 1.2 \times 10^6 \text{ Гц}, \quad (2.61)$$

$$n_2 = 0.9 \times 10^{-20} \frac{\text{М}^2}{\text{Вт}}, \quad (2.62)$$

$$g = 6.1 \times 10^{-4}, \quad (2.63)$$

$$D_1 = 2.21 \times 10^{11} \text{ Гц}, \quad (2.64)$$

$$D_2 = 6.28 \times 10^4 \text{ Гц}, \quad (2.65)$$

$$D_3 = -800 \text{ Гц}. \quad (2.66)$$

Результаты моделирования с помощью многопоточной программы представлены на рис. 2.5, 2.6, 2.7 для 100, 500, 800 мод соответственно.

Число ОСД между соседними модами равно 1. На левом верхнем графике представлена зависимость суммы квадратов амплитуд всех мод от величины

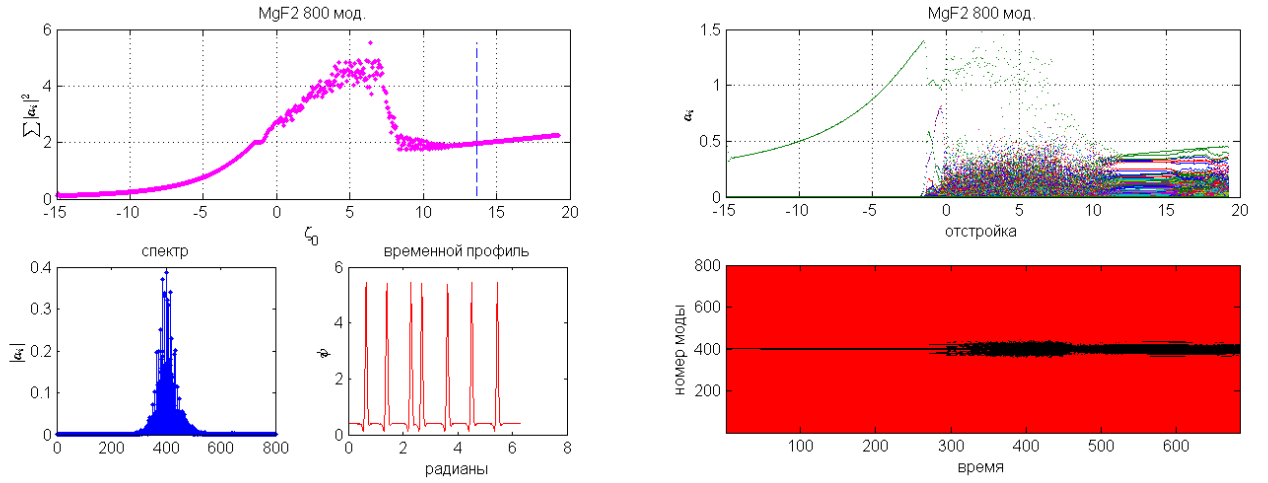


Рисунок 2.7 — Моделирование 800 мод. Резонатор из MgF_2 . Накачка 100 мВт.

отстройки лазера накачки. Отстройка изменяется линейно от начала до конца диапазона. Ось абсцисс поэтому соответствует временной шкале. По оси ординат размерность дается нормировкой (2.27), по оси абсцисс отстройка частоты выражена в единицах, т.ч. 1 соответствует перестройке на 1 ширину резонансной кривой. Для наглядности приведены аналогичные графики амплитуд отдельных мод, и график, по которому можно понять какие номера мод были возбуждены в данный момент (правый рисунок). Синим цветом дан график спектра - зависимость модуля амплитуды от номера моды при данной отстройке. Текущая отстройка обозначена вертикальным пунктиром на верхнем графике. Красным показан пространственно-временной профиль $\psi(\tau, \Phi) = \sum a_\mu(\tau) e^{i\mu\Phi}$ при той же отстройке.

На всех трех графиках (100, 500, 800 мод) наблюдается сначала генерация только моды накачки, потом неустойчивая генерация гребенки, носящая хаотический характер. Далее при изменении отстройки возникают чередующиеся области стабильной и нестабильной генерации. В областях стабильной генерации возникают N импульсов (в зависимости от числа рассматриваемых мод), в следующей области $N-1$ и так далее. Наиболее интересна область генерации одного импульса (солитона), распространяющегося по экватору резонатора. Эта область наблюдалась экспериментально [2]. Видны отличия между симуляциями 100, 500, 800 мод: из хаотического режима гребенка переходит в устойчивые режимы с разным числом импульсов (8, 1, 7 соответственно), это связано с различными начальными условиями, затравочными шумами. Также видно, что моды с номерами, удаленными от центральной моды накачки более, чем на 100, не возбуждаются (или возбуждаются крайне слабо), что говорит о зависимости

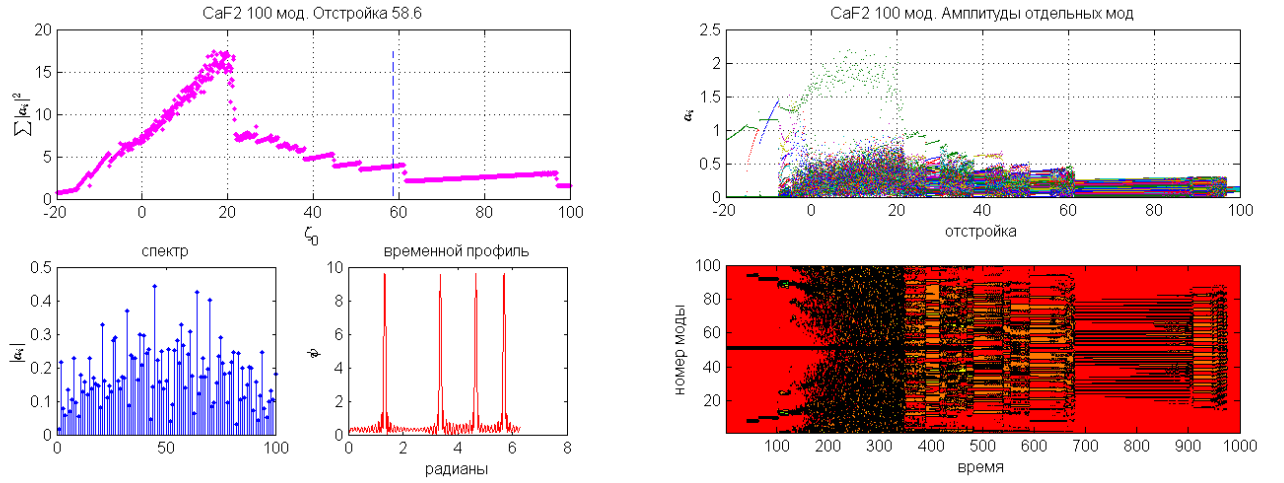


Рисунок 2.8 — Моделирование 100 мод. Резонатор CaF_2 . Генерация гребенки в широком диапазоне перестройки лазера.

ширины гребенки от величины дисперсии второго порядка [5]. При большой по модулю аномальной дисперсии генерация широкой гребенки невозможна.

В целом результаты моделирования хорошо соответствуют эксперименту: ступенчатый вид зависимости суммы квадратов амплитуд всех мод от величины отстройки лазера накачки непосредственно наблюдался.

Рис. 2.8 дает результат моделирования эксперимента из статьи [141], в котором использовался сфероидальный резонатор из CaF_2 с параметрами: $Q_0 = Q_c = 3 \times 10^9$, $P_0 = 2$ мВт, $\lambda_0 = 0.794$ мкм, $n_0 = 1.43$, $V_0 = 5.6 \times 10^{-15}$ м³, $n_2 = 3.1 \times 10^{-20} \frac{\text{м}^2}{\text{Вт}}$, $D_2 = 2.1 \times 10^4$ Гц, $D_3 = 0$ Гц.

Резонатор был изготовлен методом механической полировки, подбирая размеры осей сфероида, можно задавать геометрическую дисперсию резонатора и тем самым регулировать центральную частоту гребенки.

По результатам численного моделирования (многопоточная программа) наблюдается генерация гребенки в более широком диапазоне перестройки лазера, чем для резонатора из MgF_2 . Отчетливо видны области генерации солитонов. На графике амплитуд отдельных мод видно, что в областях генерации солитонов отдельные моды могут и не иметь гладких зависимостей. Полученный результат согласуется с выводами авторов статьи только в части наблюдения устойчивой гребенки. Экспериментально вид спектра асимметричен, авторы объясняют это тем, что элемент связи находился около экватора резонатора и с большей эффективностью считывал сигнал от мод с меньшим номером и, соответственно, с меньшей частотой.

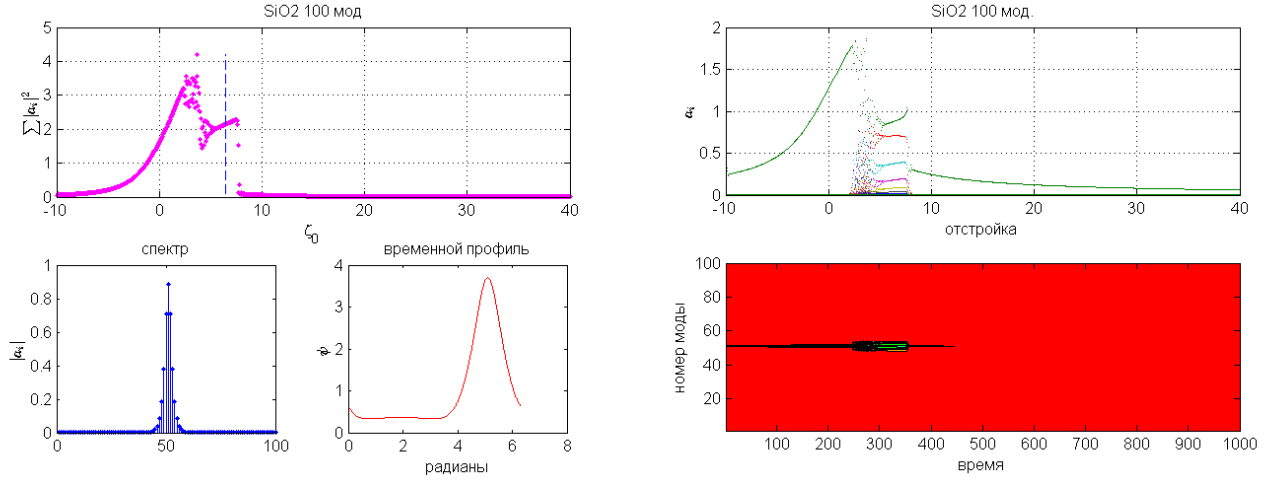


Рисунок 2.9 — Моделирование 100 мод. Резонатор SiO_2 .

Рассмотрим параметры резонатора, в котором наблюдалась частотная гребенка шириной больше октавы. Рис. 2.9 получен по результатам моделирования для резонатора из SiO_2 с параметрами из статьи [46] : $Q_0 = Q_c = 2.7 \times 10^8$, $P_0 = 2.5 \text{ Вт}$, $\lambda_0 = 1.56 \text{ мкм}$, $n_0 = 1.44$, $V_0 = 5 \times 10^{-13} \text{ м}^3$, $n_2 = 2.2 \times 10^{-20} \frac{\text{м}^2}{\text{Вт}}$, $D_2 = 10 \times 10^6 \text{ Гц}$, $D_3 = 0$.

Резонатор отличается большим D_2 , мощностью накачки и ОСД. На рисунках видна генерация гребенки в узком диапазоне перестройки лазера. Из-за большой ОСД 200 мод уже покрывают октаву. Результаты моделирования согласуются с выводами авторов статьи.

2.3.3 Сравнение моделирования разными методами

Для обоснованного использования методов проведем сравнение моделирования системы связанных уравнений с различной правой частью: прямым вычислением суммы или использованием Фурье преобразования 2.53. Рассмотрим резонатор из MgF_2 с параметрами из статьи [2], см. пункт 2.3.2. Зададим одинаковые параметры резонатора и области перестройки лазера накачки (от -15 до 35 единиц ширины резонанса, счет для 500 мод). Полученные результаты приведены на рис. 2.10. Области и режимы генерации совпадают (на верхних графиках). Видны несовпадения в количестве солитонов (1 и 3 соответственно), это объясняется чувствительностью моделирования к начальным шумам в

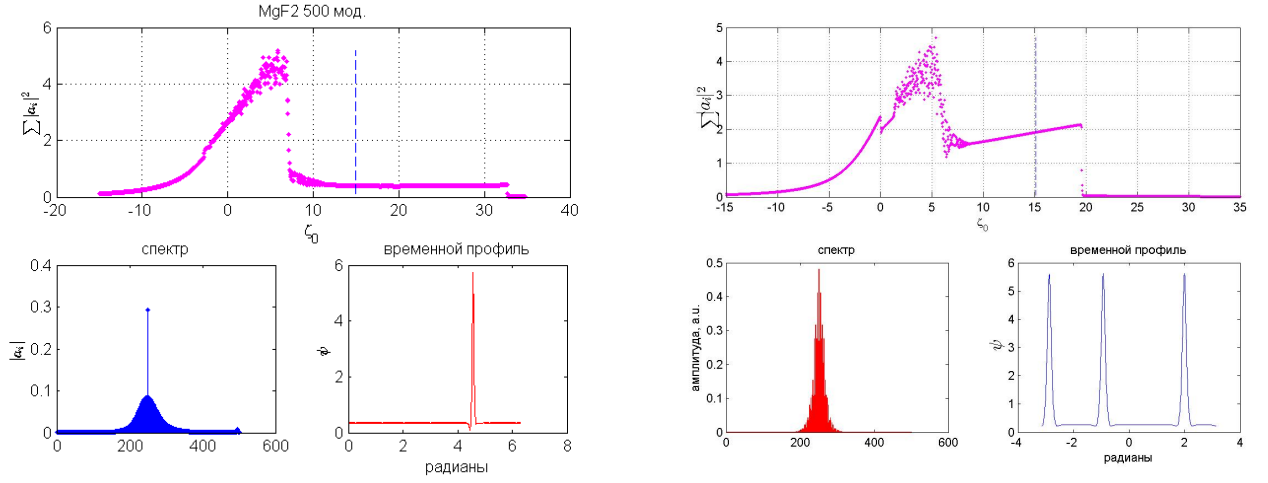


Рисунок 2.10 — Сравнение методов. Слева счет с прямым суммированием нелинейных членов. Справа с использованием Фурье преобразования. Верхние графики суммы амплитуд мод хорошо совпадают.

каждой моде. При повторных симуляциях с одинаковым начальным условием количество солитонов совпадало.

Далее сравним результаты моделирования уравнения Луджиато-Лефевра (2.33) и связанных уравнений в спектральном представлении (2.29). Зададим одинаковые параметры $Q_0 = Q_c = 5 \times 10^8$, $P_0 = 100$ мВт, $\lambda_0 = 1.553$ мкм, $\omega_0 = 1.213 \times 10^{15}$ Гц, $n_0 = 1.376$, $V_0 = 5.6 \times 10^{-13}$ м³, $\kappa = \frac{\omega}{Q_0} = 1.2 \times 10^6$ Гц, $n_2 = 0.9 \times 10^{-20}$, $g = 6.1 \times 10^{-4}$, $D_1 = 2.21 \times 10^{11}$ Гц, $D_2 = 6.28 \times 10^4$ Гц, $D_3 = 0$ Гц, $\kappa = 1.2 \times 10^6$ Гц. Будем перестраивать лазер накачки от -15 до 35 единиц. Начальным условием в каждой моде выступает нормально распределенный шум $\mathcal{N}(0,1)$. Результаты показаны на рис. 2.11. Картина моделирования методом SSFM хорошо совпадает с картиной для связанных уравнений - последовательно наблюдаются рост только моды накачки, зона модуляционной неустойчивости, далее стабильная генерация нескольких импульсов. Основные отличия - количество наблюдаемых импульсов и величина отстройки, при которой частотная гребенка пропадает. При повторных симуляциях при других параметрах число импульсов иногда совпадало. Можно утверждать, что обе математические модели дают хорошее совпадение при описании физического явления генерации частотных гребенок в микрорезонаторах.

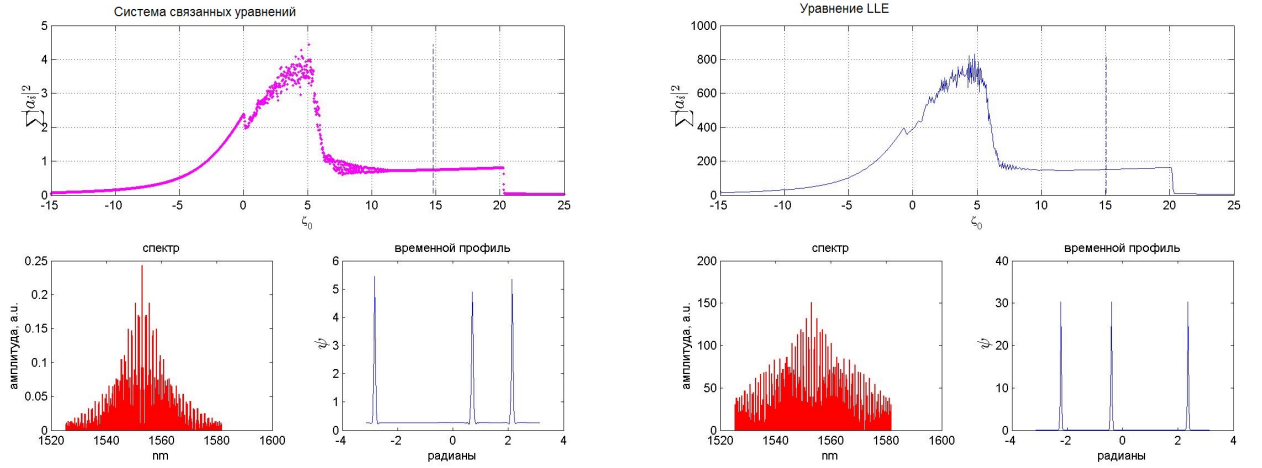


Рисунок 2.11 — Сравнение мат. моделей. Слева счет для системы связанных уравнений. Справа для уравнения Луджиато-Лефевра.

2.3.4 Учет нагрева резонатора.

Для более точного совпадения численного моделирования с экспериментом требуется учет нагрева резонатора лазером накачки, что приводит к другой конфигурации мод и нарушению режима генерации гребенок. К основной системе уравнений (2.29) добавляется уравнение теплопроводности. Следуя [130] получим систему:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -[1 + i\zeta_\mu - i\Theta]a_\mu + i \sum_{\mu' \leq \mu''} (2 - \delta_{\mu'\mu''})a_{\mu'}a_{\mu''}a_{\mu'+\mu''-\mu}^* + \delta_{0\mu}F, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{2\delta_\Theta}{\kappa}\Theta = \frac{n_{2\Theta}}{n_2} \frac{2\delta_\Theta}{\kappa} \sum_{\mu} |a_\mu|^2, \quad (2.68)$$

где Θ - усредненная по объему моды температура.

Выбранная модель предполагает, что сдвиг каждой моды при учете тепловой нелинейности одинаков. Программа была доработана, в связанные уравнения добавлена зависимость отстройки от Θ , вычисление Θ производилось на каждом шаге по времени. Выбрано отношение $\frac{2\delta_\Theta}{\kappa} = 20$. Рис. 2.12 дает результат моделирования с учетом небольшого теплового коэффициента $n_{2\Theta} = 10$, остальные параметры резонатора MgF_2 были приведены в предыдущих пунктах.

Был применен новый сценарий - лазер перестраивался от -15 до 50 единиц и далее оставался на отстройке 50 до конца симуляции. Видно, что генерация гребенки сохраняется, но диапазон требуемой перестройки лазера заметно

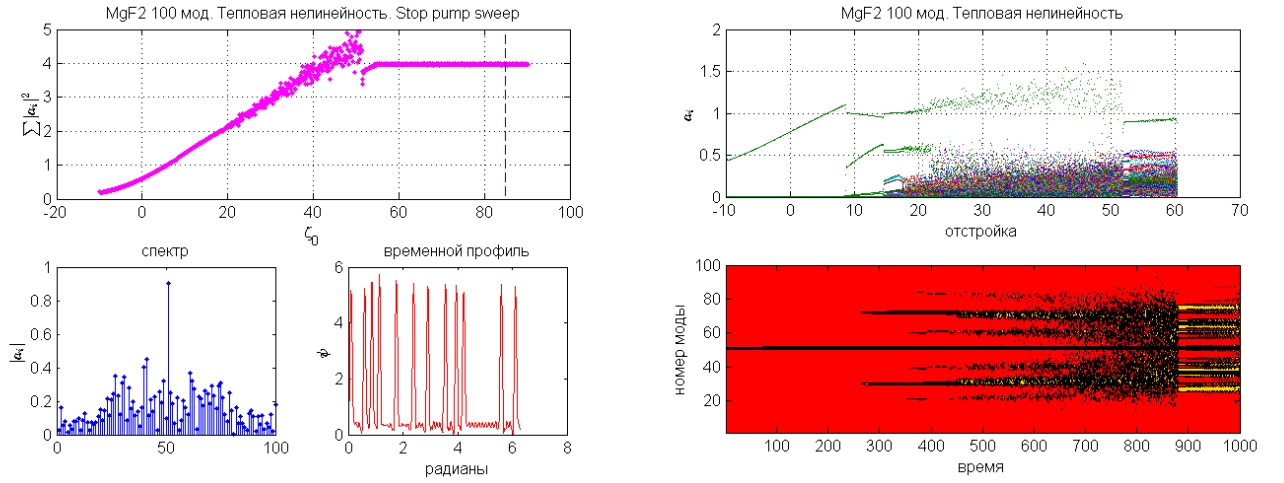


Рисунок 2.12 — Резонатор из MgF_2 . Слабая тепловая нелинейность. Фиксация многосолитонного режима происходит при остановке перестройки лазера накачки на 50.

увеличивается. При численном моделировании удается зафиксировать многосолитонный режим. Однако во всех реальных экспериментах для фиксации такого режима используются различные механизмы тепловой стабилизации.

2.3.5 Отсутствие генерации гребенки.

Не во всех лабораториях удавалось экспериментально наблюдать солитонный режим. В некоторых случаях возбужденными оказывались лишь небольшое число боковых мод. Приведем сценарии, когда частотная гребенка не наблюдалась и при численном моделировании.

На рис. 2.13 вверху показан результат для резонатора из MgF_2 при большой тепловой нелинейности $n_{20} = 100$. Боковые моды не возбуждаются в широком диапазоне перестройки (проводилась симуляция от -20 до 100 единиц).

На рис. 2.13 внизу показан сценарий одновременной перестройки и линейного увеличения мощности накачки от 0 до $P_0 = 100$ мВт. Боковые моды не возбуждались.

Был рассмотрен сценарий, когда лазер отстроен на фиксированную величину 10 , его мощность линейно увеличивается от 0 до $P_0 = 100$ мВт. Оптическая гребенка в этом случае не наблюдалась.

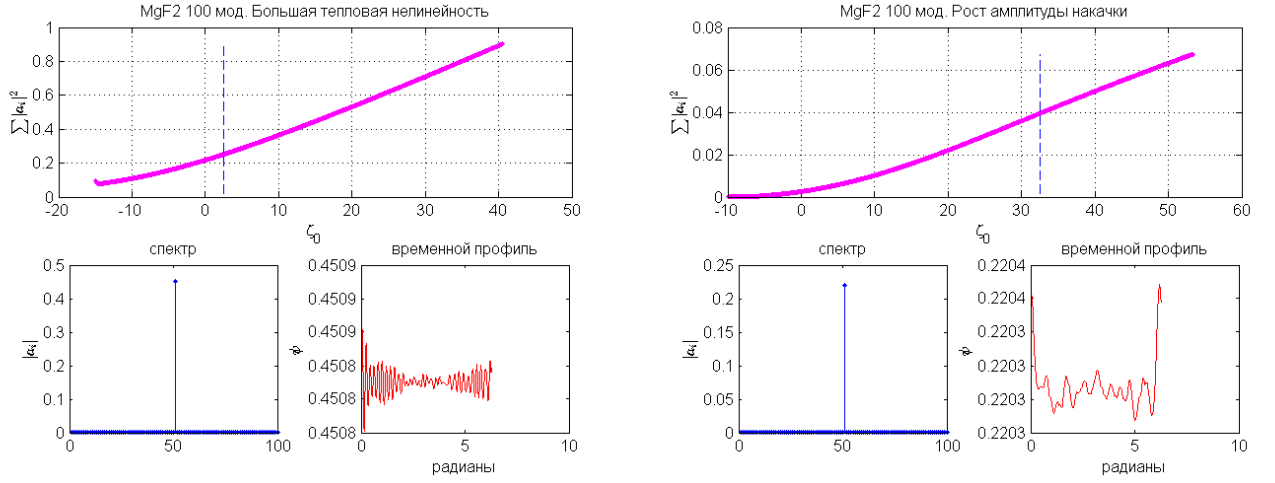


Рисунок 2.13 — Отсутствие гребенки. Резонатор из MgF_2 . Большая тепловая нелинейность (слева). Рост мощности накачки (справа).

Гребенка также не наблюдалась при малых значениях добротности $Q \approx 10^5$ или больших значениях $D_2 \approx 10^7$ Гц.

2.3.6 Различные сценарии моделирования

Для резонатора из MgF_2 моделировались сценарии фиксации солитонного режима. Рис. 2.14 дает зависимости: а) лазер равномерно перестраивается и останавливается на отстройке, соответствующей солитонному режиму; б) лазер перестраивается скачком с отстройки, соответствующей хаотическому режиму, на отстройку, соответствующую солитонному режиму (режим рассмотрен в [142]). В обоих случаях симуляция давала желаемый результат - фиксацию солитонного режима. Однако в эксперименте этому препятствует большая тепловая нелинейность.

С экспериментальной точки зрения интересен сценарий сдвига собственной частоты моды накачки на постоянную величину от соседних мод. Рисунок 2.15 показывает динамику гребенки в зависимости от сдвига центральной частоты моды накачки. Тем самым моделируется отклонение от разложения $\omega_\mu = \omega_0 + D_1\mu + \frac{1}{2}D_2\mu^2$ в нулевой точке. Сдвиг выражен в единицах ширины резонансной кривой. При больших сдвигах в положительную или отрицательную сторону гребенка не генерируется (при сохранении аномальной дисперсии).

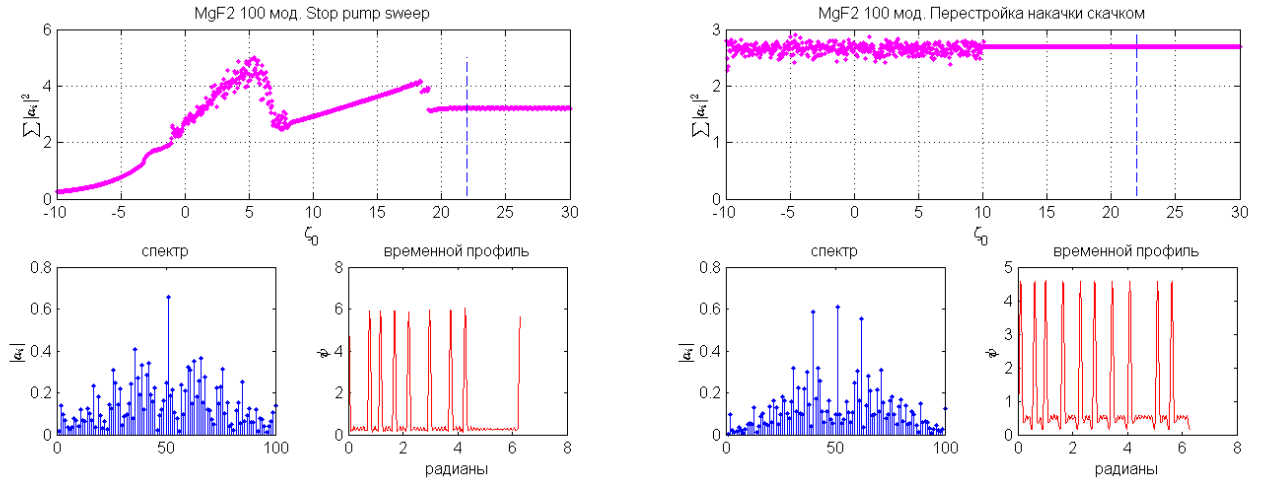


Рисунок 2.14 — Фиксация солитонного режима. Остановка перестройки лазера накачки (слева). Перестройка скачком (справа).

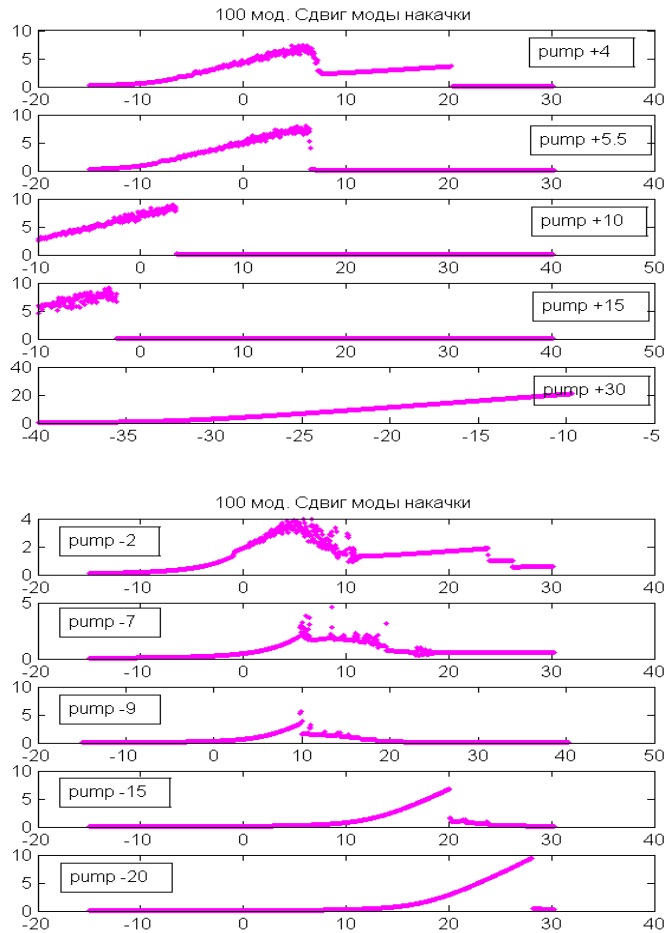


Рисунок 2.15 — Измененный закон дисперсии: сдвиг частоты моды накачки (pump) в единицах ширины резонансной кривой.

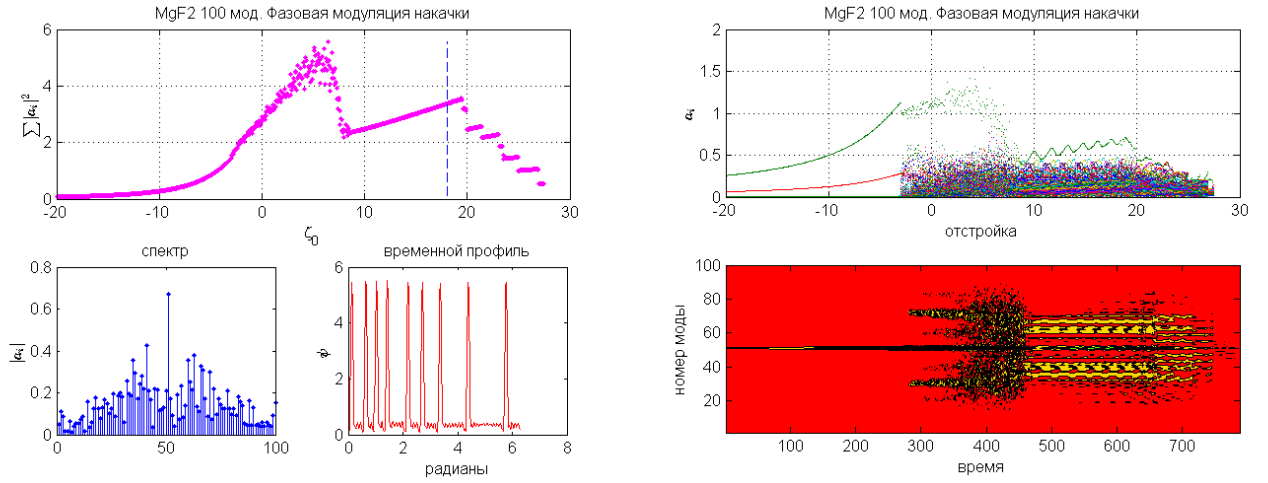


Рисунок 2.16 — Генерация солитонов при фазовой модуляции накачки с частотой строго равной 1 ОСД резонатора.

Другим интересным для эксперимента параметром является фазовая модуляция лазера накачки. В спектральном представлении фазовая модуляция эквивалентна возбуждению боковых мод. В программу были внесены изменения - помимо центральной моды подавалась постоянная накачка разного знака в 2 соседние моды. Рис. 2.16 показывает результат моделирования - генерация гребенки сохраняется, на графике амплитуд отдельных мод видна их осциллирующая форма. Однако при увеличении накачки в боковые моды (соответственно глубины фазовой модуляции) пропадают области многосолитонного режима.

2.3.7 Влияние дисперсии резонатора

В экспериментальных работах исследуется влияние дисперсии высоких порядков на формирование частотной гребенки. Рассмотрим разложение $\omega_\mu = \omega_0 + D_1\mu + \frac{1}{2}D_2\mu^2 + \frac{1}{6}D_3\mu^3$. Дисперсия второго порядка $D_2 = -\frac{c}{n}D_1^2\beta_2$, где β_2 - дисперсия групповой скорости. Положительная D_2 соответствует аномальной дисперсии резонатора и параболическому отклонению распределения мод от эквидистантности. Коэффициенты D_2, D_3 оцениваются аналитически или численно, учитывая материальную и геометрическую дисперсии. Для резонатора из MgF_2 проведем моделирование для разных значений этих параметров. Результаты представлены на рис. 2.17. Цветом дано отношение пиковой и средней

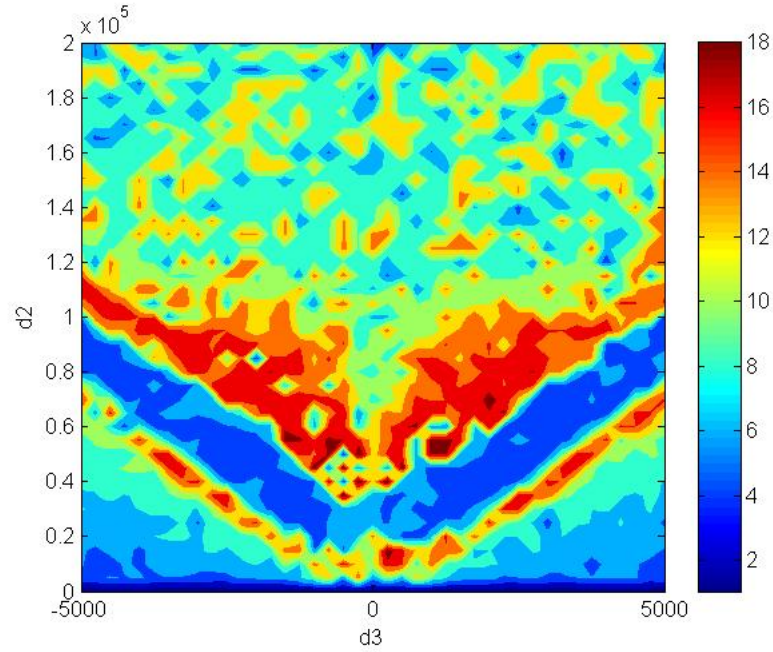


Рисунок 2.17 — Резонатор из MgF_2 . Зависимость числа генерируемых солитонов от дисперсии второго и третьего порядка. Цветовая шкала показывает отношение пиковой и средней мощности внутри резонатора. Максимальное значение (красный цвет) соответствует односолитонному режиму. Меньшие значения (синий цвет) соответствуют многосолитонным режимам и режимам без генерации солитонов.

мощности внутри резонатора. Оно выступает как индикатор количества солитонов, максимальное значение соответствует односолитонному режиму. Картина симметрична для положительных и отрицательных D_3 . Минимальное число солитонов достигается при устремлении $D_3 \rightarrow 0$ и небольших $D_2 \geq 0$.

Далее было выполнено моделирование отклонения от параболического вида $\omega_\mu - \omega_0 - D_1\mu = \frac{1}{2}D_2\mu^2$ путем добавления случайного шума в каждую моду с нормальным распределением. Случайная величина с гауссовским распределением $\mathcal{N}(0,1)$ получалась из случайных величин с равномерным распределением по алгоритму Box-Muller [139]. На рис. 2.18 приведены графики динамики гребенки при заданном распределении мод по частоте (отклонению от эквидистантности). Увеличивая дисперсию шума, мы сужаем области многосолитонного режима. Однако последний график показывает, что даже при значительных отклонениях от параболического вида для удаленных мод, но при сохранении такового для близких к центральной моде накачки, хорошо наблюдается гребенка с солитонными режимами.

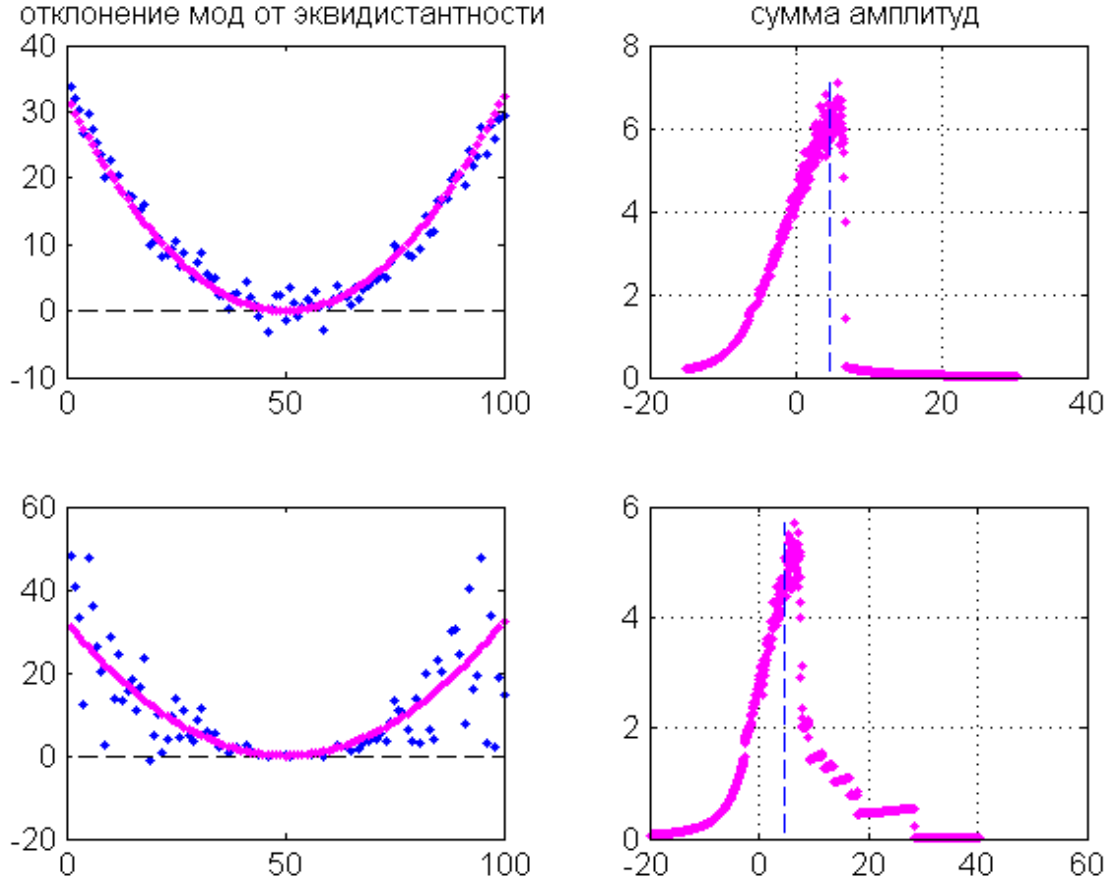


Рисунок 2.18 — Отклонение от параболического разложения (2.16) для мод. Цветовая шкала показывает отношение пиковой и средней мощности внутри резонатора. Максимальное значение (красный цвет) соответствует односолитонному режиму. Меньшие значения (синий цвет) соответствуют многосолитонным режимам и режимам без генерации солитонов.

Известно, что связь между семействами мод в резонаторе дополнительно изменяет собственные частоты и может приводить к особой картине пересечения мод [70]. В упрощенной модели эффект нормального расщепления мод (avoided mode crossings) может быть параметризован как гиперболическое отличие распределения мод $\omega_\mu = \omega_0 + D_1\mu + \frac{1}{2}D_2\mu^2 + \frac{a/2}{\mu-b-0.5}$, где a показывает на сколько выбивается мода с номером b . Результат моделирования для различных a, b приведен на рис. 2.19. Картина центрально-симметричная, видно, что даже небольшие выбивания близких к центральной мод приводят к картине без солитонов. Этот результат согласуется с ранними экспериментальными данными [70]. Однако позже мною экспериментально неоднократно замечалось, что наличие расщепления моды накачки, приводит к уширению солитонной

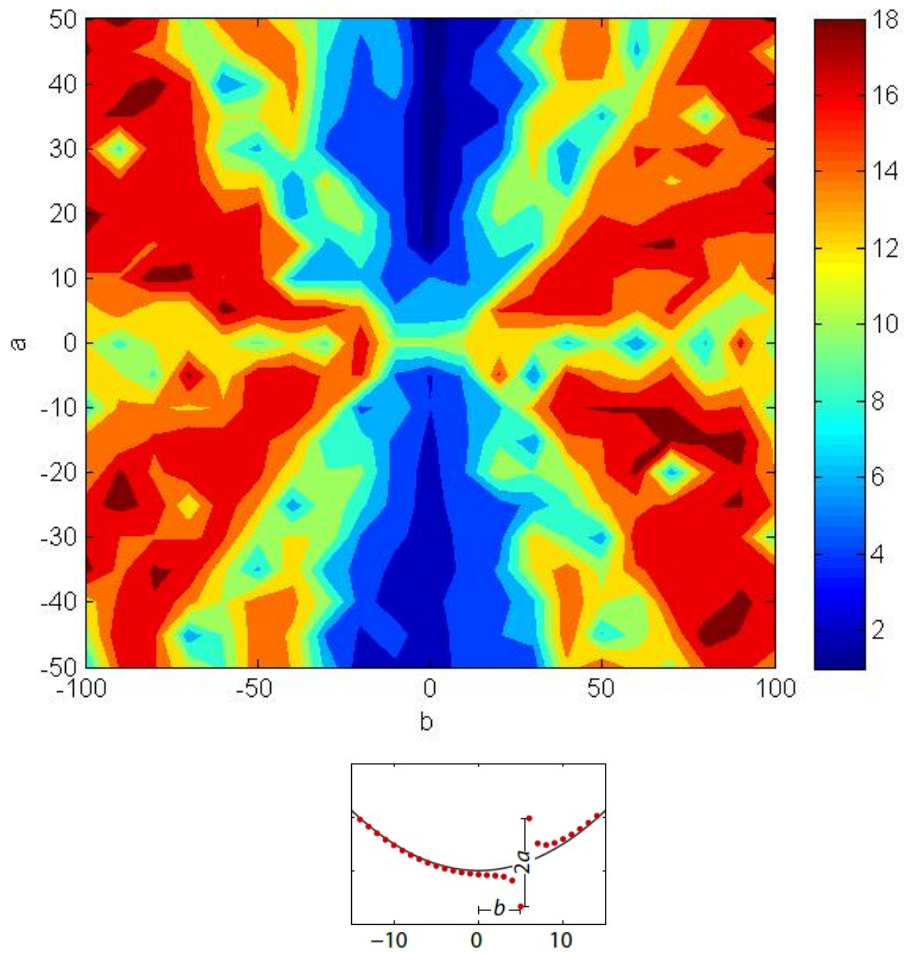


Рисунок 2.19 — Резонатор из MgF_2 . Гиперболическое отличие частот в законе дисперсии. Параметр a показывает на сколько выбивается мода с номером b .

Цветовая шкала дает отношение пиковой и средней мощности внутри резонатора. Максимальное значение соответствует односолитонному режиму.

ступеньки. При дальнейшей настройке на солитонный режим, наблюдалось большое число дисперсионных волн на эффектах нормального расщепления мод, сигнал биений на частоте повторения солитона был шумным (порядка 10 кГц). Иногда наблюдалась одновременная параметрическая генерация отдельных линий на другом семействе мод, т.ч. фактически один лазер генерировал гребенки на двух семействах мод при накачке в месте их пересечения.

2.3.8 Моделирование генерации дисперсионной волны по экспериментальным данным

В эксперименте [5] впервые экспериментально продемонстрирован оптический временной солитон и индуцированная им дисперсионная волна в интегральном микрорезонаторе из Si_3N_4 2.20. При наличии дисперсии высоких порядков оптический солитон может излучать дисперсионную волну [143] вблизи частот с нулевой суммарной дисперсией. Хотя в волоконной оптике этот эффект считается вредным для некоторых приложений, для микрорезонаторов он позволил расширить спектральное покрытие гребенки и при правильном выборе геометрии резонатора дает мощные пики по краям спектра, необходимые при удвоении частоты для самосинхронизации f - $2f$ [23]. При наличии дисперсии третьего и более высоких порядков спектр возмущенного солитона перестает быть симметричным, максимум спектра сдвигается и возникает дополнительный мощный спектральный пик. Во временном представлении солитон имеет осциллирующий хвост (отсюда другое название по аналогии: оптическое черенковское излучение). Положение спектрального пика определяется из условия нуля суммарной дисперсии: $\mu_{DW} = \frac{-3D_2}{D_3}$ при $D_4 = 0$ и $\mu_{DW} = \frac{-2D_3}{D_4} \pm \sqrt{(\frac{2D_3}{D_4})^2 - \frac{12D_2}{D_4}}$ при $D_4 \neq 0$.

Было проведено численное моделирование по параметрам, полученным из экспериментальных данных по измерению дисперсии в диапазоне вблизи накачки (D_3, D_4 подбирались вручную): $D_2/2\pi = 2.2$ МГц, $D_3/2\pi = 25$ кГц, $D_4/2\pi = -300$ Гц. Мощность накачки 1 Вт, добротность $Q = 10^6$. Начальным условием являлся односолитонный режим, полученный из набора предыдущих симуляций. Эффективная отстройка составила $\zeta = 12$ для наилучшего совпадения с экспериментом. Вычисленное значение $\mu_{DW} = -200$, что близко к экспериментальному значению -195. На рис. 2.20 зеленым показана огибающая спектра, полученная при моделировании, видно хорошее совпадение с экспериментальным спектром по мощности линий, но с общим сдвигом. Отсутствие в эксперименте сдвига максимума огибающей спектра связано с тем, что в нитриде кремния одновременно происходит сдвиг спектрального максимума солитона в противоположную сторону из-за эффекта Рамана [13], а также из-за не учитываемой в моделировании зависимости нелинейного коэффициента g от частоты.

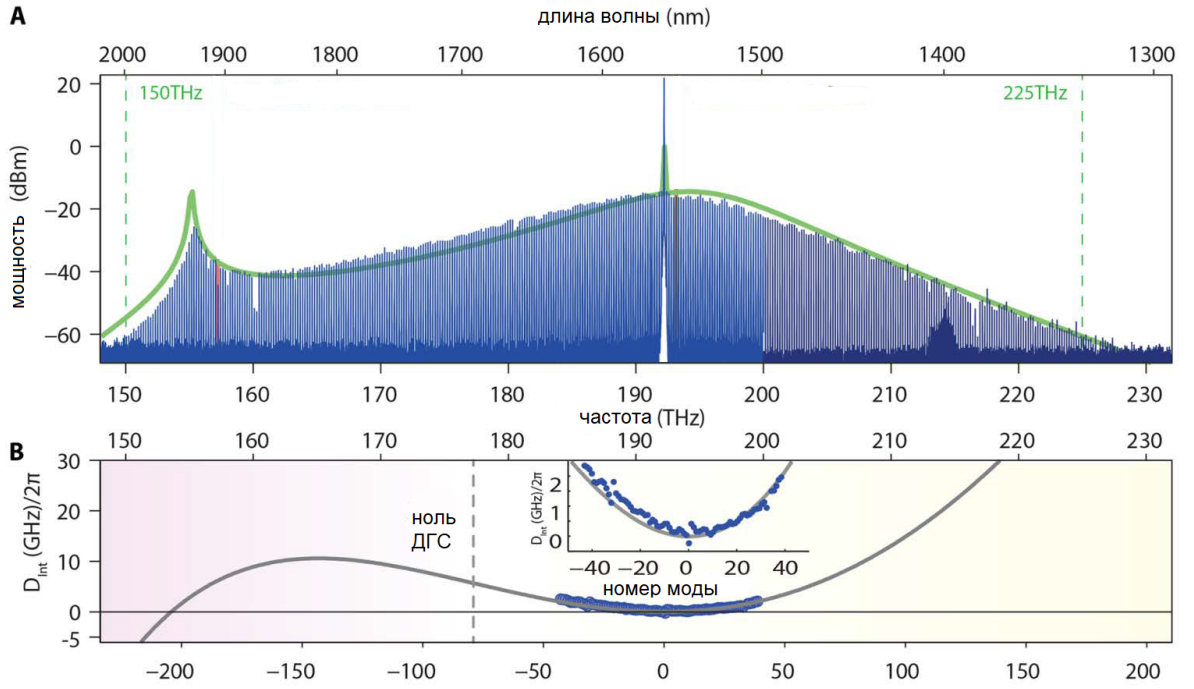


Рисунок 2.20 — А: оптический временной солитон и индуцированная им дисперсионная волна в интегральном микрорезонаторе из Si_3N_4 , зеленым дана огибающая гребенки из численного моделирования по параметрам из эксперимента; В: дисперсионная кривая микрорезонатора, вычисленная методом FEM моделирования с нанесенными экспериментальными точками.

2.3.9 Моделирование уравнения Луджиато-Лефевра методом конечных разностей

Моделирование уравнения LLE (2.33) с начальным профилем

$$\psi(0, \theta) = \sqrt{2\zeta_0} \exp(i \arccos(\frac{\sqrt{8\zeta_0}}{\pi f})) \sum_j^N \text{sech}(\sqrt{\frac{\zeta_0}{d_2}}(\theta - \theta_j)) \quad (2.69)$$

было проведено в пакете Mathematica. Использовалась функция NDSolve, которая реализует конечно-разностный метод. Для одного солитона методом проб и ошибок были найдены границы изменений параметров ζ_0, f , при которых солитон распространяется без изменения профиля.

Для многосолитонных профилей удалось проследить, как, изменяя ширину и расстояние между солитонами, удастся добиться распространения без столкновений за длительное время (рис. 2.21)

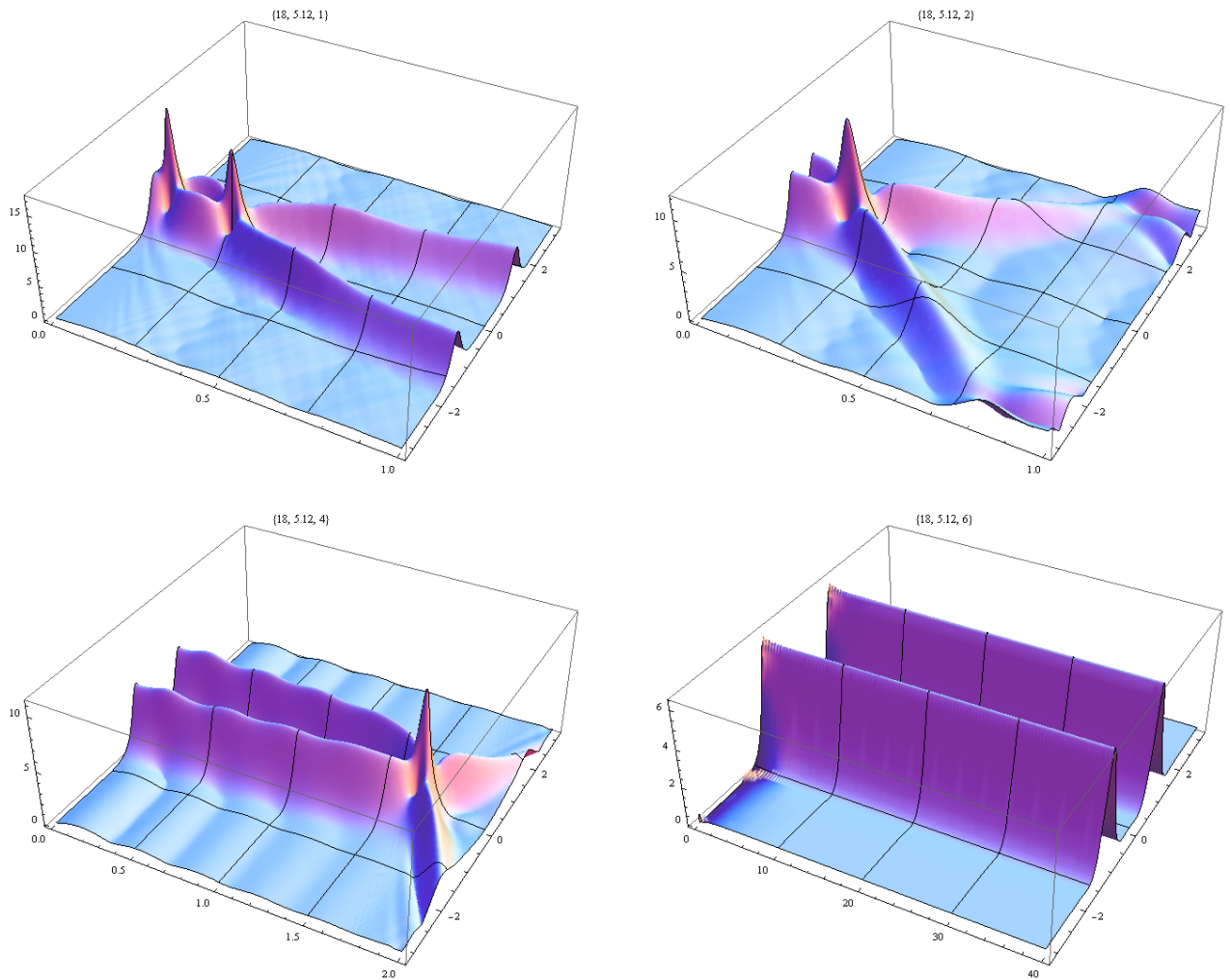


Рисунок 2.21 — Столкновение двух солитонов. Увеличивая начальное расстояние между солитонами, можно добиться отсутствия столкновения.

2.4 Моделирование возбуждения оптических частотных гребенок и платиконов в микрорезонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости

Достичь в микрорезонаторах аномальной суммарной дисперсии групповой скорости (ДГС) в широкой полосе частот для произвольной частоты накачки, как правило, сложно, т.к. материальная дисперсия в видимом и ближнем ИК диапазонах в основном нормальная и большая по модулю, т.ч. компенсировать ее подбором геометрии резонатора нельзя. Поэтому необходимо найти пути генерации оптических частотных гребенок при нормальной дисперсии.

Известно, что в реальных микрорезонаторах наблюдаемые дисперсионные соотношения могут существенно отличаться от теоретических, например, из-за наличия связи между различными семействами мод. В частности, это может

приводить к существенному сдвигу резонансных частот. Благодаря этому закон дисперсии вблизи “сдвинутой” моды может характеризоваться наличием локальной эффективной аномальной дисперсии, что в свою очередь является причиной появления модуляционной неустойчивости, приводящей к дальнейшему возбуждению частотной гребенки с светлыми или темными солитонами.

С помощью численного моделирования было показано, что если сдвинута накачиваемая лазером мода резонатора, либо из-за эффекта нормального расщепления мод, либо в результате сильного эффекта затягивания, то возможна генерация стабильных ультракоротких импульсов с плоской вершиной, которые назовем платиконами. Будет показано, что если такое выбивание моды достаточно большое (величиной в несколько ширин линий моды резонатора), тогда платиконы могут быть сгенерированы спонтанно, когда лазер перестраивается через эффективную нулевую отстройку высокочастотного резонанса. Длительность таких сгенерированных импульсов можно непрерывно менять, изменяя отстройку лазера накачки от резонанса.

Моделирование было проведено для системы связанных уравнений:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -[1 + i\zeta_\mu]a_\mu + i \sum_{\mu', \mu''} a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu' + \mu'' - \mu}^* + \delta_{0\mu} f, \quad (2.70)$$

Для анализа использовалось разложение дисперсионного закона в ряд Тэйлора до 2 порядка, дисперсией более высокого порядка не учитывались $\omega_\mu = \tilde{\omega}_0 - \delta_{0\mu}\Delta + D_1\mu + \frac{1}{2}D_2\mu^2$, где $\tilde{\omega}_0$ не возмущенная частота моды накачки, Δ описывает интересующий сдвиг моды накачки и $\delta_{0\mu}$ символ Кронекера. Для нормальной дисперсии $D_2 < 0$.

Для моделирования использовались следующие параметры MgF_2 микрорезонатора: длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 1.5 \mu\text{m}$, $n_0 = 1.37$, $n_2 = 0.9 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$, $V_{\text{eff}} = 5.6 \times 10^{-13} \text{ m}^3$, $Q_0 = Q_{\text{ext}} = 4 \times 10^8$, $D_2/(2\pi) = -10 \text{ kHz}$. Мощность накачки $P_{\text{in}} = 50 \text{ mW}$ соответствует приблизительно $f \approx 4.11$. Численно было проверено, что качественно похожие результаты получаются и для параметров резонатора из нитрида кремния [5].

Система уравнений моделировалась численно с помощью метода Рунге-Кутты с адаптивным шагом для 501 моды. В качестве начального условия генерировалось слабый шум (на уровне вакуумных флуктуаций). Для анализа рассчитывалась усредненная интенсивность внутри микрорезонатора $U = \sum_\mu |a_\mu|^2$ и распределение поля $\psi(\varphi) = \sum_\mu a_\mu \exp(i\mu\varphi)$, где φ азимутальный угол.

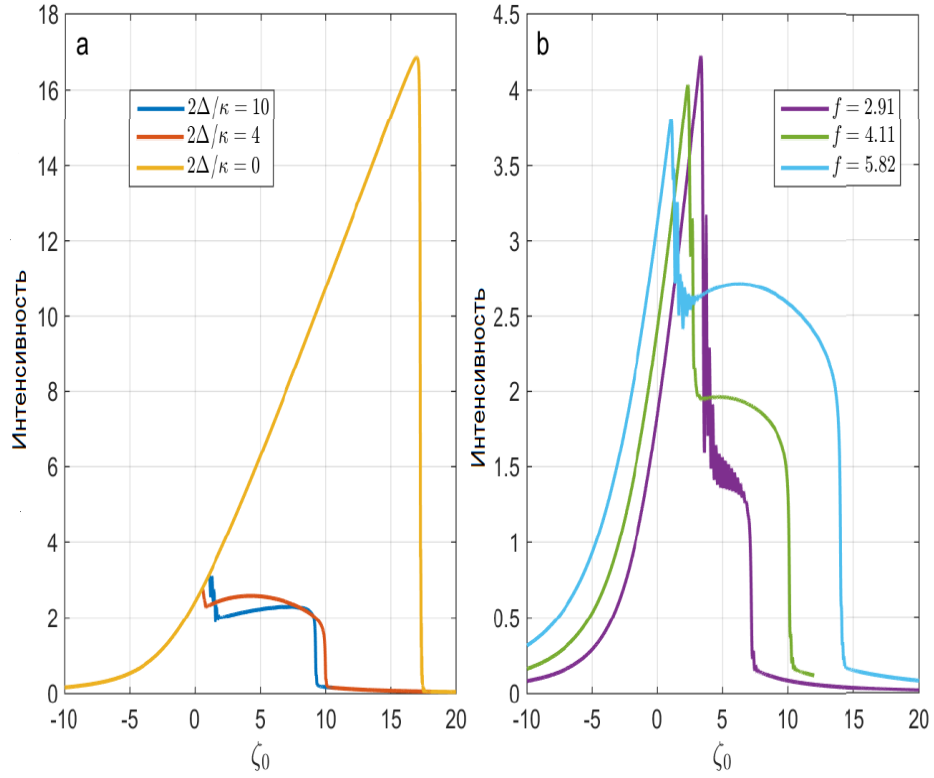


Рисунок 2.22 — Зависимость усредненной интенсивности внутри микрорезонатора U от нормированной отстройки ζ_0 (а) для различных значений сдвига моды накачки при $f = 4.11$ и (в) для различных амплитуд накачки $2\Delta/\kappa = 8$.

Для возбуждения солитонов при перестройке частоты накачки отстройка ζ_0 менялась линейно со временем от отрицательного значения $\zeta_0(0) = -20$ до положительной величины $\zeta_0(0) = 500$. При отсутствии или отрицательной величине сдвига моды накачки наблюдался характерная картина треугольного резонанса, соответствующая простому одночастотному решению. Однако при наличии существенного сдвига моды накачки в резонансной характеристике $U(\zeta_0)$ появлялась характерная ступенька, сигнализирующая о переходе в режим генерации импульсов Рис.2.22(а).

При остановке перестройки частоты вблизи этой ступеньки солитонный режим сохранялся неограниченное время. При увеличении мощности накачки ступенька становилась более заметной и сдвигалась по частоте к большим значениям отстройки (рис. 2.22(б)).

Построенное в таком режиме распределение поля показало наличие локализованных импульсов, обладающих характерным профилем с плоской вершиной (рис. 2.23(а)]. Можно говорить, как о генерации последовательности темных солитонов, так и о генерации последовательности платионов. Спектр

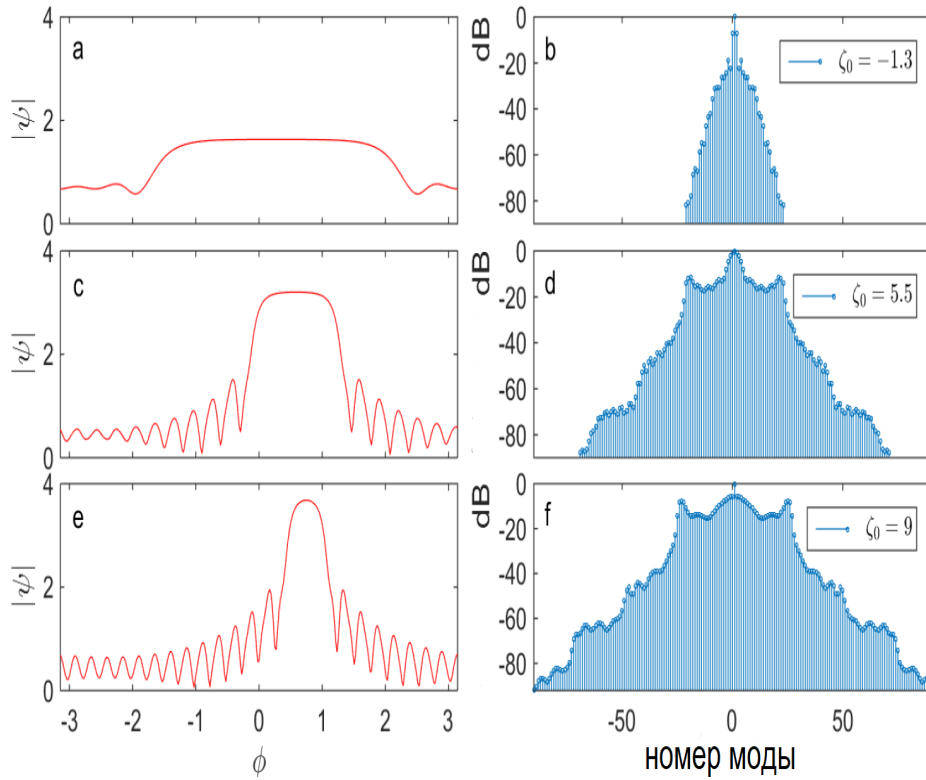


Рисунок 2.23 — Характерные временные профили поля внутри резонатора (левая панель) и спектры платиконов для различных значений отстройки лазера накачки (правая панель).

платиконов обладает двумя ярко выраженными крыльями (рис. 2.23(b)). Подобные спектры наблюдались в экспериментах по генерации частотных гребенок в интегральных резонаторах с нормальной дисперсией [94].

На рис. 2.23 видна особенность платиконов: их длительность и, соответственно, ширина спектра зависят от частоты и, следовательно, могут перестраиваться в широком диапазоне при перестройке частоты. Увеличение частоты накачки (уменьшение отстройки) приводит к уширению импульса и сужению его спектра.

Численное моделирование показало, что генерация платиконов наиболее эффективна при сдвиге моды накачки $\mu = 0$ (рис. 2.24(a)). Возбуждение платиконов возможно, если величина сдвига превосходит некое пороговое значение (рис. 2.24(б)). При достаточном сдвиге моды накачки возбуждение платиконов возможно даже без перестройки частоты, если частота накачки соответствует области мягкого возбуждения.

В отсутствие сдвига возможно существование темных солитонов (похожих на провалы интенсивности на фоне некоторого постоянного уровня), предсказанных ранее. В одном и том же частотном диапазоне может существовать

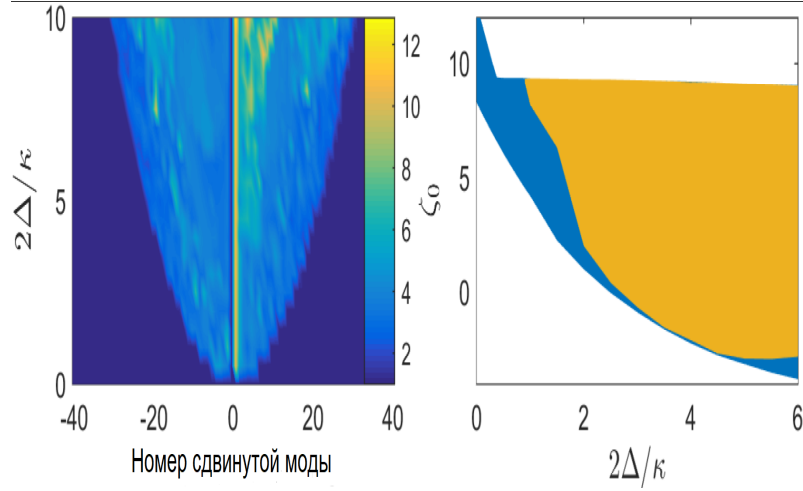


Рисунок 2.24 — (Левая панель) результаты численного моделирования процесса генерации платиконов для сдвига различных мод. Цветовая гамма показывает отношение пиковой интенсивности к усредненной. Яркая полоса вблизи центральной моды соответствует генерации платиконов, описанных выше. (правая панель) Область существования (синий цвет) и возбуждения платиконов (оранжевый цвет).

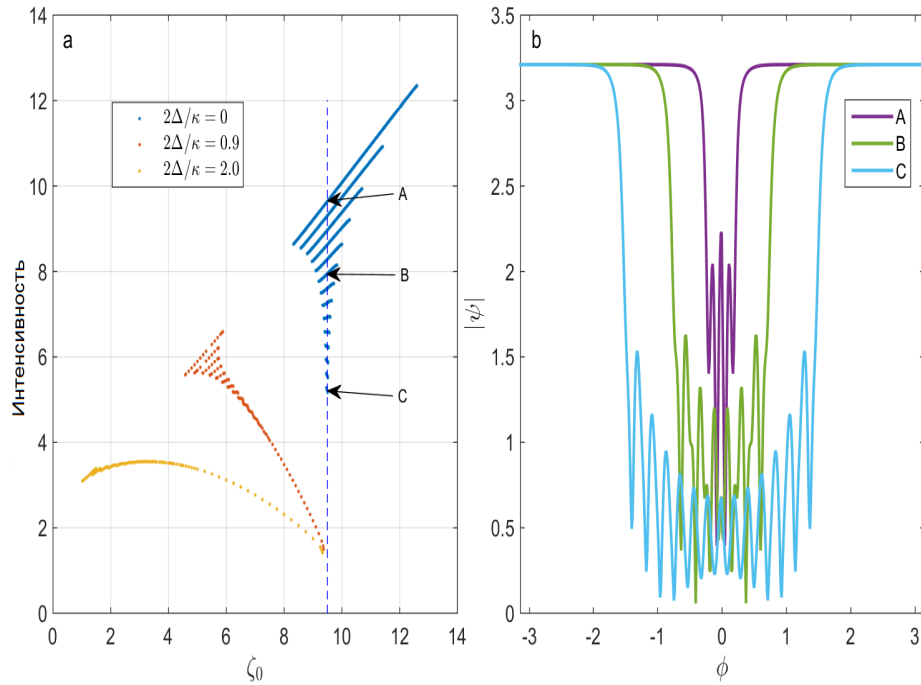


Рисунок 2.25 — (а) Области существования темных солитонов или платиконов в зависимости от величины дисперсионного сдвига моды накачки б) Профили различных типов темных солитонов, существующих при одном и том же значении частоты, соответствующем пунктирной линии на левой панели.

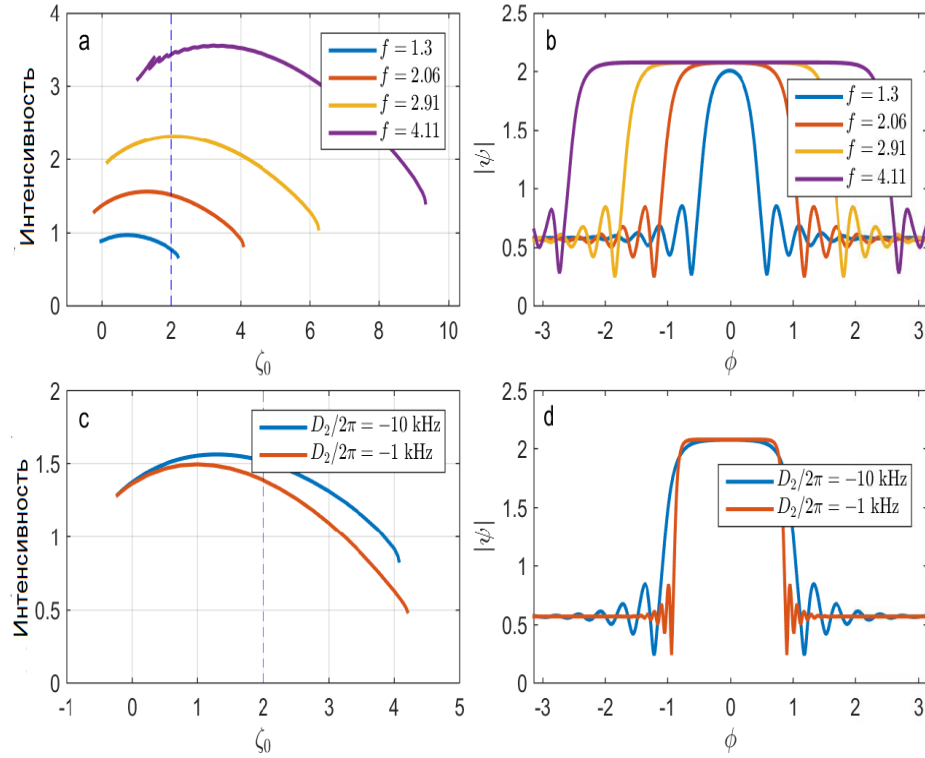


Рисунок 2.26 — Зависимости усредненной интенсивности от отстройки лазера накачки (а,в) и профили платиконов (б,г) для различных значений амплитуды накачки (а, б) и для различных значений коэффициента дисперсии (в, г).

множество типов темных солитонов, отличающихся сложностью профиля (рис. 2.25(б)).

При увеличении мощности накачки области существования становятся шире и смещаются в сторону больших значений отстройки (рис. 2.26(а)). Этот факт может быть использован для перестройки длительности платиконов при фиксированной частоте: увеличение мощности накачки ведет к уширению генерируемого платикона (рис. 2.26(б)).

Положение и ширина области существования платиконов практически не зависит от величины дисперсии (рис. 2.26(в)). Однако при меньших значениях дисперсии платикон становится более локализованным, а его профиль более резким (рис. 2.26(г)).

Как уже было сказано ранее, микрорезонаторы с нормальной дисперсией интересны тем, что в них возможна генерация частотных гребенок в видимом и ИК диапазонах. Более того, как показали расчеты, для одинаковых абсолютных величин дисперсии и мощности накачки генерация платиконов более выгодна, чем генерация светлых солитонов, с точки зрения преобразования мощности непрерывной накачки в последовательность импульсов (рис. 2.27).

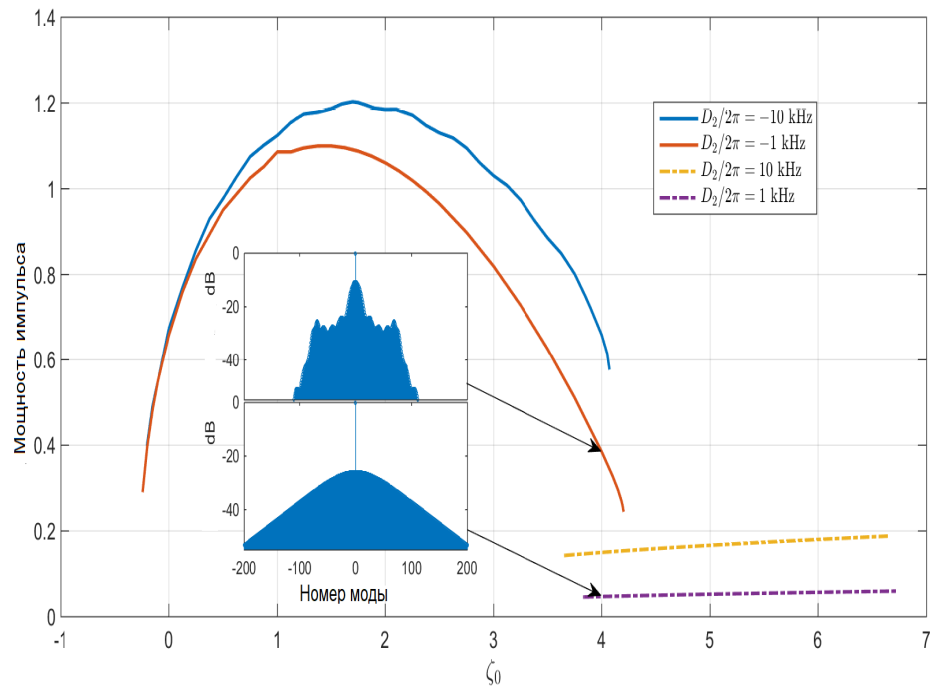


Рисунок 2.27 — Зависимости усредненной интенсивности платиконов и светлых солитонов от отстройки для одинаковых абсолютных значений коэффициента дисперсии и мощности накачки. Видно значительное преимущество платиконов по эффективности преобразования мощности накачки в оптическую гребенку.

Наибольшая эффективность преобразования наблюдается тогда, когда длительность платикона близка к половине времени обхода микрорезонатора. Также полезной особенностью платиконов является то, что ближайшие к моде накачки линии гребенки являются значительно более мощными, чем в случае светлых солитонов, что может быть использовано при создании СВЧ-генераторов на базе оптических микрорезонаторов или в приложениях ЛИДАР. Данное преимущество гребенок при нормальной дисперсии было продемонстрировано в интегральных микрорезонаторах из Si_3N_4 [144].

2.5 Генерация оптических частотных гребенок и платиконов при двухчастотной и амплитудно-модулированной накачке

Если необходимый для генерации частотных гребенок и платиконов сдвиг моды накачки отсутствует на используемой частоте, то для генерации

платиконов может быть использована либо двухчастотная, либо амплитудно-модулированная накачка. При этом частота модуляции (либо разность частот) должна равняться межмодовому расстоянию микрорезонатора.

Для численного анализа для случая амплитудной модуляции накачки $f = f(1 + 2\epsilon \cos(\Omega t))$ использовалась модифицированная система уравнений связанных мод:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -[1 + i\zeta_\mu]a_\mu + i \sum_{\mu', \mu''} a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu' + \mu'' - \mu}^* + \delta_{0\mu} f + \epsilon (\delta_{1\mu} f \exp(i\Delta_1 \tau) + \delta_{-1\mu} f \exp(-i\Delta_1 \tau)), \quad (2.71)$$

где $\Delta_1 = 2(D_1 - \Omega)/\kappa$ - безразмерная отстройка частоты модуляции от межмодового расстояния.

Численное моделирование показало, если глубина модуляции превышает пороговое значение, то появляется частотный диапазон, в котором возможно мягкое возбуждение платиконов (рис. 2.28(а)). При этом в зависимости усредненной интенсивности от частоты (отстройки) появлялась характерная ступенька. Заметим, что спектр и профиль импульсов, генерируемых амплитудно-модулированной накачкой, практически не отличается от спектра и профиля платиконов, возбуждаемых при наличии сдвига моды накачки (см. рис. 2.23).

Область возбуждения платиконов меньше области существования платиконов (рис. 2.29(а)). Однако возбудив платикон при частоте накачки, лежащей в области возбуждения, в дальнейшем можно перестраивать частоту в границах области существования платиконов, управляя его длительностью и шириной спектра (рис. 2.29(б)). При фиксированной глубине модуляции с увеличением мощности накачки область существования платиконов становится шире и смещается к большим значениям отстройки (рис. 2.29(г)). Следовательно, уменьшая мощность накачки, можно уменьшать длительность платиконов.

Чтобы показать универсальность предлагаемого метода, были проведены расчеты для широкого диапазона значений коэффициента дисперсии. Результаты численного моделирования показали, что область возбуждения уширяется с уменьшением коэффициента дисперсии.

Положение боковых пиков в спектре платиконов можно оценить по формуле: $\zeta_\mu = \zeta_0 + (D_2/\kappa)\mu_p^2 = 0$. Отсюда следует, что ширина спектра растет с ростом отстройки.

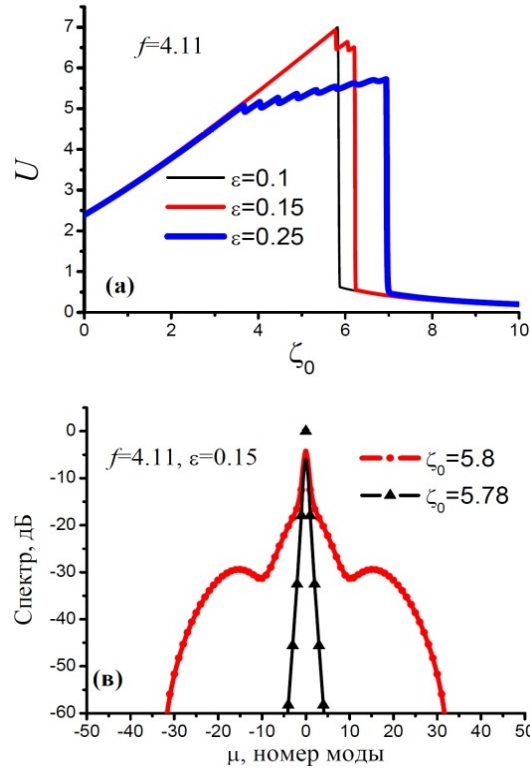


Рисунок 2.28 — (а) Зависимость усредненной интенсивности от отстройки для различных значений глубины модуляции при мягком возбуждении. (в) спектры генерируемых сигналов в солитонном и несолитонном режимах.

Следует отметить, что предложенный метод генерации платиконов очень чувствителен к точности задания частоты модуляции. При наличии ненулевой отстройки частоты модуляции от межмодового расстояния области возбуждения и существования солитонов резко сужаются и при некотором критическом значении отстройки возбуждение не происходит. Критическое значение отстройки увеличивается с ростом глубины модуляции.

Заметим, что при возбуждении гребенки амплитудно-модулированной накачкой расстояние между линиями гребенки определяется именно частотой модуляции, а не межмодовым расстоянием микрорезонатора. Идентичные результаты были получены и для случая двухчастотной накачки, когда разность частот волн накачки равна межмодовому расстоянию микрорезонатора. Для анализа система уравнений была переписана в следующем виде:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -[1 + i\zeta_\mu]a_\mu + i \sum_{\mu', \mu''} a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu' + \mu'' - \mu}^* + \delta_{0\mu} f + \tilde{\varepsilon} \delta_{1\mu} f \exp(i\Delta_1 \tau), \quad (2.72)$$

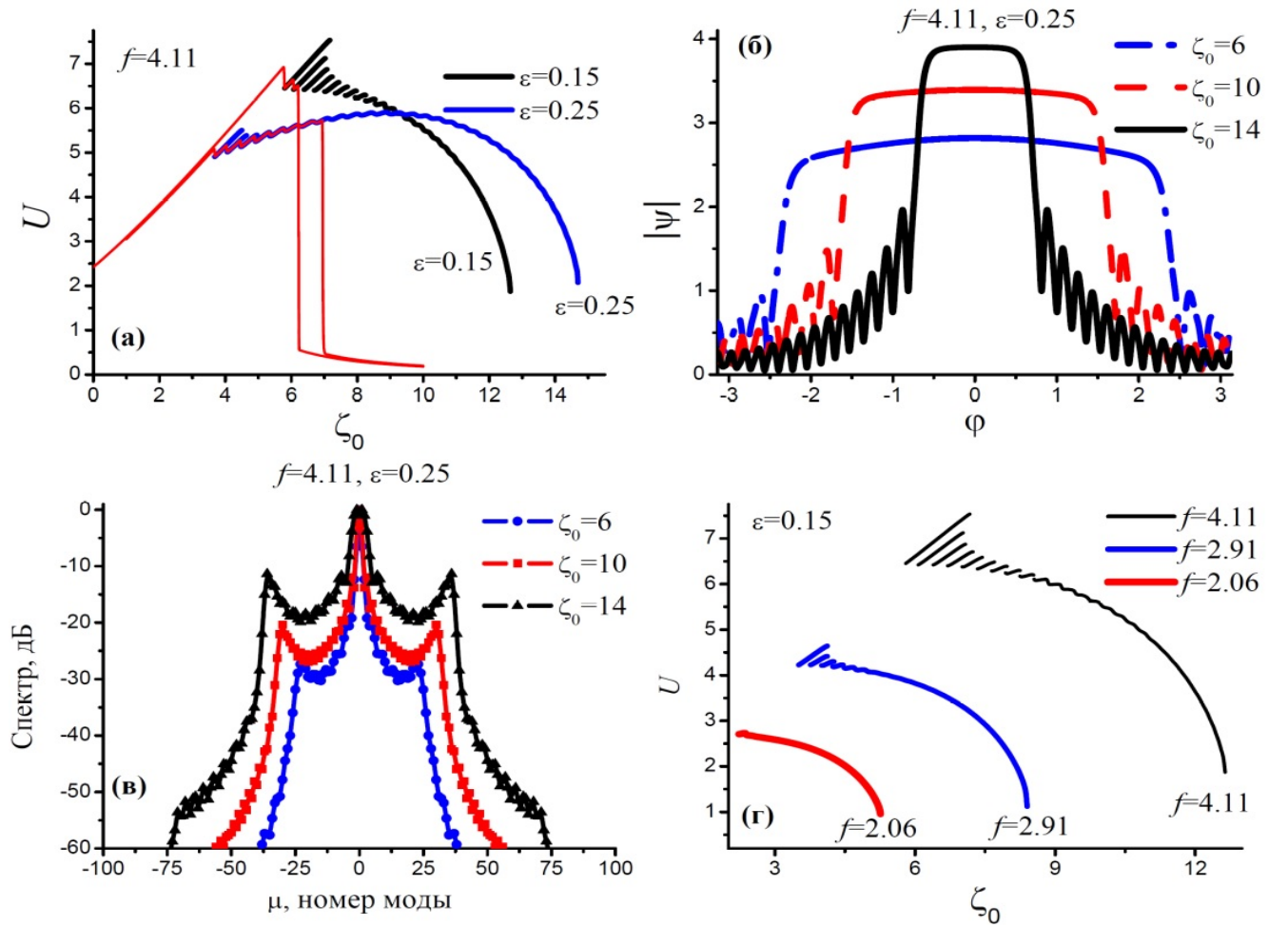


Рисунок 2.29 — (а) Зависимость усредненной интенсивности от отстройки для различных значений глубины модуляции. Красная линия показывает результаты мягкого возбуждения. (б) Профили и (в) спектры платиконов для различных значений отстройки. (г) Зависимость усредненной интенсивности от отстройки для различных значений амплитуды накачки.

Численно решение этой системы уравнений показало, что результаты для двухчастотной накачки практически совпадают с результатами, полученными для амплитудно-модулированной накачки, если $\tilde{\varepsilon} \approx \varepsilon$.

Также была изучена возможность генерации платиконов с помощью фазовой модуляции накачки. Для анализа использовалась следующая система уравнений:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -[1 + i\zeta_\mu]a_\mu + i \sum_{\mu', \mu''} a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu' + \mu'' - \mu}^* + \delta_{0\mu} f + \varepsilon (\delta_{1\mu} f \exp(i\Delta_1 \tau) + \delta_{-1\mu} f \exp(-i\Delta_1 \tau)), \quad (2.73)$$

Численное решение этой системы уравнений показало, что применение фазовой модуляции не позволяет генерировать частотные гребенки и платиконы в микрорезонаторах с нормальной дисперсией.

Экспериментально была продемонстрирована генерация частотной гребенки в оптоволокне с нормальной дисперсией [145] и интегральном микрорезонаторе [146] при двухчастотной накачке. В собственном эксперименте была предпринята попытка получить платикон из резонатора BaF_2 диаметром 4 мм при накачке лазером на 1550 нм, где суммарная дисперсия нормальная. В качестве второй линии накачки выступала линия амплитудного модулятора с одной боковой линией (single sideband modulator). Суммарная мощность накачки составляла около 150 мВт, добротность резонатора $5 \cdot 10^8$. Резонатор был существенно многомодовым, и точная частота ОСД разных семейств мод была неизвестна, поэтому оптимизируя положение растянутого волокна для подавления связи с другими семействами и подбирая частоту модуляции, можно было по картине пропускания определить моды из одного семейства через 1 ОСД друг от друга. При накачке этих мод большой мощностью наблюдалось, как правило, вынужденное рамановское рассеяние и несколько линий около накачки. Таким образом достоверно убедиться в генерации гребенок при нормальной дисперсии с помощью двухчастотной накачки в своих экспериментах не удалось. Необходимо уменьшить эффективный объем моды в резонаторе, увеличить его добротность и повысить мощность накачки для преодоления порога генерации.

Итак, в микрорезонаторах с нормальной дисперсией при определенных условиях могут быть получены когерентные частотные гребенки, во временном представлении имеющие вид импульсов с характерным профилем – платиконов. Возможна как мягкая генерация платиконов из шумов вакуума внутри микрорезонатора, так и динамическая путем перестройки частоты накачки. Длительность и ширину спектра платиконов можно контролировать, медленно изменяя частоту накачки.

2.6 Выводы к главе 2

Данная глава посвящена численному моделированию генерации оптических частотных гребенок в микрорезонаторах. Представлен вывод системы

уравнений связанных мод и уравнения Луджиато-Лефевра, используемых для моделирования. Описаны используемые численные методы - Рунге-Кутты с адаптивным шагом и Фурье метод расщепления по параметрам. Исследованы оптимальные диапазоны параметров и режимы генерации частотных гребенок и солитонов, включая генерацию дисперсионных волн и эффективность генерации солитонов при наличии эффектов нормального расщепления мод и дисперсии высоких порядков. На основе численного моделирования предложены два метода мягкого возбуждения частотных гребенок в резонаторах при нормальной дисперсии групповой скорости: 1) локальное изменение дисперсионного закона около частоты накачки, 2) использование амплитудной модуляции накачки или двухчастотной накачки с разницей частот строго равной 1 ОСД резонатора. Результаты главы 2 были опубликованы в статьях с номерами 1,2,3,5 из списка публикаций.

Глава 3. Экспериментальное исследование оптических частотных гребенок в кристаллических микрорезонаторах

3.1 Изготовление кристаллических микрорезонаторов методом алмазного точения и полировки

В литературе были продемонстрированы следующие способы изготовления оптических микрорезонаторов:

- Контроль формы кристалла при его выращивании.
- Плавление в пламени водородной горелки для микросфер из плавленого кварца.
- Выжигание мощным CO_2 или импульсным лазером вращающейся заготовки.
- Механическое точение резонаторов.
- Различные литографические методы для изготовления интегральных микрорезонаторов (травление, фотолитография, обработка в плазме, нанесение тонких пленок и покрытий)

В данной работе для изготовления всех микрорезонаторов из кристаллических материалов изучался и использовался метод алмазного точения с последующей полировкой алмазными суспензиями.

Чертежи микрорезонаторов на подставке даны на рис. 3.1. Основные характеристики цилиндрического микрорезонатора - диаметр, толщина и радиус закругления боковой поверхности (или высота и ширина выступа в форме трапеции), где сосредоточено электрическое поле моды шепчущей галереи. Геометрия изготовленных образцов менялась в следующих пределах: диаметр 150 мкм – 12 мм (ОСД $FSR = \frac{c}{2\pi Rn}$, где R – радиус резонатора), толщина 20 мкм – 6 мм и радиус закругления от 35 мкм до $R/2$.

Для изготовления микрорезонаторов использовались кристаллические пластины фторида магния (MgF_2), фторида кальция (CaF_2), фторида бария (BaF_2), фторида стронция (SrF_2), фторида лития (LiF), ниобата лития (LiNbO_3), танталата лития (LiTaO_3), кремния (Si), кристаллического кварца (SiO_2), тербий галлиевого граната (TGG) и нескольких активных кристаллов ($\text{YLiF}_4:\text{Yb}$, $\text{YLiF}_4:\text{Tm}$, $\text{YLiF}_4:\text{Er}$).

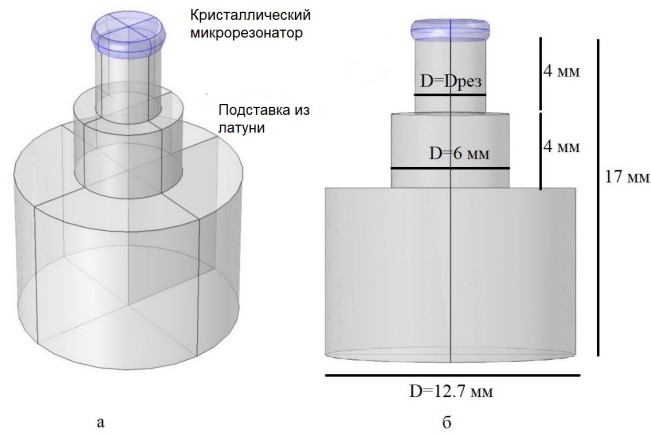


Рисунок 3.1 — Схема кристаллического микрорезонатора на подставке.

Изготовление резонаторов с высокой добротностью из перечисленных кристаллических материалов методом обжига (например, мощным CO_2 лазером) продемонстрировано не было. Не найдены и литографические способы (CMOS совместимые или иные, кроме как для кремния и ниобата лития) изготовления с необходимым качеством поверхности. Поэтому в работе использовалась механическая обработка кристаллов: точение резцами на прецизионном токарном станке и последующая полировка алмазными суспензиями.

Для изготовления микрорезонаторов используется следующая последовательность действий:

- Центрирование и наклеивание заготовки на подставку с помощью клея.
- Ручное стачивание заготовки до цилиндрической формы с помощью шкурок.
- Вытачивание цилиндра заданного диаметра алмазным резцом (возможно изношенным резцом) на прецизионном токарном станке.
- Вытачивание на цилиндре микрорезонатора с заданной геометрией с помощью чистового (нового) алмазного резца.
- Очистка микрорезонатора с помощью полимерной салфетки с изопропанолом, метанолом или ацетоном высокой чистоты.
- Проверка качества получившейся поверхности в микроскоп или оптический профилометр.

Хотя метод алмазного точения (SPDT, single point diamond turning) давно изучался в литературе и успешно используется в некотором количестве приложений, строгой теории для оптимального процесса точения нет. Простые модели процесса рассматривают изотропную среду или точение одной

кристаллографической плоскости, в случае же цилиндрических микрорезонаторов точение происходит по большинству кристаллографических плоскостей. Характерный размер стружки сопоставим с радиусом кривизны острия (порядка 30-50 нм) при глубине резки порядка 100-500 нм, поэтому эффективный угол резки всегда отрицательный и процесс скорее похож на растяжение, сжатие, чем на сдвиговую деформацию. В литературе экспериментально было показано, что в кристаллах при механическом точении всегда возникают разрушения кристаллической структуры в приповерхностном слое толщиной до 100 нм, поэтому для достижения рекордных добротностей резонаторов необходима полировка после точения. Существует максимальное значение глубины захода резки, меньше которого возможно точение в пластичном режиме хрупких кристаллических материалов, без образования сколов, приблизительно вычисляемое через эластичные константы материала. Для достижения наилучшего качества поверхности кристаллов в литературе, как правило, указывается на необходимость уменьшения всех ключевых параметров: глубины захода резки, скорости вращения шпинделя и скорости движения резца. В реальном точении, как правило, резец имеет дефекты, его рабочая кромка быстро изнашивается, существуют биения шпинделя и неравномерность его движения, т.ч. упрощенные модели не дают адекватной картины. Также в моделях, как правило, не учитывается сильный нагрев при точении или пьезоэлектрический эффект. В процессе данной работы были экспериментально найдены оптимальные параметры для точения без охлаждающей жидкости.

Для точения использовался прецизионный станок с численным программным управлением, модель DAC ALM Lathe (рис. 3.2), который коммерчески используется для точения из пластика контактных линз для глаз. Станок имеет прецизионный шпиндель и подвижные оси X,Y на воздушных подшипниках. Точность движения подачи специфицирована на уровне 10 нм. Станок управляется с помощью скриптов, написанных на проприетарном языке DSL. Станок оборудован высокоточным датчиком касания, который калибрует расстояние по оси Y до момента касания заготовки в шпинделе. Также доступен датчик высоты, с точностью измерения до 100 нм. Станок оборудован осциллирующим резцом, расположенным под углом около 45 градусов к поверхности точения, который синхронизируется с вращением шпинделя, и позволяет точить асферические поверхности (однако не позволяет делать этого на образующей цилиндра).

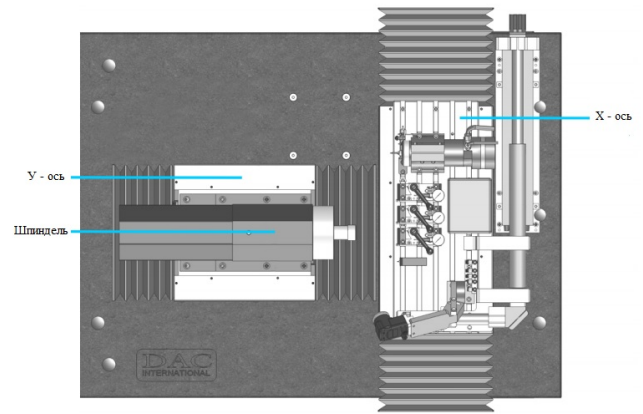
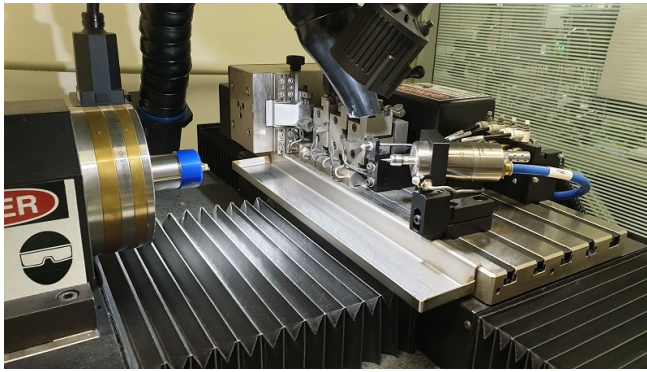


Рисунок 3.2 — Фото используемого станка для алмазного точения DAC ALM.

Для точения использовались поликристаллические алмазные резцы производства KY Diamonds (рис. 3.3): 1) с радиусом кривизны около 500 мкм, рабочей дугой окружности в 120 градусов, с 0 или -25 углом наклона рабочего края, конический задний угол резца 10 градусов; 2) с радиусом кривизны 100-200 мкм, рабочей дугой окружности в 60 градусов, с -25 углом наклона рабочего края, цилиндрический задний угол резца 8 градусов; 3) острый резец невыдержанным радиусом кривизны 4 мкм, 0 угол наклона рабочего края. Радиусом кривизны острия алмаза (рабочей кромки) составляет 30 нм. Алмазные резцы располагались в держателях перпендикулярно или под углом около 80 градусов к оси вращения шпинделя.

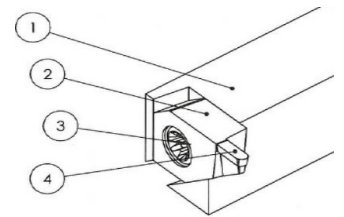
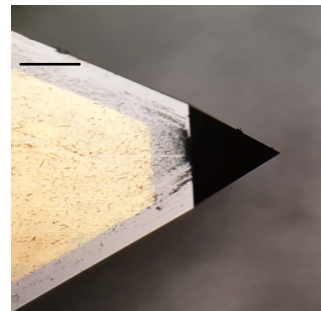
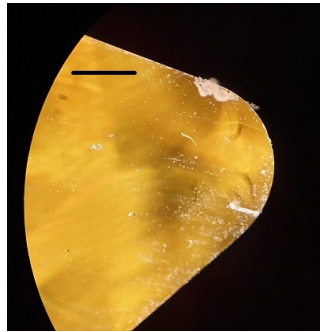
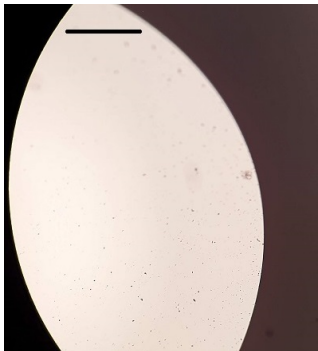


Рисунок 3.3 — Фотографии используемых алмазных резцов с радиусом кривизны 500, 200, 4 мкм соответственно и углом наклона рабочей грани 0 или -25 градусов. Радиус кривизны рабочей кромки (острия) составляет 30 нм. Справа - чертеж используемого держателя для резцов, в котором резец повернут на 80 градусов относительно оси вращения шпинделя.

Калибровка резцов проводилась после каждой смены алмаза, калибровка резцов проводилась сначала по оси Y, что определяет точность точения толщины и расположения выступа по высоте (отступ от края). Далее проводилась калибровка резца по высоте с помощью датчика высоты. Это

важный этап, т.к. угол наклона рабочей плоскости резца существенно влияет на режим точения. На финальном этапе калибруется расстояние по оси X до рабочей точки резца (калибровка диаметра резонатора). Точение фронтальной поверхности заготовки (перпендикулярно оси вращения шпинделя) и точение образующей цилиндра (параллельно оси вращения) осуществляется разными точками алмаза. Калибровка проводилась путем точения пластиковых цилиндров заданного диаметра и его измерением с помощью микрометра. Калибровка диаметра (оси X) наименее точная, т.к. погрешность измерения диаметра цилиндра из мягкого пластика с помощью обычного микрометра может составлять 5-10 мкм.

Далее кристаллические заготовки наклеиваются на подставку из латуни. В работе использовались клеи от производителя Norland (марки NOA 60, 61, 65, 68), которые быстро отвердевают под УФ лампой. Лучший результат был достигнут с NOA 61, 65. Время полного отвердевания под ультрафиолетовой лампой (длина волны 365 нм и мощность 27 Вт/см²) составляло 15 мин. В начале разработки методики изготовления использовались эпоксидная смола, этилцианакрилат, и двухкомпонентные термоклеи AremCo, которые также давали хороший результат, и позволяли наклеивать непрозрачные в УФ диапазоне материалы или материалы с металлическим напылением. Минимальный диаметр микрорезонатора, при котором он не отклеивался при точении, составил около 800 мкм. Для меньших диаметров резонатора требуется сохранять кристаллическую ножку большего диаметра, вытачивая сам резонатор на кончике заготовки. Были испытаны двухкомпонентные клеи производителя AremCo, отвердевающие за сутки при температуре 94 С, и выдерживающие температуру нагревания в 400 С.

Были написаны программы на языке DSL для точения из кристаллических заготовок микрорезонаторов с боковой поверхностью (образующей) с заданным радиусом кривизны или с микровыступом в форме трапеции или прямоугольника. Параметры возможной геометрии микрорезонатора ограничены, как правило, геометрией (углом и радиусом кривизны) используемого алмазного резца.

Алгоритм и параметры работы программы для точения:

— Задаются параметры программы (схематично даны на рис. 3.6)

1. `blank_diameter` диаметр кристаллический заготовки,
2. `diameter` диаметр резонатора,

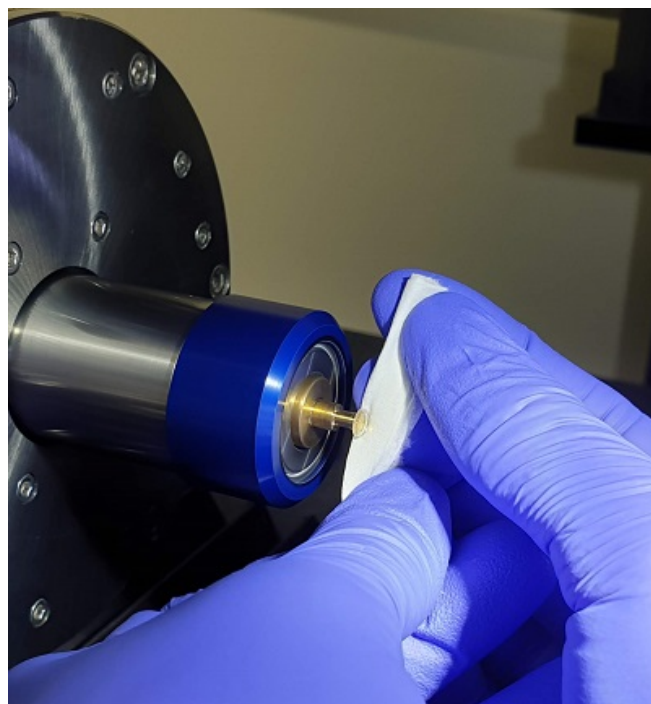
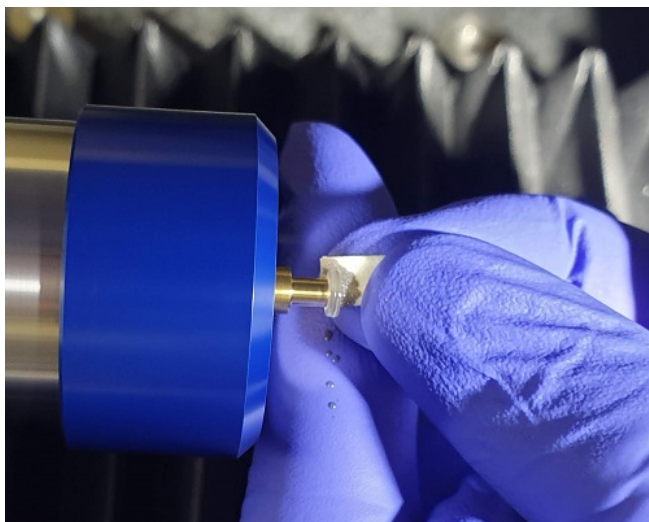


Рисунок 3.4 — Фото процесса ручной полировки алмазной суспензией (слева).

Очистка резонатора от пыли или остатков суспензий проводилась с использованием метилового спирта или ацетона и салфеток Kimwipes (справа).

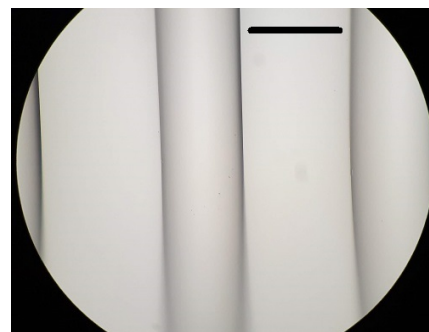
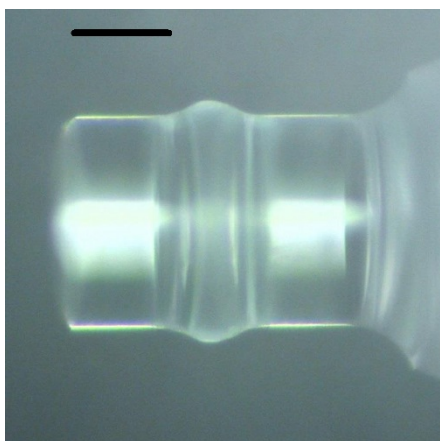


Рисунок 3.5 — Слева: Фото микрорезонатора из MgF_2 радиусом 125 мкм, выточенный на станке DAC ALM с ЧПУ. По центру: резонатор из LiNbO_3 радиусом около 2 мм и радиусом кривизны боковой грани 520 мкм, до полировки. Справа: стэк из нескольких отполированных резонаторов на одном кристаллическом цилиндре.

3. `front_margin` отступ от верхней поверхности,
 4. длина хорды (`chord`), на которой вытачивается выступ резонатора с радиусом кривизны (`curvature_radius`),
 5. `blank_thickness` толщина микрорезонатора,
 6. скорость вращения шпинделя (`rpm`)
 7. скорость движения резца при грубом точении цилиндра (`cylinder_fr`) и финального чистового прохода (`fr`)
 8. глубина захода резки при грубом точении цилиндра (`cylinder_step`) и финального чистового прохода (`step_amount_to_remove`)
- Грубым (изношенным) резцом обрабатывается цилиндр до заданного диаметра путем удаления слоев глубиной `cylinder_step` со скоростью `cylinder_fr`
 - Чистовым (новым) резцом последовательно удаляется материал слоями глубиной `step_amount_to_remove` с выступом сфероидальной формы, отступом от верхнего края (`front_margin`) и радиусом кривизны (`curvature_radius`) со скоростью движения резца `fr`.

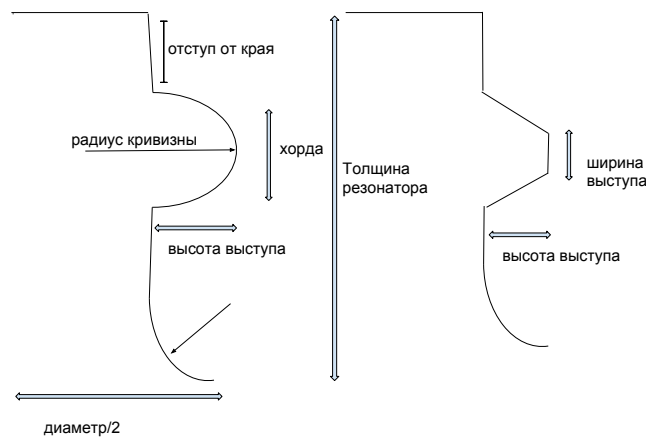


Рисунок 3.6 — Рисунок микрорезонатора сфероидальной формы или с выступом в форме трапеции, с обозначением параметров для программы алмазного точения на языке DAC DSL.

Ключевые параметры, определяющие качество поверхности изготавливаемых резонаторов: глубина захода резки, скорость вращения шпинделя и скорость движения резца вдоль поверхности. Эмпирически были определены оптимальные параметры для точения кристаллов MgF_2 :

- `rpm`=300-1000, т.ч. линейная скорость точения ($rpm \times 2\pi r$) была минимальной;

- `feed_rate`=2-5 мкм/оборот для грубой обработки цилиндра и <1 мкм/оборот для финального чистового прохода;
- `depth_of_cut`=2-4 мкм для грубой обработки и 0.05-1 мкм для финального прохода.

Для уменьшения износа резца и достижения пластичного режима точения твердых кристаллов использовалось охлаждение во время точения. Для этого на алмазный резец и микрорезонатор распылялась охлаждающая жидкость, которая затем уходила в воздухозаборник пылесоса вместе с кристаллическими стружками (характерным размером в сотни нм). В качестве охлаждающей жидкости использовался либо изопропиловый спирт, либо деароматизированный бензин от Exxsol. Важно, чтобы охлаждающая жидкость быстро улетучивалась и попадала внутрь шпинделя или линейных подвижных подач на воздушных подшипниках. Однако из-за длительности процесса точения одного резонатора и, соответственно, большого расхода жидкости, как правило, охлаждение не использовалось. При этом алмаз изнашивался быстрее (около 100 м точения до износа острой кромки резца). Без полировки непосредственно после точения в резонаторах из MgF_2 достигается добротность порядка 5×10^5 на 1550 нм.

После точения осуществлялась очистка резонатора от кристаллической стружки с помощью полимерных салфеток с ацетоном или метанолом. Повышение добротности резонатора достигается благодаря последовательной ручной полировкой с помощью алмазных суспензий с зерном 1, 0.5, 0.1 мкм по 10 мин каждой. Для микровыступов в форме трапеции использовалось только зерно 0.1 мкм. Использовались алмазные суспензии производства Microdiamant (OPW-20, концентрация алмазных зерен 15 карат/литр, вязкость 325 сР). Суспензии наносились на специальный текстиль производства AlliedHighTech, который при ручной полировке позволял эффективнее удалять материал при более плотном касании.

Перед использованием резонатора всегда проводилась очистка его поверхности с помощью салфеток, смоченных в спирте. Очистка проводится чистой, плотно сложенной салфеткой с небольшим количеством спирта, однократным движением по образующей цилиндра в сторону вращения шпинделя (при $\text{rpm}=400$). В условиях нашей лаборатории добротность падала в течение нескольких дней в 2-3 раза из-за возможного осаждения пыли или значительного изменения влажности. После каждой очистки проводилась проверка качества поверхности в микроскоп. При увеличении в 40х возможно

обнаружить шероховатости и остатки спирта или грязи порядка 1-2 мкм. Шероховатость малого размера в оптический микроскоп может быть не видна из-за дифракционного предела, на увеличении 50х глубина резкости минимальна, т.ч. наблюдается малая область сфероидальной поверхности, около 50 мкм при радиусе кривизны боковой грани 500 мкм и диаметре резонатора 4 мм. Поэтому контроль качества осуществлялся последовательным измерением добротности мод резонатора после полировки и очистки.

На рис. 3.7 даны фото поверхности резонатора непосредственно после точения, фрагмент с шероховатостями порядка 5 мкм и после полировки суспензиями, видно улучшение качества поверхности.

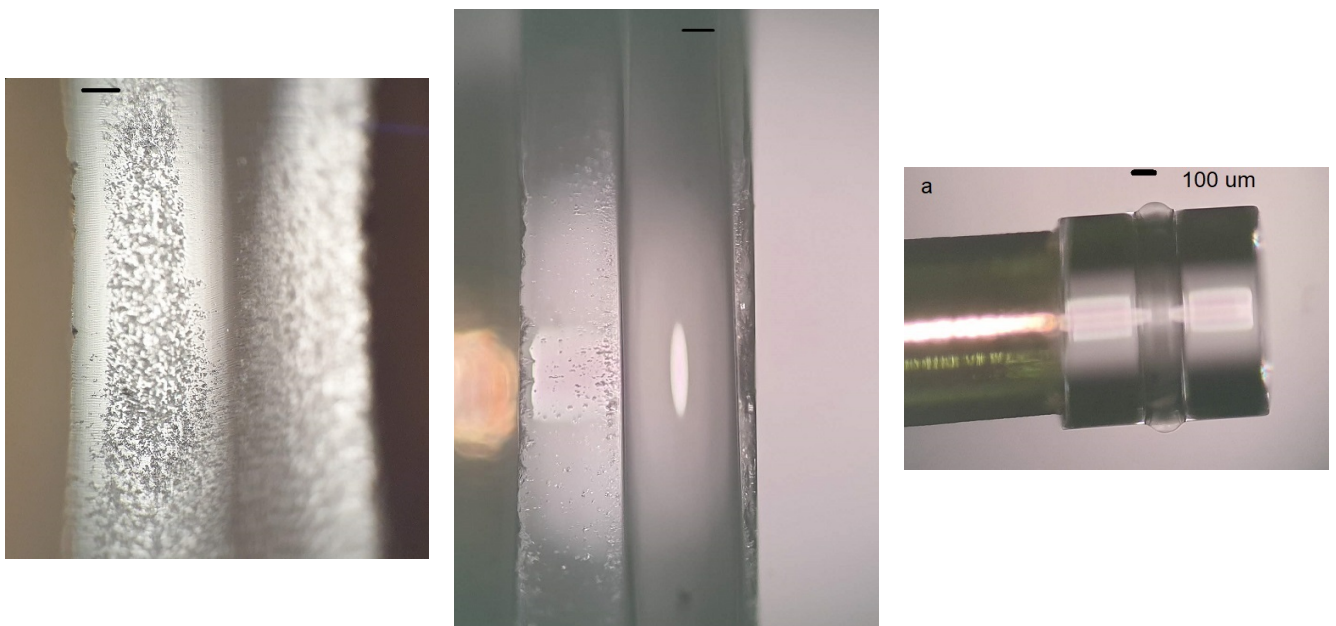


Рисунок 3.7 — Слева: фрагмент неотполированной поверхности резонатора из ниобата лития с радиусом кривизны 500 мкм сразу после точения. По центру резонатор из фторида магния после полировки, видно улучшение качества поверхности на выступе и остаточные шероховатости вне объема моды МШГ. Справа общий вид отполированного резонатора диаметром 1 мм на латунной подставке.

Дополнительно может быть произведен контроль качества боковой поверхности с помощью оптического профилометра Zygo NewView 7300. Результат измерения приведен на рис. 3.8, измерены шероховатости размером 0.25 мкм.

Достаточным условием для оценки качества поверхности является проверка добротности после полировки. К сожалению, при таком способе оценки качества поверхности можно упустить технические ошибки, возникающие при полировке, т.к. в данном случае о качестве можно судить только по косвенному

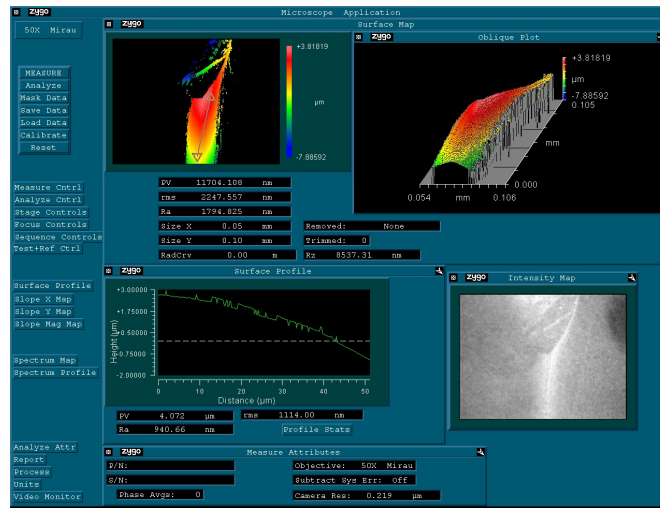


Рисунок 3.8 — Измерение качества боковой поверхности с помощью оптического профилометра.

признаку – добротности. Измерение добротности производилась следующими методами: калибровка частоты дается боковыми линиями фазовой модуляции сканирующего лазера, зная частоту модуляции, можно аппроксимировать лоренцевскую форму резонанса МШГ. Для измерения ширины линии резонанса меньше 500 кГц лучше использовать метод звона, при котором либо быстро выключается (с помощью акусто-оптического модулятора), либо быстро пере-страивается по частоте лазер накачки, и проводится прямое измерение времени звона оптического резонатора по затухающему сигналу фотодетектора. Для измерения добротностей выше 10^9 необходимо использовать мощность лазера меньше 500 мкВт, чтобы избежать нелинейных уширений резонанса.

В таблице 2 даны эмпирически найденные оптимальные параметры точения различных материалов для диаметров резонатора 1-2 мм. Для резонаторов большего диаметра необходимо пропорционально уменьшать обороты вращения шпинделя.

Изготовленные представленным методом резонаторы из $\text{MgF}_2, \text{BaF}_2, \text{CaF}_2$ были успешно испытаны с новым элементом связи - интегральной структурой, состоящей из Si_3N_4 волновода на чипе с вставкой из SiO_2 в форме мостика в воздухе [147]. Поперечное сечение SiO_2 составляло 2 на 5 мкм, а длина около 500 мкм. Подводя кристаллический микрорезонатор к этому мостику можно было добиться связи с различными семействами мод резонатора, была достигнута добротность более 10^8 .

Таблица 2 — Оптимальные параметры алмазного финального точения резонаторов диаметром до 2 мм из различных кристаллических материалов.

Материал	Обороты вращения шпинделя, обороты/мин	Скорость движения резца, мкм/оборот	Глубина захода резки, мкм	Примечание
MgF ₂ z-cut	300-1000	0.5-1	0.05-1	
MgF ₂ a-cut	400-500	0.5-1	0.05-1	
BaF ₂	600-1000	1-2	0.5-2	только новым алмазом
SrF ₂	800	1	1	охлажд. жид.
CaF ₂ z-cut	400-1000	0.5-1	0.5	
CaF ₂ a-cut	400	0.5-1	0.05	охлажд. жид.
LiNbO ₃	900-1500	1-2.5	1-4	
LiTaO ₃	900	1-2	1-2	охлажд. жид.
Si	500	1	0.5-1	большой износ резца
TGG	700	1	0.5-1	охлажд. жид.
SiO ₂ крист.	600	1	0.5-1	большой износ резца
LiF	900	1	1	только новым алмазом
YLiF ₄ :Yb	400	2	1	охлажд. жид.

3.1.1 Практические замечания по изготовлению кристаллических микрорезонаторов

Предобработка - раскол кристаллических пластин заготовок, при этом возможно образование напряжений внутри кусочков кристаллов. Мягкие материалы BaF₂, CaF₂ раскалываются на неконтролируемые куски при любой толщине заготовки. Распил алмазной пилой позволяет этого избежать. Однако для заготовок толщиной 100-200 мкм возможны внутренние трещины из-за неровности наклейки на подставку для распила. Необходимо использовать тонкие диски пилы с алмазным напылением. Выпиливание цилиндрических заготовок трубчатым сверлом малоэффективно, т.к. большая часть материала

уходит в стружку, и из-за больших биений сверла вероятно появление больших сколов.

Дизайн подставки диктуется размером цанги станка и удобством крепления в экспериментальных установках. Материал подставки латунь выбран из-за достаточно высокой теплопроводности для улучшения активной термостабилизации. В основном кристаллические материалы для генерации оптических гребенок имели z-cut, т.ч. оптическая ось z совпадала с осью цилиндра. Отдельно были изучены кристаллы среза a-cut MgF_2 , в котором также наблюдалась оптическая гребенка и кристалл CaF_2 a-cut, в котором не было областей шероховатости после точения.

Отжиг кристаллов для устранения внутренних дефектов проводился, но без прямого измерения улучшения добротности до и после, т.к. клей не позволяет нагревать до 900С наклеенный на подставку резонатор, а в случае переклейки резонатора вероятность загрязнения велика, и будет требоваться новая переполіровка. При попытке отжига наклеенного резонатора из BaF_2 при 400С в кристалле возникло большое количество внутренних трещин. Отжиг отполированного резонатора из MgF_2 в воздухе при 1000 С в течение 16 часов (с медленным нагревом и остыванием по 1С/мин) приводил к тому, что в приповерхностном слое толщиной около 50 мкм, кристалл становился непрозрачным (белым) и никакой добротности не наблюдалось. Для отжига требуется атмосфера из чистого азота.

Алмазное точение SPDT возможно в широком диапазоне параметров при использовании нового неизношенного резца. Качество поверхности фторида магния при этом высокое, т.ч. добротность резонатора может достигать 10^6 (пример выступа резонатора с такой добротностью дан на рис. 3.9), что соответствует типичным значениям добротности в интегральных оптических резонаторах из SiN.

Основной недостаток метода алмазного точения - быстрый износ алмазного резца. На практике износ резца наступает за 100 м точения, что соответствует изготовлению 3 резонаторов. Далее качество получаемой поверхности заметно ухудшается и никакими более щадящими параметрами точения улучшить его нельзя. Изношенным резцом возможно точение твердых материалов MgF_2 , но более мягкие BaF_2 , LiF могут давать сколы размерами в несколько сот микрон, недоступными для устранения 3.10. Наиболее практично использовать для изготовления цилиндров заданного диаметра изношенный резец, а далее снимать

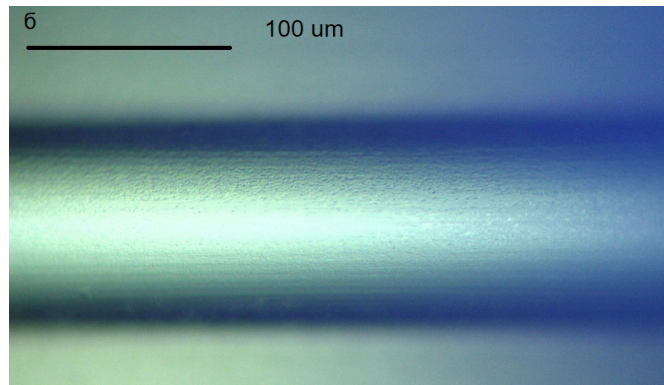


Рисунок 3.9 — Фотография поверхности резонатора из MgF_2 сразу после точения, в котором достигается добротность 10^6 на 1550 нм.

финальный слой толщиной 10 мкм с помощью чистового неизношенного резца. Важно при этом регулярно проводить перекалибровку относительного положения изношенного и чистового резцов, т.к. сколы края алмаза могут достигать 10 мкм 3.11.

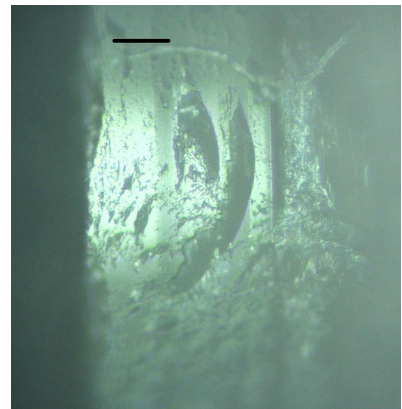
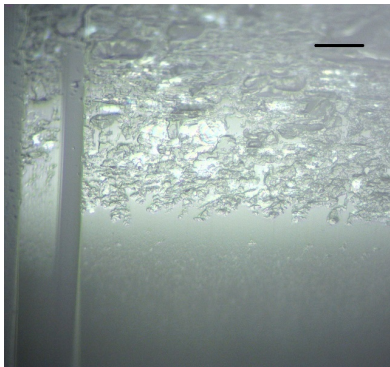


Рисунок 3.10 — Слева фрагмент поверхности резонатора из MgF_2 после точения при неоптимальных параметрах, видны секторы хорошего и плохого качества поверхности, соответствующие точению различных кристаллических срезов, такие дефекты можно убрать полировкой без сохранения геометрии резонатора. Справа фрагмент поверхности резонатора из BaF_2 после точения изношенным резцом, видны глубокие сколы, которые нельзя убрать полировкой.

В литературе по точению основными методами борьбы с износом являются более щадящие параметры точения (уменьшение глубины резки и действующей силы, пропорциональной скорости вращения) и использовании охлаждающей жидкости. Важно понимать, что при использовании охлаждающей жидкости меняется режим точения, и следует заново подбирать оптимальные параметры. Уменьшение же глубины резки приводит к пропорциональному

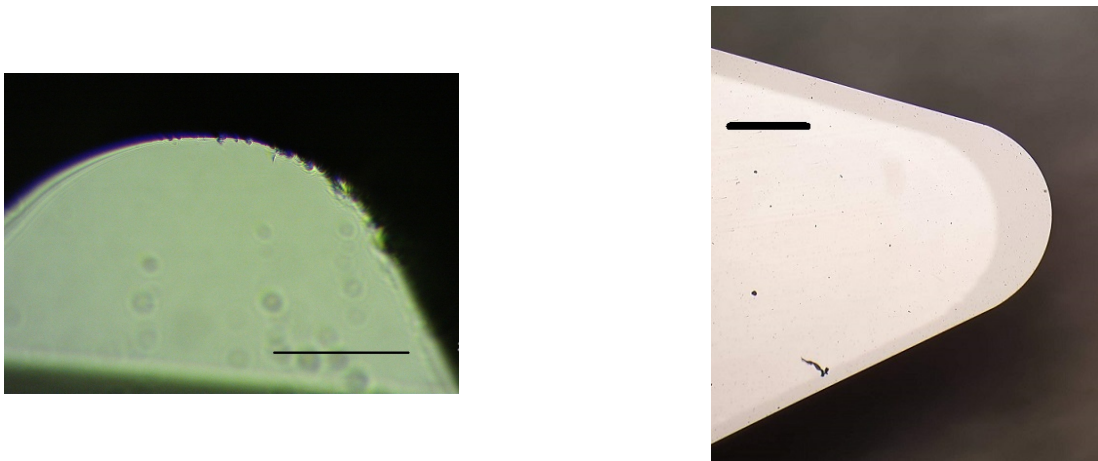


Рисунок 3.11 — (Слева): Рабочий край изношенного алмазного резца с радиусом кривизны 500 мкм и наклоном рабочей грани -25° , видны сколы по краю характерным размером 10 мкм. При дальнейшем использовании резца возможно образование скола алмаза по прямой линии, таким резцом можно грубо вытачивать цилиндры заданного диаметра. (Справа): фотография нового резца с радиусом кривизны 200 мкм.

росту времени точения. Охлаждающая жидкость при изготовлении большинства резонаторов из MgF_2 не применялась, т.к. нет удобной системы вентиляции, и ее расход велик, т.ч. бака с жидкостью может не хватать на типичное точение в 6-10 часов, также заводская жидкость содержала маслянистые фракции, которые могут повредить шпиндель на воздушных подшипниках.

Полировка при хорошей центровке микрорезонатора возможна не только последовательным уменьшением зерна суспензии, но и при грубой полировке зерном 2.5-4 мкм для удалений сколов с характерными размерами 5-15 мкм, далее зерном 0.5 мкм и сразу 0.1 мкм для финальной полировки. Стандартное правило - удаление материала в 3-4 кратном размере диаметра зерна. Таким способом повторно достигается добротность $5 \cdot 10^8$ на длине волны 1550 в кристаллах MgF_2 из заготовки VUV качества материала 3.12.

Изготовление прямоугольных микровыступов даже новыми острыми резцами не удалось для диаметров резонатора больше 4 мм для MgF_2 и получилось для диаметров около 1 мм 3.13. Этот резонатор далее в экспериментах не изучался.

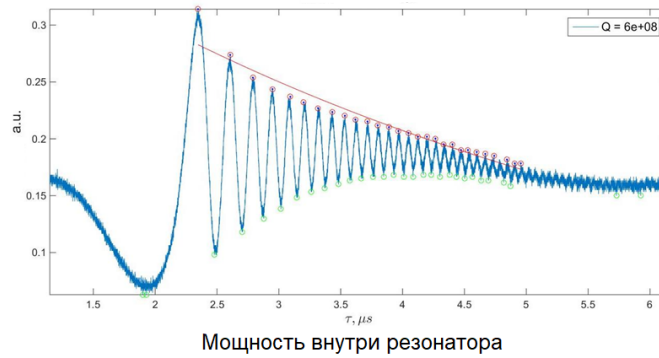


Рисунок 3.12 — Определение добротности резонатора из MgF_2 прямым измерением времени звона оптического резонатора. Соответствующее значение добротности $6 \cdot 10^8$.

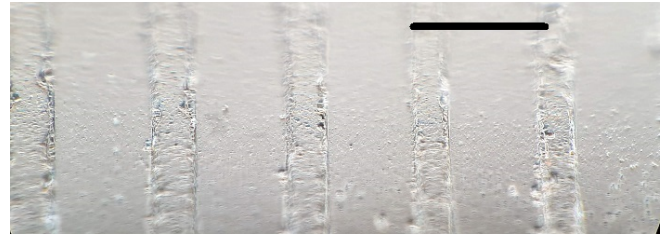
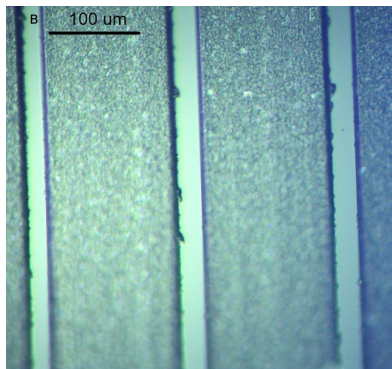


Рисунок 3.13 — Слева: фрагмент поверхности резонатора из MgF_2 с прямоугольными выступами размером 5 на 20, 25 мкм для контроля ДГС резонатора. Показано качество поверхности до полировки, видны сколы по 5 мкм на выступе из-за износа острого резца. Справа: фотография выступов с другого резонатора в темном поле.

3.2 Экспериментальное наблюдение оптических частотных гребенок и солитонов в резонаторах из MgF_2

3.2.1 Экспериментальная установка и результаты генерации СОЛИТОНОВ

Для генерации оптических гребенок и солитонов в кристаллических микрорезонаторах использовалась следующая экспериментальная схема 3.14. Волоконный узкополосный перестраиваемый лазер непрерывной мощности (Koheras Adjustik) подается на фазовый или амплитудный модулятор, далее сигнал усиливается эрбиевым волоконным усилителем (Koheras Boostik),

спонтанные шумы усилителя подавляются узкополосным пропускающим оптическим фильтром (Dicon). Далее свет проходит через волоконный контроллер поляризации (FPC) и заводится в резонатор через элемент связи - растянутое волокно, через него же свет из резонатора выводится. Волоконный Брэгговский фильтр (AOS) используется для подавления мощной линии накачки, далее оптический сигнал подается на оптический спектроанализатор (OSA) и быстрый фотодетектор, электрический сигнал с которого измеряется осциллографом и спектроанализатором.

Растянутое волокно изготавливалось методом травления в плавиковой кислоте: зачищенное от пластика волокно диаметром 125 мкм помещалось в 100 мкл каплю 40 процентной плавиковой кислоты на 15 мин, далее в буферный раствор 18 процентной кислоты, в котором волокно травилось около 30 мин. Контроль толщины осуществлялся по сигналу пропускания через волокно, наблюдалась характерная осцилляционная картина, травление прекращалось сразу после исчезновения осцилляций. Таким методом были получены волокна с конической перетяжкой и диаметром перетяжки от 3 до 8 мкм. Растянутые волокна выдерживали мощность до 300 мВт. Другим методом изготовления был стандартный метод растяжки волокна в пламени водородной горелки.

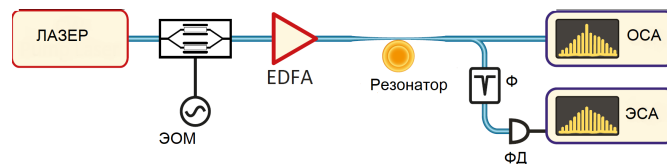


Рисунок 3.14 — Схема экспериментальной установки для генерации оптических гребенок и солитонов. Лазер - узкополосный перестраиваемый волоконный лазер непрерывной мощности, частота лазера управляется с помощью напряжения на пьезоэлемент, ЭОМ - электрооптический модулятор (амплитудный или фазовый) вместе с генератором СВЧ сигналов, EDFA - эрбиевый волоконный усилитель, Резонатор - кристаллический микрорезонатор с МШГ, Ф - волоконный Брэгговский фильтр для подавления мощной линии накачки, ФД - быстрый фотодиод с волоконным входом, OSA - оптический спектроанализатор, ЭСА - электрический спектроанализатор.

Для настройки на шумную гребенку 3.15 достаточно медленно перестроить частоту лазера из области синей отстройки в красную область (верхней ветви существования керровских частотных гребенок). Так последовательно

возбуждаются одиночные боковые линии вдали от накачки - режим модуляционной неустойчивости (их положение определяется дисперсией второго порядка), далее благодаря каскадному четырехволновому взаимодействию, возбуждаются все линии на расстоянии 1 ОСД и частотная гребенка полностью заполняется. Пример генерации шумных оптических гребенок и широкого сигнала биений на частоте ОСД дан на рис. 3.16,3.17.

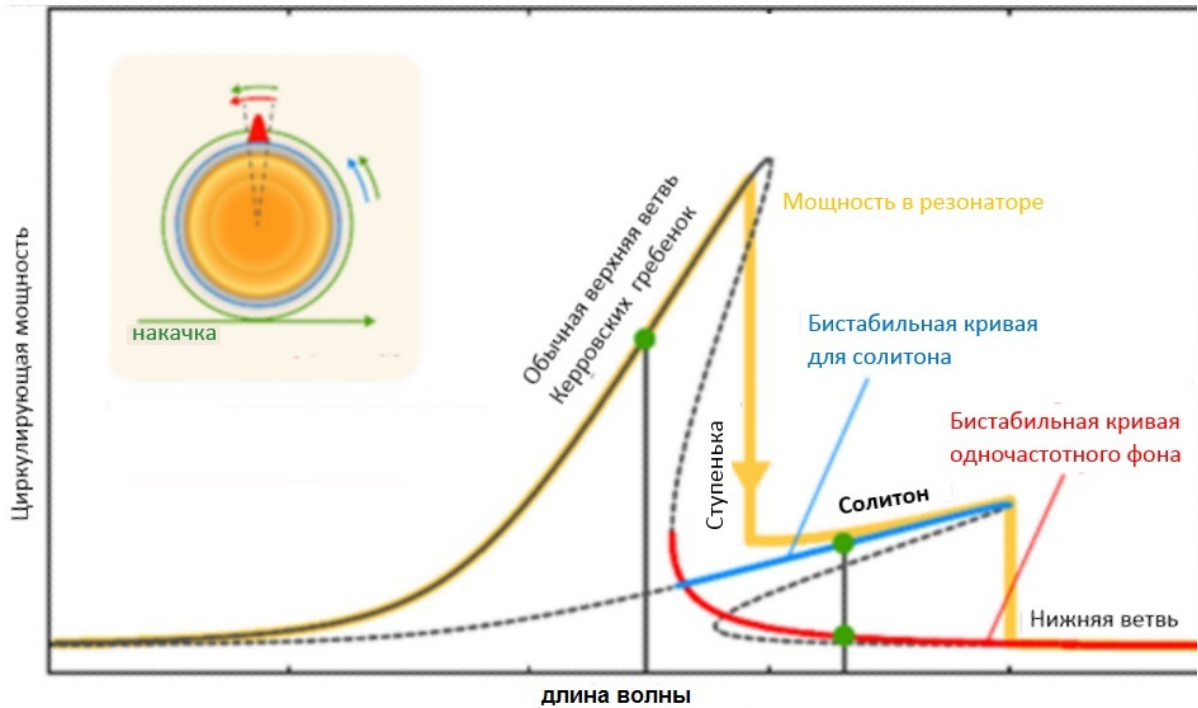


Рисунок 3.15 — Схематичное изображение нелинейного резонанса с солитонной ступенькой и бистабильная кривая.

Конический профиль растянутого волокна позволяет удобно изменять связь с модами резонатора путем его перемещения вверх, вниз и вдоль выступа резонатора и достигать оптимального положения, при котором солитонная ступенька наиболее широкая и мощная.

Для достижения солитонного режима требуется быстрая перестройка лазера, т.ч. тепловой нагрев и сдвиг моды резонатора не привел к выходу частоты лазера накачки из области существования солитона (схема дана на рис. 3.15). На рис. 3.18 показан экспериментальный вид картины пропускания системы на осциллографе: солитонные ступеньки в прошедшем свете (желтый), генерируемом свете после подавления оптическим фильтром мощной накачки (зеленый), линейная во времени перестройка частоты лазера показана синим, сигнал ошибки схемы PDH привязки частоты лазера дан розовым. Для этого подается однократное пилообразное напряжение на пьезоконтроллер частоты лазера, т.ч.

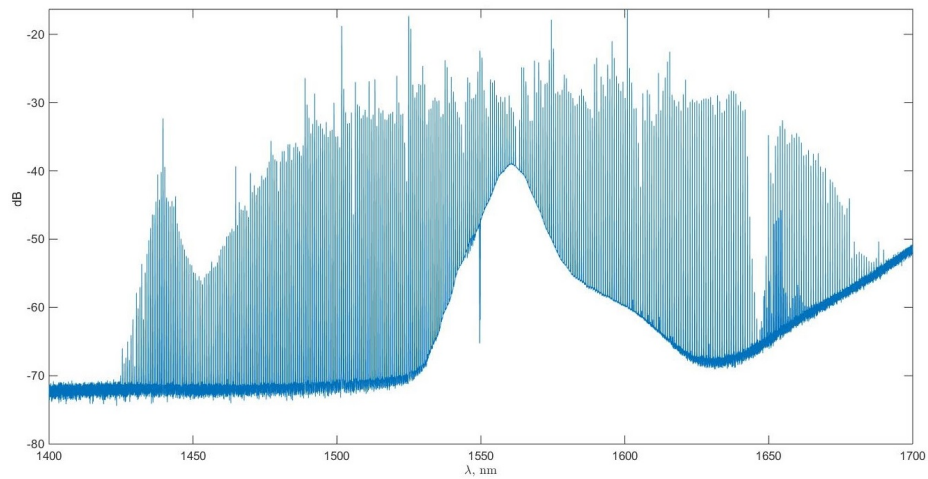


Рисунок 3.16 — Оптический спектр широкой оптической гребенки в шумном режиме с ОСД около 93 ГГц, полученный в резонаторе диаметром 0.75 мм и радиусом кривизны 150 мкм. Видно излучение дисперсионной волны на длине волны 1440 нм.

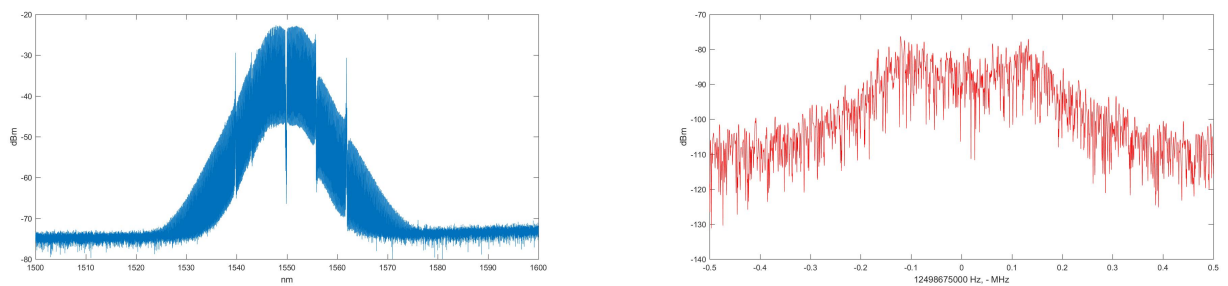


Рисунок 3.17 — Слева оптический спектр оптической гребенки в шумном режиме. Справа соответствующий сигнал биений на частоте ОСД 12.48 ГГц.

окончание быстрой перестройки частоты совпало с центром области существования солитона. Для ступенек шириной более 6 МГц при мощности накачки до 120 мВт этого метода достаточно для повторяемого достижения солитонного режима в разных резонаторах см. рис. 3.19, 3.20. В ходе работы были получены солитоны только в резонаторах из материала MgF_2 , т.к. в нем при нагреве мощным лазером накачки терморефрактивный эффект компенсирует сдвиг собственных частот, вызванный тепловым расширением (в материалах CaF_2 , BaF_2 при накачке мощным лазером возникают сильные термооптические осцилляции и достижение стационарного режима оптических гребенок затруднительно). В ходе работы были получены солитоны с частотами повторений от 8.5 ГГц до 27 ГГц. В резонаторах малого диаметра тепловая нелинейность преобладает и ширина солитонных ступенек меньше 1 МГц, что требует дополнительных методов настройки.

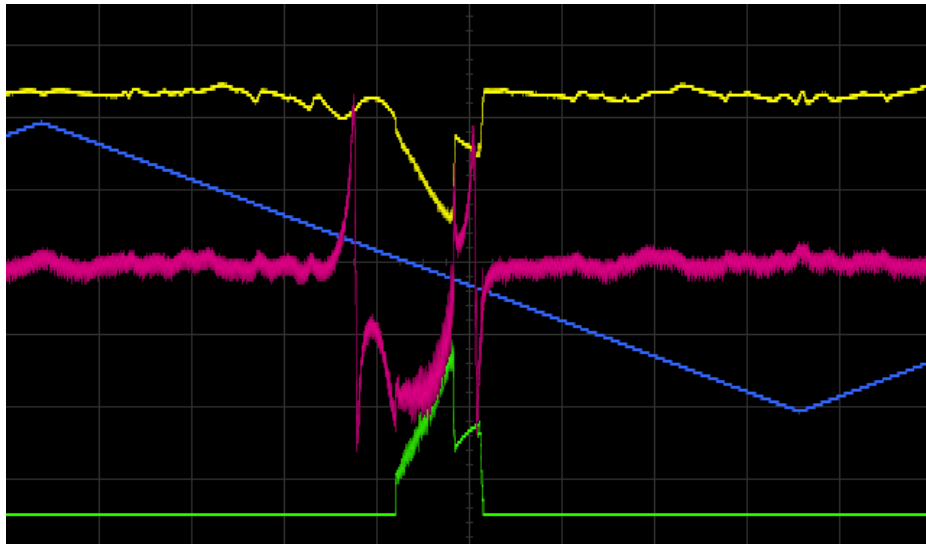


Рисунок 3.18 — Экспериментальная картина пропускания резонатора на осциллографе при накачке мощным лазером, линейно перестраиваемым по частоте. По горизонтали - ось времени. Желтый - сигнал пропускания резонатора, зеленый - сигнал генерируемого света в резонаторе, синий - пилообразный сигнал, управляющий перестройкой частоты лазера, розовый - сигнал ошибки системы обратной связи PDH, точка пересечения с солитонной ступенькой показывает отстройку частоты лазера после настройки на солитон с включенной схемой обратной связи.

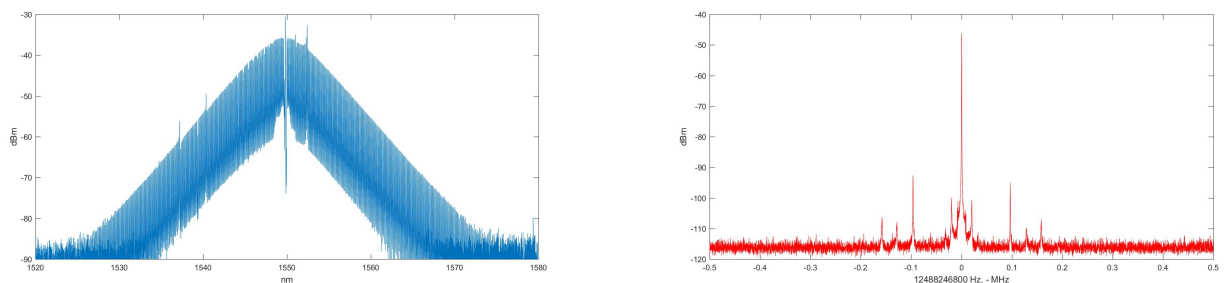


Рисунок 3.19 — Слева оптический спектр оптической гребенки в односолитонном режиме. Справа соответствующий узкий сигнал биений на частоте повторения солитона 12.48 ГГц. Разрешение прибора 500 Гц.

Для контроля текущего значения отстройки лазера от частоты холодного резонанса лазер накачки фазово модулировался сигналом, подающимся с панорамного индикатора (RIGOL Network Analyser), далее сигнал пропускания системы с фотодетектора подавался на панораму и наблюдались 2 пика 3.22, правый пик соответствовал текущей отстройке лазера от резонанса МШГ, другой пик, на постоянной частоте, говорил о наличии солитонного режима и

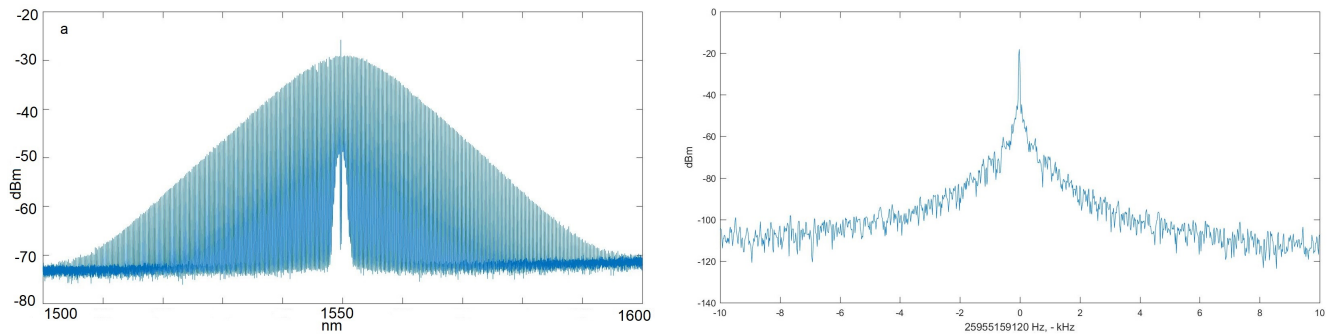


Рисунок 3.20 — (а) Оптический спектр односолитонного режима с ОСД около 26 ГГц, полученный в резонаторе диаметром 2.4 мм и радиусом кривизны 80 мкм. Регулируя положение элемента связи (оптического волокна) с резонатором возможно добиться спектра с минимальным количеством эффектов нормального расщепления мод. (б) узкий сигнал биений на частоте повторения солитона. Ширина сигнала (менее 100 Гц) не разрешается при используемом разрешении прибора 100 Гц.



Рисунок 3.21 — Типичное значение спектральной плотности мощности фазового шума сигнала биений на частоте повторения солитона (-70 дБн/Гц на отстройке 1 кГц, -95 дБн/Гц на отстройке 10 кГц). Для накачки использовался волоконный лазер с мгновенной шириной около 3 кГц. Резонатор не стабилизировался по температуре. Выходной сигнал после резонатора усиливался на 10 дБ сначала оптическим услителем и потом результирующий СВЧ сигнал с фотодетектора усиливался на 15 дБ СВЧ услителем, что вносило дополнительные шумы.

количестве солитонов в резонаторе [59]. Таким образом можно вручную подстраивать частоту лазера для стабилизации солитона в текущем многосолитонном и односолитонном режиме. Этот метод удобен для изучения свойств солитонов

в зависимости от текущей отстройки частоты лазера, однако он неудобен для долговременной стабилизации солитонного состояния. В большинстве экспериментов с кристаллическими микрорезонаторами ширина солитонной ступеньки была не более 5 МГц (из-за относительно малой мощности накачки и потерь в растянутом волокне), и ручная настройка была затруднительна, т.к. остывание резонатора в объеме моды быстро уводило частоту лазера из области существования солитона, поэтому метод контроля отстройки с помощью фазовой модуляции накачки со сканирующей частотой не применялся.

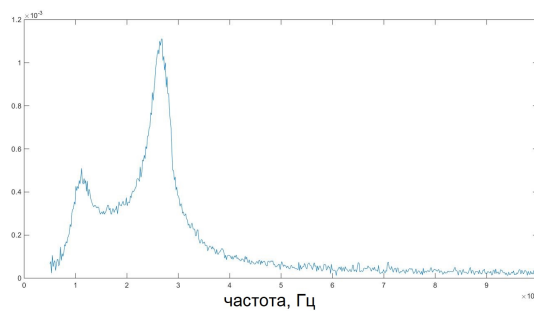


Рисунок 3.22 — Отклик системы на анализаторе цепей (панорамном индикаторе) при сканировании частоты фазовой модуляции. Левый пик говорит о генерации в солитонном режиме, правый пик показывает текущую отстройку лазера накачки от моды резонатора. По горизонтали - частота модуляции в МГц.

Без активной стабилизации частоты лазера время жизни солитона составляло от секунды до 20 мин, за это время лазер накачки уходил из области существования солитона. Для долгосрочной стабилизации была использована схема PDH (Паунда-Древера-Холла), в котором на лазер накачки подавалась фазовая модуляция на заданной частоте, отклик системы в форме сигнала пропускания подавался на фазовый детектор вместе с исходным сигналом модуляции, сдвинуты по фазе. Получившийся сигнал ошибки подавался на PID контроллер, усиливался и подавался на пьезоконтроллер частоты лазера. Подбирая точку стабилизации на солитонной ступеньке путем изменения частоты модуляции и фазы опорного сигнала для фазового детектора, можно получить уединенный крутой склон в сигнале ошибки (см. рис. 3.18 розовый сигнал). Далее эмпирически подбирая параметры усиления PID контроллера, можно существенно облегчить процесс настройки на солитон - так при включенной системе обратной связи настройка на солитон путем быстрой перестройки частоты лазера дает положительный результат почти всегда. После настройки

на солитонный режим включается интегратор PID на полный диапазон частот, и солитон стабилизируется на несколько часов. Недостатком схемы PDH для данной задачи является отсутствие возможности перестраивать отстройку без выключения солитонного режима. Также использовалась схема активной стабилизации температуры резонатора с помощью элемента Пельтье, диодного сенсора температуры и PID контроллера.

На рис. 3.21 даны типичные измеренные значения спектральной плотности мощности фазового шума сигнала биений на частоте повторения солитонов. В этом измерении температура резонатора не стабилизировалась, был сгенерирован мультисолитонный режим и были заметны эффекты нормального расщепления мод (оптический спектр дан на рис. 3.27), что значительно (10 дБ) ухудшает фазовый шум на отстройках меньше 10 кГц. Использовался волоконный лазер накачки с мгновенной шириной около 3 кГц.

Важным другим методом является генерация солитона при затягивании частоты лазера. В [124] была впервые продемонстрирована возможность генерации солитонной гребенки при накачке кристаллического микрорезонатора с помощью простого лазерного диода типа Фабри-Перо. При этом продольно-многомодовый лазер, имеющий широкий дискретный спектр и большую суммарную мощность, сначала переходит в режим излучения на одной линии благодаря эффекту затягивания на высокодобротную моду микрорезонатора, с подавлением всех остальных линий в спектре в соответствии с эффектом Богатова, далее эта результирующая мощная линия является накачкой для генерации солитона в микрорезонаторе. Таким образом высокодобротный микрорезонатор одновременно выступал в роли внешнего резонатора для стабилизации лазера и в роли нелинейной среды для генерации солитонов. Методом настройки на солитонный режим была простая ручная подстройка тока на диоде, что приводило к затягиванию линии лазера, ближайшей по частоте к высокодобротной моде микрорезонатора. В эксперименте ОСД лазерного диода (17 ГГц) не совпадал и не был кратен ОСД микрорезонатора (12.1 ГГц). Используемый микрорезонатор был существенно многомодовым и содержал большое количество высокодобротных мод. Мною было экспериментально проверено, что при использовании схемы с растянутым волокном и перестраиваемым узкополосным мощным лазером накачки, наиболее мощный солитон с самой большой областью существования по отстройке, совпадал с хорошей точностью с солитоном, полученным в другом эксперименте при затягивании многочастотного лазера,

в части наличия сильных эффектов нормального расщепления мод. Так дисперсия резонатора не зависит от накачки и метода связи, можно утверждать, что солитон был возбужден обоими методами на одном и том же семействе мод. Практическим недостатком метода затягивания является невозможность контролировать, какая именно мода лазера будет затянута и на какую моду микрорезонатора, поэтому повторимо и детерминировано генерировать солитон сложно.

3.2.2 Методы достижения односолитонного режима

В литературе было предложено несколько методов детерминированного достижения односолитонного режима в оптических микрорезонаторах. Первый метод предполагает одновременную перестройку частоты лазера накачки и изменение его мощности для избежания хаотического режима гребенки [63]. Другим способом является не перестройка частоты лазера, а сдвиг частоты резонанса МШГ путем изменения его температуры [58] или контроля времени жизни свободных носителей (для интегральных резонаторов) [6].

Рассмотрим случай [148] фазовой $f(t) = Fe^{i\varepsilon \sin \Omega t}$ и амплитудной $f(t) = F(1 + \varepsilon \cos \Omega t)$ модуляции с частотой Ω и глубиной модуляции ε . Моделировалась система нелинейных связанных уравнений 2.20. Тепловые эффекты не рассматривались. В численных симуляциях не рассматривались частотная зависимость нелинейности, потерь и пересечения мод, взаимодействия между модами. Предполагая, что частота модуляции близка к ОСД резонатора:

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \tau} = -(1 + \zeta_\mu)a_\mu + i \sum_{\mu', \mu''} a_{\mu'} a_{\mu''} a_{\mu' + \mu'' - \mu}^* + f_\mu \exp(i\mu \Delta \tau). \quad (3.1)$$

Все обозначения соответствуют принятым в этой работе для фазовой модуляции $f_\mu = FJ_\mu(\varepsilon)$, для амплитудной - $f_k = F[\varepsilon/2, 1, \varepsilon/2]$, $f_{\mu \neq k} = 0$, $k = -1, 0, 1$, безразмерной величине накачки F . $J_\mu(\varepsilon)$ функция Бесселя порядка μ , $\Delta = 2(D_1 - \Omega)/\kappa$ нормализованная отстройка от точного значения ОСД, D_1 соответствует $2\pi \times \text{FSR}$. Все номера мод μ определены относительно 0 моды накачки. Дисперсионный закон дается разложением $\omega_\mu = \omega_0 + D_1\mu + \frac{1}{2}D_2\mu^2 + \dots$

и пренебрегая дисперсией третьего и более высоких порядков, получаем выражение для нормализованной отстройки: $\zeta_\mu = 2(\omega_0 - \omega_p)/\kappa + (D_2/\kappa)\mu^2$. $D_2 > 0$ соответствует аномальной дисперсии. Моделировалось 525 мод. Для анализа вычислялась средняя мощность внутри резонатора $U = \sum_\mu |a_\mu|^2$ для разных значений нормализованной отстройки ζ_0 и соответствующий профиль поля в микрорезонаторе $\psi(\varphi) = \sum_\mu a_\mu \exp(i\mu\varphi)$.

Для возбуждения солитонов лазер накачки перестраивается линейно по частоте $\zeta_0(\tau) = \zeta_0(0) + \alpha\tau$ от эффективной синей отстройки $\zeta_0(0) < 0$, через нулевую отстройку в эффективную красную область $\zeta_0 \gg 0$ для сканирования всей области существования солитона. Формирование солитонов дает характерные ступеньки в генерируемом свете. Если перестройку лазера остановить на частоте, лежащей на ступеньке, то солитонное состояние является стабильным во времени. Максимальная частота отстройки области существования солитона [2] дается $\zeta_{0\max} \sim \pi^2 F^2/8$. В симуляциях использовались следующие значения $F \approx 4.11$, $D_2/\kappa \approx 0.01$ и $\zeta_{0\max} \approx 20.8$.

Для набора статистики проводилось по 100 симуляций для каждого набора параметров и строилось распределение вероятности количества генерируемых солитонов. Известно [2; 13], что в случае немодулированной накачки ($\varepsilon = 0$) количество возбуждаемых солитонов может варьироваться от скана к скану. Это подтверждается и при численном моделировании рис. 3.23(a)-3.23(b). Среднее количество возбуждаемых солитонов увеличивается с увеличением мощности накачки и уменьшении ДГС резонатора. При уменьшении скорости сканирования лазера более вероятными становятся малосолитонные режимы.

Статистика значительно изменяется при включении слабой резонансной модуляции ($\Delta = 0$) на частоте строго равной 1 ОСД резонатора. Как только глубина модуляции достаточно высокая ($\varepsilon > 0.2$), то более вероятными становятся состояния с меньшим количеством солитонов (см рис. 3.23(a)-3.23(b)). Для фазовой модуляции возможны два равновероятных сценария - возбуждение односолитонного режима или отсутствие генерации солитонов вообще. Для амплитудной модуляции наиболее вероятные сценарии одно- или двухсолитонные состояния. Этот факт может быть объяснен взаимодействием солитонов: под действием фазовой модуляции солитоны внутри микрорезонатора двигаются к положению равновесия. Два солитона сталкиваются и уничтожаются, т.ч. суммарное число солитонов уменьшается на 2. Либо два солитона сливаются в один с уменьшением общего числа на 1.

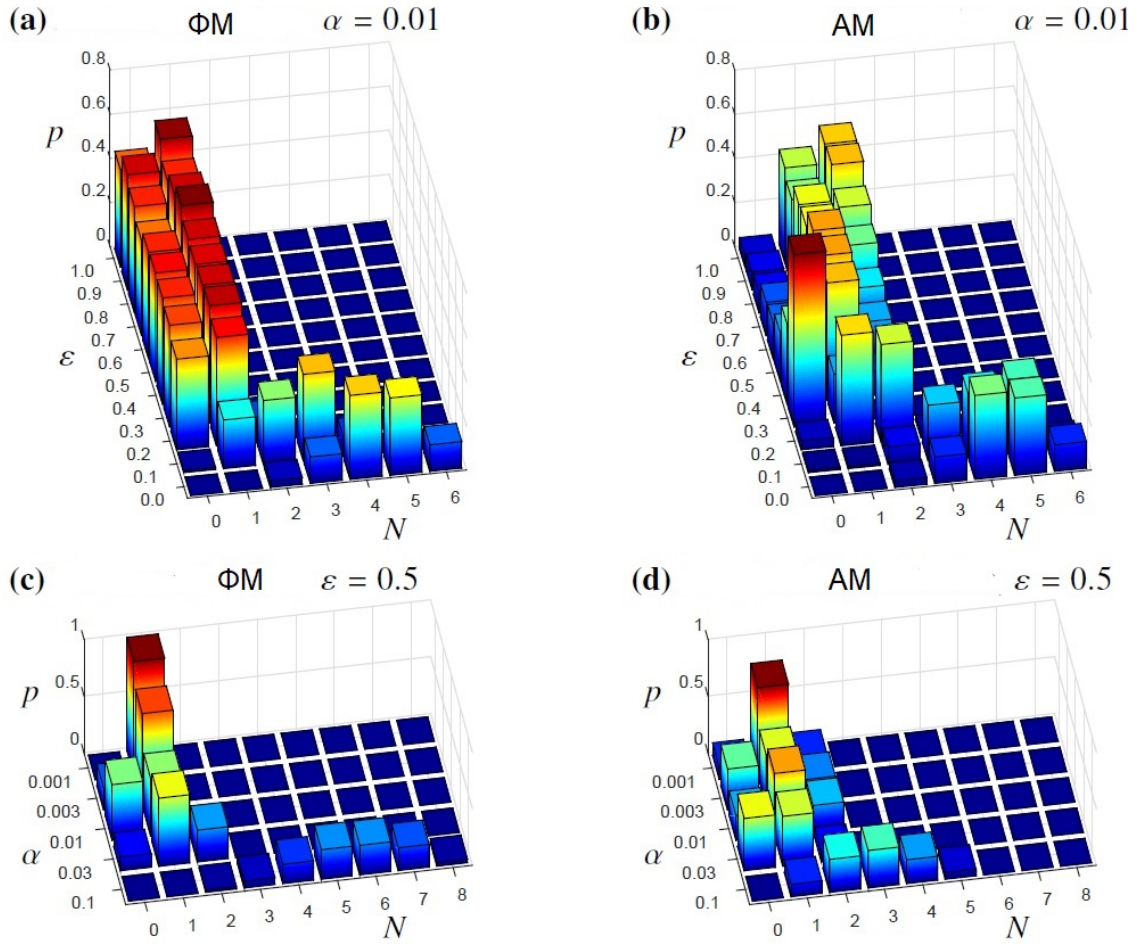


Рисунок 3.23 — Распределение вероятностей количества возбужденных солитонов от глубины модуляции ε и скорости сканирования α . Конечная отстройка $\zeta_0 = 18$ для фазовой и $\zeta_0 = 15$ для амплитудной модуляции. В обоих случаях $F \approx 4.11$, 100 реализаций.

Важным фактором увеличивающим вероятность односолитонного режима является уменьшение скорости сканирования частоты лазера. При малых α для детерминированного достижения односолитонного режима требуется меньшая глубина модуляции. После остановки перестройки частоты лазера и достижения солитонного режима, возможно отключение модуляции с сохранением солитона, если глубина модуляции невелика.

При модуляции не строго на частоте 1 ОСД, а с неточностью Δ , вероятность достижения односолитонного режима ниже и предложенный метод не так эффективен, что частично можно компенсировать увеличением глубины модуляции.

Для подтверждения численных симуляций был проведен эксперимент с резонатором из MgF_2 . Резонатор имел диаметр 5.6 мм, радиус кривизны 35 мкм.

Нагруженная ширина линии составила 500 кГц. Экспериментальная установка представлена на рис. 3.24(а) и полностью аналогична стандартной схеме.

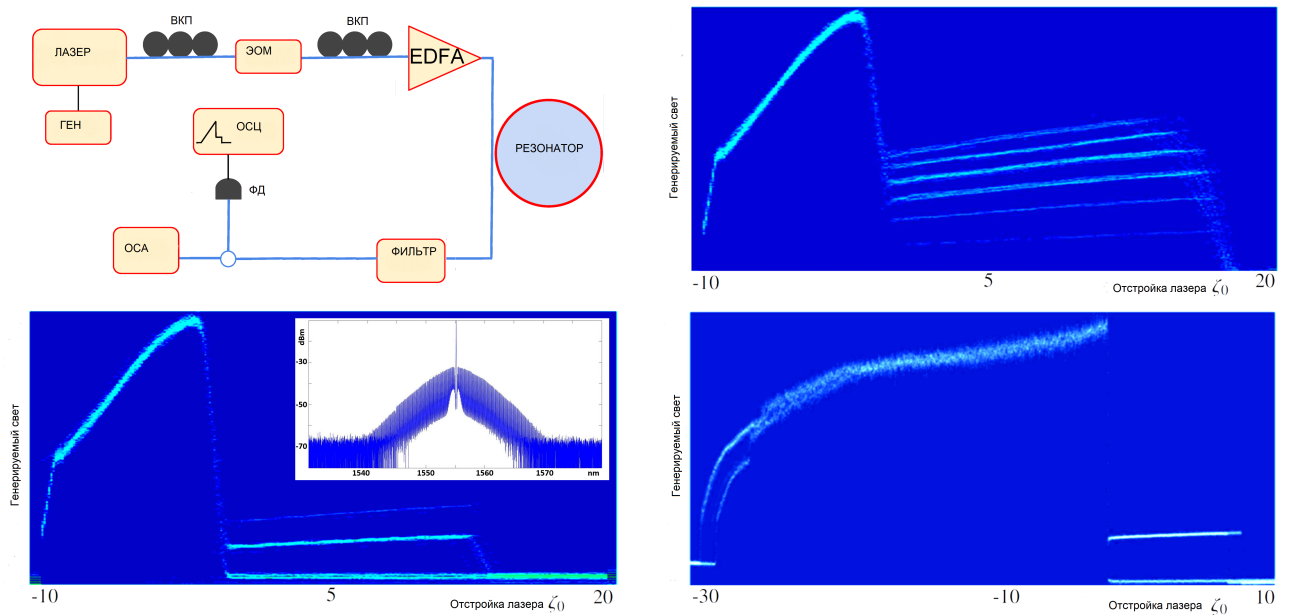


Рисунок 3.24 — Результаты генерации солитонных режимов при фазовой модуляции накачки на частоте 1 ОСД и быстром сканировании лазера накачки. (а) экспериментальная установка (ГЕН - генератор сигналов произвольной формы; Лазер - узкополосный перестраиваемый лазер непрерывной мощности; ВКП - волоконный контроллер поляризации, EDFA - эрбиевый волоконный усилитель; Резонатор - микрорезонатор из MgF_2 ; Фильтр - волоконный Брэгговский фильтр; ФД - быстрый фотодиод; ОСА - оптический спектроанализатор; ОСЦ - осциллограф); (b) статистика 100 измерений по осциллографу сканирования лазера нелинейной моды резонатора на частоте 100 Гц, показана зависимость генерируемого света от отстройки частоты лазера без внешней модуляции, (с) статистика при включенной фазовой модуляции, частота сканирования лазера 100 Гц, вероятность отсутствия солитонов - 0.5, генерации 1 солитона - 0.4, двух солитонов - 0.1, вставка показывает оптический спектр односолитонного режима с $\text{sech}^2(x)$ огибающей, ширина спектра 35 нм, расстояние между линиями соответствует 1 ОСД резонатора в 12.1 ГГц; (d) статистика 100 измерений при включенной амплитудной модуляции, частота сканирования лазера 5 Гц, вероятность отсутствия солитонов - 0.4, генерации 1 солитона - 0.6.

Накачивая резонатор лазером мощностью 100 мВт после усилителя на длине волны 1554 нм наблюдаются характерные ступеньки в сигнале генерируемого света, соответствующие формированию солитонов. Оптический спектр односолитонного режима приведен на вставке рис. 3.24(с).

Экспериментально были проверены разные скорости сканирования частоты лазера от 0.25 ГГц/с до 25 ГГц/с ($\alpha \approx 0.0006...0.06$). Одновременно была приложена либо фазовая либо амплитудная модуляция накачки с помощью волоконного электрооптического модулятора. Глубина амплитудной и фазовой модуляции была около -26 дБн ($\epsilon \approx 0.1$). Для анализа были записаны по 100 сигналов с фотодетектора для каждого набора параметров.

Рис. 3.24(b)-3.24(d) показывает наложенные друг на друга данные от 100 измерений, демонстрируя статистику генерации солитонов, т.ч. более яркие кривые означают более высокую вероятность такого сценария. Было обнаружено, что оптимальная частота модуляции, при которой наблюдался наиболее вероятный односолитонный режим была близка, но не совпадала точно с частотой 12.1025 ГГц - ОСД "горячего" резонатора, который был измерен по сигналу биений в солитонном режиме. Оптимальное отличие частоты модуляции от этого значения ОСД составило около 1 МГц (что значительно больше суммарной дисперсии резонатора). При этом отклонение частоты от оптимальной более, чем на 100 кГц приводило к исчезновению эффекта более вероятной односолитонной генерации. Такое отклонение оптимально частоты от ОСД может быть объяснено тем, что ОСД холодного резонатора из численной модели отличается от измеренного ОСД нагретого резонатора в эксперименте. Из экспериментальных данных видно, как фазовая так и амплитудная модуляция накачки радикально меняет распределение вероятностей для числа генерируемых солитонов, т.ч. односолитонный режим становится достижимым и наиболее вероятным. Хотя эксперимент хорошо качественно согласуется с численным моделированием, видны отличия из-за неучтенных эффектов, вызванных тепловыми эффектами и дисперсиями высоких порядков (D_3, D_4).

3.2.3 Исследование зависимости свойств солитонов от отстройки частоты лазера накачки

Ключевым параметром, описывающим динамику частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах является эффективная отстройка частоты лазера накачки от частоты резонанса под действием тепловой и керровской нелинейности. Рассматривая приближенное решение стационарного уравнения Луджиато-Лефевра без члена, отвечающего за диссипацию, 2.69 получаем после Фурье преобразования к спектральному представлению $\Psi(\mu) = \sqrt{d_2/2} \operatorname{sech}(\frac{\pi\mu}{2} \sqrt{d_2/\zeta_0})$ или, выражая через оптическую частоту: $\Psi(\omega - \omega_p) = \sqrt{d_2/2} \operatorname{sech}(\frac{\omega - \omega_p}{\delta\omega})$, $\delta\omega = \frac{2D_1}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta_0}{d_2}}$, откуда видно что ширина гребенки пропорциональна квадратному корню из отстройки. Тем самым можно варьировать мощность солитона и его длительность. При увеличении отстройки лазера мощность солитона растет, а длительность уменьшается (см. рис. 3.25), при этом немного растет частота повторения солитонов из-за сдвига спектрального максимума солитона при более сильном эффекте нормального расщепления мод (на синем оптическом спектре (отстройка 4 МГц) виден мощный пик на 1557 нм, не возбуждаемый при отстройке 2.5 МГц). Область существования солитона по отстройке определяется из условий существования действительных корней в стационарном уравнении на ψ_0 для минимальной отстройки, а максимальная отстройка берется из условий существования решений на фазу солитона: $\zeta_0 \geq \sqrt{3}$, $\zeta_0 \leq \pi^2 f^2 / 8$. Также величина отстройки ограничивает максимально допустимое число солитонов в мультисолитонном режиме, которые могут распространяться без взаимодействия: $N_{max} < \frac{\pi\sqrt{\zeta_0}}{2\sqrt{2}}$. При малых отстройках численно и экспериментально, как правило, наблюдаются бризерные режимы солитонов. Зависимость частоты повторения солитона от отстройки частоты лазера дана на рис. 3.26, видно, что зависимость нелинейная, при наличии сильных эффектов расщепления мод, и перекачки энергии в другие семейства мод при отстройке около 3 МГц. Отметим, что частоты повторения не зависят от количества возбужденных солитонов: при одинаковой отстройке лазера накачки частота повторения для многосолитонного режима (с любым числом солитонов) и для односолитонного режима будет строго одинакова.

Экспериментально диапазон существования солитона может быть измерен калибровкой длины солитонной ступеньки, например, с помощью фазовой

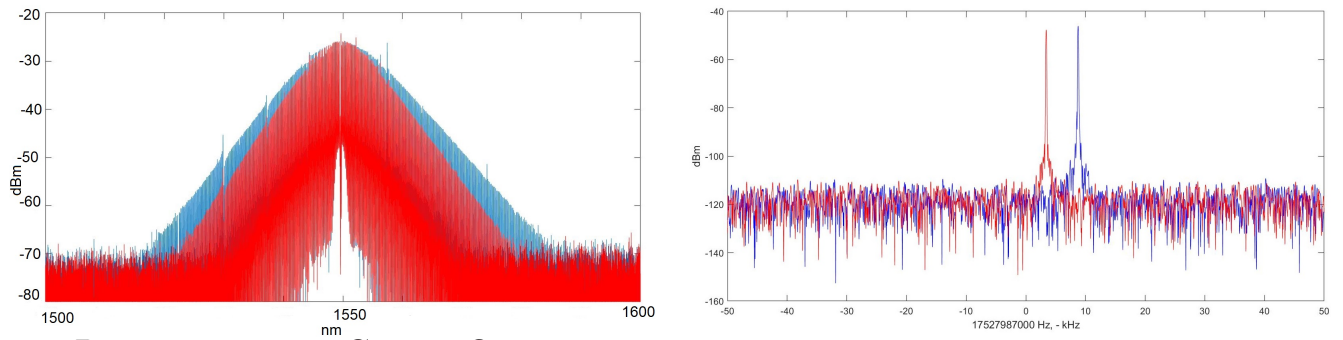


Рисунок 3.25 — Слева: Оптические спектры односолитонных режимов, возбужденных на одной моде при разных отстройках частоты лазера накачки (красным - отстройка 2.5 МГц, синим - 4 МГц) Справа: соответствующие сигналы биений на частоте повторения солитона, виден сдвиг частоты на 5 кГц при увеличении отстройки.

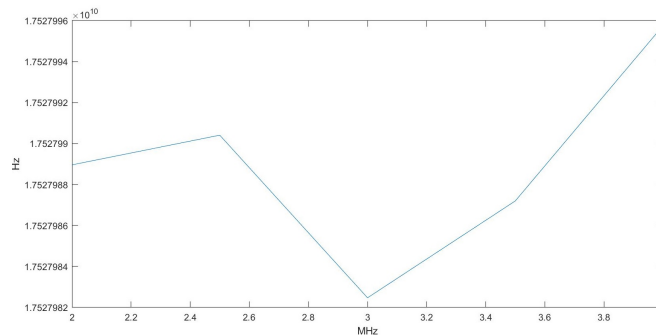


Рисунок 3.26 — Зависимость частоты повторения солитона от отстройки лазера накачки. Зависимость нелинейная из-за наличия сильного возбуждения мод из других семейств при отстройке около 3 МГц.

модуляции лазера накачки в схеме стабилизации PDH, тогда эффективная отстройка будет соответствовать частоте модуляции (точке, в которой сигнал ошибки пересекает солитонную ступеньку). Непрерывно менять отстройку можно в схеме без стабилизации, однако необходимо отслеживать текущее значение отстройки с помощью анализатора цепей (панорамы). Все используемые кристаллические резонаторы являются существенно многомодовыми, поэтому очень часто экспериментально наблюдаются эффекты нормального расщепления мод, когда оптическая мощность эффективно перекачивается в другие семейства мод (см рис. 3.27), т.к. локально нарушается закон дисперсии и для моды из другого семейства выполняются фазовые условия синхронизма. Интенсивность спектральных пиков (дисперсионных волн) зависит от отстройки лазера накачки (не гладко, а скачкообразно), а положение определяется дисперсионными характеристиками резонатора и величиной связи с

этими семействами мод. Такие интенсивные дисперсионные волны приводят к спектральному сдвигу центра солитона (максимума огибающей спектра) в противоположную от пика сторону. Сдвиг спектрального максимума солитона (Ω) приводит к пропорциональному изменению частоты повторения солитона: $\delta f_{rep} = \frac{D_2 \Omega}{D_1}$ [149]. Экспериментально это может позволить вычислить дисперсию второго порядка при наличии заметных сдвигов центра солитона. Важно отметить, что экспериментально при использовании растянутого волокна в качестве элемента связи, связь с исследуемой модой и другими семействами может меняться от измерения к измерению из-за тепловых сдвигов тонкого волокна относительно поверхности резонатора, поэтому проследить изменение абсолютных величин мощности линий гребенки от реализаций эксперимента затруднительно. Также экспериментально многократно использовалось преимущество растянутого волокна - возможность тонко менять связь с различными семействами мод, тем самым уменьшая эффекты нормального расщепления мод. Наличие сильной перекачки мощности в другие семейства мод приводит к значительному ухудшению фазовых шумов сигнала биений на частоте повторения солитона.

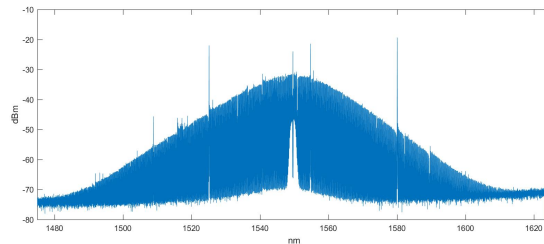


Рисунок 3.27 — Оптический спектр солитона с многочисленными мощными пиками возбужденных мод из других семейств, их суммарная мощность больше, чем мощность самого солитона.

Зависимость частоты повторения солитона от отстройки лазера, возникающая из-за наличия дисперсии высоких порядков (D_3, D_4), эффектов нормального расщепления мод или Рамановского рассеяния, является ключевым условием возможности наблюдения двух оптических гребенок на одном семействе мод, распространяющихся как в одном, так и в противоположных направлениях.

3.2.4 Исследование метода долговременной стабилизации частоты повторения солитона

Пример неустойчивости частоты повторения солитона без стабилизации отстройки дан на рис. 3.28 и составляет порядка 5 кГц за 2 мин.

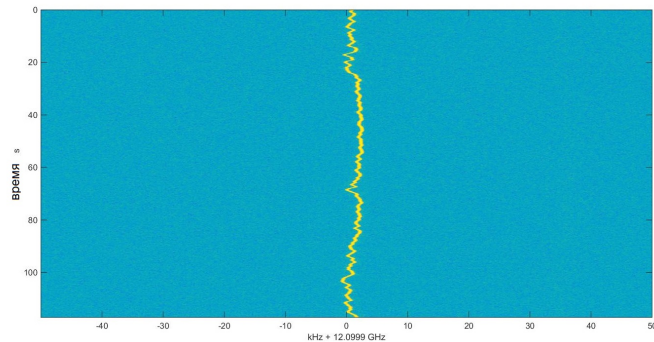


Рисунок 3.28 — Стабильность частоты повторения солитона в нестабилизированной системе. За 2 мин уход частоты порядка 5 кГц.

Экспериментально в схеме на рис. 3.14 было выявлено, что при фазовой или амплитудной модуляции лазера накачки строго на частоте повторения солитона, возможно захватывание частоты повторения солитона на боковую линию модуляции, т.ч. стабильность частоты повторения солитона на длинных временах определяется стабильностью задающего генератора. Однако измеренный диапазон захватывания составляет не более 1 кГц (при частоте повторения в 14.1 ГГц) см. рис. 3.29. Тем не менее этот метод стабилизации оказался чрезвычайно полезен для достижения минимальных значений фазового шума сигнала повторения солитона, т.к. понижал фазовый шум на частотах ниже 1 кГц.

3.3 Экспериментальное наблюдение вынужденного комбинационного рассеяния и рассеяния Мандельштама-Бриллюэна в кристаллических микрорезонаторах

Суммарная (материальная и геометрическая) ДГС резонатора из BaF_2 является нормальной на 1550 нм, поэтому генерация светлых солитонов невозможна. При исследовании резонаторов из BaF_2 при накачке на длине волны

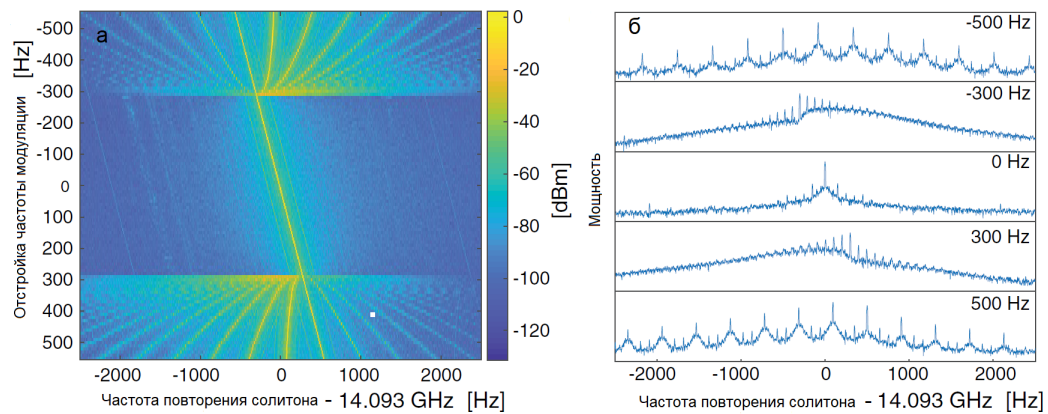


Рисунок 3.29 — (а) спектрограмма эффекта захватывания частоты повторения солитона на линейно перестраиваемую частоту фазовой модуляции лазера накачки, видна область затыгивания шириной 600 Гц, (б) спектр сигнала, полученный с помощью быстродействующего фотодетекторе в режиме без захватывания (-500 Гц) и с захватыванием (0 Гц).

1550 нм наблюдались эффекты вынужденного комбинационного рассеяния (эффект Рамана) и рассеяния Мандельштама-Бриллюэна (ВРБ).

Фторид бария имеет отрицательный терморефрактивный ($-19 \times 10^{-6}/C^{\circ}$) и положительный термоэластичный коэффициенты ($18.1 \times 10^{-6}/C^{\circ}$). При накачке большой оптической мощностью наблюдались периодические термооптические осцилляции, которые не позволяют настроить частоту лазера на моду (Рис. 3.30). При настройке лазера на моду резонатора объем моды нагревается быстро, потом диффузией тепло распространяется в объеме всего кристаллического диска. Сдвиг частоты моды происходит из-за зависимости показателя преломления от температуры (терморефракция), а также из-за теплового расширения материала. Пусть сначала лазер строго в резонансе с модой резонатора. Объем моды быстро нагревается, температура увеличивается и резонанс сдвигается в синюю сторону (в область более высоких частот) из-за терморефракции. Лазер перестает накачивать моду, объем моды остывает, тепло распространяется по объему всего диска, он расширяется, сдвигая собственную частоту мод в красную сторону, лазер медленно начинает разогревать моду. Мода при этом выглядит как стандартная нелинейная мода с тепловой нелинейностью при сканировании частоты, далее на определенной отстройке лазер срывается с нелинейной моды. Далее объем всего резонатора начинает остывать, моды сдвигаются и через определенное время лазер заново

начинает накачивать моду, но со стороны красной отстройки. Процесс периодически повторяется. Важно отметить, что при использовании электрической схемы привязки частоты лазера PDH, и плавном увеличении мощности лазер можно привязать к нелинейной моде BaF_2 на длительное время.

Отметим, что для связи с резонатором из BaF_2 при накачке на длине волны 1550 нм с показателем преломления $n = 1.4661$ использовалось растянутое волокно SMF28 из плавленого кварца с $n = 1.452$ для ядра волокна. В теории элемент связи должен иметь больший показатель преломления, чем материал резонатора для эффективной связи. Однако экспериментально изготовить растянутое волокно для связи с резонатором из фторидом бария оказалось даже легче, чем для связи с резонатором из фторида магния, т.к. уже при толщине волокна порядка 7-8 мкм наблюдалась связь. Также была достигнута критическая связь с растянутым волокном.

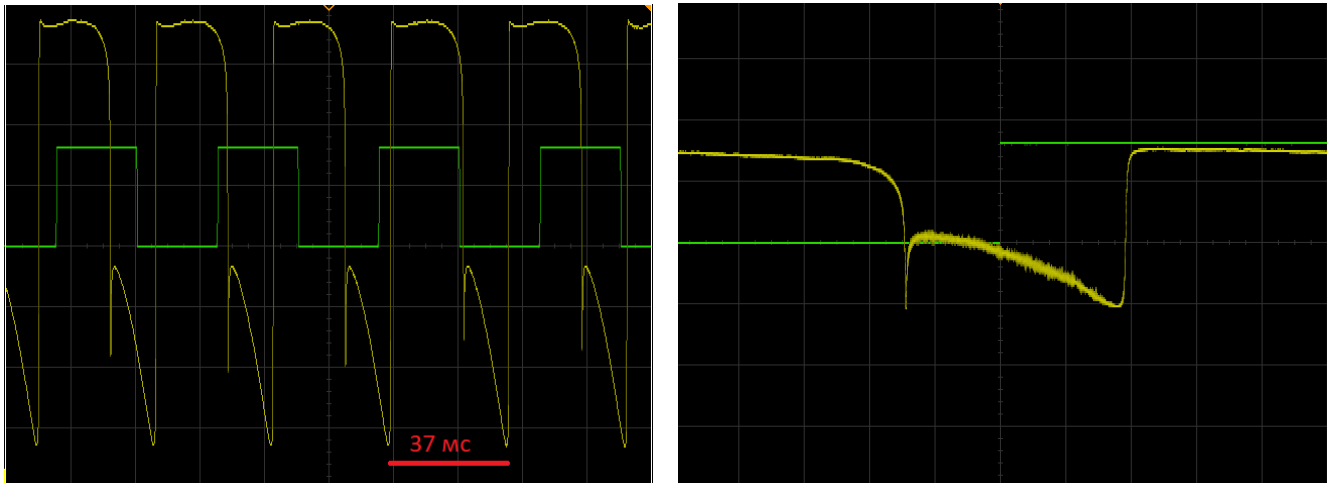


Рисунок 3.30 — Термооптические осцилляции в резонаторе BaF_2 диаметром 1 мм при накачке мощностью 25 мВт на 1550 нм. По оси абсцисс время, по оси ординат пропускание системы в относительных единицах.

При диаметре резонатора из BaF_2 400 мкм, и радиусе кривизны 100 мкм (ОСД 162.7 GHz и расстояние между линиями гребенки 1.3 нм) геометрическая дисперсия уже компенсирует нормальную материальную дисперсию и суммарная дисперсия аномальная. Поэтому удалось наблюдать каскадную генерацию нескольких линий гребенки на значительном удалении от моды накачки и одновременно генерацию вынужденного рамановского излучения на длине волны 1615 нм, что соответствует табличному значению для рамановского сдвига в материале (см рис. 3.31).

В другом резонаторе из BaF_2 с диаметром 3.9 мм, ОСД 16.689 ГГц, с радиусом кривизны 500 мкм существенно больше семейств возбуждаемых мод,

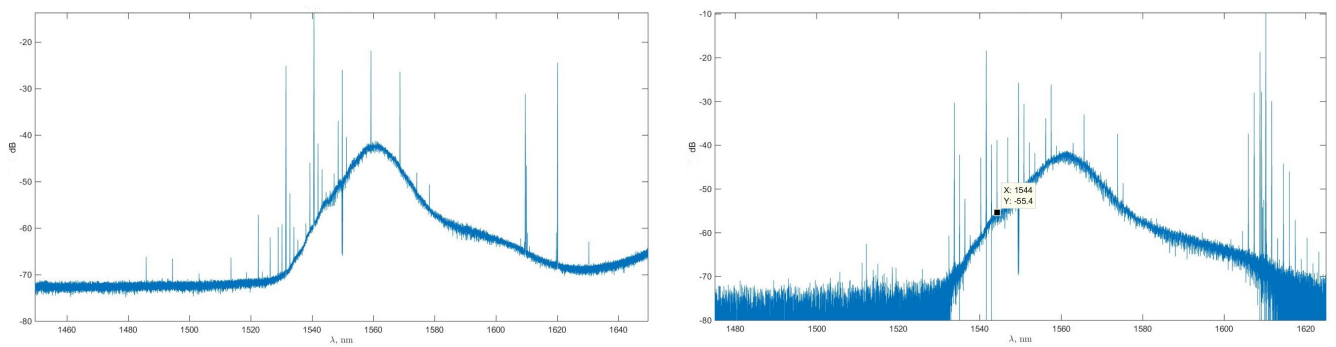


Рисунок 3.31 — Оптический спектр вынужденного Рамановского рассеяния (пик на 1615 нм) и генерации оптической гребенки в резонаторе ВаF₂ диаметром 400 мкм при аномальной дисперсии групповой скорости.

они расположены близко друг к другу и при большой мощности в нелинейном режиме перекрываются. Бриллюэновская частота сдвига не совпадает с ОСД фундаментального семейства мод (16.689 ГГц). Резонансное рассеяние света на акустических колебаниях кристаллической решетки происходит в ширине полосы Бриллюэна и усиление происходит на модах из другого семейства, чем мода накачки. Бриллюэновский сдвиг вычисляется как $\nu_b = 2 * n_{eff} * V_a / \lambda$, где V_a вычисляется через эластичные константы и плотность материала. Для накачке на длине волны 1550 нм расчетное значение $\nu_b = 8.27$ ГГц. Ширина полосы усиления достаточно мала и составляет порядка 10 МГц, поэтому необходимо иметь высокодобротную моду резонатора в этом диапазоне для усиления. В исследуемом резонаторе соответственно больше мод, чем в резонаторе значительно меньшего диаметра, на которых наблюдается вынужденное рассеяние Бриллюэна, каскадно при мощности накачки в эксперименте в 25 мВт. Порог по мощности для наблюдения первого пика ВРБ был около 8 мВт, что существенно выше, чем в работах с Бриллюэновским лазером. Это связано со сравнительно невысокой добротностью мод резонатора $1 * 10^8$. В эксперименте наблюдались пики каскадного ВРБ на 8.2, 16.4, 24.6 ГГц, нечетные пики в отраженной волне, четные в проходящей (см. рис. 3.32). Нечетные пики измерялись в отраженной волне на выходе оптического циркулятора, поставленного до элемента связи с резонатором. Усредненная ширина биений на частоте Бриллюэновского рассеяния составила около 2 МГц, такая большая ширина объясняется тем, что лазер накачки не был привязан по частоте к моде резонатора, и фактически сбор данных происходил при усреднении за большое время, по периодическим термоосцилляциям резонатора.

Отдельно была предпринята попытка изготовить резонатор такого диаметра, что удвоенная частота ВРБ (16.39-16.43 ГГц измеренная в предыдущем эксперименте) совпадала с ОСД резонатора. Такой резонатор был изготовлен, однако в экспериментах с ним никакой новой динамики наблюдать не удалось.

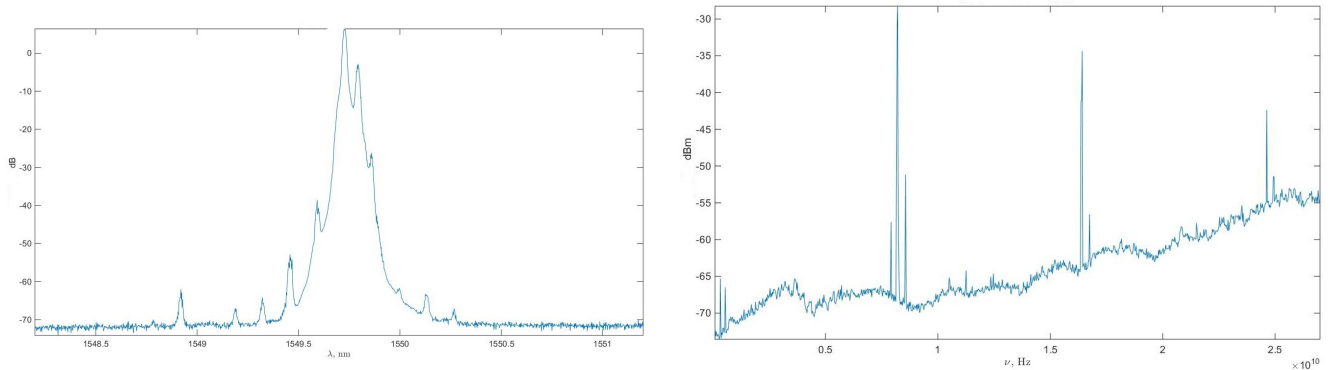


Рисунок 3.32 — Слева: оптический спектр каскадного вынужденного Бриллюэновского рассеяния в резонаторе ВаF₂ диаметром 3.9 мкм. Дисперсия резонатора нормальная, широкой керровской гребенки не наблюдалось. Справа: сигнал биений на частоте ВРБ и гармониках 8.2, 16.4, 24.6 ГГц, каждая шириной около 2 МГц.

При исследовании резонаторов из MgF₂ при накачке на длине волны 1300 нм, где суммарная ДГС резонатора была нормальной, была произведена попытка наблюдать генерацию оптических частотных гребенок при нормальной дисперсии с помощью двухчастотной накачки с разницей частот строго совпадающей с ОСД резонатора. Однако выходная мощность в схеме с имеющимся лазером и амплитудным электрооптическим модулятором (не волоконного, а на свободных пучках в пространстве) была недостаточна для преодоления порога по мощности. Однако впервые было наблюден вынужденное Рамановское рассеяние в резонаторе из MgF₂ (см. рис. 3.33), что никогда не удавалось сделать при накачке на 1550 нм при различных поляризациях. Рамановский сдвиг 410 см⁻¹ близок по частоте с измеренным значением 415 см⁻¹ для накачки на 488 нм (для группы симметрии A₁ тетрагональной кристаллической решетки [150]). На фотодетекторе с полосой 25 ГГц наблюдался только сигнал на частоте межмодового расстояния резонатора. Два близких пика имели ширину около 200 кГц при усреднении (см. рис. 3.34). Можно предположить на основе огибающей линий в оптическом диапазоне рамановского усиления, что возбуждались линии другого семейства, но с близкими собственными частотами. Отметим, что используемый лазер накачки имел собственную ширину линии много больше,

чем ширина линии микрорезонатора, поэтому невозможно было эффективно накачать моду резонатора и стационарная картина генерации гребенки не наблюдалась, дополнительных схем стабилизации частоты не применялось.

Отдельно стоит отметить, что в многочисленных экспериментах с резонаторами из MgF_2 разного размера и формы, при накачке на длинах волн 1.5 и 1.65 мкм никогда не наблюдалось вынужденное рассеяние Бриллюэна ни при какой поляризации лазера накачки.

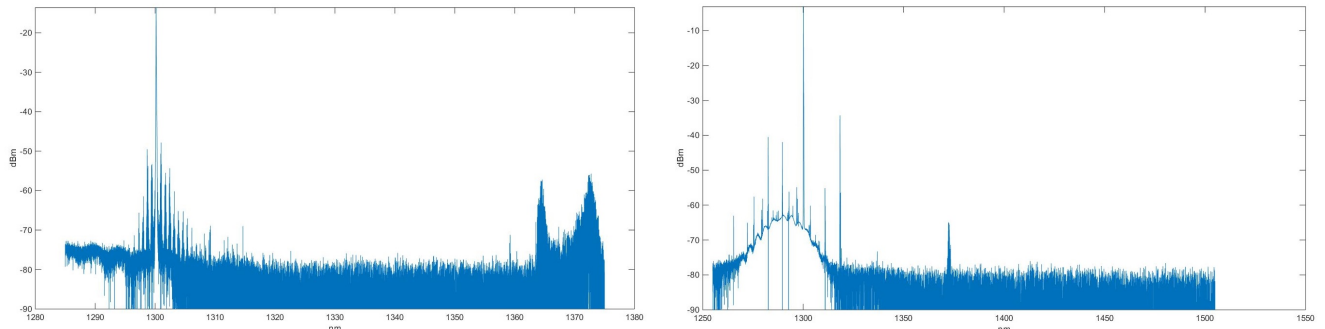


Рисунок 3.33 — Оптические спектры вынужденного Рамановского рассеяния (пики на 1370 нм) в резонаторе MgF_2 диаметром 5 мм, ОСД 12.1 ГГц, приводящие к генерации некогерентной оптической гребенки около накачки на 1300 нм, в области нормальной дисперсии резонатора. Мощность накачки 30 мВт. Слева и справа - разные накачиваемые моды.

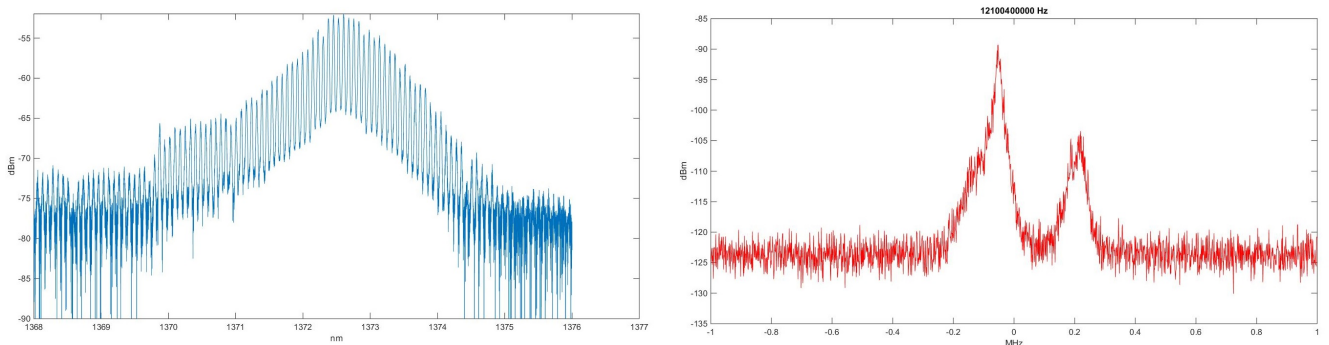


Рисунок 3.34 — Слева: Оптический спектр полосы рамановского усиления в резонаторе MgF_2 при накачке на 1300 нм. Справа: спектр биений на частоте межмодового расстояния резонатора 12.1 ГГц, усредненная ширина линий около 200 кГц.

3.4 Выводы к главе 3

Данная глава посвящена экспериментальному исследованию генерации оптических частотных гребенок и солитонов в микрорезонаторах. Представлена методика изготовления кристаллических микрорезонаторов с помощью механического точения алмазным резцом и полировки алмазными суспензиями, позволяющие воспроизводимо изготавливать оптические резонаторы заданной формы и добротности из различных кристаллических материалов. Дано описание экспериментальной установки и схемы привязки частоты лазера накачки. Экспериментально продемонстрировано возбуждение шумных оптических гребенок в различных микрорезонаторах из MgF_2 , BaF_2 и солитонных режимов в MgF_2 . Исследованы свойства солитонов в зависимости от отстройки частоты лазера накачки от собственной частоты моды резонатора. Экспериментально показано преобладание односолитонного режима или режима без солитонов при использовании фазовой модуляции лазера накачки на частоте близкой к 1 ОСД резонатора. Продemonстрирован метод стабилизации частоты повторения солитонов на больших временах, основанный на эффекте захватывания на боковую линию амплитудной модуляции лазера накачки. Отдельно были экспериментально изучены эффекты вынужденного комбинационного рассеяния и рассеяния Мандельштама-Бриллюэна в микрорезонаторе из BaF_2 . Результаты главы 3 были опубликованы в статьях с номерами 4,6,8,10,11 из списка публикаций.

Глава 4. Методы генерации двойных оптических гребенок и солитонов в кристаллических микрорезонаторах

4.1 Генерация двух солитонных оптических гребенок в двух резонаторах на одном цилиндре

Для одновременной генерации нескольких солитонных оптических гребенок [151] с практически идентичными частотами повторения были разработаны структуры с несколькими резонаторами одинаковой формы, выточенными на одном кристаллическом цилиндре из MgF_2 (рис. 4.1). Стэк резонаторов имеет пять одинаковых выступов с радиусом кривизны 35 мкм и радиусом цилиндра 2.84 мм (ОСД около 12.1 ГГц). Расстояние между соседними по высоте резонаторами 140 мкм. Такой стэк микрорезонаторов был изготовлен острым резцом с радиусом кривизны 4 мкм на станке алмазного точения.

Добротность сразу после алмазного точения без полировки составила порядка 10^6 . Добротность больше 10^9 была достигнута асимптотической последовательной полировкой алмазными суспензиями. В результате финальной полировки разница в ОСД между несколькими выступами была не более 10 МГц, что соответствует разнице в радиусах резонаторов в 0.5 – 1 мкм при условии возбуждении одного семейства мод в обоих резонаторах.

Схема экспериментальной установки дала на рис. 4.2. Два независимых (не связанных по фазе) узкополосных волоконных лазера непрерывной мощности ($\lambda \sim 1554$ нм) были усилены в эрбиевом волоконном усилителе до 150 мВт и связаны с резонаторами через 2 растянутых волокна. Каждое волокно подносилось для связи к отдельному выступу микрорезонатора (номер 2 и 4) с противоположных сторон цилиндра, в которых возбуждаются солитоны с различными ОСД. Генератор сигналов произвольной формы использовался для контроля процесса возбуждения солитонов, с него подавался одиночный пилообразный импульс для настройки частоты лазера. Контроллеры поляризации использовались для оптимизации связи с модой резонатора. Фильтр на волоконной Брэгговской решетке использовался для подавления мощной накачки на выходе после микрорезонаторов.

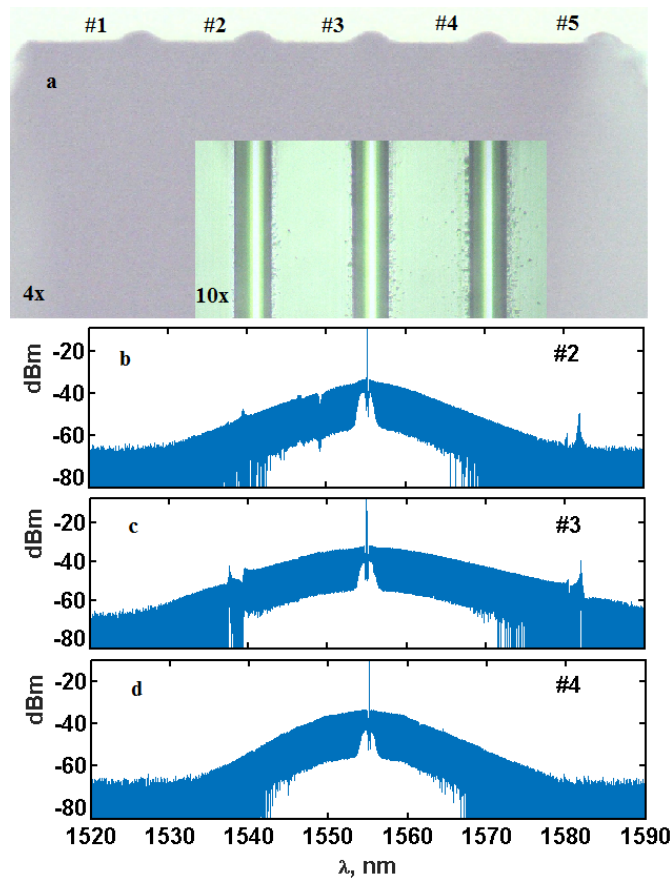


Рисунок 4.1 — (а): Фото стэка резонаторов на одном кристаллическом цилиндре с диаметром 5.68 мм (зазор между соседними выступами около 140 мкм, радиус кривизны поверхности выступа 35 мкм). Вставка показывает 3 отполированных выступа (номера 2 – 4), в которых наблюдались солитоны; (b-d): оптический спектр солитонов, генерируемых в 3 различных резонаторах. Солитонные керровские частотные гребенки имеют ширину 30 – 65 нм с расстоянием 12.1 ГГц.

Частоты повторения солитонов наблюдались на быстром фотодетекторе (ширина полосы 26 ГГц) и широкополосном анализаторе спектра электрических сигналов. Для оптического спектра использовался оптический спектроанализатор с решеткой. На осциллографе наблюдались характерные для солитонов ступеньки в генерируемом и проходящем свете.

Солитоны были получены последовательно в 3 из 5 резонаторах на 1 цилиндре (Рис. 4.1). Ширина спектра оптических солитонов (Рис. 4.1(b) – Рис. 4.1(d)) составила 30-65 нм около 1554 нм. Разница между частотами лазеров накачки была 8.9 – 30 пм. Две солитонные оптические гребенки с разницей в частотах повторений $\Delta\text{FSR} = \text{FSR}_1 - \text{FSR}_2 = 1.62 \text{ МГц}$ были одновременно возбуждены в двух микровыступах на 1 кристаллическом цилиндре и далее

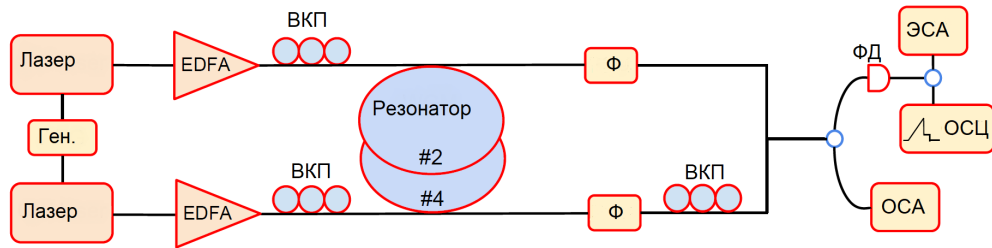


Рисунок 4.2 — Экспериментальная установка по генерации солитонных двойных гребенок из выступов номер 2 и 4. Лазер: узкополосный перестраиваемый волоконный лазер непрерывной мощности; EDFA: эрбиевый волоконный усилитель; Ген: генератор сигналов произвольной формы; ВКП: волоконный контроллер поляризации; Ф: оптический фильтр - волоконная Брэгговская решетка; ФД: фотодетектор; ЭСА: анализатор спектра электрических сигналов; ОСА: оптический анализатор спектра; ОСЦ: осциллограф.

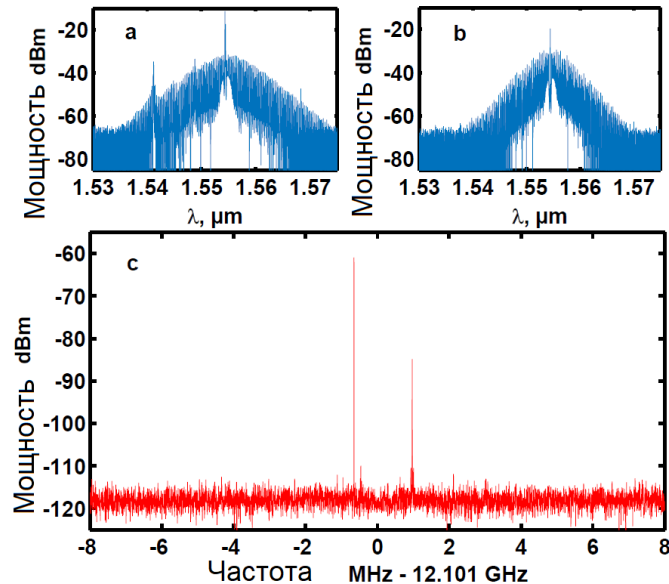


Рисунок 4.3 — (а-б): Оптические спектры мультисолитонных режимов, возбужденные в двух различных резонаторах; (с): сигнал биений на частотах повторений от двух солитонов в разных резонаторах, разница в частотах 1.62 МГц.

совмещены на волоконном делителе. Для настройки на солитоны использовался метод, предложенный в [2]. пилообразный однократный сигнал подавался одновременно на оба лазера, начальная точка перестройки выбиралась путем совмещения солитонных ступенек, т.ч. финальная отстройка лазеров попадала в область существования солитонов в обоих резонаторах. Область существования солитонов составляла не более 8 МГц по отстройке, поэтому необходимо было так подобрать мощности лазеров, чтобы в обоих резонаторах эти области

были приблизительно одинаковые. Совмещение достигалось благодаря плавной подстройке частоты каждого лазера.

Оптические спектры мультисолитонных гребенок в обоих резонаторах даны на рис. 4.3(a) – 4.3(b), самая узкая гребенка на рис. 4.3(b) содержит более 300 значимых линий, разделенных по 12.1 ГГц и покрывает 35 нм около центральной частоты $\lambda = 1554$ нм. Разница в частотах лазеров накачки была 1.07 ГГц. Результирующий сигнал биений на фотодетекторе от двух оптических гребенок отображает двойную оптическую гребенку в радиодиапазон (Рис. 4.4, 4.5), имеет общую ширину 300 МГц с центром на 1.07 ГГц и содержит около 150 линий, разделенных на 1.62 МГц, и имеет огибающую, совпадающую с оптическими профилями двух солитонов. Время жизни двойной оптической гребенки было не более 20 секунд, т.к. не была выполнена никакая стабилизация частот лазеров накачки и температуры цилиндра. На рис. 4.5 показана ширина индивидуальных линий (около 200 кГц) в СВЧ диапазоне в другой реализации эксперимента, когда солитоны возбуждались на других семействах мод в двух различных резонаторах.

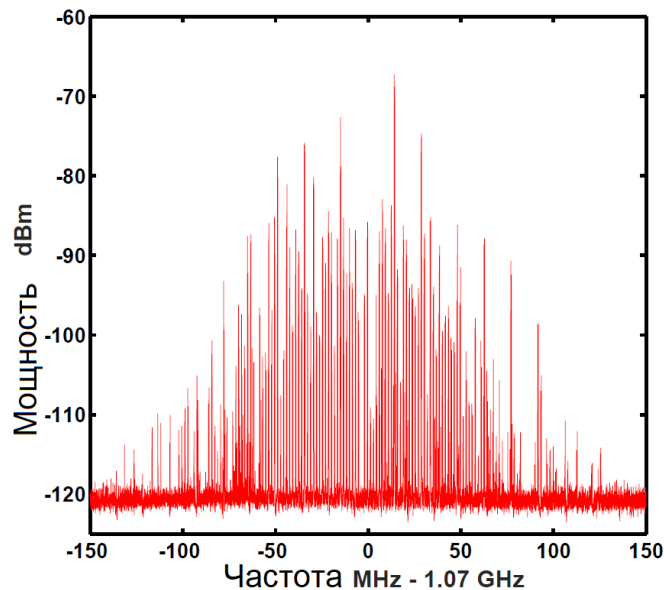


Рисунок 4.4 — СВЧ спектр результата биений двух солитонных оптических частотных гребенок. СВЧ спектр покрывает 300 МГц с центральной частотой 1.07 ГГц, состоит из 160 линий с расстоянием между ними 1.62 МГц.

Короткое время жизни двойной гребенки обусловлено тепловым сдвигом резонансных частот. Наблюдалось, что возбуждение солитона в одном резонаторе приводило к сдвигу резонанса в другом резонаторе, т.ч. эффективная отстройка оказывалась вне области существования солитона. В результате, как

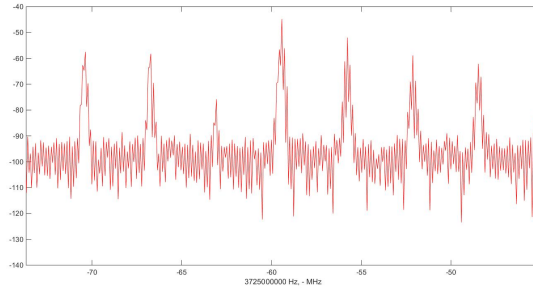


Рисунок 4.5 — Индивидуальные линии радиочастотной гребенки, ширина каждой порядка 1 МГц, что указывает на невысокую взаимную когерентность двух оптических гребенок из-за использования двух независимых лазеров, не привязанных по фазе.

правило, наблюдалось одновременное возбуждение солитона в одном резонаторе и шумной гребенки (модуляционной неустойчивости) в другом резонаторе. Типичный экспериментально наблюдаемый тепловой сдвиг при возбуждении солитона в соседнем резонаторе составляет 30-50 МГц. Несмотря на большое расстояние между резонаторами в 140 мкм, через элемент связи одного резонатора можно было наблюдать моды другого резонатора и даже гребенку в другом резонаторе (по уровню -30 дБ), что говорит о большом рассеянии внутри цилиндра и недостаточной локализации поля в выступе с радиусом 35 мкм и высотой около 10 мкм. Для уменьшения теплового влияния можно разнести резонаторы на одном цилиндре более, чем на 3 мм, использовать меньшую мощность накачки (порядка 50 мВт, что требует более высокой добротности резонаторов) или создать активную систему термостабилизации.

4.2 Генерация солитонных оптических гребенок в одном резонаторе на разных семействах мод в одном направлении

Генерация двойных оптических частотных гребенок в отдельных независимых резонаторах с помощью двух независимых лазеров, не привязанных друг к другу по фазе, имеет ряд минусов: необходимость точить и полировать два резонатора с высокой добротностью и разницей в диаметрах на уровне единиц микрон, также усложняется экспериментальная схема: удваивается количество оптических элементов в экспериментальной установке, требуются дополнительные волоконные изоляторы, волоконные контроллеры

поляризации и волоконные оптические делители. Необходимо стабилизировать температуру обоих резонаторов с одинаковой точностью. Даже при реализации всего вышеперечисленного результирующий сигнал двойной гребенки в СВЧ диапазоне имеет мгновенную ширину индивидуальной линии порядка 500 кГц и нестабильность частоты порядка 20 МГц на временах 5 с из-за нестабильности частот лазеров накачки и различными тепловыми флуктуациями двух микрорезонаторов.

Все изготовленные мною в лаборатории кристаллические резонаторы были многомодовыми. Общее количество мод можно снизить, увеличивая отношения диаметра диска к радиусу кривизны боковой грани, или изготавливая микровыступы в форме трапеции острым резцом. Наименьшее количество мод наблюдалось в резонаторе диаметром 5.6 мм и радиусом кривизны боковой грани 35 мкм и в резонаторе 7.5 мм диаметром и с 80 мкм радиусом кривизны боковой грани. При этом при стандартной технике полировки наблюдалось несколько семейств мод с добротностью не менее 10^9 на 1550 нм.

Пример сканирования широко перестраиваемым лазером большой мощности ОСД резонатора из MgF_2 дан на рис. 4.6, видно возбуждение гребенок на большом количестве семейств мод, при этом характерные солитонные ступеньки в генерируемом свете видны на меньшем числе мод, они помечены черным и даны в увеличенном масштабе. Используемый резонатор имел радиус 2.75 мм и радиус кривизны микровыступа около 80 мкм (Рис. 4.8 (а)). Не менее двух мод, поддерживающих генерацию солитонов, были наблюдаемы и в других резонаторах с ОСД 9.9, 14.1, 17.6, 25.9 ГГц. Все эти резонаторы имели радиус кривизны боковой грани больше 100 мкм.

Групповая дисперсия материала MgF_2 является аномальной в телекоммуникационном С-диапазоне ($\beta_2 = -9 \text{ фс}^2 \text{мм}^{-1}$), и любая геометрия выступа оставляет дисперсию в аномальном диапазоне, что позволяет генерировать светлые солитоны.

Экспериментально в схеме с генерацией солитонов, распространяющихся в одном направлении (Рис. 4.8), использовался лазер (ECDL на длине волны 1554 нм) и IQ электрооптический модулятор в режиме генерации одной боковой линии. Мощности линии лазера и боковой линии амплитудной модуляции выравнивались, а разность частоты контролировалась с помощью стабильного СВЧ генератора. Для накачки использовались 2 моды из разных семейств с

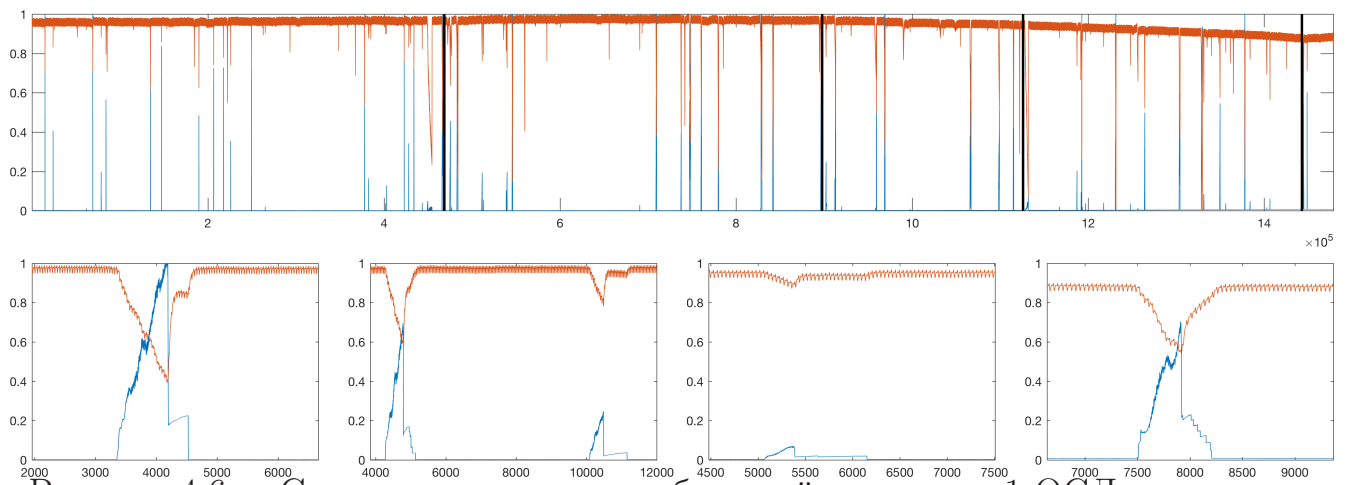


Рисунок 4.6 — Сканирование лазером большой мощности 1 ОСД резонатора

из MgF_2 . Сверху красным даны сигналы пропускания системы, синим - генерируемый свет (сигнал пропускания за вычетом отфильтрованного мощного сигнала накачки). Наблюдается большое количество оптических гребенок, генерируемых на разных семействах мод. Черным выделены несколько примеров мод с характерным для генерации солитонов ступеньками в сигнале генерируемого света (даны в увеличенном масштабе в нижнем ряду).

разницей собственных частот около 4 ГГц. Для настройки на солитонный режим использовалась описанная в предыдущих пунктах техника сканирования частоты лазера, но перед этим, подбирая частоту модуляции на IQ модулятор, выравнивались солитонные ступеньки по правому краю (Рис. 4.9), по максимальной отстройке области существования солитонов. После этого подавалась однократное пилообразное напряжение на пьезоэлемент лазера для быстрой настройки частоты лазера на нужную отстройку. В половине попыток удавалось достичь генерации солитонного режима в обоих семействах мод. Однако для достижения односолитонного режима требовалось либо оптимизировать связь с модами через микропозиционирование волокна, либо выполнять большее число попыток. Лишь в 1 из 10 случаев генерировались одновременно 2 односолитонных режима. Однако стоит заметить, что при наличии одного возбужденного солитона или просто мощности дополнительного лазера накачки в модах резонатора, достижение солитонного режима во второй моде упрощается и его стабильность повышается за счет улучшения температурной динамики. После достижения солитонного режима включалась схема привязки частоты лазера методом PDH на заданной отстройке, для этого использовался дополнительный фазовый модулятор перед IQ модулятором. Для улучшения шумовых характеристик оптических гребенок была выполнена стабилизацию

температуры с помощью элемента Пельтье под латунной подставкой резонатора. Термистор был закреплен достаточно далеко от резонатора и вносил задержку при температурной стабилизации. Температура резонатора стабилизировалось с точностью до 10 мК. Режим двойной гребенки мог существовать несколько часов при отсутствии сильных акустических вибраций.

На рис. 4.10 показаны оптические спектры одновременно двух солитонов на разных семействах мод с разницей по частоте накачки $f_m = 4.28$ ГГц. Разница в частотах повторения солитонов составила $\Delta f_{rep} = 655$ кГц (около $f_{rep} = 12.4$ ГГц), что соответствует фактору сжатия [152] $m = f_{rep}/\Delta f_{rep} = 1.8 \times 10^4$, что полезно для увеличения скорости сбора данных электроникой для покрываемого гребенкой небольшого оптического диапазона. Ширина индивидуальных линий результирующей СВЧ гребенки менее 100 Гц и не разрешается прибором (при разрешении спектроанализатора в 100 Гц), хотя вся система не стабилизирована (частота повторения солитонов и лазер накачки не привязаны ни к каким эталонам). Для сравнения был проведен эксперимент по накачке одним лазером и линией амплитудного модулятора двух различных независимых резонаторов (на разных подставках) с близкими ОСД. Генерация двойной гребенки также возможна, однако одновременная настройка на солитонный режим сложнее и тепловая стабильность существенно хуже, т.ч. взаимная когерентность оптических линий, эквивалентная ширине индивидуальной линии СВЧ гребенки, хуже 1 кГц.

Вернемся к эксперименту в одном резонаторе: благодаря высокой частоте f_m и небольшой разнице в частотах повторения, отображение оптического спектра на СВЧ спектр взаимно однозначно, 200 МГц радио спектра отображаются на 3 ТГц оптического диапазона без каких-либо наложений на частоту $f_{rep} - f_m$. В экспериментах с другими парами мод из различных семейств, удавалось найти солитонные резонансы с разницей собственных частот порядка $f_m = 100$ МГц, т.ч. потенциально можно обойтись без высокочастотных генераторов, детекторов, анализаторов спектра и осциллографов.

Важно отметить, что хотя солитоны распространяются в различных пространственных модах, они могут эффективно взаимодействовать через четырехволновое взаимодействие, и могут быть модулированными на частоте Δf_{rep} . Дополнительные оптические линии около каждой линии гребенки будут при биениях с соседними линиями гребенки давать биения на точно такой же частоте, что и биения основных линий гребенки, приводя к не взаимно однозначному

отображению в СВЧ область. Условие сохранения углового момента не выполняется при распространении солитонов в противоположных направлениях, но выполняется при распространении в одном направлении для мод с условием $\mu + \eta = \mu' + \eta'$, где μ, η азимутальные числа относительно моды накачки. Например, взаимодействие мод с номерами $\mu + \eta = (\mu - 2) + (\eta - 2)$ приведет к возникновению оптической линии $\omega_\mu - 2\Delta\omega_{rep}$. Для обнаружения таких биений необходимо использовать дополнительный лазер, т.к. в спектре СВЧ биений двойной гребенки, все боковые слабые кроссмодуляционные линии оптической гребенки отображаются на одинаковую СВЧ частоту. На рис. 4.11 даны результаты измерения биения вспомогательного лазера с индивидуальной линией гребенки, видны дополнительные боковые линии строго кратные Δf_{rep} . Их мощность не более -20 дБн и спадает в соответствии с фильтрующей функцией резонанса (шириной порядка 200 кГц). Для большинства применений наличием этих кроссмодуляционных линий можно пренебречь ввиду их малости.

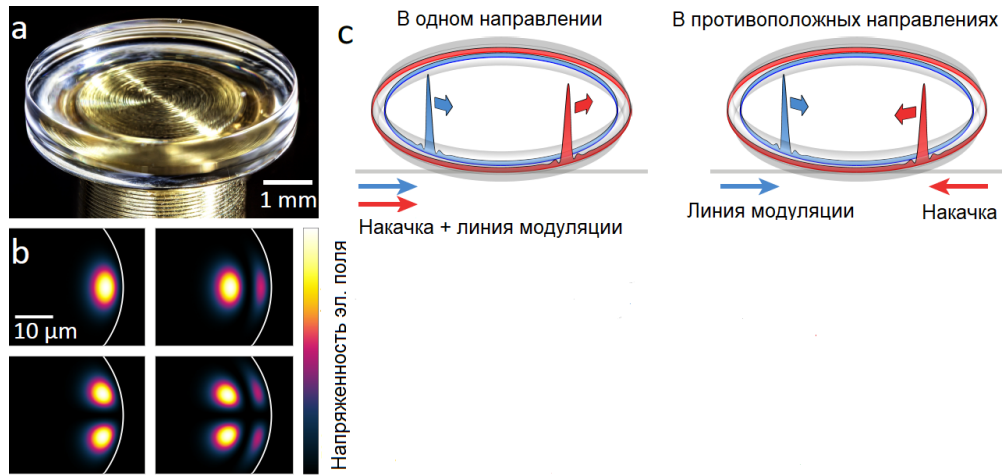


Рисунок 4.7 — (а) Фотография многомодового резонатора MgF_2 , диаметр 5.5 мм; (б) примеры различных семейств мод и распределения электрического поля внутри МШГ; (с) схема возбуждения солитонов с распространением в одном или противоположных направлениях.

Итак, было продемонстрировано взаимно однозначное отображение оптического спектра солитонов (шириной 35 нм вокруг 1554 нм накачки) в СВЧ область (полной шириной около 200 МГц и центральной частотой около 4 ГГц).

На рис. 4.12 приведены результаты генерации солитонов на другой паре семейств мод. Частота модуляции, равная разнице собственных частот мод из двух семейств, составила 4.9119 ГГц, расстояние между ОСД семейств мод 9.2633 МГц, оно же являлось расстоянием между линиями СВЧ гребенки. В

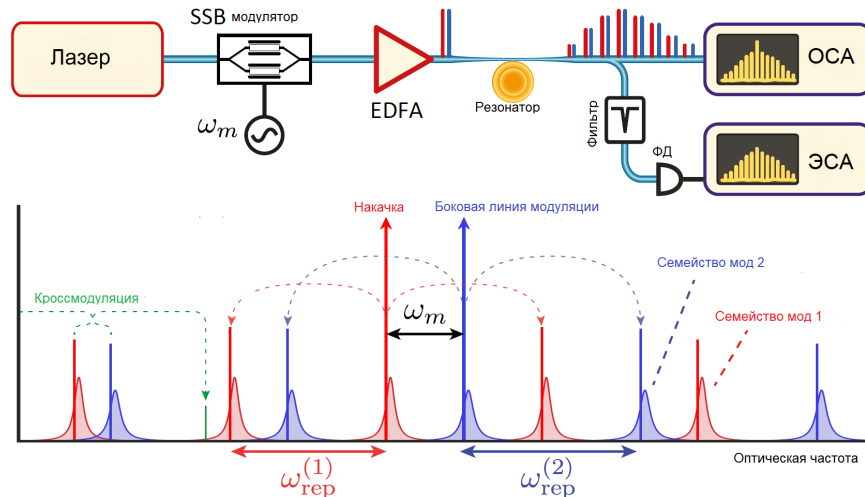


Рисунок 4.8 — (Сверху) Схема экспериментальной установки: Лазер - волоконный перестраиваемый лазер непрерывной мощности, SSB модулятор - волоконный амплитудный модулятор с 1 боковой линией, EDFA - эрбиевый волоконный усилитель, резонатор, Фильтр - волоконный Брэгговский фильтр, ФД - быстрый фотодиод, ОСА - оптический спектроанализатор, ЭСА - анализатор спектра электрических сигналов. (снизу) концептуальная схема эксперимента, красным и синим изображены разные пространственные семейства мод в одном резонаторе, имеющие разные ОСД FSR1 и FSR2, расстояние между накачиваемыми двумя модами f_m выбирается как частота модуляции, зеленым обозначен пример кроссмодуляции при взаимодействии солитонов.

данном случае на одном семействе мод был достигнут односолитонный режим, а на другом многосолитонный. Хорошо видно совпадение огибающих оптического спектра солитонов и результирующего спектра СВЧ сигнала. Уровень компрессии составил 1.4×10^3 , что ниже, чем для любых других продемонстрированных двойных гребенок из микрорезонаторов. Отметим видимый в этом эксперименте недостаток, при большом отличии ОСД между семействами мод, результирующая СВЧ гребенка перекрывается с собой, т.к. линии от мультигетеродинаирования расположены вокруг центральных частот f_m и $f_{rep} - f_m$. Этот же недостаток может проявляться и при достаточно малых f_m .

Измерение стабильности индивидуальной линии 4.13 говорит о хорошей стабилизации частоты лазера накачки и температуры резонатора.

Отметим также технический недостаток схемы с двумя солитонами в одном направлении - сигнал ошибки схемы PDH несет информацию одновременно

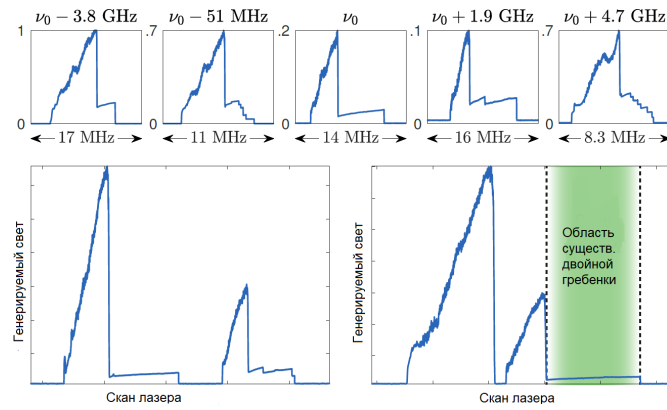


Рисунок 4.9 — Сверху показаны сигналы генерируемого света для разных семейств мод, содержащие характерные солитонные ступеньки, даны отличия собственных частот для этих мод от выбранной центральной. Масштаб по вертикальной оси разный. Внизу показан метод совмещения солитонных ступенек при изменении частоты модуляции. Зеленой областью показан диапазон отстройки, при котором одновременно могут существовать солитоны на обоих семействах мод.

от обоих резонансов, что может мешать стабилизации, особенно при наличии эффекта пересечения мод хотя бы на одном солитонном резонансе.

Важным преимуществом схемы солитонов в одном направлении является ее относительная простота и отсутствие невзаимных устройств (изоляторов и циркуляторов). Практическим для некоторых приложений недостатком схемы с двумя солитонами в 1 направлении является невозможность разделить эти солитоны (у них одна поляризация и близкие оптические частоты), поэтому такая схема может не подойти, например, для фазово-чувствительной спектроскопии поглощения веществ и ЛИДАР применений.

4.3 Генерация солитонных оптических гребенок в одном резонаторе на разных семействах мод в противоположных направлениях

Чтобы разделить солитоны из одного резонатора был проведен следующий эксперимент с микрорезонатором из предыдущего пункта, в котором солитоны на разных семействах мод возбуждались в противоположных направлениях. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 4.14.

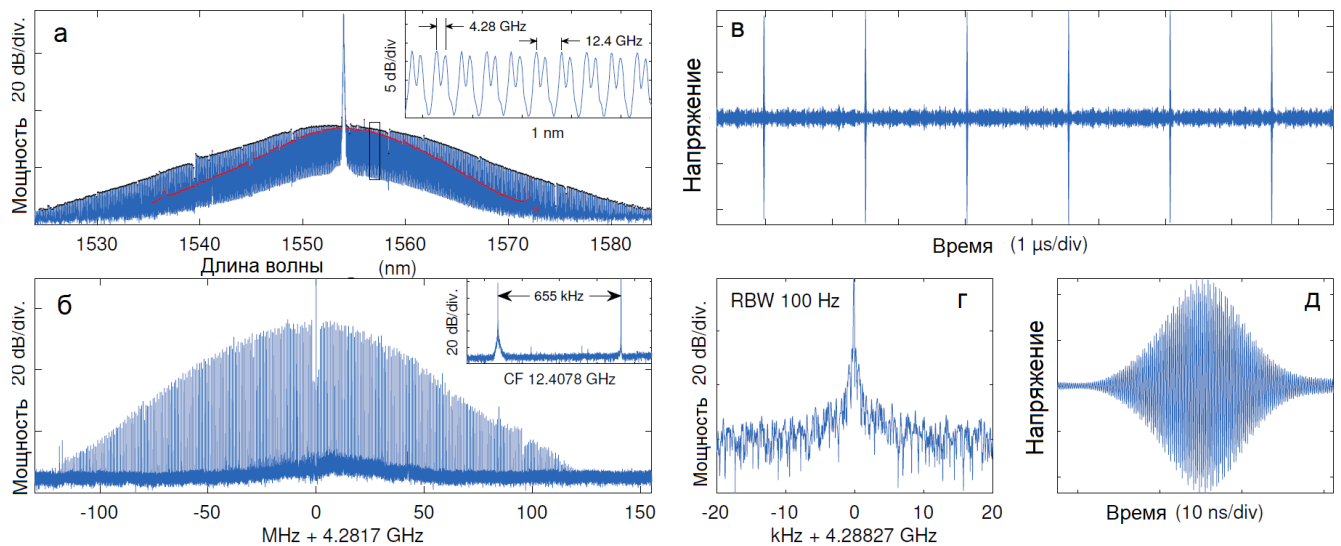


Рисунок 4.10 — Экспериментальные результаты одновременного возбуждения односолитонных режимов на двух разных семействах мод в 1 микрорезонаторе. (а) суммарный оптический спектр односолитонных режимов, красной линией помечена огибающая второго солитона, на вставке представлены отдельные линии двух солитонов. ОСД резонатора 12.4 ГГц, расстояние между несущими 4.28 ГГц. (б) результирующий сигнал биений двух солитонов - СВЧ гребенка с расстоянием между линиями 655 кГц, которое соответствует разнице между ОСД семейств мод, на вставке изображены сигналы частот повторения двух солитонов, (в) сигнал последовательности результирующих СВЧ импульсов, снятый быстрым осциллографом, (г) одиночная не центральная линия СВЧ гребенки шириной менее 100 Гц, (д) сигнал одиночного СВЧ импульса, соответствующий СВЧ гребенке.

Волоконный перестраиваемый лазер непрерывной мощности усиливается эрбиевым усилителем, 0.1 мощности в одном плече после делителя модулируется амплитудным модулятором с одной боковой линией в таком режиме, что вся мощность перекачивается в эту боковую линию, далее сдвинутый по частоте лазерный сигнал усиливается и подается через оптический циркулятор в резонатор из MgF_2 , другое плечо содержит 0.9 мощности исходного усиленного лазера (200 мВт) и подается через другой циркулятор на тот же элемент связи - растянутое волокно. Третьи выходы двух оптических циркуляторов в такой конфигурации содержат свет, прошедший через резонатор в противоположных направлениях. Брэгговские волоконные фильтры используются для подавления

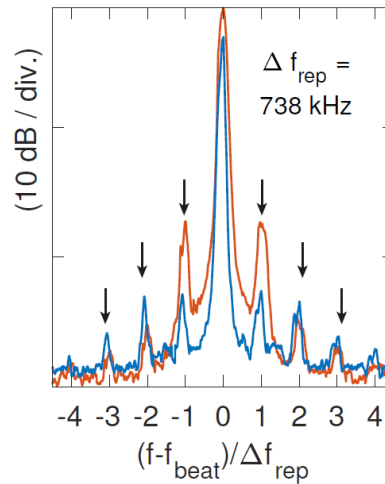


Рисунок 4.11 — Экспериментальное наблюдение слабых боковых линий у индивидуальной линии оптической гребенки, вызванных четырехволновым взаимодействием между линиями двух солитонных гребенок, распространяющихся в одном направлении на разных семействах мод.

Частоты строго кратны разнице частот повторений солитонов, а максимальная мощность составляет -20 дБн.

мощных несущих. Далее полученные сигналы независимо подаются на оптические спектроанализаторы и могут быть сбиты на волоконном делителе и отправлены на быстрый фотодетектор для генерации СВЧ гребенки.

Были использованы моды из пары семейств, с разницей в собственных частотах $f_m = 2.75$ ГГц и разницей в частотах повторения $\Delta f_{rep} = 371$ кГц для демонстрации пространственного мультиплексирования в противоположных направлениях. Настройка на солитонный режим производилась тем же методом, что и в случае распространения в одном направлении. Оптические спектры односолитонных режимов даны на рис. 4.15. Мощность каждого солитона после подавления накачки около 400 мкВт. Соответствующая СВЧ гребенка имела тот же уровень стабильности, что и в схеме с распространением в одном направлении, с шириной индивидуальной линии около 200 Гц. Основное преимущество схемы - это отсутствие кроссмодуляции между солитонами, т.к. для эффективного четырехволнового взаимодействия не выполняется условия сохранения углового момента для семейств мод в противоположных направлениях.

В эксперименте мощность накачек в обоих плечах выравнивалась, а частота модуляции подбиралась так, чтобы совпадали солитонные ступеньки в сигнале генерируемого света, также как и в случае солитонов в 1 направлении на разных семействах мод. Использовался метод PDH стабилизации частоты лазера к моде резонатора. Также была задействована схема активной

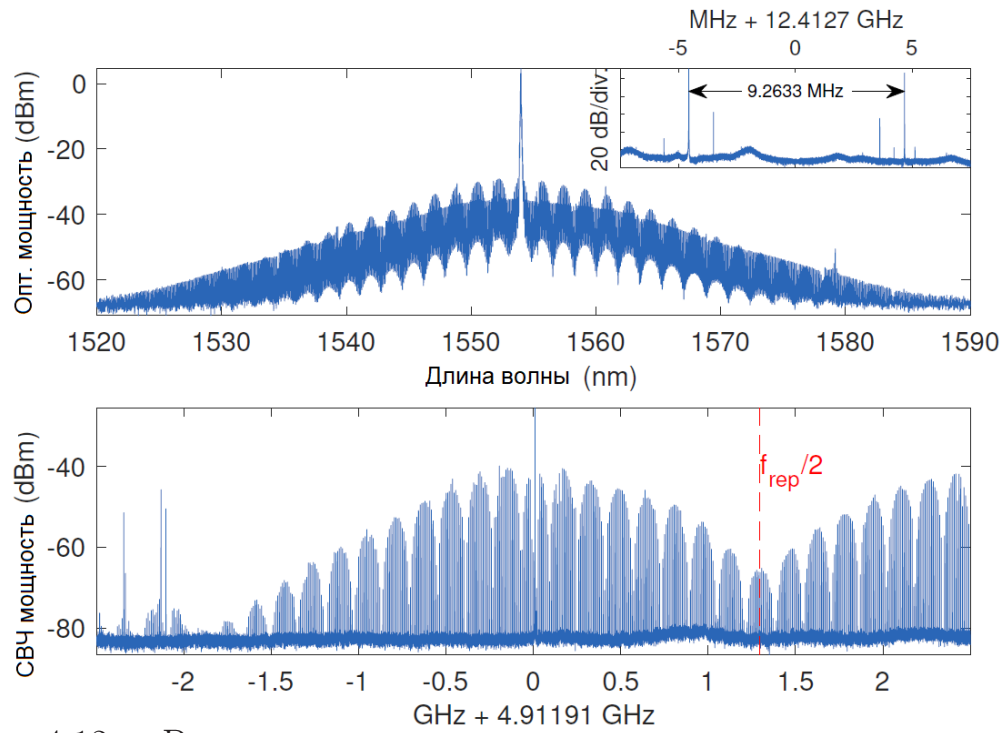


Рисунок 4.12 — Результаты одновременной генерации солитонов в одном направлении на другой паре семейств мод. (сверху) суммарный оптический спектр односолитонного режима на одном семействе мод и многосолитонного режима на другом семействе мод, на вставке показана разница между частотами повторений 9.2633 МГц, (снизу) результирующая СВЧ гребенка с центральной частотой 4.9119 ГГц, видно что гребенка перекрывается с собой на половине частоты повторения солитонов (отмечено красным пунктиром).

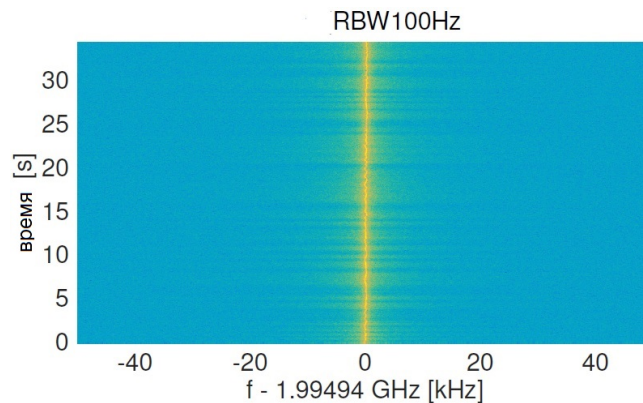


Рисунок 4.13 — Измерение стабильности индивидуальной линии СВЧ гребенки.

стабилизации температуры резонатора. Экспериментальные результаты приведены на 4.15. Красный оптический спектр имеет сильно выраженный пик на 1530 нм, вероятно, связанный с сильным эффектом нормального расщепления мод. Результирующая картина СВЧ гребенки хорошо воспроизводит огибающие оптических спектров солитонов (однако присутствуют дополнительные

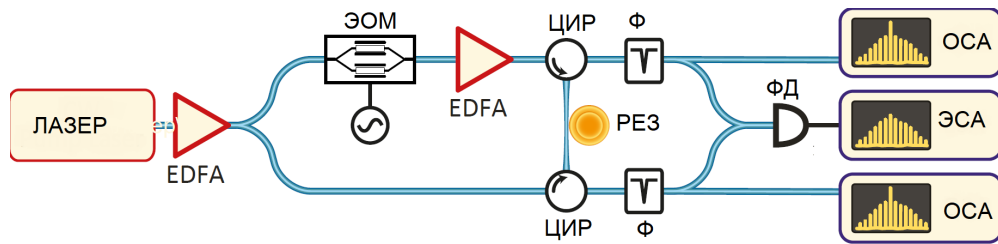


Рисунок 4.14 — Схема экспериментальной установки: Лазер - волоконный перестраиваемый лазер непрерывной мощности, ЭОМ - волоконный амплитудный модулятор с 1 боковой линией, EDFA - эрбиевый волоконный усилитель, Рез - микрорезонатор, Ф - волоконный Брэгговский фильтр, ФД - быстрый фотодиод, ОСА - оптический спектроанализатор, ЭСА - анализатор спектра электрических сигналов, ЦИР - оптический циркулятор.

компоненты на $+70$ МГц и -70 МГц, вероятно, связанные с техническими шумами). Результаты измерения девиации Аллана показывают, что разница частот повторений солитонов стабильнее, чем индивидуальная частота биений для 1 солитона, что говорит о хорошей работе системы привязки PDH. Для того чтобы минимизировать флуктуации амплитуд индивидуальных линий СВЧ гребенки необходимо бороться с паразитными переотражениями в схеме после резонатора, иначе образуются дополнительные резонаторы типа Фабри-Перо, и избегать флуктуаций фазы света в плечах, уменьшая длину волокон и контролируя их температуру и механические вибрации.

Продемонстрированный метод генерации двойной гребенки в противоположных направлениях на разных семействах мод подходит для проведения фазочувствительной спектроскопии. Был проведен демонстрирующий эту концепцию эксперимент: оба солитона были усилены до 10 мВт в эрбиевых волоконных усилителях, одна гребенка была пропущена через вейвшейпер (оптический генератор сигналов произвольной формы), потом сбита со второй гребенки на волоконном делителе. Амплитуда каждой линии в результирующей СВЧ гребенке сравнивалась с сигналом гребенки без пропускания через вейвшейпер. Использовался высокоскоростной осциллограф с временем сбора данных 1 мс, что соответствовало 370 усреднениям. Результаты измерения хорошо совпали с запрограммированным профилем, кроме краев спектра, где мощности линий гребенки крайне малы и ошибка в измерениях велика (см. рис. 4.16).

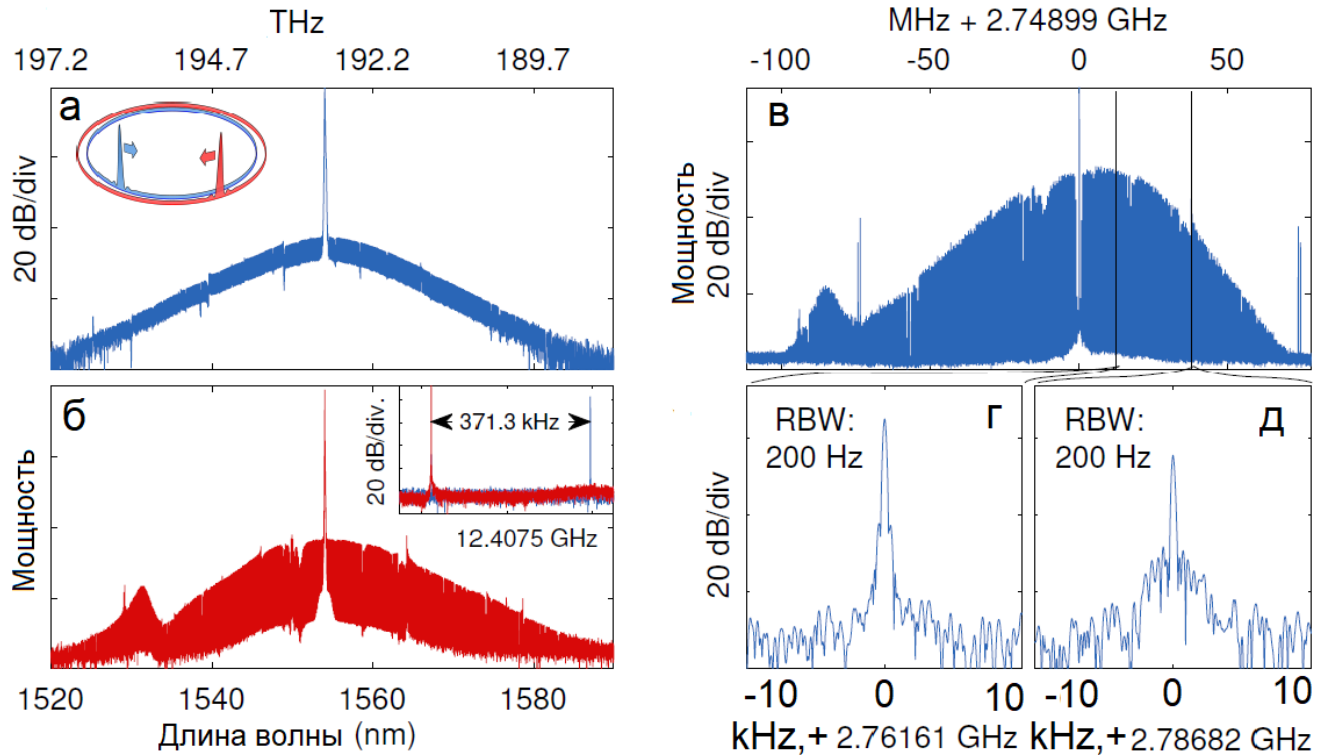


Рисунок 4.15 — Экспериментальные результаты одновременного возбуждения солитонов в противоположных направлениях в 1 резонаторе на разных семействах мод. (а,б) Оптические спектры односолитонных режимов, полученных на разных семействах. На вставке показаны наложенные друг на друга сигналы биений на частоте повторения солитонов. Разница в частотах повторений составила 371 кГц. (в) Результирующая СВЧ гребенка, получаемая на фотодетекторе при совмещении солитонов, распространяющихся в противоположном направлении, центральная частота совпадает с частотой модуляции 2.748 ГГц, расстояние между линиями 371 кГц. (г,д) Ширина индивидуальных линий СВЧ гребенки порядка 500 Гц.

4.4 Генерация солитонных оптических гребенок в одном резонаторе на одном семействе мод в противоположных направлениях

Предложенный в предыдущем пункте метод генерации солитонов в 1 резонаторе в противоположных направлениях применим не только при накачке разных семейств мод, но возможен и на одном семействе мод. Используя схему (рис. 4.14) и экспериментальный метод из предыдущего пункта, возможно возбудить два солитона на 1 моде в противоположных направлениях (см. рис.

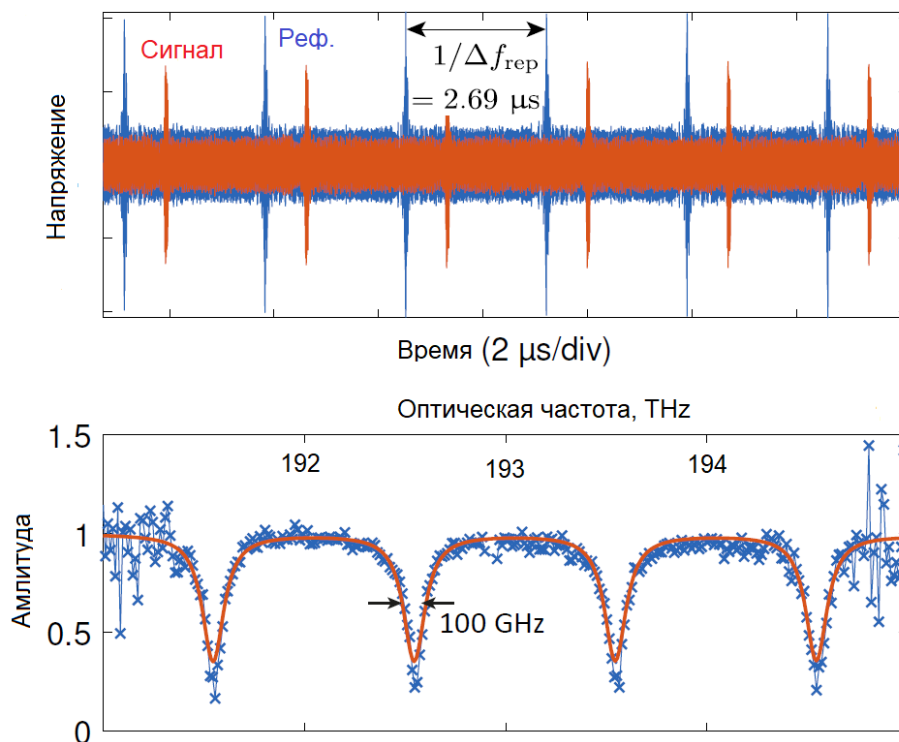


Рисунок 4.16 — Экспериментальные результаты спектроскопии с использованием двойной гребенки. Сверху интерферограмма опорной гребенки и сигнальной, прошедшей через исследуемое вещество (сигнал вейвшейпера), снизу спектр пропускания: красным запрограммированный профиль пропускания вейвшейпера, синим измерение с помощью двойной гребенки.

4.17), для этого на амплитудный модулятор подается частота не выше максимальной отстройки, при которой существует солитон (типичные значения 5-20 МГц). Т.к. частота повторения солитонов зависит от отстройки частоты накачки от холодного резонанса, то при небольшом сдвиге накачки в прямом и обратном направлениях возможно образование результирующей СВЧ гребенки 4.18. Важно отметить, что существует пороговое значение этой отстройки (частота на модуляторе менее 2 МГц), при которой частоты повторения солитонов строго совпадают и двойная гребенка не наблюдается. Также экспериментально обнаружено, что частоты повторений могут совпасть и при таком значении отстройки, когда возбуждаются сильные пересечения мод. Важно отметить, что использования одного лазера недостаточно, т.к. при нулевой отстройке накачек друг относительно друга по частоте, частоты повторений солитонов строго совпадают, даже если в одном направлении возбуждается многосолитонный режим с большей суммарной мощностью, а в противоположном направлении - односолитонный.

Измеренная стабильность индивидуальных линий (см. рис. 4.19) показывает сдвиг на 100 Гц за 60 сек, однако флуктуации амплитуды индивидуальных линий были высокими (Рис. 4.18 (b)), вероятной технически устранимой причиной являются сильные паразитные переотражения на коннекторах волокон волоконного делителя.

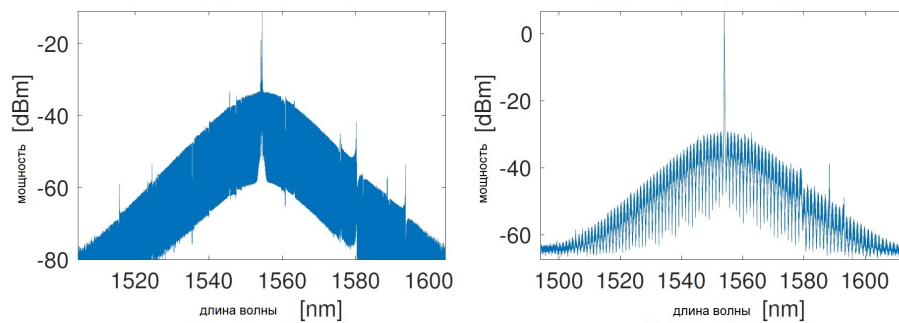


Рисунок 4.17 — Экспериментальные результаты возбуждения солитонов в противоположных направлениях в 1 резонаторе на одном семействе мод.

Оптические спектры: односолитонный режим в одном направлении, многосолитонный режим в противоположном направлении на том же семействе мод.

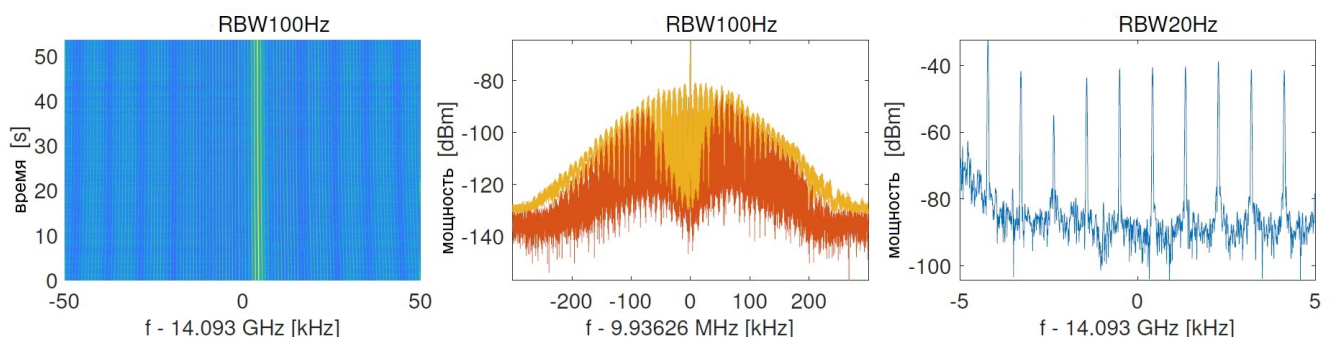


Рисунок 4.18 — Результирующая СВЧ гребенка, получаемая на фотодетекторе при совмещении солитонов, распространяющихся в противоположном направлении на одном семействе мод, центральная частота совпадает с частотой модуляции 9.93 МГц, расстояние между линиями СВЧ гребенки порядка 1 кГц и растет с увеличением разности частот накачек. (слева) стабильность результирующей гребенки, (центр) спектр гребенки, желтым максимальное значение, красным - усредненное за 10 сек, (справа) спектр индивидуальных линий результирующей гребенки.

Предложенный метод может быть удобен тем, что подходит для одномодовых резонаторов (например, интегральных) или резонаторов, не поддерживающих солитоны на разных семействах мод, а также тем, что не требует высоких

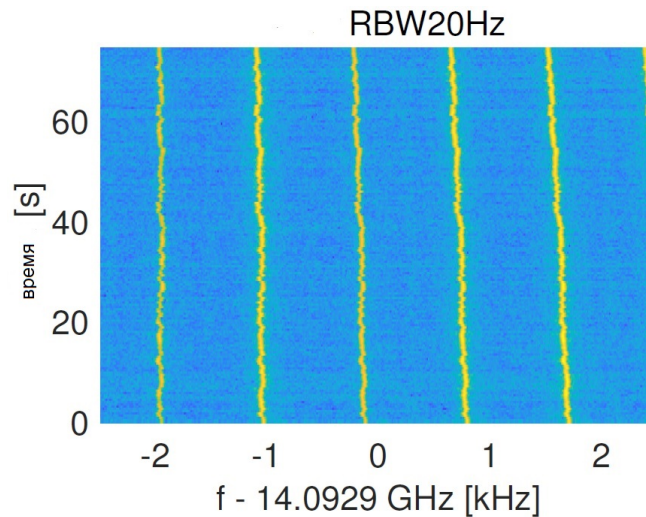


Рисунок 4.19 — Стабильность индивидуальных линий гребенки за 1 мин., полученной как биение двух солитонов, возбужденных на одном семействе мод в противоположных направлениях.

частот, подаваемых на модулятор и быстрых фотодетекторов для регистрации двойных гребенок в СВЧ области.

4.5 Выводы к главе 4

Данная глава посвящена экспериментальному исследованию генерации двойных оптических частотных гребенок в микрорезонаторах. Продемонстрированы различные схемы одновременной генерации сразу двух солитонов: 1) в отдельных резонаторах на одном кристаллическом цилиндре при накачке двумя независимыми лазерами; 2) в одном резонаторе на разных пространственных семействах мод при накачке лазером и боковой линией амплитудного модулятора, солитоны распространялись как в одном, так и в противоположных направлениях; 3) в одном резонаторе на одном семействе мод при накачке лазером и боковой линией амплитудного модулятора, солитоны распространялись в противоположных направлениях. Проведено сравнение этих методов и описаны способы их улучшения. Экспериментально был продемонстрирован метод спектроскопии поглощения веществ с помощью двойной оптической частотной гребенки. Результаты главы 4 были опубликованы в статьях с номерами 7,9 из списка публикаций.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Численные исследования модели уравнений связанных мод показали, что в высокодобротных микрорезонаторах возможна генерация оптических солитонов, были изучены диапазоны параметров и условия, влияющие на их эффективную генерацию.
2. Математическое моделирование показало, что при нормальной дисперсии групповой скорости резонатора возможна генерация темных солитоноподобных структур при условии отличия закона дисперсии от параболического вида рядом с модой накачки или при использовании двухчастотной или амплитудно-модулированной накачки.
3. Для выполнения экспериментальных исследований была разработана методика изготовления кристаллических микрорезонаторов методом алмазного точения и полировки алмазными суспензиями. Она позволила изготовить высокодобротные резонаторы из различных материалов с оптимизированной геометртей для работы с различными элементами связи.
4. Экспериментально была продемонстрирована генерация оптических солитонов в резонаторах из MgF_2 с частотами повторений от 8.5 до 27 ГГц. При активной стабилизации температуры и отстройки частоты лазера накачки солитон существовал длительное время (до 3 часов), достаточное для экспериментальной демонстрации применений.
5. Впервые продемонстрирована возможность одновременной генерации солитонов в идентичных микрорезонаторах, расположенных на одном кристаллическом цилиндре.
6. Впервые продемонстрирована возможность одновременной генерации солитонов в одном резонаторе на разных семействах пространственных мод, распространяющихся как в одном, так и в противоположных направлениях. Показана применимость метода для спектроскопии поглощения веществ.
7. Продemonстрирован метод стабилизации частоты повторения солитона с помощью эффекта захватывания на частоту амплитудной модуляции лазера накачки.

Список литературы

1. *Del'Haye P. et al.* Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator // *Nature*. — 2007. — Vol. 450. — Pp. 1214–1217.
2. *Herr T. et al.* Temporal solitons in optical microresonators // *Nature Photon.* — 2014. — Vol. 8. — Pp. 145–152.
3. *Kippenberg T.J. Holzwarth R. Diddams S.A.* Microresonator-based optical frequency combs // *Science*. — 2011. — Vol. 332. — Pp. 555–559.
4. Dissipative Kerr solitons in optical microresonators / Tobias J. Kippenberg, Alexander L. Gaeta, Michal Lipson, Michael L. Gorodetsky // *Science*. — 2018. — Vol. 361, no. 6402. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/361/6402/eaan8083>.
5. Photonic chip based optical frequency comb using soliton induced Cherenkov radiation / Brasch V., Geiselmann M., Herr T. et al. // *Science*. — 2016. — Vol. 351, no. 6271. — Pp. 357–360.
6. *Yu M. et al.* Mode-locked mid-infrared frequency combs in a silicon microresonator // *Optica*. — 2016. — Vol. 3, no. 8. — Pp. 854–860.
7. *Yi X. et al.* Soliton frequency comb at microwave rates in a high-Q silica microresonator // *Optica*. — 2015. — Vol. 2. — Pp. 1078–1085.
8. A self-starting bi-chromatic LiNbO₃ soliton microcomb / Yang HE, Qi-Fan Yang, Jingwei Ling et al. // *arXiv e-prints*. — 2018. — P. arXiv:1812.09610.
9. Octave-spanning dissipative Kerr soliton frequency combs in Si₃N₄ microresonators / Martin H. P. Pfeiffer, Clemens Herkommer, Junqiu Liu et al. // *Optica*. — 2017. — Jul. — Vol. 4, no. 7. — Pp. 684–691. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-7-684>.
10. Photonic chip-based soliton frequency combs covering the biological imaging window / Maxim Karpov, Martin H. P. Pfeiffer, Junqiu Liu et al. // *Nature Communications*. — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 1146. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-018-03471-x>.

11. *Griffith A.G. et al.* Coherent mid-infrared frequency combs in silicon-microresonators in the presence of Raman effect // *Opt. Express*. — 2016. — Vol. 24. — Pp. 13044–13050.
12. *Xue X. et al.* Mode-locked dark pulse Kerr combs in normal-dispersion microresonators // *Nature Photon.* — 2015. — Vol. 9. — Pp. 594–600.
13. *Karpov M. et al.* Raman self-frequency shift of dissipative Kerr solitons in an optical microresonator // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 116. — P. 103902.
14. Stokes solitons in optical microcavities / Qi-Fan Yang, Xu Yi, Ki Youl Yang, Kerry Vahala // *Nature Physics*. — 2016. — Sep. — Vol. 13. — Pp. 53 EP –. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphys3875>.
15. Breathing dissipative solitons in optical microresonators / E. Lucas, M. Karpov, H. Guo et al. // *Nature Communications*. — 2017. — Vol. 8, no. 1. — P. 736. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-017-00719-w>.
16. Soliton crystals in Kerr resonators / Daniel C. Cole, Erin S. Lamb, Pascal Del’Haye et al. // *Nature Photonics*. — 2017. — Vol. 11, no. 10. — Pp. 671–676. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41566-017-0009-z>.
17. A microphotonic astrocomb / Ewelina Obrzud, Monica Rainer, Avet Harutyunyan et al. // *Nature Photonics*. — 2019. — Vol. 13, no. 1. — Pp. 31–35. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0309-y>.
18. *Suh M.-G. et al.* Microresonator soliton dual-comb spectroscopy // *Science*. — 2016. — Vol. 354. — Pp. 600–603.
19. *Papp S. et al.* Microresonator frequency comb optical clock // *Optica*. — 2014. — Vol. 1. — Pp. 10–14.
20. Microresonator-based solitons for massively parallel coherent optical communications / Pablo Marin-Palomo, Juned N. Kemal, Maxim Karpov et al. // *Nature*. — 2017. — Jun. — Vol. 546. — Pp. 274 EP –. — URL: <https://doi.org/10.1038/nature22387>.
21. High spectral purity Kerr frequency comb radio frequency photonic oscillator / W. Liang, D. Eliyahu, V. S. Ilchenko et al. // *Nature Communications*. — 2015.

- Aug. — Vol. 6. — Pp. 7957 EP —. — Article. URL: <https://doi.org/10.1038/ncomms8957>.
22. Ultrafast optical ranging using microresonator soliton frequency combs / P. Trocha, M. Karpov, D. Ganin et al. // *Science*. — 2018. — Vol. 359, no. 6378. — Pp. 887–891. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/359/6378/887>.
 23. An optical-frequency synthesizer using integrated photonics / Daryl T. Spencer, Tara Drake, Travis C. Briles et al. // *Nature*. — 2018. — Vol. 557, no. 7703. — Pp. 81–85. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0065-7>.
 24. Carrier-Envelope Phase Control of Femtosecond Mode-Locked Lasers and Direct Optical Frequency Synthesis / David J. Jones, Scott A. Diddams, Jindendra K. Ranka et al. // *Science*. — 2000. — Vol. 288, no. 5466. — Pp. 635–639. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/288/5466/635>.
 25. Direct Link between Microwave and Optical Frequencies with a 300 THz Femtosecond Laser Comb / Scott A. Diddams, David J. Jones, Jun Ye et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — May. — Vol. 84. — Pp. 5102–5105. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.5102>.
 26. *L. Hall J.* Nobel lecture: Defining and measuring optical frequencies // *Rev. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. 78. — P. 1279.
 27. *Diddams S.A. et al.* An optical clock based on a single trapped $^{199}\text{Hg}^+$ ion // *Science*. — 2001. — Vol. 293. — Pp. 825–828.
 28. *Udem T. Holzwarth R., W. Hansch T.* Optical frequency metrology // *Nature*. — 2002. — Vol. 416. — Pp. 233–237.
 29. *J. Ye, T. Cundiff S.* Femtosecond Optical Frequency Comb: Principle, Operation and Applications // *Springer*. — 2005. — P. 362.
 30. *Diddams S. et al.* Standards of time and frequency at the outset of the 21st century // *Science*. — 2004. — Vol. 306. — Pp. 1318–1324.
 31. *Stowe M.C. et al.* Direct frequency comb spectroscopy // *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*. — 2008. — Vol. 55. — Pp. 1–9.

32. *Diddams S.A. Hollberg L., V. Mbele.* Molecular fingerprinting with the resolved modes of a femtosecond laser frequency comb // *Nature*. — 2007. — Vol. 445. — Pp. 627–630.
33. *Ideguchi T. et al.* Coherent Raman spectro-imaging with laser frequency combs // *Nature*. — 2013. — Vol. 445. — Pp. 355–358.
34. *Holzwarth R. et al.* Optical frequency synthesizer for precision spectroscopy // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — Pp. 2264–2267.
35. *Gao L. Herriot S. I., H. Wagner K.* Novel Approach to RF Photonic Signal Processing Using an Ultrafast Laser Comb Modulated by Traveling-Wave Tunable Filters // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. — 2006. — Vol. 12. — Pp. 315–329.
36. *V. Torres-Company, A.M. Weiner.* Optical frequency comb technology for ultra-broadband radio-frequency photonics // *Laser and Photonics Reviews*. — 2014. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 368–393.
37. *Steinmetz T. et al.* Laser frequency combs for astronomical observations // *Science*. — 2008. — Vol. 321. — Pp. 1335–1337.
38. *Fortier T. et al.* Generation of ultrastable microwaves via optical frequency division // *Nat. Photon.* — 2011. — Vol. 5. — Pp. 425–429.
39. *Herr T. et al.* Universal formation dynamics and noise of Kerr-frequency combs in microresonators // *Nature Photon.* — 2012. — Vol. 6. — Pp. 480–487.
40. *Chembo Y.K. Strekalov D.V., N. Yu.* Spectrum and dynamics of optical frequency combs generated with monolithic whispering gallery mode resonators // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104, no. 10. — P. 103902.
41. *Savchenkov A.A. et al.* Tunable Optical Frequency Combs with a Crystalline Whispering Gallery Mode Resonator // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 093902.
42. *Grudinin I.S. Baumgartel L., N. Yu.* Frequency comb from a microresonator with engineered spectrum // *Opt. Express*. — 2012. — Vol. 20. — Pp. 6604–6609.

43. *Liang W. et al.* Generation of near-infrared frequency combs from a MgF₂ whispering gallery mode resonator // *Opt. Lett.* — 2011. — Vol. 36, no. 12. — Pp. 2290–2292.
44. *Grudinin I.S. Yu N., L. Maleki.* Generation of optical frequency combs with a CaF₂ resonator // *Opt. Lett.* — 2009. — Vol. 34, no. 7. — Pp. 878–880.
45. Kerr optical frequency comb generation in strontium fluoride whispering-gallery mode resonators with billion quality factor / Henriët Remi, Lin Guoping, Coillet Aurelien et al. // *Opt. Lett.* — 2015. — Apr. — Vol. 40, no. 7. — Pp. 1567–1570. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-40-7-1567>.
46. *Del'Haye P. et al.* Octave Spanning Tunable Frequency Comb from a Microresonator // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 06390.
47. *Levy J.S. et al.* CMOS-compatible multiple-wavelength oscillator for on-chip optical interconnects // *Nature Photon.* — 2010. — Vol. 4. — Pp. 37–40.
48. *Okawachi Y. et al.* Octave-spanning frequency comb generation in a silicon nitride chip // *Opt. Lett.* — 2011. — Vol. 36. — Pp. 3398–3400.
49. *Johnson A. R. et al.* Chip-based frequency combs with sub-100 GHz repetition rates // *Opt. Lett.* — 2012. — Vol. 37. — Pp. 875–877.
50. *Huang S.-W. et al.* A low-phase-noise 18 GHz Kerr frequency microcomb phase-locked over 65 THz // *Scientific Reports.* — 2015. — Vol. 5. — P. 13355.
51. *Moss D.J. et al.* CMOS-compatible platforms based on silicon nitride and Hydex for nonlinear optics // *Nature Photon.* — 2013. — Vol. 7. — Pp. 597–607.
52. *Razzari L. et al.* CMOS-compatible integrated optical hyper-parametric oscillators // *Nature Photon.* — 2010. — Vol. 4. — Pp. 41–45.
53. *Jung H. et al.* Optical frequency comb generation from aluminum nitride microring resonator // *Opt. Lett.* — 2013. — Vol. 38. — Pp. 2810–2813.
54. Integrated gallium phosphide nonlinear photonics / Dalziel J. Wilson, Katharina Schneider, Simon Hoenl et al. // *arXiv e-prints.* — 2018.
55. *Hausmann B.J. M. et al.* Diamond nonlinear photonics // *Nature Photon.* — 2014. — Vol. 8. — Pp. 369–374.

56. Temporal cavity solitons in one-dimensional Kerr media as bits in an all-optical buffer / François Leo, Stéphane Coen, Pascal Kockaert et al. // *Nature Photonics*. — 2010. — May. — Vol. 4. — Pp. 471 EP -. — Article. URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.120>.
57. *Jang J.K. et al.* Writing and erasing of temporal cavity solitons by direct phase modulation of the cavity driving field // *Opt. Lett.* — 2015. — Vol. 40. — Pp. 4755–4758.
58. *Joshi C. et al.* Thermally Controlled Comb Generation and Soliton Modelocking in Microresonators // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41, no. 11. — Pp. 2565–2568.
59. Universal dynamics and deterministic switching of dissipative Kerr solitons in optical microresonators / Guo H., Karpov M., Lucas E. et al. // *Nature Phys.* — 2017. — Vol. 13, no. 1. — P. 94–102.
60. *Lamont M.R.E. Okawachi Y., L Gaeta A.* Route to stabilized ultrabroadband microresonator-based frequency combs // *Opt. Lett.* — 2013. — Vol. 38. — Pp. 3478–3481.
61. *T. Hansson, S. Wabnitz.* Dynamics of microresonator frequency comb generation: models and stability // *Nanophotonics*. — 2016. — Vol. 5. — Pp. 231–243.
62. *Godey C. et al.* Stability analysis of the spatiotemporal Lugiato-Lefever model for Kerr optical frequency combs in the anomalous and normal dispersion regimes // *Phys. Rev. A*. — 2014. — Vol. 89. — P. 063814.
63. *Jaramillo-Villegas J. A. et al.* Deterministic single soliton generation and compression in microring resonators avoiding the chaotic region // *Opt. Express*. — 2015. — Vol. 23. — Pp. 9618–9626.
64. *Matsko A. B. et al.* On excitation of breather solitons in an optical microresonator // *Opt. Lett.* — 2012. — Vol. 37. — Pp. 4856–4858.
65. *Bao C. et al.* Nonlinear conversion efficiency in Kerr frequency comb generation // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39. — Pp. 6126–6129.
66. *Saha K. et al.* Modelocking and femtosecond pulse generation in chip-based frequency combs // *Opt. Express*. — 2013. — Vol. 21. — Pp. 1335–1343.

67. *Del'Haye P. et al.* Self-injection locking and phase-locked states in microresonator-based optical frequency combs // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 112. — P. 043905.
68. *Jang J.K. et al.* Temporal tweezing of light through the trapping and manipulation of temporal cavity solitons // *Nature Communications.* — 2015. — Vol. 6. — P. 7370.
69. *Wang S. et al.* Broadband Kerr frequency combs and intracavity soliton dynamics influenced by high-order cavity dispersion // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39. — P. 2880–2883.
70. Mode spectrum and temporal soliton formation in optical microresonators / Herr T., Brasch V., Jost J.D. et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113. — P. 123901.
71. *Jost J. D. et al.* All-optical stabilization of a soliton frequency comb in a crystalline microresonator // *Opt. Lett.* — 2015. — Vol. 40. — Pp. 4723–4726.
72. Counting the cycles of light using a self-referenced optical microresonator / J. D. Jost, T. Herr, C. Lecaplain et al. // *Optica.* — 2015. — Aug. — Vol. 2, no. 8. — Pp. 706–711. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-2-8-706>.
73. Self-referenced photonic chip soliton Kerr frequency comb / Victor Brasch, Erwan Lucas, John D. Jost et al. // *Light: Science & Applications.* — 2017. — Jan. — Vol. 6. — Pp. e16202 EP -. — Original Article. URL: <https://doi.org/10.1038/lsa.2016.202>.
74. *Obrzud Ewelina, Lecomte Steve, Herr Tobias.* Temporal solitons in microresonators driven by optical pulses // *Nature Photonics.* — 2017. — Aug. — Vol. 11. — Pp. 600 EP -. — Article. URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2017.140>.
75. Towards visible soliton microcomb generation / Seung Hoon Lee, Dong Yoon Oh, Qi-Fan Yang et al. // *Nature Communications.* — 2017. — Vol. 8, no. 1. — P. 1295. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-017-01473-9>.
76. Stably accessing octave-spanning microresonator frequency combs in the soliton regime / Qing Li, Travis C. Briles, Daron A. Westly et al. // *Optica.*

- 2017. — Feb. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 193–203. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-2-193>.
- 77. *Schliesser A. Picque N., T.W. Hansch.* Mid-infrared frequency combs // *Nature Photon.* — 2012. — Vol. 6. — Pp. 440–449.
- 78. *Griffiths P.R. de Haseth J.A.* Fourier Transform Infrared Spectrometry, Second Edition // *John Wiley and Sons, Inc.* — 2006. — P. 560.
- 79. Mid-infrared frequency comb based on a quantum cascade laser / Andreas Hugi, Gustavo Villares, Stéphane Blaser et al. // *Nature.* — 2012. — Dec. — Vol. 492. — Pp. 229 EP –. — URL: <https://doi.org/10.1038/nature11620>.
- 80. *Wang C.Y. et al.* Mid-infrared optical frequency combs at 2.5 μm based on crystalline microresonators // *Nature Commun.* — 2013. — Vol. 4. — P. 1345.
- 81. *Savchenkov A.A. et al.* Generation of Kerr combs centered at 4.5 micron in crystalline microresonators pumped with quantum-cascade lasers // *Opt. Lett.* — 2015. — Vol. 40. — Pp. 3468–3471.
- 82. *Lecaplain C. et al.* Mid-Infrared ultra-high-Q resonators based on fluoride crystalline materials // *Nature Communications.* — 2016.
- 83. *Griffith A.G. et al.* Silicon-chip mid-infrared frequency comb generation // *Nature Commun.* — 2015. — Vol. 6. — P. 6299.
- 84. *Grudinin I.S. Mansour K. Yu N.* Properties of fluoride microresonators for mid-IR applications // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41, no. 10. — Pp. 2378–2381.
- 85. *Way B. Jain R.K., M. Hossein-Zadeh.* High-Q microresonators for mid-IR light sources and molecular sensors // *Opt. Lett.* — 2012. — Vol. 37. — Pp. 4389–4391.
- 86. *Xue X. Qi M., A.M. Weiner.* Normal-dispersion microresonator Kerr frequency combs // *Nanophotonics.* — 2016. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 244–262.
- 87. *Benedick A.J. et al.* Visible wavelength astro-comb // *Opt. Express.* — 2010. — Vol. 18. — P. 19175–19184.

88. *Glenday A.G. et al.* Operation of a broadband visible-wavelength astro-comb with a high-resolution astrophysical spectrograph // *Optica*. — 2015. — Vol. 2. — Pp. 250–254.
89. *Miller S. et al.* On-chip frequency comb generation at visible wavelengths via simultaneous second- and third-order optical nonlinearities // *Opt. Express*. — 2014. — Vol. 22. — Pp. 26517–26525.
90. *Jung H. et al.* Green, red, and IR frequency comb line generation from single IR pump in AlN microring resonator // *Optica*. — 2014. — Vol. 1. — Pp. 396–399.
91. *Coillet A. et al.* Azimuthal Turing Patterns, Bright and Dark Cavity Solitons in Kerr Combs Generated with Whispering-Gallery-Mode Resonators // *IEEE Photonics Journal*. — 2013. — Vol. 5, no. 4. — P. 6100409.
92. *Liang W. et al.* Generation of a coherent near-infrared Kerr frequency comb in a monolithic microresonator with normal GVD // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39. — Pp. 2920–2923.
93. *et al. Henriot R.* Kerr optical frequency comb generation in strontium fluoride whispering-gallery mode resonators with billion quality factor // *Opt. Lett.* — 2015. — Vol. 40. — Pp. 1567–1570.
94. *Huang S.W. et al.* Mode-Locked Ultrashort Pulse Generation from On-Chip Normal Dispersion Microresonators // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 053901.
95. *Parra-Rivas P. et al.* Origin and stability of dark pulse Kerr combs in normal dispersion resonators // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41. — Pp. 2402–2405.
96. *Liu Y. et al.* Normal-dispersion microcombs enabled by controllable mode interactions // *Laser Photon. Rev.* — 2015. — Vol. 9. — Pp. L–23.
97. Observation of Breathing Dark Pulses in Normal Dispersion Optical Microresonators / Chengying Bao, Yi Xuan, Cong Wang et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Dec. — Vol. 121. — P. 257401. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.257401>.
98. *N. Akhmediev, M. Karlsson.* Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers // *Phys. Rev. A*. — 1995. — Vol. 51. — Pp. 2602–2607.

99. *I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya.* Travelling solitons in the externally driven nonlinear Schrödinger equation // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44. — P. 465211.
100. *C. Milian, D.V. Skryabin.* Soliton families and resonant radiation in a micro-ring resonator near zero group-velocity dispersion // *Opt. Express*. — 2014. — Vol. 22. — Pp. 3732–3739.
101. *Jang J.K. et al.* Observation of dispersive wave emission by temporal cavity solitons // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39. — Pp. 5503–5506.
102. *Yang Q.-F. et al.* Spatial-mode-interaction-induced dispersive waves and their active tuning in microresonators // *Optica*. — 2016. — Vol. 3. — Pp. 1132–1135.
103. Optical Cherenkov radiation in overmoded microresonators / Andrey B. Matsko, Wei Liang, Anatoliy A. Savchenkov et al. // *Opt. Lett.* — 2016. — Jul. — Vol. 41, no. 13. — Pp. 2907–2910. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-41-13-2907>.
104. *Okawachi Y. et al.* Bandwidth shaping of microresonator-based frequency combs via dispersion engineering // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39. — Pp. 3535–3538.
105. *I.S. Grudinin, N. Yu.* Dispersion engineering of crystalline resonators via microstructuring // *Optica*. — 2015. — Vol. 2. — Pp. 221–224.
106. *Nakagawa Y. et al.* Dispersion tailoring of a crystalline whispering gallery mode microcavity for a wide-spanning optical Kerr frequency comb // *J. Opt. Soc. Am. B*. — 2016. — Vol. 33. — Pp. 1913–1920.
107. Gate-tunable frequency combs in graphene-nitride microresonators / Baicheng Yao, Shu-Wei Huang, Yuan Liu et al. // *Nature*. — 2018. — Vol. 558, no. 7710. — Pp. 410–414. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0216-x>.
108. *Hansson T. Modotto D., S. Wabnitz.* Mid-infrared soliton and Raman frequency comb generation in silicon microrings // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39. — Pp. 6747–6750.

109. *Milian C. et al.* Solitons and frequency combs in silica microring resonators: Interplay of the Raman and higher-order dispersion effects // *Phys. Rev. A.* — 2015. — Vol. 92. — P. 033851.
110. *Yi X. et al.* Theory and measurement of the soliton self-frequency shift and efficiency in optical microcavities // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41. — Pp. 3419–3422.
111. *Bao C. et al.* Soliton repetition rate in a silicon-nitride microresonator // *Opt. Lett.* — 2017. — Vol. 116, no. 4. — Pp. 759–762.
112. *Chembo Y.K. Grudinin I.S., N. Yu.* Spatiotemporal dynamics of Kerr-Raman optical frequency combs // *Phys. Rev. A.* — 2015. — Vol. 92. — P. 043818.
113. *Lin G. et al.* Universal nonlinear scattering in ultra-high Q whispering gallery-mode resonators // *Opt. Express.* — 2016. — Vol. 24. — Pp. 14880–14894.
114. Observation of Fermi-Pasta-Ulam Recurrence Induced by Breather Solitons in an Optical Microresonator / Chengying Bao, Jose A. Jaramillo-Villegas, Yi Xuan et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Oct. — Vol. 117. — P. 163901. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.163901>.
115. Breather soliton dynamics in microresonators / Mengjie Yu, Jae K. Jang, Yoshitomo Okawachi et al. // *Nature Communications.* — 2017. — Feb. — Vol. 8. — Pp. 14569 EP -. — Article. URL: <https://doi.org/10.1038/ncomms14569>.
116. Searching for exoplanets using a microresonator astrocomb / Myoung-Gyun Suh, Xu Yi, Yu-Hung Lai et al. // *Nature Photonics.* — 2019. — Vol. 13, no. 1. — Pp. 25–30. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0312-3>.
117. Silicon-chip-based mid-infrared dual-comb spectroscopy / Mengjie Yu, Yoshitomo Okawachi, Austin G. Griffith et al. // *Nature Communications.* — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 1869. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04350-1>.
118. Microresonator-based high-resolution gas spectroscopy / Mengjie Yu, Yoshitomo Okawachi, Austin G. Griffith et al. // *Opt. Lett.* — 2017. — Nov. — Vol. 42, no. 21. — Pp. 4442–4445. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-42-21-4442>.

119. Direct Kerr-frequency-comb atomic spectroscopy / Liron Stern, Jordan R. Stone, Songbai Kang et al. // *arXiv e-prints*. — 2018.
120. Pfeifle J. et al. Coherent terabit communications with microresonator Kerr frequency combs // *Nat. Photon.* — 2014. — Vol. 8. — Pp. 375–380.
121. High-order coherent communications using mode-locked dark-pulse Kerr combs from microresonators / Attila Fulop, Mikael Mazur, Abel Lorences-Riesgo et al. // *Nature Communications*. — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 1598. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04046-6>.
122. Suh Myoung-Gyun, Vahala Kerry J. Soliton microcomb range measurement // *Science*. — 2018. — Vol. 359, no. 6378. — Pp. 884–887. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/359/6378/884>.
123. Counter-propagating solitons in microresonators / Qi-Fan Yang, Xu Yi, Ki Youl Yang, Kerry Vahala // *Nature Photonics*. — 2017. — Aug. — Vol. 11. — Pp. 560 EP –. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2017.117>.
124. Narrow-linewidth lasing and soliton Kerr microcombs with ordinary laser diodes / N. G. Pavlov, S. Koptyaev, G. V. Lihachev et al. // *Nature Photonics*. — 2018. — Vol. 12, no. 11. — Pp. 694–698. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0277-2>.
125. Electrically pumped photonic integrated soliton microcomb / Arslan S. Raja, Andrey S. Voloshin, Hairun Guo et al. // *Nature Communications*. — 2019. — Vol. 10, no. 1. — P. 680. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08498-2>.
126. Battery-operated integrated frequency comb generator / Brian Stern, Xingchen Ji, Yoshitomo Okawachi et al. // *Nature*. — 2018. — Vol. 562, no. 7727. — Pp. 401–405. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0598-9>.
127. A. Savchenkov A., B. Matsko A., L. Maleki. On Frequency Combs in Monolithic Resonators. — 2016. — 2019. — Vol. 5. — P. 363. — 2. URL: <https://www.degruyter.com/view/j/nanoph.2016.5.issue-2/nanoph-2016-0031/nanoph-2016-0031.xml>.
128. K. Chembo Yanne. Kerr optical frequency combs: theory, applications and perspectives. — 2016. — 2019. — Vol. 5. — P. 214.

- 2. URL: <https://www.degruyter.com/view/j/nanoph.2016.5.issue-2/nanoph-2016-0013/nanoph-2016-0013.xml>.
- 129. Micro-combs: A novel generation of optical sources / Alessia Pasquazi, Marco Peccianti, Luca Razzari et al. // *Physics Reports*. — 2018. — Vol. 729. — Pp. 1 – 81. — Micro-combs: A novel generation of optical sources. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157317303253>.
- 130. *М.Л. Городецкий*. Основы теории оптических микрорезонаторов. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 416 с.
- 131. *Chembo Y.K. Yu N.* Modal expansion approach to optical-frequency-comb generation with monolithic whispering-gallery-mode resonators // *Phys. Rev. A*. — 2010. — Vol. 82. — P. 033801.
- 132. *Matsko A.B. et al.* Optical hyperparametric oscillations in a whispering-gallery-mode resonator: Threshold and phase diffusion // *Phys. Rev. A*. — 2005. — Vol. 71. — P. 033804.
- 133. *Lugiato L.A. Lefever R.* Spatial dissipative structures in passive optical systems // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 21. — Pp. 2209–2211.
- 134. *Akhmediev N. Ankiewicz A.* Dissipative Solitons. — Heidelberg: Springer, 2005. — 661 pp.
- 135. *R.W. Boyd.* Nonlinear Optics. — New York: Academic Press, 2008. — 640 pp.
- 136. *Н.Н Ахмедиев А. Анкевич*. Солитоны. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 450 pp.
- 137. *Matsko A.B. et al.* Mode-locked Kerr frequency combs // *Optics Letters*. — 2011. — Vol. 36, no. 15. — Pp. 2845–2847.
- 138. *Chembo Y.K. Yu N.* Spatiotemporal Lugiato-Lefever formalism for Kerr-comb generation in whispering-gallery-mode resonators // *Phys. Rev. A*. — 2013. — Vol. 87. — P. 053852.
- 139. *Press W.H. et al.* Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. Second Edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002. — 1256 pp.

140. *Hansson T. Modotto D. Wabnitz S.* On the numerical simulation of Kerr frequency combs using coupled mode equations // *Optics Comm.* — 2014. — Vol. 312. — Pp. 134–136.
141. *Savchenkov A.A. et al.* Kerr combs with selectable central frequency // *Nature Phot.* — 2011. — Vol. 5. — P. 293–296.
142. *Matsko A.B. et al.* Chaotic dynamics of frequency combs generated with continuously pumped nonlinear microresonators // *Optics Lett.* — 2013. — Vol. 38, no. 4. — Pp. 525–527.
143. *Akhmediev Nail, Karlsson Magnus.* Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers // *Phys. Rev. A.* — 1995. — Mar. — Vol. 51. — Pp. 2602–2607. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2602>.
144. *Xue X. et al.* Microresonator Kerr frequency combs with high conversion efficiency // *Laser and Photonics Reviews.* — 2017. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 2209–2211.
145. *A. Antikainen, P. Agrawal G.* Dual-pump frequency comb generation in normally dispersive optical fibers // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2015. — Vol. 32. — Pp. 1705–1711.
146. Bright square pulse generation by pump modulation in a normal GVD microresonator / H. Liu, S.-W. Huang, J. Yang et al. // Conference on Lasers and Electro-Optics. — Optical Society of America, 2017. — P. FTu3D.3. — URL: http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=CLEO_QELS-2017-FTu3D.3.
147. Highly efficient coupling of crystalline microresonators to integrated photonic waveguides / M. Anderson, N. G. Pavlov, J. D. Jost et al. // *Opt. Lett.* — 2018. — May. — Vol. 43, no. 9. — Pp. 2106–2109. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-43-9-2106>.
148. Harmonization of chaos into a soliton in Kerr frequency combs / Lobanov V.E., Lihachev G.V., Pavlov N.G. et al. // *Optics Express.* — 2016. — Vol. 24, no. 24. — Pp. 27382–27394.

149. Spatial-mode-interaction-induced dispersive waves and their active tuning in microresonators / Qi-Fan Yang, Xu Yi, Ki Youl Yang, Kerry Vahala // *Optica*. — 2016. — Oct. — Vol. 3, no. 10. — Pp. 1132–1135. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-3-10-1132>.
150. Porto S. P. S., Fleury P. A., Damen T. C. Raman Spectra of TiO₂, MgF₂, ZnF₂, FeF₂, and MnF₂ // *Phys. Rev.* — 1967. — Feb. — Vol. 154. — Pp. 522–526. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.154.522>.
151. Soliton dual frequency combs in crystalline microresonators / Pavlov N.G., Lihachev G., Koptyaev S. et al. // *Optics Lett.* — 2017. — Vol. 42, no. 3. — Pp. 514–517.
152. Coddington I. Newbury N., W. Swann. Dual-comb spectroscopy // *Optica*. — 2016. — Vol. 3. — Pp. 414–426.