УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

А.А. ШКАЛИКОВ

О МИНИМАЛЬНОСТИ И ПОЛНОТЕ СИСТЕМ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КВАДРАТИЧНЫХ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 25 II 1985)

Рассмотрим квадратичный пучок операторов

$$L(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C; \tag{1}$$

здесь A и C – самосопряженные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а B – ограниченный диссипативный оператор в $\mathfrak{H}$, т.е. выполняется одно из условий: $B_J = i(B^* - B) \geqslant 0$, либо $B_J \leqslant 0$. Будем предполагать, что спектр пучка $L(\lambda)$ дискретен. В этом случае оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ мероморфна и главная часть ее разложения в полюсе $\lambda = \lambda_k$ имеет вид

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \sum_{h=0}^{p_k} \frac{(\cdot, z_k^0) y_k^h + (\cdot, z_k^1) y_k^{h-1} + \ldots + (\cdot, z_k^h) y_k^0}{(\lambda - \lambda_k)^{p_k + 1 - h}}, \tag{2}$$

где

$$y_k^0, \ldots, y_k^{p_k}, \quad k = N_1, \ldots, N_2, \tag{3}$$

некоторая каноническая по Келдышу система собственных и присоединенных элементов (СПЭ) пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению (СЗ) λ_k (которое нумеруется столько раз, столько цепочек СПЭ ему соответствует), а

$$z_k^0, \ldots, z_k^{p_k}, \quad k = N_1, \ldots, N_2, \tag{4}$$

сопряженная каноническая система СПЭ пучка $L^*(\lambda)$, отвечающая СЗ $\bar{\lambda}_k$.

Обозначим через $\sigma(L)$ спектр пучка $L(\lambda)$. Будем предполагать, что $0 \notin \sigma(L)$, т.е. оператор A обратим. Случай $0 \in \sigma(L)$ требует дополнительных рассмотрений, соответствующие изменения будут указаны в замечании.

Л е м м а 1. *Если* $\lambda_k \in \mathbf{R} \cap \sigma(L)$ *и* $\lambda_k \neq 0$, *то каноническую систему* (3) *можно выбрать так, что*

$$(5)\qquad y_k^h = \epsilon_k z_k^h, \qquad h = 0, 1, \ldots, [p_k/2], \quad k = N_1, \ldots N_2,$$

где $[p]$ – *целая часть числа* p *и* $\epsilon_k = \pm 1$.

Доказательство. В случае $B = B^*$ возможность выбора канонических систем, удовлетворяющих условию (5) при $0 \leqslant h \leqslant p_k$, доказана в [2]. Но, в силу леммы 4 из [3] $y_k^h \in \mathrm{Ker}(B^* - B)$ при $h \leqslant [p_k/2]$, т.е. цепочки (3) пучка $L(\lambda)$, отвечающие СЗ $\lambda_k \in \mathbf{R}$, совпадают при $h \leqslant [p_k/2]$ с соответствующими цепочками пучка $L_R(\lambda) = A + \lambda B_R + \lambda^2 C$, где $B_R = (B^* + B)/2$. Отсюда следует утверждение леммы 1.

Канонические системы, отвечающие СЗ $\lambda_k \in \mathbf{R}$ и обладающие указанными в лемме 1 свойствами, назовем нормальными. Всюду далее считаем, что действительным СЗ соответствуют нормальные канонические системы.

Обозначим через Λ множество пар чисел (k, h), $0 \leqslant h \leqslant p_k$, которыми нумеруются элементы y_k^h всех цепочек (3) пучка $L(\lambda)$. Совокупность пар индексов $(k, h) \subset \Lambda$, для которых $\mathrm{Im}\,\lambda_k > 0$ (< 0), обозначим Λ^+ (Λ^-). Введем также подмножества пар индексов $\Lambda^+_{\mathbf{R}}, \Lambda^-_{\mathbf{R}} \subset \Lambda$, которые нумеруют часть СПЭ, отвечающих СЗ $\lambda_k \in \mathbf{R}$. Будем считать, что $(k, h) \in \Lambda^+_{\mathbf{R}} (\Lambda^-_{\mathbf{R}})$, если $\mathrm{Im}\,\lambda_k = 0$ и $0 \leqslant h \leqslant \nu^+_k$ (ν^-_k), где

$$(6)\qquad \nu^+_k (\nu^-_k) = \begin{cases} l_k, & \text{если } p_k = 2l_k + 1 \text{ или } p_k = 2l_k \text{ и } \lambda_k \epsilon_k > 0 \ (< 0), \\ l_k - 1, & \text{если } p_k = 2l_k \text{ и } \lambda_k \epsilon_k < 0 \ (> 0). \end{cases}$$

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ рассмотрим элементы $\mathbf{y}_k^h = (y_k^h, \lambda_k y_k^h + y_k^{h-1})$ – производные по Келдышу цепочки, построенные по цепочкам СПЭ (3) пучка $L(\lambda)$ (считаем, что $y_k^{h-1} = 0$, если $h = 0$; элементы пространства $\mathfrak{H}^2$ в отличие от элементов $\mathfrak{H}$ обозначаем полужирными буквами). Операторы A и C представим в виде $A = A_+ - A_-$, $C = C_+ - C_-$, где A_+, A_- и C_+, C_- – неотрицательные операторы такие, что $A_+ A_- = 0$ и $C_+ C_- = 0$. В пространстве $\mathfrak{H}^2$ рассмотрим операторы $\mathcal{F}_\pm = \begin{pmatrix} A^{1/2}_\mp & 0 \\ 0 & C^{1/2}_\pm \end{pmatrix}$ и обозначим через $\mathfrak{H}^2_\pm$ замыкание их области значений в $\mathfrak{H}^2$. Очевидно, $\mathfrak{H}^2_\pm = \overline{\mathrm{Im} A_\mp \oplus \mathrm{Im} C_\pm}$.

Наконец определим системы, которые составляют предмет исследования настоящей заметки:

$$\mathcal{Y}^\pm = \{\mathcal{F}_\pm \mathbf{y}_k^h\}, \quad \text{где } (k, h) \in \Lambda^+ \cup \Lambda^\pm_{\mathbf{R}};$$

$$\mathcal{X}^\pm = \{\mathcal{F}_\pm \mathbf{y}_k^h\}, \quad \text{где } (k, h) \in \Lambda^- \cup \Lambda^\pm_{\mathbf{R}}.$$

Теорема 1. *Пусть пучок* $L(\lambda)$ *задан* (1) *и* $B_J \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$. *Тогда системы* $\mathcal{Y}^-$ *и* $\mathcal{X}^+$ $(\mathcal{X}^-$ *и* $\mathcal{Y}^+)$ *минимальны в пространствах* $\mathfrak{H}^2_-$ *и* $\mathfrak{H}^2_+$ *соответственно.*

Доказательство можно получить из результата [3], являющегося обобщением ранее полученных теорем о минимальности [2], где теорема 1 доказана при $A > 0$ и $B = B^*$. В свою очередь работе [2] предшествовали [4–6]. Мы дадим другое доказательство теоремы 1, которое намного короче и с другой стороны проясняет существо дела. Для определенности рассмотрим систему $\mathcal{Y}^-$ и будем считать, что $B_J \geqslant 0$.

Шаг 1. В пространстве $\mathfrak{H}^2$ рассмотрим операторы

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} B & C \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} A^{-1}B & A^{-1}C \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

где I – единичный оператор в $\mathfrak{H}$. Очевидно, производные по Келдышу цепочки

$y_k^0, \dots, y_k^{p_k}$, построенные по цепочкам (3), являются СПЭ оператора $\mathcal{L}$, отвечающими СЗ $\mu_k = -\lambda_k^{-1}$ (эти цепочки являются также СПЭ линейного пучка $\mathcal{G} + \lambda\mathcal{H}$, отвечающими СЗ λ_k). Также очевидно, что оператор $\mathcal{L}$ является $\mathcal{G}$-диссипативным, т.е. $\operatorname{Im}(\mathcal{G}\mathcal{L}y, y) \geqslant 0$ для всех $y \in \mathfrak{H}^2$. Но тогда (см. предложение 10° работы [7]) имеем

$$(7) \qquad (\mathcal{G}y, y) \geqslant 0, \text{ если } y = \sum c_k^h y_k^h), \quad (k, h) \in \Lambda^+;$$

здесь сумма конечна и суммирование ведется по индексам $(k, h) \in \Lambda^+$.

Шаг 2. Для СПЭ линейного пучка $I + \lambda\mathcal{L}$ (или для СПЭ пучка $\mathcal{G} + \lambda\mathcal{H}$ в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \overline{\operatorname{Im} C}$) соотношения биортогональности [1] принимают вид

$$(8) \qquad (y_k^h, \mathcal{H}^* z_m^s) = \delta_{k,m}\, \delta_{h, p_m - s},$$

откуда с учетом равенств $(\mathcal{G} + \bar{\lambda}_m \mathcal{H}^*) z_m^s + \mathcal{H}^* z_m^{s-1} = 0$ получаем

$$(9) \qquad (\mathcal{G} y_k^h, z_m^s - \bar{\lambda}_m^{-1} z_m^{s-1} + \dots + (-1)^s \bar{\lambda}_m^{-s} z_m^0) = -\lambda_m^{-1} \delta_{k,m}\, \delta_{h, p_m - s}.$$

Здесь $z_k^0, \dots, z_k^{p_k}$ – цепочки СПЭ пучка $I + \lambda\mathcal{L}^*$, сопряженные к цепочкам $y_k^0, \dots, y_k^{p_k}$. При этом оказывается, что цепочки элементов $\lambda_k^2 z_k^0, \dots, \lambda_k^2 z_k^{p_k}$ являются производными по Келдышу цепочками, построенными по цепочкам (4). Это можно получить на том же пути, как в [8, 10].

Пусть $(m, s) \in \Lambda_{\mathrm{R}}^-$, а $(k, h) \in \Lambda^+ \cup \Lambda_{\mathrm{R}}^-$. Из леммы 1 и (9) имеем

$$(10) \qquad (\mathcal{G} y_k^h, y_m^s) = \begin{cases} 0, \text{ если } k \neq 0 \text{ или } k = m, \text{ но } h + s < p_k, \\ -\epsilon_k \lambda_k, \text{ если } k = m,\ h = s = [p_k/2]. \end{cases}$$

Из (7), (10) и определения множества пар индексов Λ_{R}^-, получаем

$$(11) \qquad (\mathcal{G}y, y) \geqslant 0, \text{ если } y = \sum c_k^h y_k^h, \quad (k, h) \in \Lambda^+ \cup \Lambda_{\mathrm{R}}^-.$$

Шаг 3. Поскольку $(\mathcal{G}y, y) = \|\mathcal{F}_- y\|^2 - \|\mathcal{F}_+ y\|^2$, то из (11) вытекает оценка $\|\mathcal{F}_- y\|^2 \geqslant \|\mathcal{F}_+ y\|^2$. Положим $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-$, тогда

$$(12) \qquad \sqrt{2}\, \|\mathcal{F}_- y\| \geqslant \|\mathcal{F} y\| \geqslant \|\mathcal{F}\|^{-1} \|\mathcal{F}^2 y\| = \|\mathcal{F}\|^{-1} \|\mathcal{G} y\|.$$

Если $\{e_k\}$ – минимальная система в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$, а система $\{f_k\} \in \mathcal{L}$ такая, что при любом конечном наборе чисел $\{c_k\}$ справедлива оценка $\|\sum c_k f_k\|_{\mathcal{L}} \geqslant \delta \|\sum c_k e_k\|_{\mathcal{L}}$, $\delta > 0$, то, очевидно, система $\{f_k\}$ также минимальна в $\mathcal{L}$. В силу (9) система $\{\mathcal{G} y_k^h\}$ минимальна в $\mathfrak{H}^2$, поэтому из оценки (12) следует минимальность системы $\mathcal{Y}^- = \{\mathcal{F}_- y_k^h\}$ в пространстве $\mathfrak{H}_-^2 \subset \mathfrak{H}^2$. Теорема 1 доказана.

Теперь приведем две теоремы о полноте систем $\mathcal{Y}^\pm$, $\mathcal{Z}^\pm$, которые различаются как методами доказательств, так и условиями на резольвенту. Идеи их доказательств представляют развитие идей [2, 8].

Теорема 2. *Пусть пучок $L(\lambda)$ задан* (1), $B_J \geqslant 0 (\leqslant 0)$ *и выполнены следующие условия* (v_0, v_1, w_0, w_1, – *произвольные фиксированные элементы из пространства* $\mathfrak{H}$):

а) *если функция* $(L^{-1}(\lambda)[A_-^{1/2} v_0 + \lambda C_+^{1/2} v_1], w_0 + \lambda w_1)$ *голоморфна вне некоторого круга, то главная часть ее лорановского разложения в ∞ есть многочлен порядка $\leqslant N$* (N – произвольно, но не зависит от v_0, v_1);

б) *существует последовательность точек $\lambda_n \to \infty$ такая, что*

$$(13) \qquad (L^{-1}(\lambda)[A_- w_0 + \lambda C_+^{1/2} w_1],\ A_+ v_0 + \lambda C_-^{1/2} v_1) \to 0 \text{ при } \lambda = \lambda_n \to \infty.$$

Тогда система $\mathcal{Y}^-$ ($\mathcal{Z}^-$) полна в пространстве $\mathfrak{H}_-^2$ Если условия а), б) *выпол-*

нены, когда знаки '+' и '−' меняются ролями, то система $\mathcal{Y}^+$ ($\mathcal{Z}^+$) полна в пространстве $\mathfrak{H}^2_+$.

Доказательство. Предположим, что $B_J \geqslant 0$, и рассмотрим систему $\mathcal{Y}^-$. В силу теоремы 1 найдется система $\mathbf{w}^s_m = (w^s_{0,m}, w^s_{1,m})$ такая, что

$$(14)\quad (A_-^{1/2} z^h_k, w^s_{0,m}) + (C_+^{1/2}[\bar\lambda_k z^h_k + z^{h-1}_k],\ w^s_{1,m}) = (\mathcal{F}_+ \mathbf{z}^h_k, \mathbf{w}^s_m) =$$

$$= \delta_{k,m}\,\delta_{s,h}, \quad (k,h) \in \Lambda^- \cup \Lambda^+_{\mathbf{R}}$$

(здесь мы используем тот факт, что система $\{\mathcal{F}_+ \mathbf{z}^h_k\}$, $(k,h) \in \Lambda^- \cup \Lambda^+_{\mathbf{R}}$, совпадает с системой $\mathcal{Y}^+$ для пучка $L^*(\lambda)$).

Предположим, что элемент $v = (v_0, v_1) \subset \mathfrak{H}^2_-$ ортогонален системе $\mathcal{Y}^-$, т.е. для всех $(k,h) \in \Lambda^+ \cup \Lambda^-_{\mathbf{R}}$ справедливы равенства

$$(15)\quad (v_0, A_+^{1/2} y^h_k) + (v_1, C_-^{1/2}[\lambda_k y^h_k] + y^{h-1}_k]) = (v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^h_k) = 0.$$

Рассмотрим функции

$$\Phi^s_m(\lambda) = \lambda^{-1}([L^{-1}(\bar\lambda)]^*[A_+^{1/2} v_0 + \lambda C_-^{1/2} v_1],\ A_-^{1/2} w^s_{0,m} + C_+^{1/2} w_{1,m}).$$

Точка $\lambda = 0$ является регулярной для этой функции, поскольку $A_-^{1/2} A A_+^{1/2} = 0$. Из (2) следует, что главная часть разложения функции $\Phi^s_m(\lambda)$ в окрестности полюса $\lambda = \bar\lambda_k$ имеет вид

$$(16)\quad \bar\lambda_k^{-1} \sum_{k=N_1}^{N_2} \sum_{h=0}^{p_k} \frac{(v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^0_k)(\mathcal{F}_+ \mathbf{z}^h_k, \mathbf{w}^s_m) + \ldots + (v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^h_k)(\mathcal{F}_+ \mathbf{z}^0_k, \mathbf{w}^s_m)}{(\lambda - \bar\lambda_k)^{p_k+1-h}}.$$

Из равенств (14), (15), вида главной части (16) функции $\Phi^s_m(\lambda)$ в полюсах и определения множеств $\Lambda^\pm_{\mathbf{R}}$, $\Lambda^\pm$ (учитываем также, что канонические системы (3), отвечающие СЗ $\lambda_k \in \mathbf{R}$, выбраны нормальными) следует, что функция $\Phi^s_m(\lambda)$ имеет единственный полюс $\lambda = \bar\lambda_m$, $\operatorname{Im}\lambda_m \geqslant 0$. Пусть $\operatorname{Im}\lambda_m > 0$. Положив $s = p_m$ и воспользовавшись (14), найдем, что в точке $\lambda = \bar\lambda_m$ функция $\Phi^{p_m}_m(\lambda)$ имеет простой полюс, причем вычет в этом полюсе равен $a_m = \bar\lambda_m^{-1}(v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^0_m)$. Из условия а) теоремы тогда имеем $\Phi^{p_m}_m(\lambda) = P_N(\lambda) + a_m(\lambda - \bar\lambda_m)^{-1}$, где $P_N(\lambda)$ – многочлен, а из условия б) получаем $\Phi^{p_m}_m(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, $(v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^0_m) = 0$. Если теперь положить $s = p_m - 1$, то с учетом последнего равенства найдем $(v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^1_m) = 0$. Шаг за шагом, повторяя такой же прием, получаем

$$(17)\quad (v, \mathcal{F}_- \mathbf{y}^h_m) = 0, \quad h = 0, 1, \ldots, p_m.$$

(17) Если $\operatorname{Im}\lambda_m = 0$, то в силу (15) равенства (17) справедливы при $h \leqslant \nu^-_m$. Рассматривая функции $\Phi^s_m(\lambda)$ последовательно при $s = \nu^+_m, \nu^+_m - 1, \ldots, 0$, так же как прежде, получаем равенства (17) при $h = \nu^-_m + 1, \ldots, p_m$. Но тогда вектор-функция

$$\Phi(\lambda) = [L^{-1}(\bar\lambda)]^*(A_+^{1/2} v_0 + \lambda C_-^{1/2} v_1)$$

целая, а из условия а) следует, что $\Phi(\lambda)$ – многочлен. Применив к $\Phi(\lambda)$ оператор $L^*(\lambda)$ и сравнив обе части равенства, получим $v_0 = v_1 = 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть пучок $L(\lambda)$ задан (1), $B_J \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) и существует $q > 0$ такое, что выполнены следующие условия (элемент $\mathbf{v} = (v_0, v_1) \in \mathfrak{H}^2_-$):*

в) *для любого $\epsilon > 0$ найдется последовательность полуокружностей $C_n = \{\lambda: |\lambda| = r_n, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\ (\leqslant 0)\}$, $r_n \to \infty$, на которых функция*

$$\Psi(\lambda) = [(L^{-1}(\lambda)]^*[A_-^{1/2} v_0 + \lambda C_+^{1/2} v_1],\ A_-^{1/2} v_0 + \lambda C_+^{1/2} v_1)$$

допускает оценку $|\Psi(\lambda)| \leqslant \exp \epsilon |\lambda|^q$;

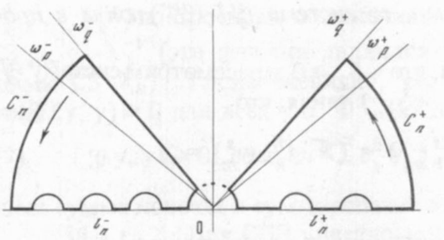

Рис. 1.

г) *если функция* $\Psi(\lambda)$ *голоморфна в верхней (нижней) полупроскости, то* $\Psi(\lambda) - \|v_1\|^2 \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Omega_q$ $(\bar{\Omega}_q)$, *где* $\Omega_q = \{\lambda;\ \pi/2q' \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi(1 - 1/2q')\}$, $q' = \max(1, q)$. *Кроме того, если* $q \geqslant 1$, *то найдется число* $p > q$ *такое, что при* $\lambda \in \Omega_p$ *и любом* $\epsilon > 0$ *выполняется оценка* $|\Psi(\lambda)| \leqslant M(\epsilon)\exp\epsilon\ |\lambda|^q$.

Тогда система $\mathcal{Y}^-$ ($\mathcal{L}^-$) *полна в пространстве* $\mathfrak{H}^2_-$. *Теорема остается справедливой, если знаки '–' и '+' поменять местами.*

Доказательство. Пусть $B_J \geqslant 0$ и элемент $v = (v_0, v_1) \in \mathfrak{H}^2_-$ ортогонален системе $\mathcal{Y}^-$. Тогда функция $\chi(\lambda) = \lambda^{-1}(\Psi(\lambda) - \|v_1\|^2)$ является голоморфной в верхней полуплоскости, а в точках $\lambda_k \in \mathbf{R}$ может иметь только простые полюсы с вычетами $a_k \leqslant 0$, причем вычет в нуле равен $a_0 = -(\|A_-^{1/2} v_0\|^2 + \|v_1\|^2) < 0$ (это следует из леммы 1 и рассуждений [2]). Поскольку $\Psi(\lambda) = (L(\lambda)g(\lambda), g(\lambda))$, где $g(\lambda) = L^{-1}(\lambda)[A_-^{1/2} v_0 + \lambda C_+^{1/2} v_1]$, то

$$(18)\qquad \operatorname{Im}\chi(\lambda) \geqslant 0 \text{ при } \lambda \in \mathbf{R},\quad \lambda \neq \lambda_k.$$

При $t > 0$ рассмотрим функцию

$$(19)\qquad u_{l_n}(t) = \int\limits_{l_n^+} e^{-\lambda^q t}\chi(\lambda)d\lambda + \int\limits_{l_n^-} e^{-(-\lambda)^q t}\chi(\lambda)d\lambda,$$

где l_n^+, l_n^-, – части контура (см. рис. 1), состоящие из отрезков положительного и отрицательного лучей и окружностей малых радиусов δ_m с центрами в точках λ_m. Пусть функции $u_{C_n}(t)$ определяются так же, как в (19), но l_n^+, l_n^- заменены на отрезки полуокружностей C_n^+, C_n^-. Аналогично, определим функции $u_{\omega_n}(t)$ и $u_\delta(t)$, заменив в (19) l_n^+, l_n^- на отрезки лучей ω_q^+, ω_q^-, направленных по сторонам угла Ω_q, и соответственно на отрезки дуг полуокружности $\gamma_{\delta_0} = \{\lambda\colon |\lambda| = \delta_0, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$. При соответствующем выборе направления интегрирования будем иметь

$$(20)\qquad u_{l_n}(t) + u_{C_n}(t) + u_{\omega_n}(t) + u_\delta(t) = 0.$$

Воспользовавшись рассуждениями из леммы 1.3 работы [2], получим $u_{\omega_n}(t) + u_\delta(t) = -i\pi a_0 + o(1)$ при $t \to +0$ и $\delta_0 \to 0$ независимо от n*. Из условия г) следует, что функция $\chi(\lambda)\exp - \lambda^q t \to 0$ при $\lambda \to \infty$ на лучах ω_q^+ и ω_p^+. Из принципа Фрагмена–Линделёфа (см. [9], гл. I) тогда заключаем $\chi(\lambda)\exp - \lambda^q t \to 0$ равномерно в угле, образованном этими лучами. Воспользовавшись леммой Жордана и условием в), получим $u_{C_n}(t) \to 0$ при $n \to \infty$. Наконец, устремив $\delta_m \to 0$ и рассмотрев мнимую часть (20), с учетом (18) получим $a_0 + \Sigma a_m + \rho_n = o(1)$ (число $\rho_n \leqslant 0$), откуда следует $a_0 = 0$, т.е. $v_0 = v_1 = 0$. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Если $0 \in \sigma(L)$, т.е. $\operatorname{Ker} A \neq 0$, то все три теоремы остаются верными, но по аналогии с [3] в определении множеств $\Lambda^+_{\mathbf{R}}$, $\Lambda^-_{\mathbf{R}}$ нужно сделать изменения. Именно, пары индексов (k, h), для которых $\lambda_k = 0$, отнесем к $\Lambda^+_{\mathbf{R}}$ $(\Lambda^-_{\mathbf{R}})$, если $0 \leqslant h \leqslant \kappa_k^+$ (κ_k^-), где

$$\kappa_k^+ (\kappa_k^-) = \begin{cases} l_k, \text{ если } p_k = 2l_k \text{ или } p_k = 2l_k - 1 \text{ и } \epsilon_k > 0\ (< 0), \\ l_k - 1, \text{ если } p_k = 2l_k - 1 \text{ и } \epsilon_k < 0\ (> 0). \end{cases}$$

---

* В наших, более слабых, предположениях эту оценку нужно проводить более тонко, нежели в [2].

Отбор индексов (k, h), для которых $\lambda_k \neq 0$, оставляем прежним. Изменения в доказательствах теорем полноты весьма очевидны. Для доказательства теоремы 1 нужно дополнительно отметить два факта: 1) при $\lambda_m = 0$ соотношения (8) принимают вид $(\mathscr{G}\, y_k^h,\, z_m^{s+1}) = -\delta_{k,m}\, \delta_{h,p_m - s}$; 2) неравенства (7) сохраняют силу. Действительно, если $\mathscr{P}$ – ортопроектор в $\mathfrak{H}^2$ на линейную оболочку элементов $\{y_k^h\}$, $(k, h) \in \Lambda^+$, то области значений операторов $\mathscr{G}\mathscr{P}$ и $\mathscr{H}\mathscr{P}$ совпадают. Поэтому в $\mathfrak{H}^2$ определен оператор $(\mathscr{G}\mathscr{P})^{-1}\, \mathscr{H}\mathscr{P}$, который является $\mathscr{P}\mathscr{G}\mathscr{P}$-диссипативным, и (7) следует из предложения 10° работы [7].

Автор благодарит проф. А.Г. Костюченко за обсуждение работы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
26 II 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М.В.* – УМН, 1971, т. 26, № 4, с. 15–41. 2. *Костюченко А.Г., Шкаликов А.А.* – Функц. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 2, с. 38–61. 3. *Радзиевский Г.В.* Квадратичный пучок операторов (эквивалентность части корневых векторов). Препринт ин-та матем. АН УССР № 84.32. Киев, 1984. 4. *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* В кн.: Тр. международн. симп. по прим. теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды. М.: Наука, 1965, с. 283–322. 5. *Костюченко А.Г., Оразов М.Б.* – Функц. анализ и его прилож., 1975, т. 9, № 4, с. 28–40. 6. *Гомилко А.М.* Канд. дис. М.: МГУ, 1982. 7. *Азизов Т.Я.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, т. 37, № 3, с. 639–662. 8. *Шкаликов А.А.* – ДАН, 1985, т. 283, № 5, 1100–1106. 9. *Boas R.Ph.* Entire functions. N.Y. 1954. 10. *Шкаликов А.А.* – Вестн. МГУ. Сер. матем., механика, 1984, № 6.