“Утверждаю”
Декан механико–математического
факультета МГУ, чл.-корр.РАН,
проф. О. Б. Лупанов

Выписка из протокола номер
заседания кафедры Алгебры механико–математического
факультета Московского Государственного Университета
от мая 2001 года.

ПРИСУТСТВОВАЛИ: и.о.зав. каф. проф. В. Н. Латышев.

Профессора: В. В. Артамонов, Е. С. Голод, Э. Б. Винберг, В. А. Исковских, А. В. Михалев, А. Ю. Ольшанский, А. Л. Шмелькин.

Доценты: В. Т. Марков, И. А. Чубаров, Ю. Г. Прохоров.

Ст.н.с., к.ф.м.н. А. А. Клячко, к.ф.м.н., асс. Д. А. Тимашев, к.ф.м.н., м.н.с.И. В. Аржанцев., секретарь кафедры Н. К. Ильина.

Повестка дня: обсуждение диссертационной работы доцента кафедры Математики Московского Института Повышения Квалификации Работников Образования Белова Алексея Яковлевича “Алгебры с полиномиальными тождествами, представления и комбинаторные методы”, представленной на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

СЛУШАЛИ: доклад диссертанта Белова А.Я.

Представленная диссертация является исследованием в области теории PI-колец, многообразий алгебр и комбинаторики слов.

Целью работы является исследование т.н. проблем шпехтового типа, относящихся к вопросам конечной базируемости многообразий колец и алгебр, представимости приведенно–свободных колец, проблеме существования алгоритма определения следования тождеств, рациональности рядов Гильберта. Рассмотрение в этой связи вопросов, относящихся к проблемам Бернсайдовского типа, нормальных базисов алгебр и связанных с этим вопросов теории представлений.

При изучении указанных вопросов использованы методы некоммутативной алгебраической геометрии, теории представлений, символической динамики а также методы и походы, развивавшиеся в рамках работы семинара по теории колец и компьютерной алгебры под руководством проф. А.В.Михалева, проф.В.Н.Латышева, проф.В.А.Артамонова, проф.Е.С.Голода, доц. В.Т.Маркова.

Диссертация объемом 400 стр. состоит из девяти глав, приложения, списка литературы из 157 наименований, включая 21 работу автора.

Первая глава есть введение. Во второй главе излагаются подготовительные сведения и конструкции, нужные для дальнейшего.

Третья глава посвящена комбинаторике слов, проблемам канонической формы с связанным с ними вопросам теории представлений. В первом параграфе изложены некоторые вспомогательные конструкции. Второй параграф посвящен проблемам бернсайдовского типа. В нем дается доказательство экспоненциальных оценок на высоту алгебр (ответ на вопрос Е. И. Зельманова из Днестровской тетради), дается более короткое доказательство теоремы о независимости с помощью техники сверхслов а также доказательство ограниченности высоты алгебры над множеством слов степени не выше сложности.

Хотелось бы особо отметить доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Множество лексикографически неуменьшаемых слов в* PI-*алгебре A имеет ограниченную высоту над множеством слов, степень которых не превышает сложности алгебры A.*

Это доказательство проясняет глубинные связи между структурной и комбинаторной теориями.

Третий параграф посвящен применению методов символической динамики к проблемам теории колец. В терминах равномерно рекуррентных слов дается построение теории радикала для мономиальных алгебр, доказывается совпадения ниль-радикала и радикала Джекобсона, дается описание слабо нетеровых мономиальных алгебр.

Четвертый параграф посвящен представлению мономиальных алгебр. С этим связаны важные технические аспекты теории нормальных форм. Один из основных результатов данного параграфа, представляющий самостоятельный интерес — критерий представимости мономиальной алгебры и построение представимых алгебр с трансцендентным рядом Гильберта. Кроме того, показано, что проблема изоморфизма двух подалгебр алгебры матриц над кольцом многочленов, заданных образующими, алгоритмически неразрешима.

Четвертая глава посвящена технике работы с многочленами типа Капелли, полилинейными и кососимметричными относительно нескольких групп переменных. В первом параграфе осуществляется перенос техники, развитой Ю.П.Размысловым и К.А.Зубрилиным на такие многочлены. Основной технический аппарат, развитый в этой главе, заключается в построении представимых пространств а также "утончения альтернаторов", который изложен во втором и третьем параграфах.

В четвертом параграфе данная техника используется для решения проблемы, поставленной L. Small'ом. Доказывается следующая

Теорема 2. *Нетеровы конечно–порожденные* PI-*алгебры конечно определены.*

В пятом параграфе показано, что в T-первичных многообразиях ассоциативных алгебр имеются ненулевые формы. Основная теорема, доказанная в этом параграфе, заключается в следующем:

Теорема 3. *В T-первичное многообразие ассоциативных алгебр унитарно замкнуто и в нем существует центральный полином.*

В шестом параграфе показано, что в случае положительной характеристики в любом многообразии ассоциативных алгебр выполняются все тождества алгебры матриц некоторого порядка.

Седьмой параграф посвящен изучению размерности Гельфанда–Кириллова. В нем показано, что размерность Гельфанда–Кириллова равна существенной высоте, и кроме того, размерность Гельфанда–Кириллова представимой алгебры произвольной сигнатуры есть целое число.

Восьмой параграф посвящен процедуре перекачки, разработанной автором. Эта процедура позволяет с единой точки зрения на ряд вопросов комбинаторной теории PI-колец. С помощью этой процедуры показывается следующая

Теорема. *Если Y есть курошево множество (т.е. любая проекция любого центрального расширения, для которой образы всех элементов из Y целы над центром конечномерна над центром), то алгебра имеет ограниченную существенную высоту над Y.*

Кроме того, получаются экспоненциальные оценки на высоту над множеством слов степени не выше сложности а также теорема А. Д. Чанышева о нильпотентности $\mathbb{N}$-градуированных алгебр, у которых все однородные элементы нильпотентны ограниченного индекса.

Пятая глава посвящена общей концепции экстремального идеала и методу Кемера. Помимо общего подхода и изложения метода Кемера, (чему посвящены первые два параграфа) в ней дается доказательство рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр методом Кемера (см. третий параграф).

Четвертый параграф посвящен редукциям по простому модулю. В нем показано, что при достаточно большом p ряды Гильберта у конечно порожденной $\mathbb{Z}$-алгебры и ее редукции по модулю p совпадают. К сожалению, оценки на p зависят от числа образующих.

Пятый параграф посвящен рядам Гильберта для T-пространств. В нем показано, что ряд Гильберта T-пространства в относительно свободной алгебре рационален, а ряд Гильберта T-пространства в абсолютно свободной s-порожденной ассоциативной алгебре либо рационален, либо его разность с рядом Гильберта коммутатора есть рациональная функция. Доказательство основано на результатах В. В. Щиголева.

Шестая глава посвящена представлению относительно свободных алгебр. Основная техника состоит в замыкании по Зарисскому построению и изучению улучшенных представлений. Если алгебра представима, то ее замыкание по Зарисскому имеет тот же запас тождеств. Таким образом, возникают достаточно интересные вопросы, связанные с описанием таких замыканий или хотя бы получении некоторой информации.

В первых трех параграфах показано, что можно выбрать базис в пространстве представления таким образом, что все элементы алгебры будут иметь следующий вид: вдоль главной диагонали идут блоки, под блоками — нули, и система уравнений, связывающие элементы в блоках имеет вид ${x_{ij}^{\alpha}}^{q_\alpha} = {x_{ij}^{\beta}}^{q_\beta}$ (компоненты при соответствующих матричных единицах связаны по фробениусу). Кроме того, на элементы x_{ij}^{α} при матричных единицах для некоторых r_α могут выполняться уравнения ${x_{ij}^{\alpha}}^{r_\alpha} == 0$ и других соотношений на компоненты полупростых частей быть не может. При этом для любого $x \in \mathbb{F}$ и при всех α выполняется тождество $x^{q_\alpha} = x^{r_\alpha} = x$. Если основное поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то тогда все q_α и r_α равны единице.

В четвертом параграфе изучается взаимодействие между клетками. Возникает граф Γ, вершины которого символизируют клетки и дополнительные эффекты связаны с "гашением" путей. Пятый параграф посвящен описанию возникающих эффектов на языке тождеств. В нем также дается другое доказательство рациональности рядов Гильберта и обсуждается общая "идеология" доказательств представимости и конечной базируемости.

В шестом параграфе дается описание нетеровых, конечно определенных и слабо нетеровых относительно свободных алгебр в терминах графа Γ (для случая произвольной характеристики).

Если шестая глава посвящена исследованию носителей, то в седьмой главе развивается двойственный функциональный язык и осуществляется перевод некоторых основных свойств с функционального языка на язык носителей.

В первом параграфе излагается доказательство локальной конечной базируемости T-пространств над полем нулевой характеристики методом А. В. Гришина вместе с исправлениями и модернизацией, которую внес автор (применение леммы Артина–Рисса).

Второй и третий параграф посвящены технике "расталкивающих замен". В них также развивается алгебро–геометрическая техника доказательств конечной базируемости. Четвертый параграф посвящен вычислению размерности Гельфанда–Кириллова для относительно свободных алгебр и для T-идеалов. Показано, что размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободной алгебры A определяется только ее сложностным типом (набором полупрямых произведений алгебр матриц над кольцом многочленов из $\mathrm{Var}(A)$). В нем доказывается следующая

Теорема 4. *Пусть A – s-порожденная относительно свободная алгебра. Тогда $\mathrm{GK}(A)$ зависит только от ее сложностного типа. А именно, она равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова полупрямого произведения алгебр общих матриц из $\mathrm{Var}(A)$. Размерность Гельфанда–Кириллова такого полупрямого произведения равна сумме размерностей Гельфанда-Кириллова сомножителей. Сложностные типы у алгебры A и подалгебры, порожденной двумя ее образующими, совпадают.*

Размерность Гельфанда–Кириллова свободной s-порожденной алгебры A из $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_{n_1} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_{n_k})$ равна

$$k + (s-1)\sum_{i=1}^{k} n_i^2.$$

Для случая представимых первичных относительно свободных алгебр произвольной сигнатуры доказана следующая

Теорема 5. *Если L относительно свободная s-порожденная первичная алгебра сигнатуры Ω, то $\mathrm{GK}(L) = sn - m$.*

Здесь m есть размерность G как алгебраического многообразия, G есть группа автоморфизмов $\widehat{L} \otimes C(L)^{alg.cl}$ над централизатором Мартиндейла $C(L)$.

В пятом параграфе доказывается локальная конечная базируемость, из которой в шестом параграфе выводится локальная представимость относительно свободных PI-алгебр.

В восьмой главе указанные результаты переносятся на случай общих колец.

Первый параграф посвящен доказательству локальной конечной базируемости, в нем же изучается кручение в относительно свободных кольцах. Во втором параграфе изложено доказательство локальной представимости PI-алгебр над произвольным нетеровым ассоциативно коммутативным кольцом Ф.

Третий параграф посвящен положительному решению проблемы Мальцева о существовании алгоритма определения того, является ли данное тождество следствием некоторой конечной системы тождеств.

В четвертом параграфе рассматриваются критические кольца. Проблема существования бесконечных критических колец сведена к случаю тел, не являющихся PI-кольцами.

Пятый параграф посвящен вопросам, связанным с однородностью, порождаемостью многообразия однородными алгебрами, радикальными свойствами однородных компонент тождеств и теореме о высоте.

В девятой главе строятся примеры бесконечно базируемых многообразий неассоциативных алгебр над произвольном полем положительной характеристики.

Приложение A посвящено кольцам, ассимптотически близким к ассоциативным. В первом параграфе даются основные определения и доказывается аналог теоремы о высоте для т.н. “хороших многообразий”, в частности, для йордановых и альтернативных PI-алгебр.

Во втором параграфе для алгебр над полем нулевой характеристики из структурируемых хороших многообразий, в предположении выполнимости всех тождеств некоторой конечномерной алгебры построена теории, аналогичная теории А. Р. Кемера (первая и вторая лемма Кемера). Доказана также локальная конечная базируемость, локальная представимость, а также рациональность рядов Гильберта (в том числе и для T-пространств).

В третьем параграфе дается неассоциативное обобщение θ-техники, ранее развитой А. В. Гришиным для ассоциативного случая.

Приложение посвящено оценкам на степень нильпотентности радикала Джекобсона для PI-алгебр.

В качестве рецензента выступил **профессор В. Н. Латышев.**

В своем выступлении профессор В. Н. Латышев подробно остановился на результатах, полученных в представленной диссертации.

Он отметил центральную роль проблемы Шпехта в теории PI-колец, указал, что Белов А.Я. был одним из автором ее отрицательного решения для полей положительной характеристики.

Диссертант построил аппарат, основанный на подходе, связанным с изучением клеточных носителей. Это позволило с одной стороны построить теорию представлений относительно свободных алгебр, а с другой — получить новые существенные результаты — решить проблемы, поставленные А.И.Мальцевым в 1967 году — положительное решение локального варианта проблемы Шпехта а также локальную конечную базируемость и локальную представимость относительно свободных ассоциативных колец.

Автор развил также технику работы со словами, что позволило получить экспоненциальные оценки в теореме Нагаты-Хигмана и в теореме Ширшова о высоте, установить совпадение ниль-радикала и радикала Джекобсона в мономиальных алгебрах, доказать ограниченность высоты над множеством слов степени не выше сложности.

Характеризуя диссертацию в целом, профессор В. Н. Латышев высказал мнение, что автор проделал большую работу и подготовил законченное добротное исследование по перспективному направлению алгебры.

По мнению В.Н.Латышева, полученные в диссертации результаты дают основание говорить о том, что Белов А. Я. занимает передовые позиции среди специалистов в данной области исследований, а его диссертация, несомненно, заслуживает того, чтобы быть рекомендованной для защиты в качестве докторской диссертации на диссертационном совете Д.501.001.84.

В своем выступлении **профессор Е. С. Голод** отметил, что диссертантом были получены результаты, представляющие исключительный интерес. На него произвело сильное впечатление доказательство рациональности рядов Гильберта-Пуанкаре для относительно свободных алгебр.

В своем выступлении **доцент В. Т. Марков** остановился на результатах, относящихся к мономиальным алгебрам и отметил, что диссертант перекрыл результаты в этой области, ранее полученные другими авторами.

В своем выступлении **профессор В. А. Артамонов** отметил, что результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре и что диссертант, несомненно, заслуживает присуждения ему искомой степени.

ПОСТАНОВИЛИ: принять следующее заключение о диссертации Белова А.Я. на тему "Алгебры с полиномиальными тождествами, представления и комбинаторные методы" — по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Результаты диссертационной работы Белова А. Я. являются существенным вкладом в теорию полиномиальных тождеств, теорию мономиальных алгебр и комбинаторику слов. Они относятся к одному из перспективных и быстро развивающихся направлений теории колец.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Исследованы функции роста слов и алгебр. Построенны примеры сверхслов и алгебр, функция роста которых колеблется между $n^2/o(1)$ и $e^{o(n)}$, между $n(n+3)/2+1/o(1)$ и $e^{o(n)}$ соответственно. Указанные возможные границы колебаний функции роста являются точными (а построенные в качестве примеров сверхслова — равномерно–рекуррентными).

   Показана рациональность производящей функции для числа подслов длины n последовательности первых двоичных цифр дробных частей значений многочлена $P(n)$ в целых точках, старший коэффициент которого иррационален. Показано, что при достаточно больших n (в зависимости от диофантовых свойств старшего коэффициента) это число зависит только от степени P.

2. Построена теория радикала для мономиальных алгебр. Дано описание радикалов Бэра и Джекобсона в терминах сверхслов. Доказано

совпадение ниль-радикала с радикалом Джекобсона для мономиальных алгебр. Дано описание слабо нетеровых мономиальных алгебр в терминах равномерно-рекуррентных сверхслов.

3. Построена теория представлений мономиальных алгебр. Предложен критерий представимости для мономиальных алгебр. Приведен пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Показано, что в случае размерности Гельфанда–Кириллова равной единице и нулевой характеристики основного поля ряд Гильберта представимой мономиальной алгебры рационален (а при нарушении любого из этих условий он рациональным быть не обязан).

4. Получена экспоненциальная вершняя оценка для степени нильпотентсности ниль-алгебр над произвольным ассоциативно–коммутативным кольцом и для высоты в ассоциативном случае.

   — Доказана ограниченность высоты PI-алгебры над множеством слов степени не выше полиномиальной сложности, получены экспоненциальные верхние оценки Получено полное описание множеств слов, являющихся базисами Ширшова относительно свободной алгебры. Доказана ограниченность высоты множества неуменьшаемых слов над множеством слов степени не выше полиномиальной сложности. Все эти результаты справедливы для алгебр над произвольным ассоциативно–коммутативным кольцом (в т.ч. и для неоднородных многообразий).

   — Распостранена теорема о высоте для класса колец, ассимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы алгебры.

   — Доказано совпадение существенной высоты представимой алгебры и размерности Гельфанда–Кириллова. Показано, что если все проекции центрального расширения алгебры A кольцом многочленов $A \otimes F[x]$ у которых образы элементов из Y алгебраичны степени n (n — полиномиальная сложность), то A имеет ограниченную существенную высоту над Y. В однородном случае достаточно условия нильпотентности фактора A/Y^n, где Y^n — идеал, порожденный n-ми степенями элементов из Y.

   — Разработан алгоритм вычисления размерности Гельфанда-Кириллова для относительно свободных алгебр.

5. Предложен метод “перекачки”, позволяющий единообразно решать ряд задач комбинаторной теории колец: выводить ограниченность высот из условия “Курошевости” и получать ряд других результатов, описанных в предыдущем пункте, получать прямое комбинаторное доказательство (и экспоненциальные оценки на степень) выполнимости тождеств Капелли и алгебраичности, а также доказать теоремы Размыслова–Кемера–Брауна о нильпотентности радикала PI-алгебры и получить экспоненциальные верхние оценки, доказывать другие известные резульаты.

6. Показана рациональность рядов Гильберта для относительно свободных ассоциативных алгебр. Получено доказательство представимости для некоторых колец, близких к ассоциативным.

7. Показана локальная конечная базиремость многообразий колец а ткже локальная представимость относительно свободных колец.

8. Для любого простого p построен пример не конечно базиремого многообразия над произвольным полем характеристики p.

9. Построен алгоритм проверки, следует ли данное тождество g из заданного набора тождеств $\{f_i\}$.

Таким образом, в диссертации решен ряд трудных и актуальных задач теории колец.

Работа носит теоретический характер.

РЕзультаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории PI-алгебр, неассоциативных алгебр, комбинаторике слов, некоммутативной алгебраической геометрии.

Результаты, изложенные в диссертации, четко обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно.

Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

МГУ, механико-математический факультет: семинар по теории колец под руководством проф. А.В.Михалева, В.Н.Латышева, Е.С.Голода, В.А.Артамонова (ежегодно), семинар под руководством чл. корр. РАН А.И.Кострикина (неоднократно), на семинаре ИМСОАН под руководством Л.А.Бокутя, на математическом коллоквиуме Бар-Иламского Университета (Израиль), на семинаре в Иерусалимском ниверситете под рук. Б.Вейса и Д.Фюрстенберга, на заседании Казанского Математического Общества а также на собрании Израильского Математического общества.

Резльтаты диссертации докладывались также на следющих научных конференциях:

На международных конференциях по алгебре (Новосибирск 1989, Барнаул 1991), на пятой и шестой научных школах по теории многообразий алгебраических систем (Барнаул 1988, Магнитогорск 1990 г.), на шестом Всесоюзном симпозиуме по теории колец, алгебр и модулей (Львов 1990), на международной алгебраической конференции, посвященной памяти Д.К.Фаддеева (СПБ, 1997), на конференции памяти А. Г. Куроша в 1998 году, на II международной конференции, посвященной памяти академика А.И.Мальцева в 1998 году, на международной конференции в Омске (август 1998 г.) "Комбинаторные и вычислительные методы в математике на II международной конференции “полугруппы: теория и приложения” в честь профессора Е. С. Ляпина (СПБ, 1999), на международном алгебраическом семинаре, посвященном 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ (1999), на конференции по некоммутативной алгебраической геометрии (MSRI, Berceley, 2000), на 12 международной конференции “Formal power series and algebraic combinatorics.” FPSAC'00, Москва, 2000, на международном алгебраическом семинаре, посвященном 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре, основанного О.Ю.Шмидтом (2000), на конференции “Grouth of algebras and it’s applications” Weitzman Institute (Israel, Rehovot), May 2000.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора:

Список литературы

[1] *Belov A., Borisenko V., Latyshev V.* Monomial algebras // NY, Plenum. 1998. — С. 1–173

[2] *Белов А. Я.* О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n // Мат. сб. — 1988. — *135*, номер 31. — С. 373–384 (РЖМат, 1988, 7А252)

[3] *Белов А. Я.* Клссификация слабо нетеровых мономиальных алгебр // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, номер 4. — С. 1085–1089

[4] *Belov A.* Some estimations for nilpotence of nil-algebras over field of an arbitrary characteristics and height theorem // Comm. in Algebra. — 1992. — *20*, номер 10. — С. 2919–2922

[5] *Belov A.* About height theorem // Comm. in Algebra. — 1995. — *23*, номер 9. — С. 3551–3553

[6] *Belov A., Gateva T.* Radicals of monomial algebras // Proceedings of Taivan-Moscow Algebra Workshop.. — С. 159–169

[7] *Белов А. Я.* О нешпехтовых многобразиях // Фунд. и прикл. матем. — 1999. — *5*, номер 1. — С. 47–66

[8] *Белов А. Я.* Контрпримеры к проблеме Шпехта // Мат. сб. — 2000. — *191*, номер 3. — С. 13–24

[9] *Белов А. Я.* Теорема Нагаты–Хигмана для полуколец // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, номер 2. — С. 523–527

[10] *Белов А. Я.* О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр // Успехи мат. наук. — 1997. — *52*, номер 2. — С. 153–154

[11] *Белов А. Я., Охитин С. В.* Об одной комбинаторной задаче // Успехи мат. наук. — 1994. — *48*, номер 2(290). — С. 169–170

[12] *Белов А. Я., Кондаков Г. В.* Обратные задачи символической динамики // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, номер 1. — С. 71–79

[13] *Белов А. Я.* Теорема о высоте для йордановых и лиевых PI-алгебр // Сиб. школа по многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Барнаул, 1988. — С. 12–13

[14] *Белов А. Я.* Оценка для высоты и размерности Гельфанда—Кириллова ассоциативных PI-алгебр // Международная конф. по алгебре памяти А. И. Мальцева. Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск, 1989. — С. 21

[15] *Белов А. Я.* О рациональности ряда Гильберта свободных алгебр в многообразиях сложности 1 // VI Всесоюзн. школа по теории многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Магнитогорск, 1990. — С. 7–8

[16] *Белов А. Я.* Локальная представимость относительно свободных ассоциативных алгебр // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98) посвященный памяти С. Л. Соболева. Тезисы докладов. — Новосибирск, ИМСОРАН, 1998 — *5*. — С. 4–5

[17] *Белов А. Я.* Об относительно свободных и критических кольцах // Комбинаторные и вычислительные методы в математике. Тезисы докладов международной конференции (28–31 августа 1998 г.). — Омск, 1998. — С. 27–28

[18] *Белов А. Я.* Локальная представимость относительно свободных ассоциативных алгебр // в кн.: Kurosh Algebraic Conference-98. Abstracts of talks. Ed.by Y. A. Bachturin, A. I. Kostrikin, A. Yu. Olshansky — M.: 1998. — С. 143–144

[19] *Belov A. J.* Solution of one Maltzev problem // в кн.: II международная конференция "полугруппы: теория и приложения" в честь профессора Е. С. Ляпина. Тезисы докл.— СПБ.: 1999. — С. 9–9

[20] *Belov A. J.* Specht type problems and related questions // в кн.: Formal power series and algebraic combinatorics. 12^{th} intrnational conference, FPSAC'00, Moscow, June 2000. Abstracts. — С. 9–10

[21] *Belov A. J.* Specht type problems and noncommutative algebraic geometry // Annual meeting of Israel Math. Union. 2000. — С. 12

Диссертация к защите представляется впервые.

За рекомендацию диссертационной работы Белова А.Я. к защите проголосовали **единогласно**.

Вышесказанное дает основание кафедре Алгебры механико-математического факультета МГУ рекомендовать диссертацию Белова Алексея Яковлевича "Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел на диссертационнном Совете .501.001.84 при МГУ.

И.о.зав.каф. д.ф.м.н., проф. В.Н.Латышев

Ученый секретарь кафедры,
к.ф.м.н., асс. Д.А.Тимашев