Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Московский институт открытого образования

На правах рукописи
УДК 512.552.4+512.554.32+512.664.2

Белов Алексей Яковлевич

Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук

Научные консультанты:

Д.ф.м.н., проф. В. Н. Латышев
Д.ф.м.н., проф. А. В. Михалёв

Москва 2002

Содержание

Введение

0.1. Кольца с полиномиальными тождествами

Тождества являются важным объектом исследования как для теории колец, так и для теории инвариантов. *Тождеством в алгебре* называется многочлен, который тождественно обращается в нуль на алгебре. Например, в алгебре Грассмана выполняется тождество $[[x,y],z]=0$ (четный элемент лежит в центре, а коммутатор двух нечетных элементов четен), в алгебре матриц порядка 2 справедливо *тождество Холла*: $[[x,y]^2,z]=0$ (собственные значения матрицы с нулевым следом имеют противоположные знаки, поэтому ее квадрат — скалярная матрица). В $(n-1)$-мерной алгебре выполняется *тождество Капелли* C_n порядка n:

$$C_n(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma y_0x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\dots y_{n-1}x_{\sigma(n)}y_n.$$

Пусть $P(x_1,\dots,x_n)$ – тождество в алгебре A, $\{H_i(x_1,\dots,y_{q_i})\}$ – произвольный набор полиномов, а $R(z_1,\dots,z_k)$ – любой полином. Тогда результаты подстановки $P(H_1,\dots,H_n)$, а также умножения на R (RP и PR) тоже выполняются в алгебре A. Эти новые полиномы называются *следствиями* тождества P. Кроме того, линейная комбинация тождеств снова является тождеством. Идеал, порожденный значениями системы полиномов, замкнутой относительно операции подстановки, называется *T-идеалом.* Каждому T-идеалу соответствует T-идеал в свободной алгебре или, что то же самое, *вполне характеристический* идеал в свободной алгебре, т.е. идеал, замкнутый относительно всех эндоморфизмов. Категория алгебр, удовлетворяющая некоторой системе тождеств, называется *многообразием (variety)*, а свободные объекты в этой категории — *относительно свободными алгебрами.* Ассоциативной *PI-алгеброй* называется алгебра, в которой выполняется некоторое нетривиальное тождество, а ее *степенью* (обозначение $\deg(A)$) называется минимальная степень такого тождества. Через $\mathrm{Var}(A)$ обозначается многообразие, заданное тождествами, выполняющимися в алгебре A. Пусть $\{H_i\}$ – система полиномов. Тогда $\mathrm{T}(\{H_i\})$ обозначает T-идеал, ими порожденный.

Аналогично понятию T-идеала естественно вводится понятие *T-пространства* или пространства, порожденного значениями системы многочленов, замкнутых относительно подстановок. Примеры T-пространств, не являющихся T-идеалами: коммутатор $[A,A]$; множество значений центральных полиномов в алгебре общих матриц.

Понятие тождества применимо и к неассоциативной ситуации. Многие важные классы алгебр аксиоматизируются тождествами. Например, алгебры Ли определяются как класс алгебр, в которых выполняются тождество *антикоммутативности* $xy+yx=0$ и *тождество Якоби* $((xy)z)-((xz)y)-(x(yz))=0$, ассоциативные алгебры — тождеством ассоциативности $\{x,y,z\}=(xy)z-x(yz)=0$, йордановы алгебры определяются тождествами $[x,y]=0,\{x^2,y,x\}=0$, а альтернативные — условием кососимметричности ассоциатора $\{x,y,z\}$.

Исследование тождеств интересно с нескольких точек зрения. Во-первых, оно связано с проблемами канонической формы. Во-вторых, с теорией инвариантов. И в-третьих, с некоторой версией некоммутативной алгебраической геометрии. Теории полиномиальных тождеств посвящена обширная литература (см., например, монографии [159], [142], [157], [108], [12], [9], [7]). Многие специалисты в области *PI*-теории также работали в области полиномиальных автоморфизмов. Вопросам, относящимся к этим теориям посвящена монография [142].

Работая с тождествами, мы сталкиваемся с проблемами их описания. Вопросы, относящиеся к понятию канонической формы, занимают важное место в теории колец. Что касается базиса в свободных объектах из различных многообразий, то более-менее полная картина известна редко, в очень немногих случаях. Известен базис свободной ассоциативной алгебры (это тривиально), достаточно нетривиальные результаты — базис свободной алгебры Ли, базис свободной коммутативной альтернативной алгебры над полем характеристики 3 с тождествами $x^3 = 0$; $((x_1x_2)(x_3x_4))(x_5x_6) = 0$ [4], [102], а также структура базиса для нематричных многообразий (базис Шпехта). В остальных случаях имеются только частичные описания. Например, неизвестен базис в свободной альтернативной или (специальной) йордановой алгебре или в алгебре общих матриц. Кроме того, весьма содержательны и нетривиальны вопросы, относящиеся к наличию кручения в аддитивной группе.

Таким образом, важно иметь язык, на котором можно адекватно описывать некоторые существенные свойства тождеств, тем более что проблема описания нормальных форм далека от решения. Есть два взаимно–дополнительных способа задания многообразий алгебр:

1) Используя *носитель*, — предъявляя набор алгебр и рассматривая минимальное многообразие, их содержащее;

2) Предъявляя базис тождеств.

Перевод с одного языка на другой, по сути дела, есть своего рода версия некоммутативной алгебраической геометрии, поскольку первый язык более геометричен, второй — функционален.

Эти два способа описания довольно далеки друг от друга. Так, исследование тождеств матриц даже малого порядка является довольно сложной задачей. Ей посвящены работы ряда авторов. См. например [19], [20], [104], [85]. С другой стороны, нахождение алгебры, порождающей данное многообразие, также довольно трудно. Близкие к этому вопросы получения оценок на степень нильпотентности радикала до сих пор в должной мере не исследованы (а имеющиеся к данному моменту оценки далеки от реальности). Вопросы, относящиеся к получению оценок нильпотентности радикала ставились, в частности, Е. И. Зельмановым и А. В. Гришиным [33]. Поэтому программа исследований заключается в установлении взаимосвязи между этими подходами (см.раздел 3).

Поскольку нет возможности получить полное описание носителя на языке тождеств и обратно, то следует изучать перенос некоторых существенных свойств. Примером таких свойств, хорошо описывающееся на двух языках, служат различного рода асимптотики: размерность Гельфанда–Кириллова, показатель роста в ряде коразмерности. Не случайно практически все исследователи, работавшие над проблемой Шпехта, имели работы, относящиеся к асимптотическим свойствам многообразий!

Идеология доказательств конечной базируемости основано на постепенном сближении этих двух описаний, изначально далеких. С этой точки зрения можно рассматривать работы А. Р. Кемера. Можно сказать, что он построил своего рода мост и разработал язык тождеств, на котором удается выразить некоторые существенные свойства многообразий (индекс нильпотентности радикала, размерность полупростой части, сумма размера клеток полупростой части).

Кроме того, представления относительно свободных алгебр можно улучшать, рассматривая замыкание по Зарисскому и выбирая элементы общего положения в этом замыкании. Вместо безнадежной задачи изучения общих представлений возникают вполне решаемые вопросы, относящиеся к описанию существенной части структуры их замыканий. Представление алгебры приводится к следующему виду. Вдоль главной диагонали идут блоки. Ограничению на такой блок соответствует эпиморфизм на алгебру общих матриц. Под блоками идут нули. При этом блокам разного размера отвечают независимые переменные, а блоки одинакового размера могут быть *независимыми* или *однотипными*. Последнее означает, что коэффициенты при соответствующих матричных единицах связаны с помощью эндоморфизма Фробениуса. Если основное поле бесконечно, то этот эндоморфизм тождественен и коэффициенты при соответствующих матричных единицах в однотипных клетках совпадают. Возникают т.н. "матрицы со склеенными клетками". Впервые подобные рассмотрения проводились С. А. Пихтильковым [95], [96]. Он охарактеризовал многообразие, заданное всеми k-мерными ассоциативными алгебрами при $k \leq 18$, $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$ в терминах носителей. Как и в нашем случае, исследование обычных тождеств оказалось связанным с изучением разносортных тождеств и соответствующей структуры пирсовских компонент. Подробнее — см. раздел 4.

Возникает довольно любопытный набросок более тонкой теории радикала, который осуществляет связь между клетками. В радикале есть компоненты, обращающиеся в нуль при умножении на полупростую часть (таковы "внутренние части перемычек"), и компоненты, связанные с пирсами первичных компонент (граничные операторы "входа–выхода–перехода", а также "внутриклеточный радикал"). Возникает любопытная структура, состоящая из бимодулей над первичными компонентами. Ряд существенных свойств (например, свойства роста) относительно свободных ассоциативных алгебр описываются в терминах графа клеток и путей в нем.

Группы похожих клеток задают "анфиладные алгебры", устроенные как тензорное произведение алгебры матриц на полугрупповую алгебру нильпотентной относительно свободной полугруппы. Остаются, правда, вопросы, относящиеся к деталям устройства представления: изучению этих полугрупп, а также структуры перемычек, не относящихся к клеткам. Описание строения ассоциативных относительно свободных алгебр и свойств тождеств в этих терминах и было главной целью настоящей работы.

Одним из важнейших стимулов, способствовавших развитию теории нормальных форм, а также теории, связанной с рядами Гильберта и Пуанкаре, явились постановки проблем рациональности соответствующих рядов. Эти проблемы оказались проблемами "шпехтового типа". Так, К. Прочези [157] поставил следующий вопрос:

Верно ли, что функция роста относительно свободной к.п. алгебры полиномиальна?

Автор получил на него положительный ответ, и техника доказательства находилась в русле идей доказательств конечной базируемости.

Теорема (А. Я. Белов). *Ряд Гильберта относительно свободной ассоциативной алгебры есть рациональная функция.*

Ряды Гильберта изучались многими авторами. Так, рациональность рядов Гильберта для алгебры общих матриц второго порядка и для нематричных многообразий была установлена В. Дренски в работе [140]. Ряды Гильберта для алгебры общих матриц со следом вычислялись в работе Э. Форманека [145]. Отметим, что по всей видимости, даже для случая алгебры общих матриц порядка выше второго до работ автора рациональность рядов Гильберта не была установлена (см. обзор [115].

Эту теорему, как и ответы на вопросы бернсайдовского типа, можно рассматривать как частичное описание базисов. Проблемы канонической формы способствовали созданию как структурной, так и (в будущем) комбинаторной теории колец. Исследования по этой проблематике приводят к изучению тех же свойств многообразий, которые важны и в проблемах "шпехтового типа". Эти проблемы будут интересовать и нас.

0.1.1. Проблемы канонической формы

Техника канонической формы состоит в построении базиса алгебры (или хотя бы набора элементов, порождающего алгебру как векторное пространство). Возникающие здесь проблемы тесно связаны с проблемами бернсайдовского типа (ряд которых был поставлен А. Г. Курошем [65]) и проблем шпехтового типа, и взаимодействие возникающих вопросов приводит к постановке новых задач.

Лично для автора отправной точкой при исследовании по проблеме Шпехта послужило исследование канонических форм элементов в различных исчислениях. В частности, благодаря исследованию автоматных алгебр и комбинаторики, связанной с графами, автору удалось построить некий набросок теории представлений относительно свободных алгебр. А техника представлений, задаваемых графами, и позволила решить основные задачи. Отметим, что техника замыкания по Зарисскому возникла при исследовании многообразий, порожденных мономиальными алгебрами. С другой стороны, с помощью техники канонических форм В. Н. Латышев впервые доказал локальную шпехтовость для нематричных многообразий. Он же инициировал исследования в области мономиальных алгебр и конечных автоматов, которые в то время формально были не связаны со шпехтовой проблематикой, а их интуитивное родство, которое в то время проявлялось как сильная корреляция вкусов исследователей, оформилось в конкретные результаты.

Опишем коротко ситуацию с базисами алгебр. Определим несколько понятий. Элемент x *линейно представим* множеством M, если он принадлежит векторному пространству $\mathrm{Span}(M)$, порожденному M. Множество N *линейно представимо* M, если $N \subseteq \mathrm{Span}(M)$. A обычно обозначает алгебру, $a_1, \dots, a_s$ – ее образующие.

Обычное применение техники канонической формы состоит в работе с базисами, состоящими из т.н. *неуменьшаемых слов*. Порядок $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_s$ индуцирует лексикографический порядок на множестве слов. Будем говорить, что $u \prec v$ если $|u| < |v|$ либо $|u| = |v|$ и u лексикографически меньше v. Слово, не являющееся линейно представимым меньшими словами, называется *неуменьшаемым*, а множество таких слов называется *нормальным базисом* алгебры. $\deg(A)$ есть *степень алгебры* A или минимальная степень тождества, выполняющегося в A.

Первым комбинаторным результатом в этом направлении, позволившим получить прямое комбинаторное решение проблем бернсайдовского типа, явилась

Теорема А. И. Ширшова о высоте.([124], [125])

Пусть A — конечно-порожденная PI-алгебра, $m = \deg(A)$. Тогда существует конечный набор элементов Y и число $H \in \mathbb{N}$ такие, что A линейно представима (т.е. порождается линейными комбинациями) множеством элементов вида

$$v_1^{k_1} v_2^{k_2} \dots v_h^{k_h}, \quad \text{где } h \le H,\ v_i \in Y.$$

Такое множество Y называется *базисом Ширшова* алгебры A. В качестве базиса Ширшова можно взять набор слов степени не выше m. Таким образом, базис алгебры состоит из "кусочно периодических" слов. Из этого результата вытекает положительное решение проблемы Куроша, а также локальная конечность *PI*-алгебр и ограниченность размерности Гельфанда—Кириллова, поскольку число способов представления N в виде суммы $k_1|v_1| + \cdots + k_h|v_h|$, где $h \leq H$, имеет порядок N^{H-1}.

Вместо понятия *высоты* удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты.* Алгебра A имеет *существенную высоту* h над конечным множеством Y, называемым *s-базисом*, если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что A линейно представима элементами вида $t_1 \cdot \ldots \cdot t_l$, где $l \leq 2h+1$, и $\forall i (t_i \in D \vee t_i = y_i^{k_i}; y_i \in Y)$, причем множество таких i, что $t_i \notin D$, содержит не более h элементов. Отметим, что размерность Гельфанда–Кириллова оценивается существенной высотой и что s-базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает A как алгебру.

Теорема о высоте вызвала к жизни дальнейшие вопросы, относящиеся к проблемам описания базисов:

- Какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?

  Ответ таков: Множество слов Y является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда оно содержит образующие и для каждого слова длины не выше $\mathrm{PIdeg}(A)$ содержит слово, циклически сопряженное к некоторой его степени.

  Сам А. И. Ширшов показал, что можно взять множество слов степени не меньше $\deg(A)$. И. В. Львов получил оценку $\deg(A) - 1$. И. П. Шестаков и С. Амицур высказали гипотезу о том, что если все слова длины не выше сложности $\mathrm{PIdeg}(A)$ алгебраичны, то сама алгебра конечномерна. Гипотеза Амицура и Шестакова была переформулирована И.В.Львовым на матричном языке и была доказана В. А. Уфнаровским [114] и Г. П. Чекану [117]. В дальнейшем автор [165] показал, что в качестве $\{v_i\}$ можно взять множество слов из гипотезы Шестакова. Этот результат был также анонсирован Г. П. Чекану [119]. Затем другое доказательство этого факта было получено В. Дренским.

- Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту?

  Автор показал [164], что такое множество Y должно быть *курошевым.* Это означает конечномерность над $F[T]$ любого фактора алгебры $A \otimes F[T]$, в котором все проекции элементов из Y целы над $F[T]$. (Требование конечномерности гомоморфных образов с алгебраическими образами элементов из Y недостаточно. Пример: $A = F[x, 1/x]$; $Y = \{x\}$. Ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение условия целости алгебры над Y.)

- Как оценить высоту? Оценки, полученные из оригинального доказательства (см. работы [124], [125]) были далеки от реальности. Позже А. Т. Колотов [58] получил оценку $ht(A) \leq s^{s^m}$ ($m = \deg(A)$, s – число образующих). Позднее Е. И. Зельманов [33] поставил вопрос о наличии экспоненциальной оценки. В работе автора [167] было показано $ht(A) < 2ms^{m+1}$ и тем самым получен положительный ответ на этот вопрос.

- Как устроен вектор степеней $(k_1, \ldots, k_h)$?

  Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота?

  Автор [164] показал, что существенная высота у представимой (а стало быть, в силу результата А. Р. Кемера [53] и у относительно свободной) алгебры равна размерности Гельфанда—Кириллова. Тем самым размерность

Гельфанда–Кириллова представимой алгебры есть целое число (результат В. Т. Маркова), а существенная высота не зависит от выбора Y (если только для этого Y она ограничена). Этот результат и его обобщение на неассоциативный случай изложен в разделе 1.6 (в частности, там показано, что размерность Гельфанда–Кириллова представимой алгебры произвольной сигнатуры есть целое число).

- Вопрос о более тонком устройстве множества векторов степеней. Верно ли, что оно обладает теми или иными свойствами регулярности?

- И, наконец, вопрос о переносе теоремы о высоте на неассоциативный случай. С. В. Пчелинцев [101] получил аналог теоремы о высоте для альтернативных алгебр, С. П. Мищенко [92] — для алгебр Ли с разреженным тождеством. Автор доказал аналог теоремы о высоте для йордановых *PI*-алгебр.

Прежде всего нужно отметить, что базис Ширшова относительно свободной алгебры требует количества слов порядка экспоненты от сложности, при этом размерность Гельфанда–Кириллова может оцениваться полиномиально. Следовательно, между степенями слов есть достаточно сложная алгебраическая зависимость, что приводит к тому, что в случае сложности, бо́льшей 1, прямые вычисления, связанные с нормальным базисом, состоящем из слов, сами по себе оказывались мало эффективными. Требуется техника построения базисов, связанная с центральными полиномами и с достаточно продвинутой структурной теорией (см. разделы данной работы, в которых строятся экстремальные идеалы).

После известных результатов А. Р. Кемера о представимости относительно свободных алгебр могло создаться впечатление, что отсюда непосредственно вытекает регулярность устройства множества векторов степеней для неуменьшаемых слов, а, значит, и рациональность рядов Гильберта для таких алгебр. Но это только на первый взгляд. Существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Дело в том, что даже в представимом случае множество векторов степеней может быть устроено плохо — а именно, может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально–полиномиальных диофантовых уравнений.

Необходимым условием представимости является выполнение теоремы о высоте. В этом случае при некотором h слова алгебры имеют вид

$$u_1^{k_1}u_2^{k_2}\dots u_l^{k_l};$$

где $l \le h$, а $\{u_i\}$ — фиксированный набор слов. Необходимое и достаточное условие представимости для мономиальной алгебры формулируется как условие на множество векторов $\overrightarrow{k} = \langle k_1, \dots, k_l\rangle$. Оно означает, что множество таких $\langle k_1, \dots, k_l\rangle$, что $u_1^{k_1}\dots u_l^{k_l} = 0$, должно задаваться системой экспоненциальных диофантовых уравнений. А производящая функция, связанная с таким множеством, вполне может быть трансцендентной и, таким образом, существуют представимые мономиальные алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Простейшими примерами такой алгебры служат алгебра над полем характеристики 2 с образующими a, b, c и определяющими соотношениями: $0 = ab = ca = cb = c^2 = b^2$; $\{ba^{2^n}c = 0 | n \in \mathbb{N}\}$ и мономиальная алгебра над полем характеристики ноль, множество ненулевых слов которой есть подмножество подслов слов из следующего множества: $\{ba^x ca^y d | x^2 - 2y^2 \ne 1\}$.

Изучение нормальных форм для представимых алгебр представляется довольно интересной задачей, представляющей самостоятельный интерес. Она тесно связана с изучением “взвешенных следов” или пространств, порожденных элементами вида

$\sum a_i\varphi_i(y)$, где $y\in R_0$, $\{a_i\}\subset R_1$ – фиксированный набор элементов, φ_i – набор морфизмов из R_0 в R_1, R_0 и R_1 – коммутативные кольца. Близкий круг вопросов, связанных с нормальными формами — изучение старших компонент элементов коммутативных подколец, а также следующих по старшинству. Старшие компоненты описываются конечным объединением сдвигов полугруппы векторов степеней, вторые по старшинству также допускают описание, а вот вопросы, относящиеся к описанию третьих компонент, сводятся к изучению систем диофантовых уравнений.

Тем не менее, хотя ряд Гильберта представимой алгебры может оказаться трансцендентным, для относительно свободных алгебр он рационален.

И в этой связи возникает следующий

Вопрос: *Верно ли, что у относительно свободных алгебр множество векторов степеней, соответствующих неуменьшаемым словам устроено регулярно? Верно ли, что оно есть конечное объединение сдвигов конечно порожденных полугрупп векторов относительно сложения?*

Мы сейчас не можем ответить на этот вопрос, но у нас есть аргументы в пользу того, что это так и есть. Конечно, в случае нулевой характеристики ничего разумного про произвольную систему экспоненциально-диофантовых уравнений сказать нельзя. Из результата Ю. В. Матиясевича следует, в частности, что проблема изоморфизма двух представимых мономиальных алгебр, образующие которых заданы матрицами над кольцом многочленов, алгоритмически неразрешима. Тем не менее, в положительной характеристике дело обстоит по-другому! Имеет место следующая

Теорема (А. Я. Белов, А. А. Чиликов). Сылка на диссер Чиликова. *Пусть $\mathfrak{C}$ – система экспоненциально–диофантовых уравнений $Q_i=0$ с основаниями экспонент в поле (нетеровом кольце) характеристики p.*

$$Q_i(k_1,\dots,k_l)=\sum_I P_I(k_1,\dots,k_l)\prod_j \lambda_{ij}^{k_j}$$

есть экспоненциально-диофантов полином ($P_I(k_1,\dots,k_l)$ — обычные полиномы). Каждому вектору $<k_1,\dots,k_l>$ сопоставим слово $b_1\cdots b_s$ в алфавите из p^l символов: букве b_i соответствует вектор, составленный из i-х по старшинству p-ичных цифр $<k_1,\dots,k_l>$.

Тогда множеству решений системы $\mathfrak{C}$ соответствует регулярный язык.

(Язык $\mathcal{L}$ называется *регулярным*, если имеется ориентированный граф Γ, стрелки которого помечены буквами (допускаются петли и параллельные ребра), некоторые вершины которого объявлены *начальными*, а некоторые — *финальными*. При этом $\mathcal{L}$ состоит из слов, которые можно прочитать, идя по стрелкам графа из начальной вершины в финальную.)

Диофантовы проблемы в положительной характеристике чаще возникают, но легче решаются!

Итак, для положительной характеристики у представимой мономиальной алгебры множество векторов степеней у неуменьшаемых слов устроено в каком-то смысле регулярно. Известно, что если множество M чисел таково, что их p-ичные и q-ичные записи при некоторых $p\neq q$ образуют регулярный язык, то M есть объединение конечного множества и конечного набора арифметических прогрессий, т.е. хорошо устроено. Так же устроено множество нулей у линейной рекурренты над полем нулевой характеристики, а значит — и множество (одномерных) векторов степеней у представимой мономиальной алгебры A, если $\mathrm{GKdim}(A)=1$ и $\mathrm{ch}(\mathbb{F})=0$. (Если любое из этих условий не выполняется, то это уже не так.)

Автору представляется очень важным следующий

Вопрос. *Верно ли, что множество векторов степеней, соответствующее неуменьшаемым словам в произвольной представимой алгебре над полем характеристики p, образует регулярный язык?*

Допустим, что мы получим положительный ответ на этот вопрос. Тогда в силу теоремы 3.7 у всех редукций относительно свободной к.п. алгебры по достаточно большим простым модулям множества неуменьшаемых слов совпадают. Тем самым будет установлена регулярность нормального базиса для относительно свободных алгебр (т.е. что множество векторов степеней устроено как конечное объединение сдвигов к.п. полугрупп векторов по сложению).

Отметим, что и сама теорема 3.7 доказывается почти также, как и конечная базируемость систем тождеств.

К редукциям относительно свободных алгебр по простым модулям относится и

Гипотеза Прочези: *Пусть $\mathbb{M}_n$ – алгебра общих матриц над $\mathbb{Z}$. Имеется естественный гомоморфизм этой алгебры в алгебру общих матриц над $\mathbb{Z}_p$. Совпадает ли ядро этого гомоморфизма с идеалом, порожденным числом p?*

Ответ в общем случае, как показал А. Р. Кемер с учениками, отрицателен. Может так получится, что дробь x/p не лежит в алгебре, порожденной общими матрицами, но лежит в алгебре матриц со следом. Однако если p велико по сравнению с n и с числом образующих, то гипотеза Прочези (вместе с ее естественным обобщением для редукций представлений относительно свободных алгебр в виде алгебр общих элементов) все же верна. Хотелось бы иметь аналогичный результат для бесконечного числа образующих.

Вопрос. *Пусть A – относительно свободная $\mathbb{Z}$-алгебра, представимая матрицами над кольцом многочленов над $\mathbb{Z}$ (возможно, от бесконечного числа переменных), A_p – редукция представления по модулю p. Верно ли, что при всех достаточно больших p многообразия, порожденные алгебрами A_p и $\mathbb{Z}_p \otimes A$ совпадают?*

Замечание. В связи с изучением базисов матричных алгебр стоит упомянуть о "Клиффордовом" подходе, развитом в работе В. Дренским. В пространстве матриц выбирается базис $\{e_i\}$, любые два элемента которого либо коммутируют, либо антикоммутируют. Общая матрица a_j представляется в виде суммы $a_j = \sum_i \alpha_{ij} e_i$, где α_{ij} – свободные коммутативные переменные. Эти переменные упорядочиваются, и для каждого элемента алгебры общих матриц рассматривается член со старшим коэффициентом (из кольца многочленов $\mathbb{F}[\alpha_{ij}]$). Родственный подход, развитый позднее ([30], [122], [123]), был связан с рассмотрением компонент элемента, отвечающих компонентам грассмановой алгебры, и привел к построению бесконечно базируемых T-пространств.

0.1.2. Связь с теорией инвариантов и некоммутативной алгебраической геометрией

Результаты *PI*-теории привели к созданию теории некоммутативных аффинных колец и, соответственно, к версии некоммутативной алгебраической геометрии. Первым результатом в этом направлении явился аналог теоремы Гильберта о нулях — теорема Амицура о нильпотентности радикала. Ее авторская формулировка такова. Если специализировать элементы относительно свободной алгебры A в матрицы, размер которых равен ее сложности ($\mathrm{PIdeg}(A)$), всеми возможными способами, то пересечение ядер образует ниль-идеал (позднее было доказано, что этот идеал нильпотентен — теорема Размыслова–Кемера–Брауна). Аналогами теоремы Гильберта о базисе служат результаты по проблеме Шпехта. “Теорема о базисе” оказалась сложнее “теоремы о нулях”!

Идеи теории инвариантов оказывали плодотворное влияние на развитие *PI*-теории. С точки зрения полилинейных инвариантов матрица есть составной объект — вектор, тензорно умноженный на ковектор, а число можно получить из набора n векторов и n ковекторов только путем спаривания векторов с ковекторами. Если вектор A_1 спарить с ковектором A_2, вектор A_2 – с ковектором A_2 и т.д., вектор A_k – с ковектором A_1, то в результате получится $\mathrm{Tr}(A_1 \cdots A_k)$. Отсюда получается первая фундаментальная теорема, что все инварианты есть произведения следов, а все коварианты задаются многочленами со следом. n-мерность пространства, в котором живут (ко)векторы, выражается через равенство нулю результата альтернирования $n+1$ (ко)вектора, чему соответствует тождество Гамильтона–Келли. Отсюда получается вторая фундаментальная теорема, утверждающая, что все тождества алгебры матриц со следом следуют из этого тождества (см. раздел 0.2.4).

Обобщение указанных результатов для положительной характеристики, сделанное в работах С. Донкина и позднее А. Н. Зубкова, привело к прогрессу *PI*-теории в положительной характеристике. В частности, это позволило доказать, что в *PI*-алгебре над полем характеристики $p > 0$ выполняются все тождества алгебры матриц некоторого порядка.

На T-идеалы можно посмотреть с некоторой более общей точки зрения, восходящей к теории инвариантов. Прежде всего, T-идеал есть идеал свободной алгебры, замкнутый относительно всех ее эндоморфизмов. Можно изучать объекты (вообще говоря, бесконечно порожденные в обычном смысле), снабженные действием полугруппы G и, соответственно, инвариантные идеалы. Конечная порожденность в нашем смысле означает порождаемость конечным числом образующих и их образами относительно действия G. Благодаря исследованиям по проблемам шпехтового типа стало ясно, что для инвариантных идеалов строится содержательная теория, аналогичная классической теории в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии.

Этот подход оказался близок к подходам к построению некоммутативной алгебраической геометрии в универсальной алгебре, разработанным Б. И. Плоткиным и его учениками (см. [153], [154], [155], [156]). Имеется две концепции замкнутости идеалов в свободной алгебре. Первая концепция замкнутость в смысле инвариантности относительно подходящей (полу)группы (эндо)автоморфизмов, о которой мы только что говорили. Вторая концепция означает замкнутость в смысле Плоткина – т.е. в замкнутости для соответствии Галуа при морфизмах в объекты, обладающими свойствами конечности. (Это ни что иное, как представимость соответствующего идеала.) Теоремы о локальной представимости T-идеалов важны прежде всего потому, что они устанавливают изоморфизм между этими подходами.

Свойство нетеровости означает стабилизацию возрастающих цепочек инвариантных идеалов. И проблема Шпехта является аналогом теоремы Гильберта о базисе. Достаточно важным является случай, когда G есть группа перестановок, действующих на образующих, который в связи с проблемой Шпехта для нематричных многообразий изучал В. Н. Латышев [71]. Он рассматривал кольцо многочленов от бесконечного числа переменных и доказал справедливость условия обрыва возрастающих цепей для идеалов, инвариантных относительно всех перестановок образующих.

Отметим также, что при изучении T-идеалов необходимо изучать так называемые *идеалы разносортных тождеств* или идеалы многочленов от разносортных переменных. При этом подстановки должны быть согласованы сортами. Это во-первых, имеет место в ситуации, когда переменные соотносятся с граничными операторами (вход/выход/переход) или с радикальными специализациями (см. [95]), и во-вторых — в суперслучае. Таким образом, изучение цепочек T-идеалов приводит к исследовании однородных структур с иными группами преобразований. Шпехтовость класса алгебр означает достаточную силу группы преобразований. Отметим, что нет достаточно удобного языка, позволяющего переходить от тождеств алгебр к тождествам соответствующих разносортных образований, связанных с радикальными или граничными операторами.

Первичный в нашем смысле объект — это объект, для которого нет ненулевых инвариантных идеалов с нулевым произведением, а полупервичный — не содержит инвариантного идеала с нулевым квадратом. С этой точки зрения бесконечно порожденная грассманова алгебра с образующими e_i и соотношениями $e_ie_j = -e_je_i$ является первичным объектом. А. Р. Кемер ввел понятие *T-первичного* идеала. Это T-идеал, в факторе по которому нет двух ненулевых T-идеалов с нулевым произведением. Естественно определено также понятие *T-первичного многообразия* (см. раздел 2.5). Такие многообразия порождают алгебры, первичные в нашем смысле. Для T-первичных идеалов строится теория радикала, которая для ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики устроена как классическая. Интересен ее перенос в другую ситуацию, например интересно получить T-идеальный аналог теоремы Брауна в положительной характеристике. Легко проверить, что для достаточно общих многообразий значения многочлена из пересечения всех T-первичных идеалов лежат в разрешимом идеале.

В свое время, при обсуждении проблематики, связанной с *PI*-теорией, Ю. И. Манин предположил, что ситуация в целом исчерпывается рассмотрением пространства параметров, связанного с тензором структурных констант и рассмотрением пучка конечномерных алгебр на спектре коммутативного кольца. Поэтому “все сводится” к классической коммутативной ситуации.

Идеи такого рода действительно активно используются в теории *PI*-алгебр. Так, алгебра общих матриц порождает нетеров модуль над коммутативной конечнопорожденной алгеброй следов, а при локализации по некоторому центральному многочлену она становится нетеровым модулем над конечно порожденной алгеброй центральных многочленов, локализованной по этому многочлену. (Это следует из теоремы Ширшова о высоте, теоремы Артина–Прочези об алгебрах Адзумая и тождеств типа Гамильтона–Кэли.) На этом пути была установлена знаменитая теорема В. Шелтера (из которой следует нильпотентность радикала в PI_n-кольцах):

Теорема (W. Schelter). *Пусть R – первичная к.п. PI-алгебра над нетеровым кольцом Φ. I – собственный идеал в R. Тогда существуют простые идеалы $P_1, \dots, P_k \lhd R$ такие, что $P_1 \cdots P_k \subseteq I \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_k$. Кроме того, радикал алгебры R/I нильпотентен.*

Эта теорема имеет отношение к связи между идеалами кольца R и кольца коэффициентов. Интересно, что доказательство этой теоремы основано на рассмотрении критического идеала, порожденного размысловскими центральными полиномами.

Одним из наиболее ярких результатов, полученных на основе подхода, связывающего изучение алгебры с пространством параметров служит доказательство Ю. П. Размысловым теоремы об изоморфизме двух конечномерных первичных алгебр A_1 и A_2 произвольной сигнатуры над алгебраически замкнутым полем, в которых выполняются одни и те же тождества.

В алгебрах A_i выбираются общие элементы $\overrightarrow{z}_i$ путем суммирования базисных векторов $\overrightarrow{e}_j$ с коэффициентами, равными свободным переменным $\overrightarrow{e}_j = \sum x_{ij} \overrightarrow{z}_i$. Получаются относительно свободные алгебры, которые изоморфны и первичны, мы их обозначим через A^1 и A^2. Далее строится центральное замыкание и его центр алгебраически замыкается. В новой алгебре A^{cl} содержится алгебра, изоморфная A_1 (а, значит, и алгебра, изоморфная A_2). Это связано с тем, что некоторое центральное расширение A^1 (элементами матрицы, обратной к матрице (x_{ij})) содержит образующие исходной алгебры. Но, в силу полноты теории алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики, из изоморфизма расширений двух алгебр, при которых начальное алгебраически замкнутое основное поле расширяется до нового алгебраически замкнутого поля, следует изоморфизм исходных алгебр, что и доказывает теорему (см. [108]).

Весьма полезным оказывается следующее наблюдение. Многочлен от d переменных на алгебре A задает регулярное (в смысле алгебраической геометрии) отображение аффинных пространств $A^d \to A$, что позволяет работать с замыканием по Зарисскому (см. раздел 4).

"Пучковый" подход представляет достаточную ценность, даже в чисто классическом понимании, в доказательствах конечной базируемости. При этом основное значение имеет применение леммы Артина–Рисса или близких соображений.

Однако по сравнению с классической ситуацией происходят большие изменения даже при изучении локального случая.

Так, помимо "окончательных" специализаций переменных в элементы алгебры матриц есть еще "промежуточные специализации" связанные с выбором варианта приписывания того или иного "сорта", в зависимости от принадлежности той или иной компоненте алгебры (Пирсовской компоненте, радикалу, градуированной компоненте). Такие рассуждения активно используются в доказательствах представимости и конечной базируемости (см. главы 4, 5) и связаны с идеями построения бесконечно базируемых T-идеалов из T-пространств (см. главу 7).

При построении некоммутативной алгебраической геометрии путем непосредственного переноса классических конструкций надо ограничить рассмотрение "осмысленными" идеалами. Таковыми прежде всего являются "замкнутые" идеалы или идеалы, устойчивые относительно действия некоторой группы или полугруппы эндоморфизмов. Поэтому построение алгебраической геометрии для инвариантных объектов дает некоторый новый взгляд на т.н. "некоммутативную алгебраическую геометрию". По всей видимости, идея ограничения всего множества возможных идеалов замкнутыми вначале была предложена Б. И. Плоткиным.

Это впервые почувствовал В. Н. Латышев. Первоначальные работы В. Н. Латышева по тождествам алгебры Грассмана [66], [67] (им, в частности была показана локальная шпехтовость многообразия ассоциативных алгебр с тождеством $[[[x, y], z], t] = 0$) были своего рода предвестником последующих исследований. Да и сами T-пространственные примеры базируются на грассмановой конструкции. Если рассматривать PI-теорию как своего рода взгляд на некоммутативную алгебраическую геометрию, то грассманова алгебра служит одним из самых важных примеров новых объектов, являющихся аналогами первичных алгебр.

Хорошим примером служит роль грассмановых алгебр (в том числе и при построении различного рода контрпримеров), а также "супер–трюк". Благодаря работе над проблемой Шпехта на этом пути была построена модель грассмановой алгебры в характеристике 2 и начата осознаваться концепция "знака минус" в этой характеристике. Указанная алгебра имеет образующие x_i и определяющие соотношения $[x_i, x_j] = \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j$, причем для всех i ε_i лежит в центре и $\varepsilon_i^2 = 0$. (В классической грассмановой алгебре $[x_i, x_j] = 2x_i x_j$, в нашем случае двойка заменена на произведение двух нильпотентов.)

При изучении полилинейных тождеств важную роль играют мономы, линейные относительно каждой входящей в них образующей. Пусть $X = \{x_i\}$ есть бесконечное множество переменных и мы интересуемся словами, в которые каждая переменная из X входит не более одного раза. Семейство X называется *абсолютно коммутирующим*, если при любых $x_i, x_j \in X$ и при любом $C \in A$ выполняется соотношение $x_iCx_j = x_jCx_i$. Если же при любых $x_i, x_j \in X$ и $C \in A$ выполняется соотношение $x_iCx_j = -x_jCx_i$, то семейство X называется *абсолютно антикоммутирующим*.

Элементы, входящие в абсолютно коммутирующее семейство, можно "склеить", семейство X ведет себя как одна образующая. Поэтому рассмотрение абсолютно коммутирующих семейств дает мало нового. Однако абсолютно антикоммутирующие семейства создают "супер–мир". Фактически, работа с абсолютно антикоммутирующими семействами лежит в основе "супер–трюка" Кемера, позволяющего сводить изучение тождеств в бесконечно порожденных алгебрах к изучению супер-тождеств в конечно порожденных супералгебрах. Абсолютно коммутирующему семейству отвечает четная переменная, а абсолютно антикоммутирующему — нечетная.

Поскольку связь с некоммутативной алгебраической геометрией и теорией инвариантов служит одной из основных мотивировок для *PI*-теории, мы здесь наметим идею "супер–трюка"'. Подробности — см. раздел 0.2.4 и работу [51]. Напоминаем, что *идеал супертождеств* в свободной супералгебре есть идеал, устойчивый относительно всех эндоморфизмов, сохраняющих супер-структуру, т.е. $\mathbb{Z}_2$-градуировку.

Супер–трюк основан на наличии изоморфизма между решеткой T-идеалов (T-пространств) в относительно свободной бесконечно порожденной алгебре из многообразия $\mathfrak{M}$, заданного тождеством f, и решеткой T-идеалов (T-пространств) в алгебре $B = \mathbb{F} \ll x_{j1}, \dots, x_{jm}, y_{j1}, \dots, y_{jm} \gg$, свободной в классе алгебр из $\mathfrak{M}$, порожденных m бесконечными семействами абсолютно коммутирующих переменных $\{x_{js}\}, s = 1, \dots, m$, и m бесконечных семейств абсолютно антикоммутирующих переменных $\{y_{js}\}, s = 1, \dots, m$.

В нулевой характеристике, грубо говоря, ничего нет кроме супералгебр и всего того, что с ними связано. Однако в положительной характеристике групповая алгебра симметрической группы содержит много различных первичных идеалов и мир оказывается богаче. И описание T-первичных идеалов или "точек спектра" в этой версии некоммутативной алгебраической геометрии представляется одной из центральных проблем *PI*-теории.

В последнее время произошли достаточно важные продвижения в *PI*-теории. Была решена проблема конечной базируемости, построены новые серии T-первичных многообразий. Произошел значительный прогресс в теории представлений для положительной характеристики. Все эти обстоятельства имеют важное значение для развития *PI*-теории. Однако в исследовательских монографиях, даже вышедших в последние годы, отсутствуют полное доказательство конечной базируемости и техника работы с тождествами, развитая в последние годы, не отражена.

0.1.3. Проблемы конечной базируемости

В теории *PI*-алгебр центральную роль играют проблемы конечной базируемости систем тождеств, представимости. С этим кругом проблем тесно связаны проблемы рациональности рядов Гильберта, исследование базисов алгебр и проблемы Бернсайдовского типа. С точки зрения построения версии некоммутативной алгебраической геометрии и теории инвариантов очень важна проблема описания

T-первичных многообразий. Одной из центральных проблем PI-теории явилась

Проблема Шпехта: *Всякое ли многообразие ассоциативных алгебр конечно базируемо? Иными словами: всякая ли система тождеств в ассоциативной алгебре следует из своей конечной подсистемы?*

Эта проблема, поставленная В. Шпехтом в 1950 году [161], представляет интерес и для произвольных многообразий алгебр, в частности лиевых, альтернативных и йордановых. Многообразие называется *шпехтовым*, если в нем выполняется условие обрыва возрастающих цепей для T-идеалов.

Сам В. Шпехт имел в виду случай алгебр над полем характеристики ноль. А. И. Мальцев дал другое ее толкование. Вопрос, записанный им в Коуровскую Тетрадь [60], звучал так:

Проблема Мальцева: *Существуют ли не конечно базируемые многообразия ассоциативных колец (проблема Шпехта)?*

Прежде всего, проблематика делится на *локальную* (т.е. вопросы обрыва возрастающих цепей T-идеалов в конечно порожденной алгебре) и *глобальную* — общий случай. Кроме того, (см. раздел 0.2.2) имеется случай характеристики ноль (когда все тождества равносильны своим линеаризациям, а значит, и полилинейным тождествам) и случай положительной характеристики. Случай положительной характеристики делится на случай бесконечного поля (когда из тождества следуют все его однородные компоненты) и конечного поля (когда имеют место эффекты неоднородности), а также колец и алгебр над кольцами.

Кроме того, вопросы конечной базируемости естественно формулировать для T-пространств во всех этих ситуациях.

Одним из главных вдохновителей исследований по проблеме Шпехта был В. Н. Латышев. Он привлек внимание к PI-теории и к этой проблематике многих специалистов, к числу которых автор относит и себя лично, за что выражает ему благодарность. Как писали в своем обзоре Л. А. Бокуть и И. П. Шестаков [133]: "В течение многих лет проблема Шпехта была одной из наиболее любимых проблем А. И. Ширшова. В течение многих лет, В. Н. Латышев работал над этой проблемой и поддерживал интерес к ней, спасая ее от “смерти”. А. И. Ширшов, В. Н. Латышев и др. были названы Л. Роуэном “Русской школой” в теории PI-алгебр.”

Основную ценность для профессионала представляют собой не столько результаты, относящиеся к конечной базируемости, а доказательства представимости. Именно в этом и заключается цель данной работы. Под представимостью многообразий можно понимать две вещи. *Сильная представимость* означает порождаемость многообразия алгеброй, конечномерной над полем, *слабая* – вложимость относительно свободной алгебры в алгебру, конечномерную над центром. Для колец представимость, понимаемая в таком смысле, не обязательно осуществляется матрицами.

Ю. П. Размыслов [104] доказал шпехтовость многообразия алгебры матриц второго порядка над полем характеристики ноль. Позднее многообразия, связанные с матричными алгебрами, исследовались многими авторами, см. [19], [20], [61] и др.

Впервые для случая нематричных многообразий в нулевой характеристики (когда строение полупростой части тривиально, а нетривиальны связи между полупростыми компонентами) положительное решение локальной проблемы Шпехта было получено В. Н. Латышевым [71] а также Г. Геновым [18], [21], А. Поповым [100]. Техника доказательств была основана на использовании базиса Шпехта в нематричной алгебре. Позднее В. Дренски [140] с помощью той же техники показал рациональность рядов Гильберта относительно свободных алгебр в нематричных многообразиях. Для дальнейшего продвижения нужно было уметь работать внутри полупростой части, для чего потребовалась техника работы со следами (формами) а также центральными многочленами, которая была развита Ю. П. Размысловым. Кроме того, потребовалась установить нильпотентность радикала (соответствующий вопрос был поставлен В. Н. Латышевым в диссертации [71]).

Окончательное решение проблемы Шпехта в случае нулевой характеристики (т.е. в том виде, как ее понимал сам В. Шпехт) было получено А. Р. Кемером в восьмидесятые годы [52]. Он, в частности, объединил "следовую" технику с исследованием связей между первичными компонентами. Кроме того, он показал глобальную шпехтовость многообразий ассоциативных алгебр с помощью замечательного "супер–трюка", позволяющего сводить изучение тождеств бесконечно порожденных ассоциативных алгебр к тождествам конечно-порожденных *супералгебр* [51]. (Тождество в суперслучае — это полином, со своими позициями для четных, и со своими для нечетных переменных. Соответственно вполне характеристический идеал — это идеал в свободной супералгебре, устойчивый относительно всех эндоморфизмов, сохраняющих супер–структуру.)

В 1990 году А. Р. Кемер [55] установил локальную конечную базируемость и сильную локальную представимость относительно свободных алгебр над бесконечным полем. Над конечным полем сильная представимость места не имеет (простейший пример — многообразие, порожденное полупрямым произведением $\mathbb{M}_n(\mathbb{F}[x]) \rtimes \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$). Тем не менее локальная представимость имеет место в общем случае, и это один из центральных результатов данной работы.

Рядом авторов исследовалась неассоциативная тематика, связанная с проблемами шпехтового типа. В. Дренски [34] и M. R. Vaughan–Lee [162] показали нешпехтовость многообразия алгебр Ли в случае положительной характеристики. Позднее были построены примеры бесконечно базируемых многообразий и альтернативных алгебр. Для характеристики 2 это сделал Ю. А. Медведев [89]. Для характеристики 3 соответствующие примеры были получены С. В. Пчелинцевым [102].

В неассоциативном случае также работала техника А. Р. Кемера. Так, А. Я. Вайс применил "супер–трюк" для многообразия, порожденного специальной алгеброй Ли [15], А. Я. Вайс и Е. И. Зельманов [16] доказали локальную шпехтовость йордановых *PI*-алгебр в нулевой характеристике. Аналогичный результат для альтернативных алгебр был получен А. В. Ильтяковым [46]. Им же была установлена шпехтовость многообразия, порожденного конечномерной алгеброй Ли [147], [47].

При этом локальная представимость альтернативных и йордановых *PI*-алгебр так и не была установлена. Трудность заключается в отсутствии аналога результата Ж. Левина о произведении идеалов, поэтому выполнимость всех тождеств некоторой конечномерной алгебры в этом случае пока не установлена. Поэтому доказательства шпехтовости идут обходными путями.

Для поля нулевой характеристики в общем случае (не обязательно конечного базисного ранга) А. Р. Кемер показал, что всякое многообразие ассоциативных алгебр порождается грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры (т.е. порождается алгеброй вида $A_0 \otimes \mathbb{G}_0 + A_1 \otimes \mathbb{G}_1$). Тем самым оно представимо алгеброй матриц над грассманианом. В частности, T-первичные многообразия порождаются грассмановой оболочкой простых конечномерных супералгебр $\mathbb{M}_{n,k}$ или имеют вид $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G}$. (Последняя алгебра также является грассмановой оболочкой простой супералгебры $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{K}[T]$, где $\mathbb{K}[T]$ есть групповая алгебра группы из двух элементов с естественной градуировкой.) Отметим, что техника А. Р. Кемера дает также доказательство локальной конечной базируемости T-пространств в PI-алгебре над полем нулевой характеристики. Более популярное изложение теоремы Кемера можно найти в докторской диссертации А. В. Ильтякова [49] а также в работе [147].

И. П. Шестаков говорил, что только после работ А. Р. Кемера он стал с уважением относиться к "супер–теории". В дальнейшем И. П. Шестаков обнаружил, что грассмановы оболочки супералгебр позволяют строить разного рода контрпримеры. А именно, в неассоциативной теории часто рассматривались многочлены, в которых все переменные можно было разбить на несколько групп попарно антикоммутирующих. (Таким свойством часто обладают экстремальные многочлены в разрешимых альтернативных алгебрах, составленные из длинных ассоциаторов.) В этом случае проверку того, что соответствующая серия многочленов не обращается в нуль, можно проводить на модели, являющейся грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры [121]. Например, таким путем можно объяснить пример Г. В. Дорофеева разрешимой индекса 2, но не нильпотентной альтернативной алгебры. В последующем С. В. Пчелинцев [102] и его ученик А. В. Бадеев [3], [4] применили грассманову технику к построению нешпехтовых многообразий альтернативных алгебр. В частности, А. В. Бадеев показал, что в случае $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 3$ многообразие коммутативных ассоциативных алгебр с тождествами

$$x^3 = 0,\ [(x_1x_2 \cdot x_3x_4)(x_5x_6)]x_7 = 0$$

не является шпехтовым. Заметим, что в случае, когда $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) \neq 2,3$ многообразие разрешимых альтернативных алгебр шпехтово. Им были указаны две системы неприводимых тождеств

$$g_{18n+3} = (xx_1 \dots x_{2n} \cdot xz_{2n+1} \dots x_{4n})xx_{4n+1} \dots x_{6n-1}x,$$
$$f_{18n+3} = (xx_1 \dots x_{6n-2} \cdot xy_1 \dots y_{6n-2})xz_1 \dots z_{6n+3}x.$$

С помощью системы многочленов f_{18n+3} была построена неприводимая система тождеств в коммутативной луппе Муфанг с тождеством $x^3 = 1$:

$$h_{18n+3} = [[x, x_1, \dots, x_{6n+2}], [x, y_1, \dots, y_{6n-2}], [x, z_1, \dots, z_{6n-1}, x]] = 1\ .$$

Неприводимость систем многочленов g_{18n+3} и f_{18n+3} обусловлена тем, что каждое *собственное* следствие (т.е. имеющее бóльшую степень) обращается в нуль.

В дальнейшем грассманова техника позволила строить контрпримеры и в ассоциативном случае. Доказательство неприводимости систем ассоциативных многочленов основано на следующем соображении: рассматриваемая система $\{E_n\}$ (или $\{F_n\}$, см. ниже) есть линейная комбинация p-слов, а каждое собственное следствие из линеаризации ϕ_i, являющееся линейной комбинацией p-слов, также нулевое по модулю $[[x, y], z]$.

Интересно, что впервые стал систематически изучать тождества, связанные с грассмановой алгеброй, В. Н. Латышев [66], [67].

Локальный случай положительной характеристики для бесконечного основного поля был положительно решен А. Р. Кемером [55]. Он показал даже несколько больше, чем представимость, а именно, что всякое многообразие, порожденное PI-алгеброй с конечным числом образующих над бесконечным полем порождается конечномерной алгеброй. Отметим, что для случая конечного поля аналогичное утверждение (порождаемость R-алгеброй, являющейся нетеровым R-модулем) перестает быть верным, как показывает пример полупрямого произведения алгебры матриц над конечным полем на алгебру матриц над кольцом многочленов. (Определение полупрямого произведения — см. в разделе 0.2.)

А. В. Гришин [28] (см. также [26]) разработал метод, существенно отличный от метода А. Р. Кемера, позволяющий доказывать локальную конечную базируемость для T-пространств в PI-алгебре. Этот метод (θ-техника), восходящий к теореме Левина, был основан в бо́льшей степени на прямых комбинаторных рассуждениях с многочленами и в меньшей мере на свойствах носителей. А. В. Гришин рассматривал конструкцию расширения полупервичной алгебры радикальными элементами и в нем — T-пространства и T-идеалы. Образующие x_i представлялись в виде суммы полупростых частей $\overline{x}_i$ и радикальных частей θ_i. На каждой из этих частей определялось действие операторов подстановки.

В отличие от нашей ситуации (и, хотя это не так очевидно, от метода А. Р. Кемера), главную роль играет действие операторов подстановок на полупростых компонентах (дальнейшее обсуждение — см. раздел 4.6.3). На наш взгляд, ценностью данного метода, выявляемой при переносе на неассоциативную ситуацию, является прояснение роли структурируемости (возможности представления алгебры в виде суммы радикала и первичной части) в проблемах шпехтового типа.

Структурируемость влечет богатство подстановок. В известных автору конструкциях бесконечно базируемых многообразий действие нетривиальных подстановок почти всегда приводило к нулевому результату. Несколько особняком стоят примеры бесконечно базируемых ассоциативных многообразий.

Недостатками данного метода являются привязка к нулевой характеристики а также некоторая “грубость”, не позволяющая доказывать рациональность рядов Гильберта. С другой стороны, благодаря той же грубости нет необходимости отдельно рассматривать первый и второй основные случаи (т.е. случаи наличия и отсутствия смешанных элементов).

В течение долгого времени предполагалась положительность решения проблемы Шпехта и в глобальном случае. Эта убежденность основывалась на следующих обстоятельствах. Во-первых, автору удалось вывести следующую теорему:

Теорема. *В случае характеристики $p > 0$ в любой относительно свободной алгебре выполняются все тождества алгебры матриц некоторого порядка.*

Эта теорема обеспечивает наличие стартовой алгебры A_0. Отметим, что в случае нулевой характеристики аналог этой теоремы не имеет места: в любой конечнопорожденной алгебре выполняется тождество Капелли некоторого порядка, а в Грассмановой алгебре — нет.

Второе обстоятельство было связано с тем, что для инвариантных идеалов в некоторых бесконечно-порожденных алгебрах справедливы свойства обрыва возрастающих цепей и стало более – менее понятно, как строить теорию, являющуюся прямым аналогом классической коммутативной алгебры. Была надежда получить положительный результат в проблеме Шпехта, применив эту теорию.

Аналогом первичных алгебр (“матричных клеток”) должны были играть T-первичные алгебры.

Однако “глобальная” ситуация оказалась иной и реализация этой программы столкнулась с препятствием. Именно оно в дальнейшем и помогло при отрицательном решении проблемы Шпехта, позволив перейти от T-пространств к T-идеалам. (Автор убежден, что иного способа сделать такой переход не существует). Дело в том, что количество вхождений “T-первичной” компоненты в произведение может оказаться сравнимым с нулем по модулю p и действие подстановок на радикальных обкладках, связывающих различные “T-первичные клетки”, может оказаться невозможным. С этой трудностью автор столкнулся в конце 1996 года, и ее понимание позволило построить бесконечно базируемые T-идеалы.

Осталась возможность осуществлять подстановки внутрь “клеток”. С осени 96 — до января 97 г. автор работал над этим и пришел к необходимости исследования конечной базируемости T-пространств в алгебрах с тождеством следующего вида:

$$x_0 \cdots x_n = \sum_{\sigma(0)\neq 0} x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

Такое тождество позволяет "засасывать" переменные вглубь и обеспечивает локальную нетеровость. Им обладает алгебра Грассмана. Однако именно в ней совершенно неожиданно для всех А. В. Гришин [27], [143] обнаружил контрпример для T-пространств!

По всей видимости, впервые пример бесконечно базируемого T-идеала над произвольным полем характеристики $p > 0$ был приведен автором и публично доложен на семинаре по теории колец. Пример заключается в следующем:

$$R_n = [[E,T],T] \prod_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i) \left([T,[T,F]][[E,T],T]\right)^{q-1} [T,[T,F]],$$

где $Q(x,y) = x^{p-1}y^{p-1}[x,y]$

Пример основывался на конструкциях бесконечно базируемых T-пространств, предложенных А. В. Гришиным и В. В. Щиголевым. Впоследствии и другие участники семинара построили аналогичные примеры [30], [123].

Замыкание по Зарисскому представимой алгебры обладает тем же запасом тождеств, а с другой стороны является более удобным объектом, поскольку содержит полупростые и радикальные части каждого элемента в отдельности, а также все первичные компоненты. Сочетание концепции экстремального идеала с организацией структуры нетерова модуля путем действия подстановок на радикальных обкладках, соединяющих полупростые элементы разных типов, позволило доказать локальную представимость, а вместе с ней и локальную шпехтовость. Автор установил следующий факт:

Теорема. *Любая цепочка T-идеалов в ассоциативном конечно порожденном кольце стабилизируется.*

Этот факт верен и для алгебр над ассоциативно коммутативным нетеровым кольцом Φ.

Обозначим через $K \triangleleft \Phi$ идеалов коэффициентов тождеств. Основной результат данной работы состоит в следующем:

Теорема. *Относительно свободная конечно порожденная алгебра над произвольным нетеровым ассоциативно коммутативным кольцом Φ (в частности, PI-кольцо — $\mathbb{Z}$-алгебра) представима тогда и только тогда, когда $K \ni 1$.*

А. И. Мальцев [79] сделал такое наблюдение. Поскольку ассоциативно–коммутативная алгебра финитно аппроксимируема, то тем же свойством обладает алгебра матриц над ней, а стало быть, любая представимая алгебра. Из предыдущей теоремы и результатов раздела 6.1.2 вытекает следующий результат

Теорема (Гипотеза Л. А. Бокутя и И. В. Львова [33]). *Относительно свободная конечно порожденная алгебра над произвольным нетеровым ассоциативно коммутативным кольцом Φ (в частности, PI-кольцо — $\mathbb{Z}$-алгебра) финитно аппроксимируема.*

Путь доказательства локальной представимости колец таков: локальная конечная базируемость для алгебр $\Rightarrow$ локальная представимость для алгебр $\Rightarrow$ локальная конечная базируемость для колец $\Rightarrow$ локальная представимость для колец.

(Локальная конечная базируемость легко выводится из локальной представимости с помощью рассуждений, приведенных в работе [53].)

Поскольку процесс сближения многообразия с носителем может быть сделан конструктивным (что автору не представляется тривиальным, см. раздел 6.3), имеет место следующее утверждение:

Теорема (Проблема Мальцева). *Существует алгоритм проверки следования тождества из данного конечного набора тождеств.*

Замечание. Сам А. И. Мальцев ставил вопрос так [33]:

Существует ли конечно–аксиоматизируемое многообразие колец, система всех тождественных соотношений которого нерекурсивна?

Указанный алгоритм означает, что такого многообразия нет.

Тем самым множество тождеств ассоциативного кольца рекурсивно. Отметим, что уже для тождеств в группах такого алгоритма, как показал Ю. Клейман [56], [57], не существует.

Для T-пространств ситуация такова. В локальном PI-случае характеристики ноль локальную конечную базируемость можно получить методом А. В. Гришина, с привлечением алгебро-геометрических соображений, предложенных автором (применением леммы Артина-Рисса). В случае характеристики ноль глобальная конечная базируемость для T-пространств была установлена В. Щиголевым, подход которого сочетал идеи А. Р. Кемера и А. В. Гришина.

А. В. Гришин впервые построил пример бесконечно базируемого T-пространства над произвольным полем характеристики 2 по модулю T-идеала $\mathrm{T}([x,[y,z]])$. Пример А. В. Гришина выглядит очень просто и представляет собой набор произведений квадратов:

$$\{F_n\} = \{x_1^2, x_1^2x_2^2, \dots, x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2, \dots\}$$

Но интересно, что если $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p > 2$, то аналогичное T-пространство

$$\{x_1^p, x_1^px_2^p, \dots, x_1^p \cdot \ldots \cdot x_n^p, \dots\},$$

которое предлагалось в качестве примера бесконечно базируемого T-пространства в произвольной характеристике, как показал В. В. Щиголев, будет конечно базируемым даже в абсолютно свободной алгебре.

Тем не менее, используя грассмановы конструкции, В. В. Щиголев построил бесконечно-базируемое T-пространство для произвольного p. Он показал, что система полиномов

$$\{E_n\} = \{Q(x_1,y_1), Q(x_1,y_1)Q(x_2,y_2), \dots, Q(x_1,y_1) \cdot \ldots \cdot Q(x_n,y_n), \dots\},$$

где $Q(x,y) = x^{p-1}y^{p-1}[x,y]$, бесконечно-базируема по модулю $\mathrm{T}([x,[y,z]])$ как T-пространство [122].

Неожиданно оказалось, что в локальном случае ситуация с T-идеалами и T-пространствами различна. Как показал В. В. Щиголев, даже в случае двух образующих, бесконечного основного поля характеристики p и тождества $[[x,y],z] = 0$ система полиномов $Q_s = x^{p^s-1}y^{p^s-1}[x,y]$ бесконечно базируема. (А все T-идеалы в локальном случае — конечно базируемы. Более того, конечно-порожденная алгебра с тождеством аменабелевости нетерова!) Этот пример проливает свет на то обстоятельство, что при доказательствах конечной базируемости (в частности А. Р. Кемером) особо разбирается случай, когда промежуточный носитель

— алгебра A_i не содержит смешанных элементов. Именно тогда и работают с умножениями а алгебре, а не с подстановками.

Доказательство бесконечной базируемости основано на подходе, связанном с конструкциями представлений относительно свободных алгебр, развитом при доказательстве конечной базируемости и локальной представимости (что является основой данной диссертации) (см. главу 4). Благодаря этим конструкциям возникла "идеология p клеток и p запирающих прокладок" или модели "алгебры верхнетреугольных матриц над грассманианом с p склеенными клетками". По мнению автора, создание этой модели позволило построить пример бесконечно-базируемого T-идеала, хотя до этого анонсировались и предпринимались попытки построения такого примера. Есть некоторое неформальное предположение, строгую математическую формулировку которого хотелось бы получить. Верно ли, что любая бесконечная базируемость в T-идеалах объясняется "клетчатыми эффектами", описанными в начале последнего параграфа? Верно ли, что когда этих эффектов нет, то наблюдается конечная базируемость? Все известные ему контрпримеры автор может объяснить этими эффектами.

Пока мы в состоянии сформулировать только некоторые частные гипотезы. После получения T-пространственного примера были "наивные" попытки получить T-идеальную конструкцию. В работе [29] была анонсирована в качестве контрпримера к проблеме Шпехта следующая система полиномов

$$H_n = z_1^4 \cdot \prod_i \cdot x_i^2 z_2^4.$$

Однако, как показал В. В. Щиголев, эта система оказывается конечно базируемой (даже если вместо $4 = 2^2$ поставить любую степень двойки). В дальнейшем предлагались в качестве контрпримера системы типа

$$G_n^{(k)} = z^{2^k} \cdot \prod_i x_i^2 \cdot z^{2^k}.$$

Можно высказать следующую гипотезу:

Гипотеза. *Верно ли, что при любом k система многочленов $G_n^{(k)}$ конечно базируема?*

Немного о технике доказательств конечной базируемости. Если относительно свободную алгебру расширить коэффициентами характеристических многочленов ее элементов, то получится алгебра нетерового типа. Коэффициенты характеристических многочленов выражаются через следы (формы в положительной характеристике). Поэтому строят T-идеал в исходной алгебре, устойчивый относительно умножения на следы (формы). Концепция *экстремального T-идеала* лежит (явно или неявно) в основе почти всех работ по проблемам шпехтового типа. Ищут критический идеал (conductor) $I \neq 0$ такой, что

1) I есть нетеров модуль над некоторым ассоциативно-коммутативным кольцом R, причем структура модуля согласована со структурой алгебры.

2) Фактору A/I соответствует меньший набор индукционных параметров (меньшая сложностная характеристика).

Например, в силу равенства $H_A = H_I + H_{A/I}$, если критический идеал I построен, то доказательство рациональности ряда Гильберта алгебры A сводится к случаю фактор-алгебры.

При изучении произвольного T-идеала $\Gamma \supset \mathrm{T}(A)$ строится критический T-идеал $\mathrm{T}(A) \neq \Gamma^0 \subseteq \Gamma$, устойчивый относительно умножения на следы (формы или обладающий структурой нетерового модуля над некоторым иным кольцом S) или "максимальный замкнутый T-идеал, содержащийся в Г.

В некоторых случаях умножение на идеал I обращает в нуль препятствие к представимости (см. предложение 0.9, являющееся переформулировкой результата К. А. Зубрилина [42]). Иногда можно рассматривать экстремальный идеал, порожденный полилинейными тождествами (см. разделы 3.3 и 3.4.1, посвященные доказательству рациональности рядов Гильберта методом А. Р. Кемера).

В данной работе используется более явная конструкция экстремального идеала, основанная на исследовании взаимодействия первичных компонент в матричной алгебре.

Концепцию критического идеала можно понимать шире. С некоторой точки зрения, это основной комбинаторный подход в теории колец, который можно называть "цокольным". Ряд работ Ю. П. Размыслова основываются на следующем факте: полиномы Капелли порядка n^2 в алгебре матриц порядка n образуют экстремальный T-идеал, устойчивый относительно умножений на следы (формы) (см. теорему). К. А. Зубрилин рассматривал идеал, порожденный C_n по модулю C_{n+1}. При этом оказалось возможным определить следы внутренним образом (см. предложение 0.9 а также [42]). Это дает возможность получить более короткое доказательство теоремы Брауна о нильпотентности радикала.

А. Р. Кемер работал с T-идеалом, порожденным многочленами вида $S_{\Lambda_0}S_{\Lambda_1}\cdots S_{\Lambda_k}f$, где $|\Lambda_i| = b(A)+1$ при $i>0$ и $|\Lambda_0| = b(A)$, $k = c(A)-1$, S_Λ обозначает альтернирование по переменным из набора Λ. (Наборы Λ_i при $i>0$ "поглощают радикал", и при этом набор Λ_0 позволяет умножать на следы.) Такие многочлены мы будем называть *многочленами Кемера.* На многочлены Кемера переносится вся техника работы с тождествами Капелли.

В. Н. Латышев (а затем В. Дренский) работали с каноническими формами экстремального идеала в нематричном случае — с базисом Шпехта максимальной ненулевой степени коммутатора, т.е. максимальной ненулевой степени радикала. С точки зрения концепции экстремального идеала можно смотреть и на метод *сэндвичей* — основной метод при решении проблем бернсайдовского типа в алгебрах Ли [40], [163], [59]. Отметим, что и А. В. Гришин рассматривал элементы "максимальной θ-степени", т.е. лежащие в максимальной ненулевой степени радикала [26], [28].

Для работы в ситуации произвольного поля нужна иная конструкция критического идеала, лучше отражающая взаимодействие первичных компонент в ассоциативной алгебре с помощью радикала. Представление относительно свободной алгебры оказывается эквивалентно представлению следующего вида: вдоль главной диагонали идут блоки или *клетки*, под ними — нули. Ограничению на клетку отвечает эпиморфизм на алгебру общих матриц. Клетки бывают *похожими* — когда в них стоят одинаковые элементы, *однотипными* — связь через автоморфизм Фробениуса, и *независимыми* — когда на соответствующих позициях стоят независимые переменные.

Экстремальный идеал описывает процесс последовательного прохождения клеток. Он порождается полиномами вида $\sum\prod H_{1i}R_iC_{n_i^2}H_{2i}$, где множители H_{1i} и H_{2i} отвечают входам и выходам из системы однотипных клеток, а полином Капелли $C_{n_i^2}$ позволяет умножать на формы. Произведение означает прохождение систем однотипных клеток, т.е. при любой специализации переменных в ненулевых слагаемых должны присутствовать специализации, соответствующие всем проходимым клеткам, а среди переменных, входящих в H_{1i} и H_{2i}, – граничные операторы, относящиеся к системам клеток.

На локальный случай проблемы Шпехта есть и другой взгляд. Неоднократно многими авторами (А. Брауном, Ю. П. Размысловым и др.) ставился вопрос о конечной базируемости тождеств алгебры матриц над полем положительной характеристики. (Особенно подчеркивался случай алгебры матриц второго порядка.) Следующие вопросы образуют несколько более общую гипотезу.

1. *Верно ли, что любое многообразие, порожденное конечно порожденной алгеброй, конечно базируемо?*

2. *Верно ли, что любое многообразие конечного базисного ранга конечно базируемо?*

В частности,

Верно ли, что многообразие, порожденное алгеброй матриц, конечно базируемо?

Ответ неизвестен даже для матриц второго порядка.

В чем автор видит свою заслугу?

Во-первых, она состоит в построении теории представлений относительно свободных ассоциативных алгебр в терминах графа клеток. Автоматная идеология была объединена с PI-теорией. Были обнаружены эффекты “похожести” и “разнотипности” и понята существенная часть структуры представления. Построение этой теории привело автора, в частности, к созданию “идеологии p клеток и p запирающих прокладок” или модели “алгебры верхнетреугольных матриц над грассманианом с p склеенными клетками”. По мнению автора, создание этой модели позволило построить пример бесконечно-базируемого T-идеала, хотя до этого анонсировались и предпринимались попытки построения такого примера. Заслуга автора при построении контрпримера состояла в переходе от T-пространств к T-идеалам и в переносе результатов А. В. Гришина и В. В. Щиголева на этот случай.

С другой стороны, вся работа в локальном случае основана на теории представлений и на развитии подхода Кемера при описании структуры в терминах тождеств. Был предложен подход описания представления с точностью до замыкания по Зарисскому, который оказался эффективным.

Во-вторых, был осуществлен перенос алгебро-геометрической идеологии. Она может проявляться в разной упаковке: применение леммы Артина-Рисса или пучковые рассуждения или — R-замкнутые T-идеалы. Эта идеология позволяет контролировать потерю равносильности при промежуточных подстановках.

В-третьих, автором была осознана идеология экстремального идеала.

И наконец, автор предложил контролировать ключевые позиции — межклеточные переходы и через них осуществлять действие нетерового кольца (а не через полупростые вхождения, как у А. В. Гришина).

0.1.4. Структура и объем работы

Перейдем к обсуждению содержания работы.

Первый параграф введения посвящён проблематике, связанной с PI-теорией. В его первом пункте обсуждаются вопросы, относящиеся к изучению канонических форм алгебр. Второй посвящен обсуждению связи с теорией инвариантов и некоммутативной алгебраической геометрией. Третий — собственно проблемам конечной базируемости и локальной представимости. В четвертом обсуждается структура и объем работы.

Во втором параграфе излагаются подготовительные сведения и конструкции, нужные для дальнейшего. Первый пункт посвящен представлениям алгебр, во втором излагается техника линеаризации. В третьем пункте изучаются свойства оператора следа (форм) и приводятся соотношения Ю. П. Размыслова для многочленов Капелли. В четвертом — представления симметрической группы и Кемеровский “супер–трюк”. Отмечается, что из результатов А. Р. Кемера [148] об изоморфизме множества полилинейных слов, не являющихся n-разбиваемыми, и базиса многочленов для алгебры общих матриц со следом размера n, а также работы Э. Форманека [145], в которой вычисляются соответствующие размерности, получается перечисление множества полилинейных не n-разбиваемых слов.

Первая глава посвящена комбинаторике слов, проблемам канонической формы и связанным с ними вопросам теории представлений. Вначале изложены некоторые вспомогательные конструкции, относящиеся к технике работы со словами.

Первый параграф посвящен применению методов символической динамики к проблемам теории колец. В терминах равномерно рекуррентных слов дается построение теории радикала для мономиальных алгебр, доказывается совпадения ниль–радикала и радикала Джекобсона (решение известного вопроса, поставленного еще в обзоре В. А. Уфнаровского [115], описываются слабо нетеровые мономиальные алгебры.

Второй параграф посвящен представлению мономиальных алгебр. С этим связаны важные технические аспекты теории нормальных форм. Описание многообразий мономиальных алгебр дает технику, которая необходима при исследовании проблем бернсайдовского типа.

Основные результаты данного параграфа — критерий представимости мономиальной алгебры и построение представимых алгебр с трансцендентным рядом Гильберта. Тем самым показывается, что рациональность рядов Гильберта относительно свободных алгебр (проблема Прочези) не вытекает из их локальной представимости. Заодно устанавливается, что проблема изоморфизма двух подалгебр алгебры матриц над кольцом многочленов, заданных образующими, алгоритмически неразрешима.

Третий параграф посвящен изучению нормальных базисов алгебр и проблемам бернсайдовского типа. В нем дается доказательство экспоненциальных оценок на высоту алгебр (ответ на вопрос Е. И. Зельманова из Днестровской тетради), дается более короткое доказательство теоремы о независимости с помощью техники сверхслов, а также доказательство ограниченности высоты алгебры над множеством слов степени не выше сложности.

Хотелось бы особо отметить доказательство теоремы 1.45:

Теорема. *Множество лексикографически неуменьшаемых слов в PI-алгебре A имеет ограниченную высоту над множеством слов, степень которых не превышает сложности алгебры A.*

Это доказательство проясняет глубинные связи между структурной и комбинаторной теориями.

Четвёртый параграф посвящен процедуре перекачки, разработанной автором. Эта процедура позволяет посмотреть с единой точки зрения на ряд вопросов комбинаторной теории PI-колец. С помощью этой процедуры доказывается следующая

Теорема. *Если Y есть курошево множество (т.е. любая проекция любого центрального расширения, для которой образы всех элементов из Y целы над центром, конечномерна над центром), то алгебра имеет ограниченную существенную высоту над Y.*

Кроме того, получаются экспоненциальные оценки на высоту над множеством слов степени не выше сложности, а также теорема А. Д. Чанышева о нильпотентности $\mathbb{N}$-градуированных алгебр, у которых все однородные элементы нильпотентны ограниченного индекса.

Пятый параграф посвящен изучению размерности Гельфанда–Кириллова. В нем показано, что размерность Гельфанда–Кириллова равна существенной высоте, и кроме того, размерность Гельфанда–Кириллова представимой алгебры произвольной сигнатуры есть целое число.

Вторая глава посвящена технике работы с многочленами типа Капелли, полилинейными и кососимметричными относительно нескольких групп переменных. В первом параграфе осуществляется перенос техники работ [42], [43] (восходящих к статье [107]) на такие многочлены. Основной технический аппарат, развитый в этой главе, заключается в построении представимых пространств, а также "утончения альтернаторов", и изложен во втором и третьем параграфах.

В четвертом параграфе данная техника используется для решения проблемы, поставленной L. Small'ом. Доказывается следующая

Теорема. *Нетеровы конечно–порожденные PI-алгебры конечно определены.*

В пятом параграфе показано, что в T-первичных многообразиях ассоциативных алгебр имеются ненулевые формы. Основная теорема, доказанная в этом параграфе, заключается в следующем:

Теорема. *T-первичное многообразие ассоциативных алгебр унитарно замкнуто, и в нем существует центральный полином и слабое тождество.*

Унитарная замкнутость T-первичных многообразий над полем произвольной характеристики была впервые установлена А. Р. Кемером несколько другим путем. Как следствие, получается ответ на известный вопрос И. В. Львова из Днестровской тетради [33]:

Существует ли PI-алгебра A, совпадающая со своим коммутатором $[A, A]$?

Показывается, что такой алгебры не существует. (Ассоциативные алгебры, совпадающие со своим коммутатором, существуют.)

В шестом параграфе показано, что в случае положительной характеристики в любом многообразии ассоциативных алгебр выполняются все тождества алгебры матриц некоторого порядка. Седьмой параграф посвящен тождеству алгебраичности. Многие результаты данной главы можно получить, используя вместо многочленов Капелли это тождество. Доказано его выполнимость.

Третья глава посвящена общей концепции экстремального идеала и методу Кемера. Помимо общего подхода и изложения метода Кемера (чему посвящены первые два параграфа), в ней дается решение известного открытого вопроса, поставленного еще К. Прочези — доказательство рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр методом А. Р. Кемера (см. третий параграф).

В четвертом параграфе изучается метод А. Р. Кемера для положительной характеристики, в частности, редукция по простому модулю. В нем показано, что при достаточно большом p ряды Гильберта у конечно порожденной $\mathbb{Z}$-алгебры и ее редукции по модулю p совпадают. К сожалению, оценки на p зависят от числа образующих.

Пятый параграф посвящен рядам Гильберта для T-пространств. В нем показано, что ряд Гильберта T-пространства в относительно свободной алгебре рационален, а ряд Гильберта T-пространства в абсолютно свободной s-порожденной ассоциативной алгебре либо рационален, либо его разность с рядом Гильберта коммутатора абсолютно свободной алгебры с тем же числом образующих есть рациональная функция. Доказательство существенно использует результаты В. В. Щиголева.

Четвертая глава посвящена представлению относительно свободных алгебр. Основная техника состоит в замыкании по Зарисскому, построению и изучению улучшенных представлений. Если алгебра представима, то ее замыкание по Зарисскому имеет тот же запас тождеств. Таким образом, возникают достаточно интересные вопросы, связанные с описанием таких замыканий или хотя бы получении некоторой информации.

В первых трех параграфах показано, что можно выбрать базис в пространстве представления таким образом, что все элементы алгебры будут иметь следующий вид: вдоль главной диагонали идут блоки, под блоками — нули, и система уравнений, связывающие элементы в блоках, имеет вид

$$(x_{ij}^{(\alpha)})^{q_\alpha} = (x_{ij}^{(\beta)})^{q_\beta}$$

(компоненты при соответствующих матричных единицах связаны по Фробениусу). Кроме того, для элементов $x_{ij}^{(\alpha)}$ при матричных единицах для некоторых r_α могут выполняться уравнения

$$(x_{ij}^{(\alpha)})^{r_\alpha} = x_{ij}^{(\alpha)},$$

и других соотношений на компоненты полупростых частей быть не может. При этом для любого $z \in \mathbb{F}$ и при всех α выполняется тождество $z^{q_\alpha} = z^{r_\alpha} = z$. В частности, если основное поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то тогда все q_α и r_α равны единице.

В четвертом параграфе изучается взаимодействие между клетками. Возникает граф Γ, вершины которого символизируют клетки и дополнительные эффекты связаны с "гашением" путей. Пятый параграф посвящен описанию возникающих эффектов на языке тождеств.

В шестом параграфе изложено другое доказательство рациональности рядов Гильберта и обсуждается общая "идеология" доказательств представимости и конечной базируемости.

В седьмом параграфе дается описание нетеровых, конечно определенных и слабо нетеровых относительно свободных алгебр в терминах графа Γ (для случая произвольной характеристики).

Если четвертая глава посвящена исследованию носителей, то **в пятой главе** развивается двойственный функциональный язык и осуществляется перевод некоторых основных свойств с функционального языка на язык носителей.

В первом параграфе излагается доказательство локальной конечной базируемости T-пространств над полем нулевой характеристики методом А. В. Гришина вместе с исправлениями и модернизацией, которую внес автор (применение леммы Артина–Рисса). Данный параграф во многом носит иллюстративный характер. В нем также доказывается следующая

Теорема (А. Я. Белов [170]). *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие моноассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, любая конечно порожденная алгебра из которого имеет ограниченную высоту над образующими. Тогда $\mathfrak{M}$ – шпехтово (более того, все T-пространства в $\mathfrak{M}$ конечно базируемы) и ряд Гильберта любой относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ рационален, а сами относительно свободные алгебры локально представимы.*

Второй и третий параграф посвящены технике "расталкивающих замен". В них также развивается алгебро–геометрическая техника доказательств конечной базируемости.

Четвертый параграф посвящен вычислению размерности Гельфанда–Кириллова для относительно свободных алгебр и для T-идеалов. Показано, что размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободной алгебры A определяется только ее сложностным типом (набором полупрямых произведений алгебр матриц над кольцом многочленов из $\mathrm{Var}(A)$). Доказывается следующая

Теорема. *Пусть A – s-порожденная относительно свободная алгебра. Тогда* $\mathrm{GKdim}(A)$ *зависит только от ее сложностного типа. А именно, она равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова полупрямого произведения алгебр общих матриц из* $\mathrm{Var}(A)$. *Размерность Гельфанда–Кириллова такого полупрямого произведения равна сумме размерностей Гельфанда-Кириллова сомножителей. Сложностные типы у алгебры A и подалгебры, порожденной двумя ее образующими, совпадают.*

Размерность Гельфанда–Кириллова свободной s-порожденной алгебры A из $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_{n_1} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_{n_k})$ *равна*

$$k + (s-1) \sum_{i=1}^{k} n_i^2. \tag{1}$$

Аналогичный результат для экспонент (см. стр. 50) в ряде коразмерностей установлен A. Giambruno и М. В. Зайцевым [138]. Они установили, что минимальные многообразия алгебр (над полем нулевой характеристики) с данной экспонентой суть полупрямые произведения T-первичных многооообразий (частным случаем T-первичного многообразия служит многообразие, порожденное алгеброй общих матриц). Экспонента такого многообразия есть сумма экспонент сомножителей. Тем самым экспонента многообразия также определяется его сложностным типом.

Экспоненты всех T-первичных многообразий в нулевой характеристике вычислены в работах A. Giambruno, М. В. Зайцева, С. П. Мишенко, A. Regev'a. Применительно к полупрямым произведениям матричных алгебр, результаты упомянутых авторов означают, что $e(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$, что похоже на равенство (1). Мы также используем технику, разработанную указанными авторами (см. теорему 0.1).

Для случая представимых первичных относительно свободных алгебр произвольной сигнатуры доказана следующая

Теорема. *Если L — относительно свободная s-порожденная первичная алгебра сигнатуры Ω, то* $\mathrm{GKdim}(L) = sn - m$.

Здесь m есть размерность G как алгебраического многообразия, G есть группа автоморфизмов $\widehat{L} \otimes C(L)^{alg.cl}$ над централизатором Мартиндейла $C(L)$.

В пятом параграфе доказывается локальная конечная базируемость, из которой в шестом параграфе выводится локальная представимость относительно свободных PI-алгебр. Тем самым дается решение известных открытых вопросов, поставленных Л. А. Бокутем и И. В. Львовым в Днестровской тетради [33].

В шестой главе указанные результаты переносятся на случай алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным нетеровым кольцом.

Первый параграф посвящен доказательству локальной конечной базируемости, в нем же изучается кручение в относительно свободных кольцах. Доказывается нильпотентность радикала для относительно свободных алгебр а также их локальная финитная апроксимируемость (по модулю локальной представимости относительно свободных алгебр, в которых выполняется собственное тождество).

Во втором параграфе изложено доказательство локальной представимости PI-алгебр над произвольным нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом

Φ, что составляет содержание известной открытой проблемы, поставленной еще А. И. Мальцевым в 1967 году [33].

Третий параграф посвящен алгоритмическим проблемам следования тождеств. В нем дается положительное решение проблемы А. И. Мальцева (поставленной в 1967 году) о существовании алгоритма определения того, является ли данное тождество следствием некоторой конечной системы тождеств. Данную проблему для произвольных алгебраических систем ставили также А. Тарский и Дж. Фон Нейман. Ранее Ю. Клейманом было получено ее отрицательное решение для групп [56], [57]. Центральным результатом данного параграфа является теорема 6.5 о каноническом носителе. Кроме того, показано существование алгоритма проверки, выполняется ли заданное тождество в данной представимой алгебре.

В четвертом параграфе рассматриваются критические кольца. Проблема существования бесконечных критических алгебр сведена к случаю тел, в которых не выполняются тождества. В общем случае показано, что в бесконечномерном (над основным кольцом Φ) критическом кольце R нет бесконечномерного первичного PI-фактора. При этом если K есть идеал коэффициентов тождеств, то кольцо KR должно быть конечно, в частности, для $K = 1$ мы получаем отсутствие собственных бесконечных критических колец.

Пятый параграф посвящен вопросам, связанным с однородностью, порождаемостью многообразия однородными алгебрами, радикальными свойствами однородных компонент тождеств, а также теореме о высоте. Доказаны следующие утверждения:

Теорема. *Пусть A — относительно свободная Φ-алгебра. Тогда множество целых над Φ элементов образует локально целый идеал ALG, фактор по которому целых над Φ элементов не имеет. Все однородные компоненты тождеств принадлежат ALG. Если Φ нетерово, то существуют такие M, N, K, что любое $x \in ALG$ удовлетворяет уравнению $(x^M - x^N)^K = 0$.*

Теорема. *Конечно порожденная алгебра A над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше $n = \mathrm{PIdeg}(A)$. Если A относительно свободна, а Y — базис Ширшова алгебры A, состоящий из слов, то для любого слова u, длина которого не выше n, множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени u^k. Каждое такое Y является s-базисом A, а если Y содержит образующие A, то Y — базис Ширшова.*

($\mathrm{PIdeg}(A)$ определяется как максимальный размер алгебры матриц над бесконечным полем из $\mathrm{Var}(A)$.)

В седьмой главе строятся примеры бесконечно базируемых многообразий неассоциативных алгебр над произвольном полем положительной характеристики.

Приложение A посвящено кольцам, асимптотически близким к ассоциативным. В первом параграфе даются основные определения и доказывается аналог теоремы о высоте для т.н. "хороших многообразий", в частности, для йордановых и альтернативных PI-алгебр.

Во втором параграфе для алгебр над полем нулевой характеристики из структурируемых хороших многообразий, в предположении выполнимости всех тождеств некоторой конечномерной алгебры построена теория, аналогичная теории А. Р. Кемера (первая и вторая лемма Кемера). Доказана также локальная конечная базируемость, локальная представимость, а также рациональность рядов Гильберта (в том числе и для T-пространств). Результаты этого параграфа влекут рациональность рядов Гильберта для T-пространств в ассоциативной *PI*-алгебре.

В третьем параграфе дается неассоциативное обобщение θ-техники, ранее развитой А. В. Гришиным для ассоциативного случая.

Приложение *Б* посвящено некоторым оценкам на степень нильпотентности радикала Джекобсона для *PI*-алгебр и на порядок тождества Капелли.

Благодарности. В заключение хотелось бы выразить благодарность за поддержку профессорам В. Н. Латышеву и А. В. Михалеву — руководителям семинара МГУ по теории колец, на котором была выполнена данная работа, а также д.ф.-м.н. А. В. Гришину, к.ф.-м.н. К. А. Зубрилину, к.ф.-м.н. В. Т. Маркову, В. В. Щиголеву и всем участникам семинара за полезные обсуждения.

Автор благодарен проф. С. В. Пчелинцеву, который привлек его к данной тематике.

Автор признателен проф. А. Р. Кемеру, к.ф.-м.н. Л. М. Самойлову, проф. Л. А. Бокутю с которыми он постоянно общался в течение ммногих лет, а также проф. Л. Роуэну, д.ф.-м.н. С. И. Кублановскому и д.ф.-м.н. А. Мекею за полезные обсуждения и поддержку, а также проф. Л. Смоллу за постановку одной из задач.

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Б. Р. Френкину и А. К. Кулыгину за помощь в решении технических вопросов при подготовке диссертации.

0.2. Основные определения и конструкции

В данном разделе определяются основные понятия и вводятся обозначения, нужные для дальнейшего.

A обычно обозначает алгебру, $a_1, \ldots, a_s$ – ее образующие. Все кольца и алгебры, если не оговорено обратное, считаются конечно порожденными (сокращенно к.п.). Понятия *высоты в смысле Ширшова*, *существенной высоты* и *линейной представимости* уже были определены выше. Запись $f|_A = 0$ означает, что полином f является тождеством алгебры A, а запись $f|_A \neq 0$ – что не является. Идеал, порожденный множеством $\mathcal{M}$ обозначается $\mathrm{id}(\mathcal{M})$. Иногда набор переменных $x_1, \ldots, x_n$ мы будем рассматривать как *мультипеременную* и обозначать $\overrightarrow{x}$, используя записи типа $P(\overrightarrow{x}, y)$, $\mathbb{K}[\overrightarrow{x}]$, $\mathbb{K} < \overrightarrow{x} >$ и т.д. Даже в тех случаях, когда в рассматриваемых кольцах нет единицы, мы будем использовать обозначения типа $y(1+z)$. Это означает, что имеется в виду элемент $y + yz$, который определен корректно. E_{ij} обозначает матричную единицу: этот оператор переводит i-й базисный вектор в j-ый, а остальные переводит в ноль. Тождество f называется *собственным*, если его коэффициенты образуют единичный идеал в основном кольце. Известно, что в этом случае f имеет следствие, все коэффициенты которого равны ± 1 (см. разделы 0.2.4 и 6.1.2). *Несобственным* называется тождество, не являющееся собственным. *Базисным рангом* многообразия $\mathfrak{M}$ называется такое минимальное s, что $\mathfrak{M}$ порождается своими s-порожденными алгебрами. Базисный ранг многообразия всех ассоциативных алгебр равен двум, многообразия, порожденного алгеброй общих матриц, тоже равен двум, базисный ранг алгебры Грассмана или многообразия, заданного тождеством $[x,[y,z]] = 0$, равен бесконечности. А. Р. Кемер установил, что базисный ранг многообразия ассоциативных *PI*-алгебр равен бесконечности тогда и только тогда, когда оно содержит бесконечно порожденную алгебру Грассмана [50].

Функция роста $V_A(n)$ алгебры A определяется как размерность пространства, натянутого на слова длины не выше n; производящая функция $\sum V_A(n)t^n$ называется *рядом Гильберта* алгебры A. Иногда рассматривается *полный ряд Гильберта*

$$H_A(t_1,\ldots,t_s)=\sum V_A(n_1,\ldots,n_s)t_1^{n_1}\cdots t_s^{n_s},$$

где $V_A(n_1,\ldots,n_s)$ есть размерность пространства, порожденного словами, для каждого i содержащими не более чем n_i вхождений буквы a_i. В однородном случае выполняется равенство

$$H_A(t)=\prod_i \frac{1}{1-t_i}H_A(t_1,\ldots,t_s)|_{t_i=t}.$$

Для абсолютно свободной s-порожденной алгебры A имеет место равенство $V_A(n)=s^n$ и значит

$$H_A(T)=\frac{1}{1-s\cdot T}.$$

Аналогичным образом,

$$V_A(n_1,\ldots,n_s)=\sum_{k<n}\prod_{i=1}^{s}\binom{n}{n_i},$$

где $n=\sum n_i$ и

$$H_A(t_1,\ldots,t_s)=\frac{1}{1-\sum t_i}.$$

Поэтому ряды Гильберта абсолютно свободных алгебр рациональны и мы рассматриваем в дальнейшем только относительно свободную ситуацию. Кроме того, для конечномерной алгебры функция роста начиная с некоторого n становится постоянной, и в этом случае ряд Гильберта рационален. Поэтому мы доказываем рациональность и обычных и полных рядов Гильберта для относительно свободных бесконечномерных конечно порожденных алгебр.

Обычно мы рассматриваем ассоциативные алгебры над полем. Иногда (см. главу 6) рассматриваются алгебры над произвольным нетеровым ассоциативно–коммутативным кольцом Φ. Иногда рассматриваются неассоциативные алгебры, алгебры произвольной сигнатуры Ω (снабженные набором операций произвольной арности), а также *многоосновные алгебры.* Последнее означает, что задана конечная система модулей $\{V_i\}$ и конечный набор полилинейных операций

$$\rho_j:\ V_{i(j_1)}\otimes\ldots V_{i(j_{k_j})}\to V_{s_j}.$$

Определение 0.1. *Разреженным тождеством порядка* q называется тождество вида

$$\sum_{\sigma\in S_q}\beta_\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\ldots y_{q-1}x_{\sigma(q)}.$$

Сильным тождеством степени q называется система тождеств, получаемых из тождества вида

$$\sum_{\sigma\in S_q}\beta_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(q)}$$

путем всевозможных перестановок позиций. Это система тождеств вида

$$\sum_{\sigma\in S_q}\beta_\sigma x_{\sigma(\tau(1))}x_{\sigma(\tau(2))}\ldots x_{\sigma(\tau(q))},$$

где $\tau \in S_q$.

Аналогично определяется понятие *сильного разреженного тождества порядка q*. В общем случае (для алгебр произвольной сигнатуры) *системой разреженных тождеств порядка q* называется система тождеств вида

$$\sum_{\sigma \in S_q} \beta_\sigma F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(q)}, \overrightarrow{y}) = 0,$$

где многочлен F полилинеен по переменным $\{x_i\}$. Коэффициенты $\beta_\sigma \in \mathbb{K}$ не должны зависеть от F. Если применить это понятие к ассоциативному случаю, то получится определение сильного разреженного тождества.

Функция роста зависит от выбора системы образующих. Но если ввести отношение эквивалентности на множестве функций $f \equiv g \iff \exists c \in \mathbb{N} : \forall n f(cn) \geq g(n)$и $g(cn) \geq f(n)$, то класс эквивалентности $V_A(n)$ уже есть инвариант самой алгебры. *Размерностью Гельфанда–Кириллова* алгебры A называют предел $\mathrm{GKdim}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln V_A(n)/\ln n$, если таковой существует. GKdim есть инвариант самой алгебры. Известно, что $\mathrm{GKdim}(A)$ может принимать значения $\{0, 1, 2, \infty\}$ а также любое число из луча $[2, \infty)$, причем если $\underline{\mathrm{GKdim}(A)} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln V_A(n)/\ln n$ равна 0 или 1, то и $\overline{\mathrm{GKdim}(A)}$ тоже равна 0 или 1. Равенство $\mathrm{GKdim}(A) = 0$ равносильно конечномерности алгебры A. Отметим, что размерность Гельфанда–Кириллова может и не существовать. Для коммутативного кольца R всегда определена $\mathrm{GKdim}(R)$ и равна его степени трансцендентности. Эта размерность была введена Гельфандом и Кирилловым. Они показали, что для $U(L)$ – универсальной обертывающей алгебры n-мерной алгебры Ли L – имеет место равенство: $\mathrm{GKdim}(U(L)) = n$. В. А. Уфнаровский показал, что если L – алгебра Ли и $\mathrm{GKdim}(L) = r > 0$, то $V_A(n)$ растет как $\exp(n^{1-1/r})$. (И с помощью этого результата построил пример конечно определенной алгебры промежуточного роста.)

Размерность Гельфанда–Кириллова вычислялась для некоторых относительно свободных алгебр. Для алгебры общих матриц см. [157], для свободной алгебры из многообразия $\mathrm{Var}(\mathbb{O})$, порожденного алгеброй Кэли–Диксона $\mathbb{O}$ в случае, когда $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) \neq 2, 3$, это сделано в работах [97], [98]. Асимптотики, близкие к размерности Гельфанда–Кириллова (показатель роста) для многообразий, порожденных полупрямыми произведениям общих матриц, вычислялись в работе [25]. Автор показал, что размерность Гельфанда–Кириллова представимой алгебры произвольной сигнатуры есть целое число.

Определение 0.2. а) *Полупрямым произведением алгебр A и B*, обозначение $A \rtimes B$, называется фактор-алгебра алгебры $A + A * B + B$ по идеалу, порожденному элементами вида $b * a$, $b \in B$, $a \in A$.

б) *Полупрямым произведением второго рода алгебр A и B* называется фактор-алгебра алгебры $A \oplus B *_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[c]$ по идеалу, порожденному элементами вида $c * a$, $b * c$, cc, $b \in B$, $a \in A$.

Иногда полупрямое произведение (первого рода) называют *ниль–произведением*.

Полупрямое произведение получается из прямой суммы с помощью следующей конструкции. Пусть $C = A \oplus B$. Расширим C элементом t, удовлетворяющим соотношениям $\forall a \in A\ ta = 0$; $\forall b \in B\ bt = 0$; $t^2 = 0$. Тогда $A \rtimes B$ будет изоморфна подалгебре, порожденной элементами вида $a(1+t)$, $(1+t)b$. Если A и B – алгебры матриц, то любой набор обратимых линейных преобразований на пространствах, соответствующих парам индексов i и q, порожденных элементами вида $E_{ij}tE_{pq}$, индуцирует автоморфизм $A \rtimes B$. Легко видеть, что полупрямое произведение раскладывается в сумму своих подалгебр, нумерующихся парами индексов (j,p) и соответствующих пространствам, порожденных элементами вида $E_{ij}tE_{pq}$. Каждая такая алгебра изоморфна алгебре "блочных верхнетреугольных" матриц вида $\begin{pmatrix} \mathbb{M}_n & * \\ 0 & \mathbb{M}_k. \end{pmatrix}$ Поэтому алгебра $A \rtimes B$ есть подпрямое произведение своих подалгебр, изоморфных алгебре "блочных верхнетреугольных" матриц, и порождает то же многообразие, что и любая такая алгебра. Аналогичным образом, полупрямое произведение нескольких матричных алгебр размера n_i изоморфно сумме своих подалгебр, которые мы обозначаем $U(\mathbb{F}, d_1, \ldots, d_m)$. Каждая такая подалгебра задается матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_{n_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \mathbb{M}_{n_2} & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & & \mathbb{M}_{n_k} \end{pmatrix}$$

Поэтому в дальнейшем в этой работе под *полупрямым произведением* алгебр матриц будем понимать подалгебру вида $U(\mathbb{F}, d_1, \ldots, d_m)$. Легко видеть также, что полупрямые произведения первого и второго рода порождают одно и то же многообразие.

Полупрямые произведения матричных алгебр суть минимальные конечномерные алгебры, не содержащие идеалов с нулевым пересечением с данной полупростой частью. Или, что то же самое, с данным сложностным типом (см. раздел 3.1.1). Имеет место следующая

Теорема (A. Giambruno, M. Zaicev). *Пусть A – конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Пусть $A = \bar{A} + J(A)$ есть разложение A в сумму полупростой части и радикала Джекобсона. Пусть $\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$, где $A_i \simeq M_{d_i}(\mathbb{F})$ – простые компоненты $\bar{A}$. Если $A_1u_1A_2u_2 \ldots u_{m_1}A_m \neq 0$ для некоторого $m \leq t$ и элементов $u_1, \ldots, u_{m-1}$ из $J(A)$, то A содержит подалгебру, изоморфную $U(\mathbb{F}, d_1, \ldots, d_m)$.* □

Нам понадобится обобщение этой теоремы на случай произвольных полей.

Предложение 0.1. *Пусть A – конечномерная алгебра над полем $\mathbb{F}$. Пусть $A = \bar{A} + J(A)$ есть разложение A в сумму полупростой части и радикала Джекобсона. Пусть $\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$ есть разложение $\bar{A}$ на простые компоненты. Если $A_1u_1A_2u_2 \ldots u_{m_1}A_m \neq 0$ для некоторого $m \leq t$ и элементов $u_1, \ldots, u_{m-1}$ из $J(A)$, то A содержит набор подалгебр, изоморфных факторам полупрямого произведения (второго рода) $A_1 \rtimes \cdots \rtimes A_m$. При этом само полупрямое произведение $A_1 \rtimes \cdots \rtimes A_m$ вкладывается в прямую сумму этих подалгебр.*

Доказательство. Возьмем элементы $h_i, h_i' \in A_i$, не являющиеся делителями нуля в A_i. Тогда $A_1h_1u_1h_2'A_2h_2u_2h_2 \ldots h_{m-1}u_{m_1}h_m'A_m \neq 0$. Положим $v_i = h_iu_ih_{i+1}'$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ и рассмотрим подалгебру, порожденную алгебрами A_i и элементами v_i. Она является фактором полупрямого произведения. Достаточно показать, что само полупрямое произведение вкладывается в сумму алгебр, которые таким образом можно построить. Пусть $a_{ik} \in A_i$ и

$$\sum_k \alpha_k a_{1k}v_1a_{2k}v_2 \ldots a_{mk} = 0$$

для любых v_i вида $v_i = h_i u_i h'_{i+1}$. Проверим, что тогда

$$\sum_k \alpha_k a_{1k} \otimes a_{2k} \otimes \cdots \otimes a_{mk} = 0$$

в тензорном произведении $A_1 \otimes_{\mathbb{F}} \cdots \otimes_{\mathbb{F}} A_m$. В этом случае

$$\sum_k \alpha_k a_{1k} c_1 a_{2k} c_2 \ldots a_{mk} = 0$$

в алгебре $A_1 \rtimes \cdots \rtimes A_m$.

Возьмем базис в пространстве $A_1 \otimes_{\mathbb{F}} A_1 \otimes_{\mathbb{F}} A_2 \otimes_{\mathbb{F}} A_2 \cdots \otimes_{\mathbb{F}} A_m \otimes_{\mathbb{F}} A_m$, состоящий из элементов вида $h_{1i_1} \otimes h'_{1i_2} \otimes \cdots \otimes h'_{mi_{2m}}$, и сопоставим каждому такому базисному вектору набор элементов $v_i = h_i u_i h'_{i+1}$ и, соответственно, фактор полупрямого произведения. Достаточно показать, что если элемент $x = \sum_k \alpha_k a_{1k} c_1 a_{2k} c_2 \ldots c_k a_{mk}$ обращается в нуль при любом таком морфизме, то ему соответствует нулевой элемент в тензорном произведении.

Расширив основное поле, ситуацию можно свести к случаю, когда A_i суть матричные алгебры, в которых выбраны базисы из матричных единиц. Но тогда любой набор операторов перехода $\{E^k_{ij}\}$, где i – индекс строки в A_k, j – столбца в A_{k+1}, может быть реализован набором $\{v_i\}$. Поэтому если

$$\sum_k \alpha_k a_{1k} \otimes a_{2k} \otimes \cdots \otimes a_{mk} \neq 0,$$

то можно указать такие E_{pq}, E_{rs} и $\{E^k_{ij}\}$, что одно слагаемое суммы

$$\sum_k \alpha_k E_{pq} a_{1k} E^1_{i_1 j_1} a_{2k} \ldots E^m_{i_m j_m} a_{mk} E_{rs}$$

не ноль, а остальные — нули. Но тогда и

$$\sum_k \alpha_k a_{1k} v_1 a_{2k} v_2 \ldots a_{mk} \neq 0$$

при $v_k = E^k_{i_k j_k}$, что противоречит выбору элемента x. □

0.2.1. Представления алгебр

Алгебра называется алгеброй *нетерового типа*, если она является алгеброй и одновременно нетеровым модулем над нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом R. Алгебра называется *представимой*, если она вкладывается в алгебру нетерового типа. При этом кольцо R, называется *кольцом представления* и можно считать, что R содержит единицу. Известно, что кольцо представления любой к.п. представимой алгебры над нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ может быть выбрано нетеровым. Все ассоциативно-коммутативные кольца, встречающиеся в данной работе, если не оговорено противное, будут считаться нетеровыми. Поскольку любое нетерово кольцо является целым конечным расширением кольца многочленов, то любая представимая к.п. алгебра представима матрицами над кольцом многочленов. Кроме того, любая представимая алгебра вкладывается в алгебру, являющуюся свободным модулем над кольцом представления.

Отметим, что в случае алгебр над произвольным нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом условие вложимости в алгебру нетерового типа (или, что то же самое, в алгебру эндоморфизмов нетерового модуля) и условия представимости матрицами различаются. В этом случае под *представимостью* мы будем понимать более слабое условие — вложимость в алгебру нетерового типа.

Замечания. 1. Обычно под представимостью понимается нечто более сильное, а именно — представимость матрицами ограниченного размера над кольцом полиномов. В бесконечно порожденном случае приходится идти по этому пути и определять понятие представимости как представимость матрицами ограниченного размера над коммутативным кольцом (не обязательно нетеровым). Однако в данной работе мы с этим дела не имеем.

2. Тождество Капелли означает обобщенную линейную зависимость. В этой связи хочется упомянуть следующий результат: первичная алгебра (произвольной сигнатуры), в которой выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, но не n, представима n-мерной алгеброй над полем.

Следующее определение работает и в неассоциативной ситуации:

Определение 0.3. Назовем идеал I *представимым*, если фактор по нему есть представимая алгебра. Идеал тождеств *представим*, если он является T-идеалом представимой алгебры, или, что равносильно: относительно свободная алгебра из соответствующего многообразия представима.

Минимальное n такое, что алгебра A вкладывается в алгебру, являющуюся модулем ранга n над своим центром, называется *порядком представления.* Если идеал I представим, то *порядок представления* I есть порядок представления A/I.

Алгебра называется *PI_n-алгеброй*, если она принадлежит многообразию, порожденному представимыми алгебрами порядка n.

Следующая лемма есть своего рода аналог теоремы Гильберта о базисе:

Лемма 0.1. *Множество представимых идеалов фиксированного порядка удовлетворяют свойствам обрыва возрастающих цепей.* □

По сути дела, достаточная степень инвариантности идеала относительно достаточно богатой полугруппы эндоморфизмов ведет к представимости, а самыми инвариантными являются T-идеалы, отсюда шпехтовость в ассоциативном случае, а также в структурируемых хороших многообразиях, группа эндоморфизмов которых достаточно богата.

Лемма 0.2 (О пересечении представимых идеалов). *Пересечение конечного числа представимых идеалов представимо.*

Доказательство. Пусть $\{I_\alpha\}$ – представимые идеалы алгебры A. Тогда ядро гомоморфизма $A \to \bigoplus\limits_\alpha A/I_\alpha$ есть $\bigcap_\alpha I_\alpha$, а прямая сумма представимых алгебр представима. □

Определение 0.4. Представимая алгебра называется *несводимой*, если она не содержит конечного числа представимых ненулевых идеалов с нулевым пересечением. Алгебра называется *несводимой порядка n*, если она не содержит конечного числа представимых ненулевых идеалов порядка n с нулевым пересечением.

Отметим, что разложение на несводимые компоненты, вообще говоря, неоднозначно.

Предложение 0.2. *а) Любая алгебра нетерового типа вкладывается в прямую сумму конечного числа своих несводимых факторов по идеалам, устойчивым относительно умножения на элементы кольца представления.*

б) Для любого $m \geq n$ любая представимая алгебра порядка n вкладывается в прямую сумму своих несводимых факторов порядка m. □

Для алгебр типа $\breve{A}$ или $\widehat{A}$, с которыми мы работаем при решении проблем Шпехтового типа разложение на несводимые компоненты имеет место (и понимаентся) в следующем смысле: эти алгебры градуированы конечной полугруппой и рассматриваются как многоосновные алгебры нетерового типа. Нетеров тип компоненты обеспечен действием граничных операторов и умножением на степени форм. Во всех доказательствах в разделах 5 и 6 под *несводимостю* понимается несводимость порядка, равного рангу рассматриваемой алгебры.

Замечание. Аналог предыдущего предложения для представимых алгебр в общем случае неверен. Рассмотрим представимую мономиальную алгебру A над полем нулевой характеристики с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $a^2 = c^2 = ba = ca = cb = 0$. Все ненулевые слова этой алгебры суть подслова слова вида $ab^k c$, $k \geq 0$. Любой ее представимый мономиальный идеал, не содержащий слова вида $ab^k c$ при всех достаточно больших k порождается набором слов $ab^{k_i} c$ где множество $\{k_i\}$ есть объединение конечного множества и конечного набора арифметических прогрессий (см. раздел 1.3.4). Алгебра A для любого l вкладывается в прямую сумму своих факторов, заданных соотношениями вида $\{ab^k c = 0\}$; $k = 2s+1, 4s+2, \ldots, 2^l s + 2^{l-1}; 2^{l+1}s\}$. Можно показать ее несводимость. Данный пример можно преобразовать в пример относительно свободной (неассоциативной) представимой алгебры без разложения на относительно свободные несводимые компоненты.

Мы будем говорить, что в идеале I *нет препятствия к представлению идеала* J, если существует представление ρ всей алгебры в алгебру нетерового типа такое, что $\ker(\rho) \cap I = I \cap J$.

Предложение 0.3. *Пусть в идеале I нет препятствия к представимости J. Тогда если $A/(I+J)$ представима, то A/J тоже представима.*

Доказательство. Пусть ρ – представление A/J, ограничение которого на I имеет ядро, равное $I \cap J$. Достаточно рассмотреть прямую сумму этого представления и точного представления $A/(I+J)$. $\square$

Отметим, что из представимости пересечения $I \cap J$, суммы $I + J$, а также самого идеала I не ясно, следует ли представимость J. По всей видимости, нет. Вероятно, при вложении в алгебру нетерового типа идеал J может расшириться, так что могут возникнуть дополнительные элементы в пересечении с I. Хорошо бы посторοить соответствующие примеры.

Расширения и выбор свободных элементов. Пусть A – конечномерная алгебра. Если основное поле бесконечно, то можно построить относительно свободную s-порожденную алгебру $\tilde{A}$, порождающую $\mathrm{Var}(A)$, вложенную в расширение A кольцом полиномов (и, тем самым, представимую). А именно. Берем базис A как векторного пространства умножаем каждый элемент базиса на свободную переменную и суммируем. Получаем образующую алгебры $\tilde{A}$. Для набора образующих $\tilde{A}$ берем непересекающиеся наборы переменных.

Пусть основное поле конечно и имеет порядок $q = p^k$. Тогда независимые переменные, с которыми мы будем суммировать базисные элементы, будут принадлежать не кольцу коммутативных полиномов $F[\overrightarrow{x}] = F[x_1, \ldots, x_s]$, а его фактору $F_q[\overrightarrow{x}]$ по T-идеалу, порожденному тождеством $x^q - x = 0$. Кольцо $F_q[\overrightarrow{x}]$ также градуировано по каждой переменной, только градуировка лежит в $\{* \cup \mathbb{Z}_p\}$ – факторе полугруппы $\mathbb{N}$ по конгруэнции, порожденной склейкой чисел 1 и q. (Градуировка различает факт вхождения или не вхождения каждой свободной переменной, а также число вхождений по модулю $q-1$.) Точки спектра кольца $F_q[\overrightarrow{x}]$ соответствуют всевозможным специализациям переменных в элементы поля F.

Замечание. Можно использовать такую конструкцию. Берем всевозможные наборы N_i; $i = 1, \dots, q$ из $s \cdot \dim(A)$ значений координат s образующих. Пусть q – число таких наборов. Каждому из них будет отвечать гомоморфизм $\tilde{A} \to A$, а сама алгебра $\tilde{A}$ определяется как такое подмножество прямого произведения $\bigoplus_{i=1}^{q} A$ алгебры A на себя, что проекция на i-ю компоненту отвечает i-му гомоморфизму.

Предложение 0.4. *а) Алгебра $\tilde{A}$ относительно свободна, представима и* $\mathrm{Var}(\tilde{A}) = \mathrm{Var}(A)$.

б) Расширение $\tilde{A}$ кольцом R, порожденном значениями операторов следа (форм) является нетеровым R-модулем.

Доказательство. П.а) уже доказан. П.б) следует из предложения 0.8, которое будет доказано ниже. $\square$

Пусть M – нетеров модуль над нетеровым кольцом S. Тогда конечная сумма $\oplus_i \otimes^{k_i} M$ тоже нетерова. Пусть A – представимая алгебра, вложенная в алгебру нетерового типа $\hat{A}$, $\sqcup = \{t_i\}$ – конечный набор букв. Рассмотрим множество слов $\mathcal{U}_k$, в которые буквы из $\sqcup$ входят не более чем k раз. Рассмотрим далее всевозможные специализации элементов алгебры A в $\mathcal{U}_k$.

Предложение 0.5. *Пусть A – представимая алгебра. Тогда существует такой конечный набор $\mathcal{M}$ элементов из A, что для любого многочлена $F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\Lambda})$, имеющего степень однородности не выше k относительно переменных из конечного набора $\overrightarrow{\Lambda}$, тождественное равенство $F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\Lambda})$ нулю равносильно равенству нулю $F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\xi})$ для любых $\overrightarrow{\xi} \in \mathcal{M}^k$.* $\square$

Данное предложенние можно переформулировать на языке расширений *ограниченно свободными элементами порядка k*. n-элементный набор элементов $\mathcal{M} = \{m_i\} \subset A$ называется *свободным порядка k*, если для любого многочлена F, степени не выше k относительно переменных из $\{t_i\} = \Lambda$ выполняется следующее: если результат подстановки $m_i \to t_i$ обращается в нуль в алгебре A, то результат любой подстановки $s_i \to t_i$ для любых $s_i \in A$ также нулевой.

Рассмотрим расширение $A_{Var(A)} < \Lambda >$ и всевозможные специализации $t_i \to m_i; i = 1, \dots, |\Lambda|$, каждая из которых отвечает гомоморфизму этого расширения на алгебру A. Поскольку набор $\mathcal{M}$ конечен, возникает гомоморфизм расширения $A_{Var(A)} {<} \Lambda {>}$ в прямую сумму $\oplus^k A$, k – число всех таких специализаций. Элементы A вложатся как константы, образы элементов из Λ будут свободными элементами порядка k в образе. Получилось *свободное расширение порядка k с помощью набора $\mathcal{M}$, свободного порядка k.*

Нам потребуется одна универсальная конструкция.

Определение 0.5. Пусть B – ассоциативная алгебра, $\{\beta_i\}$ – ее образующие, $\{b_i\}_{i \in I}$ – множество всех ее элементов, $\{\delta_{ij}\}_{i \in I; j=1,\dots m}$ – набор независимых коммутативных переменных. *Каноническое алгебраическое представление порядка* m есть алгебра

$$\hat{B}^{(m)} = B[\delta_{ij}] / \operatorname{id}(\{b_i^m + \delta_{i1} b_i^{m-1} + \ldots + \delta_{im}\}_{i \in I}).$$

Если индекс i будет пробегать множество, отвечающее словам степени не выше s от образующих алгебры B, то получившийся объект мы будем называть *каноническим алгебраическим представлением длины s порядка m* и обозначать $\hat{B}^{(m,s)}$

Определение 0.6. Пусть $b \in B$. Расширим алгебру B свободными коммутативными константами δ_i, $i = 1, \dots, n-1$ и рассмотрим фактор по идеалу $\mathrm{id}(b^m + \delta_1 b^{m-1} + \ldots + \delta_m)$. Алгебра B естественным образом отображается в эту алгебру, а ядро этого отображения называется *препятствием к алгебраичности порядка m элемента b*. Ядро при каноническом алгебраическом представлении порядка m называется *препятствием к алгебраичности порядка m*. Аналогично определяется *препятствие к алгебраичности порядка m системы элементов $\{b_i\}$*.

Пусть система форм $\delta_i(b)$ удовлетворяет тождеству Гамильтона–Кэли. Это значит, что в алгебре выполняется тождество $a^n + \delta_1(a)a^{n-1} + \cdots + \delta_n(a) \equiv 0$. Тогда естественно строится *каноническое представление Гамильтона–Кэли порядка n*, а соответствующее ядро называется *препятствием к тождеству Гамильтона–Кэли порядка m*.

Говоря неформально, если все элементы алгебры B (соответственно слова длины не выше s) "насильно" сделаем алгебраическими степени m, то получим каноническое алгебраическое представление степени m (соответственно, длины s).

Аналогичным образом определяется идеал J_k – *препятствие к представимости матрицами порядка k над нетеровым кольцом.*

Из следствия 0.1 вытекает

Лемма 0.3 (о каноническом представлении). *а) Каноническое алгебраическое представление является нетеровым модулем над значениями оператора следа. То же верно для представления длины s, если s не превосходит m или* $\mathrm{PIdeg}(B)$.

б) Если B представима матрицами порядка m, то естественные отображения $B \to \hat{B}^{(m)}$, $B \to \hat{B}^{(m,s)}$ являются вложениями.

в) Если B представима, т.е. вкладывается в алгебру нетерового типа, то каноническое алгебраическое представление некоторого порядка является вложением.

Доказательство. Каждый элемент алгебры нетерового типа R алгебраичен над центром $Z(R)$, причем порядки элементов ограничены в совокупности. Каждый элемент алгебры матриц с формами порядка m также алгебраичен порядка m. Поэтому с указанными вложениями естественно связаны также морфизмы соответствующих канонических алгебраических представлений, которые согласованы с морфизмами алгебр в алгебраические представления. Поэтому последние также являются вложениями. □

Замечание. Каноническое алгебраическое представление определяется и в неассоциативном случае. В этом случае п.б) предыдущей леммы по–прежнему справедлив, а п.а) справедлив для т.н. *курошевых многообразий* (см. определение 2.2).

Определение 0.7. Пусть B – конечномерная алгебра, $\{\overrightarrow{e}_i\}_{i=1}^n$ – ее базис, $\{x_{kl}\}_{k=1}^{s}{}_{l=1}^{n}$ – независимые переменные. *s-порожденной алгеброй общих элементов из B* называется алгебра, порожденная образующими $a_i \sum_{l=1}^n x_{il} \overrightarrow{e}_l$.

Данное определение непосредственно переносится на многоосновные алгебры произвольной сигнатуры. Алгебра общих элементов относительно свободна и порожданет однородное многообразие. Конструкция неоднородных аналогов алгебры общих элементов изложена в разделе 4.3.1. (Суммирование производиться также с коэффициентами из свободных коммутативных колец с тождествами вида $x^{q_i} - x \equiv 0$. При этом тождества $x^{q_i} - x \equiv 0$ должны выполняться в основном поле.

0.2.2. Линеаризации и квазилинеаризации

Опишем процедуру *линеаризации*. Пусть полином P имеет степень n по переменной x. Подставим $\sum_{i=1}^n x_i \to x$ и возьмем сумму членов, полилинейных по всем x_i. Получившийся многочлен Q называется *полной линеаризацией* P. *Частичной линеаризацией* называется сумма членов заданной степени полиоднородности по переменным x_i. Из тождества P следует его полная линеаризация Q в силу равенства

$$Q(x_1,\ldots,x_n,\overrightarrow{Y}) = P(x_1+\ldots+x_n,\overrightarrow{Y}) - \sum_i P(x_1+\ldots+\widehat{x_i}+\ldots+x_n,\overrightarrow{Y})+$$
$$+\sum_{i<j} P(x_1+\ldots+\widehat{x_i}+\ldots+\widehat{x_j}+\ldots x_n,\overrightarrow{Y}) - \ldots +$$
$$+(-1)^n(P(x_1,\overrightarrow{Y})+\ldots P(x_n,\overrightarrow{Y})).$$

($\overrightarrow{Y}$ обозначает набор остальных переменных в P, отличных от x)

Например, линеаризация многочлена x^n есть многочлен

$$\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)},$$

а линеаризация по всем переменным тождества Холла есть многочлен

$$[[x_1,y_1]\odot[x_2,y_2]+[x_1,y_2]\odot[x_2,y_1],z],$$

где $a\odot b = ab+ba$ — *симметризатор* элементов a и b.

Если в многочлене Q вместо переменных x_i подставить x, то получится многочлен $n!\cdot P$. Поэтому если основное поле имеет характеристику нуль, то все тождества равносильны полилинейным.

Если же основное поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то все тождества можно считать однородными по каждой переменной. В частности, вместе с каждым тождеством будут выполняться все его (частичные) линеаризации. В самом деле, пусть $P = \sum P_i$, где переменная x входит i раз в P_i. Тогда если сделать замену $\lambda x \to x$, то полином P перейдет в $\sum \lambda^i P_i$. Если основное поле бесконечно, то можно выбрать такие λ_j, что определитель Ван–Дер–Монда $\det({\lambda_j}^i)$ не обратится в ноль, и выделить компоненты P_i по отдельности.

Операторы подстановки. Нам потребуется несколько стандартных технических замечаний, относящихся к операторам подстановки. Удобно работать со словами, а между тем могут встретиться линейные комбинации слов. Поэтому после каждой подстановки мы сортируем члены по числу вхождения слов из линейной комбинации, и суммы членов каждого сорта выделяются. Поскольку основное поле бесконечно, то переход к таким суммам есть операция, не выводящая за пределы T-пространств, с которой мы и будем работать.

Перейдем к формальным конструкциям. Пусть (некоммутативный) многочлен P однороден степени m_r по переменной z_r. Рассмотрим подстановку $\sum z_{rs} \to z_r$ и компоненту $H_{k_{rs}}$, возникающую при этой подстановке, имеющую ровно k_{rs} вхождений переменной z_{rs}. Ясно, что $\sum k_{rs} = \deg(P)$. *Вербальный оператор* — это результат подстановки $v_{rs}\to z_{rs}$, где v_{rs} — слова, в эту компоненту. Набор чисел (k_{rs}) называется *матрицей вербального оператора*. Можно дать другое равносильное определение. Рассмотрим подстановку $\sum_s \lambda_{rs}v_{rs} \to z_r$. *Вербальный оператор* с матрицей (k_{rs}) можно определить как сумму членов при коэффициенте $\prod_{rs}\lambda_{rs}^{k_{rs}}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 0.6. *а) Если основное поле бесконечно, то вербальный оператор не выводит за пределы T-пространства.*

б) Любое пространство, замкнутое относительно вербальных операторов, является T-пространством.

Доказательство. Результат подстановки линейных комбинаций слов во все переменные есть сумма вербальных операторов с некоторыми коэффициентами. Это доказывает п.б.) Для доказательства п.а) достаточно воспользоваться вторым определением вербального оператора и бесконечностью основного поля. А именно, рассуждаем, как и при доказательстве того, что если выполняется тождество, то выполняются все его компоненты. (Заменим некоторое λ_{pq} на $\alpha\lambda_{pq}$. Коэффициент $\prod_{rs}\lambda_{rs}^{k_{rs}}$ умножится на $\alpha^{k_{pq}}$. Выберем такие α_j, что определитель Ван-Дер-Монда $\det({\alpha_j}^i)$ не обратился в ноль. Тем самым мы выделяем члены при степенях λ_{pq}. Продолжаем процесс выделения по всем парам (p,q)). □

Вербальный оператор можно представлять себе так. Все вхождения переменной z_r размечаются, т.е. разбиваются на группы по k_{rs} вхождений. Затем во вхождения, помеченные одинаково, подставляются одинаковые слова, и результат суммируется по всем способам разметки. Выбор разметки вместе с подстановкой заданных слов на размеченные позиции будем называть *расстановкой, связанной с матрицей* k_{rs}. Вербальный оператор есть сумма по всем расстановкам, связанным с матрицей k_{rs}. Отметим, что понятие "вербального оператора" использует понятие "слова" и потому зависит от выбора системы образующих алгебры.

Замечание. Вербальные операторы, как сообщил мне А. Р. Кемер, известны в фольклоре. А. В. Гришин рассматривал похожие конструкции и называл их "символическими степенями". В его обозначениях $S_{x,a}^{t_1,\dots,t_n}(f)$ есть полилинейная по всем t_i компонента многочлена $f|_{x+\sum t_i\to x}$ (см.[26], [28]).

Отметим, что если основное поле конечно, то действие вербальных операторов, вообще говоря, выводит за пределы T-идеала. Рассмотрим подстановку $x\to x+\sum_{i=1}^n t_i$. Пусть S – подмножество элементов t_i, f – многочлен, а $\Sigma_S(f)$ – сумма членов, образовавшихся после подстановки, содержащих каждое t_i из S хотя бы по разу и только их. Если $\deg_x(f)<|S|$, то $\Sigma_S(f)$ полагается равной нулю.

Лемма 0.4. *Операторы взятия $\Sigma_S(f)$ не выводят за пределы T-пространства (для любого основного кольца).*

Доказательство. Случай, когда $S=\emptyset$, т.е. $|S|=0$ очевиден. А в общем случае из соображений включения–исключения следует, что справедливо равенство:

$$\sum_{P\subseteq S}(-1)^{|P|}\Sigma_P(f)=0,$$

из которого требуемое утверждение получается очевидной индукцией по $|S|$ – числу элементов множества S. □

В частности, взятие множества членов, в которые все t_i входят в "полном комплекте" (т.е. входит каждое), является T-пространственной операцией, которую мы будем называть *квазилинеаризацией*. Полная линеаризация тождества по любой переменной является частным случаем квазилинеаризации, и потому всегда является следствием. (А частичные линеаризации — не всегда.)

Определение 0.8. Если $f(x_1 + x_2, \overrightarrow{y}) \equiv f(x_1, \overrightarrow{y}) + f(x_2, \overrightarrow{y})$ в многообразии $\mathfrak{M}$, то многочлен f *квазилинеен* относительно переменной x. Если при этом f однороден по x, то тогда $f(\lambda x, \overrightarrow{y}) = \lambda^q f(x, \overrightarrow{y})$ $(\lambda \in \mathbb{F})$ при некотором $q = p^k$, $p = \mathrm{ch}(\mathbb{F})$. Число q называется *степенью квазилинейности* f относительно переменной x.

Нам понадобится следующее техническое утверждение, доказательство которого аналогично доказательству того факта, что в случае бесконечного основного поля вместе с каждым тождеством выполняются все его линеаризации.

Лемма 0.5. *Пусть элементы $c_i; i = 1, \ldots, s$ входят в произведение*

$$P = d_0 c_1 d_1 \cdots c_s d_s.$$

И пусть кольцо R порождено операторами, действующими на элементах c_i умножением слева, причем сразу на всех одновременно (и это действие не зависит от записи), так что для любого $r \in R$ корректно определен элемент $P_r = d_0 r c_1 \cdots r c_s d_s$. Пусть r_i — оператор замены $c_i \to r c_i$, действующий на i-ю позицию. Пусть основное поле F бесконечно. Тогда на P определено действие кольца симметрических функций относительно r_i.

0.2.3. Следы и формы

Относительно свободная алгебра, как правило, алгеброй нетерового типа не является. Однако если ее расширить значениями оператора следа (в положительной характеристике — также операторов форм), то расширенная алгебра уже будет иметь нетеров тип. Цель построения экстремального идеала обычно в том, что экстремальный идеал I оказывается замкнутым относительно умножения на некоторое подкольцо кольца форм. Он совпадает с экстремальным идеалом расширенной алгебры. Схема доказательства конечной базируемости часто такова: доказывают, что для возрастающей цепочки T-идеалов Γ_i стабилизируются пересечения $\Gamma_i \cap I$, и переходят к факторам. Поэтому в данном разделе мы изучаем следы, формы и тождества со следом (с формами).

Основное соображение, принадлежащее Ю. П. Размыслову, таково. Пусть $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ – многочлен, полилинейный и кососимметричный по $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, V – векторное пространство, порожденное x_i, оператор $A \in \mathrm{End}(V)$. Тогда $f(A \cdot \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = f(Ax_1, \ldots, Ax_n, \overrightarrow{y}) = \det(A) f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Перейдем к линеаризации. Положим $A = E + ta$. Имеет место разложение по степеням t:

$$f(A \cdot \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \left(\sum_{k=0}^{n} \Phi_k(a) t^k \right) f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}),$$

где $\Phi_k(a)$ есть *форма k-го порядка* от оператора a. Она равна следу оператора $\bigwedge^k(a)$, действующего на векторном пространстве $\bigwedge^k(V)$. Этот след равен сумме главных миноров порядка k у матрицы оператора a. В частности, $\Phi_1(a) = \mathrm{Tr}(a)$, $\Phi_n(a) = \det(a)$, $\Phi_0(a) = 1$.

Если $A = E + \sum t_i a_i$, то

$$\det(A) = \sum_{\overrightarrow{k}} t_1^{k_1} \cdots t_s^{k_s} \Phi_{k_1, \ldots, k_s}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}),$$

где s – число координат вектора $\overrightarrow{k}$ (разное при разных параметрах суммирования $\overrightarrow{k}$), форма $\Phi_{k_1, \ldots, k_s}$ есть частичная линеаризация формы $\Phi_{\sum k_i}$.

Величина $\Phi_{k_1,\dots,k_s}$ равна сумме главных миноров порядка $k = \sum k_i$, у которых k_1 столбцов взяты от матрицы a_1, k_2 столбцов — от a_2 и т.д. Сумма берется также по всем способам выбора столбцов. В частности, если все $k_i = 1$, то $\Phi_{k_1,\dots,k_s}(a_1,\dots,a_s)$ есть *смешанный объем.* Он равен сумме главных миноров s-го порядка, у которых s-й столбец совпадает с s-м столбцом соответствующего минора оператора $\Phi(s)$. Суммирование ведется по всем главным минорам и по всем перестановкам $\sigma \in S_s$.

Нам потребуется несколько понятий из теории разбиений и симметрических многочленов (для подробного знакомства — см. книгу [152]). *Разбиением* $\mathcal{P}$ числа n называется представление n в виде суммы $n = \sum n_\alpha$, причем $n_1 \geq \dots \geq n_s > 0$. $|\mathcal{P}| = \sum n_i = n$. С разбиением $\mathcal{P}$ можно связать симметрическую функцию $m_{\mathcal{P}} = \sum_I \lambda_{i_\alpha}^{n_\alpha}$.

Ясно, что функции $m_{\mathcal{P}}$ образуют базис в пространстве симметрических функций. Известно, что любая симметрическая функция есть многочлен от элементарных функций e_k.

Если $\{\lambda_i\}$ – набор собственных чисел оператора a, то $\{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\}$ есть набор собственных значений оператора $\bigwedge^k a$ и величина

$$\Phi_k(a) = \sum_{i_1<\dots<i_k} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$$

равна *k-й элементарной симметрической функции e_k от* набора $\{\lambda_i\}$.

Поэтому функции e_k отвечает форма Φ_k, а многочлену от e_k – многочлен от форм Φ_k. Сумме отвечает переходу к прямой сумме пространств (на которых действует оператор a и след равен соответствующей функции), а произведению — тензорное произведение. e_1 и функция Φ_1 отвечают оператору следа, а определителю для матриц n-го порядка — форма Φ_n.

Таким образом, каждому разбиению $\mathcal{P}$ отвечает симметрическая функция от λ_i, а значит, и величина $\Psi_{\mathcal{P}}$, являющаяся многочленом от форм Ψ_k. В частности, разбиению r на одно слагаемое отвечает симметрическая функция $p_r = \sum \lambda_i^r$. При этом $\Psi_r(a) = \mathrm{Tr}(a^r)$.

В случае нулевой характеристики любая симметрическая функция выражается как многочлен от p_r и можно ограничиться следами. В случае характеристики p это не так (например, если $p = 2$, $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, то $p_r(\lambda) = 0$, а $e_2(\lambda) = \lambda_1^2 \neq 0$). Простейший пример алгебры с полупростой частью и тождественно равным нулю оператором следа — это алгебра верхнетреугольных матриц порядка p с одинаковыми элементами вдоль главной диагонали.

Мы изучаем тождества с формами. Некоторые из них выполняются в алгебре матриц любого порядка. Например, в случае характеристики $p > 0$ выполняется тождество $\mathrm{Tr}(x^p) = \mathrm{Tr}(x)^p$. Аналогичным образом, для любой формы Ψ имеет место равенство $\Psi_n(x^p) = \Psi_n^p(x)$. Множество тождеств с формами, выполняющихся в алгебре матриц любого порядка следует из тождеств от одной переменной. Оно соответствует комбинаторным тождествам от симметрических функций, отвечающих формам. Чтобы в этом убедиться, достаточно диагонализировать матрицу a.

Такого рода тождества с формами мы считаем *тривиальными* и их выполнение всегда постулируем. Если работа идет с формами, естественно отвечающими выражениям от элементарных форм Ψ_n, то постулируются тождества, отвечающие соотношениям между этими выражениями.

Изначальная идея, принадлежащая Ю. П. Размыслову, построения многочленов, устойчивых относительно умножения на следы (формы), заключается в следующем. Рассмотрим случай алгебры общих матриц порядка n. Пусть $f(x_1,\dots,x_{n^2},\overrightarrow{y})$ – многочлен Капелли, полилинейный и кососимметричный по x.

Тогда $f(a\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \det(a)^n f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Алгебра матриц порядка n, рассматриваемая как левый модуль над самой собой, изоморфна прямой сумме n экземпляров одинаковых модулей V. Набор собственных значений оператора a как оператора левого умножения есть набор собственных значений оператора a в V, повторенный n раз. k-я форма при таком действии

$$\hat{\Phi}_k(a)f(x_1, \ldots, x_{n^2}, \overrightarrow{y}) = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n^2\};|I|=k} f(x_1, \ldots, x_{n^2}, \overrightarrow{y})|_{x_i=ax_i;i\in I}$$

есть частичная линеаризация n-ой степени определителя.

Она выражается через формы $\Psi_{\mathcal{P}}$

$$\sum_{|\mathcal{P}|=k} \prod_{n_i\in\mathcal{P}} \binom{n}{n_i} \Psi_{\mathcal{P}}$$

(а формы $\Psi_{\mathcal{P}}$ выражаются через формы Φ_k).

В частности, $\hat{\Phi}_1(a) = n\,\mathrm{Tr}(a)$, $\hat{\Phi}_{n^2}(a) = \det(a)^n$. Поэтому

$$n\,\mathrm{Tr}(Z)C(x_1, \ldots, x_{n^2}; y_1, \ldots, y_{n^2}) = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \ldots, x_{n^2}; y_1, \ldots, y_{n^2})|_{x_i=Zx_i}$$

Переменные из набора $\overrightarrow{y}$ называются *прокладками.*

Мы будем работать только с формами типа $\hat{\Phi}_k$ и знак $\hat{}$ будем опускать. (Заметим, что из леммы К. А. Зубрилина, см. предложение 0.9, следует, что кольцо, порожденное формами Φ_k цело над кольцом, порожденным формами $\hat{\Phi}_k$.)

Кроме того, можно рассматривать двусторонние операторы. Алгебра линейных преобразований $n\times n$ матриц, рассматриваемых как n^2-мерное векторное пространство, изоморфна тензорному произведению алгебры левых умножений и алгебры правых умножений. Оператор $L(a)$ левого умножения на a и оператор $R(b)$ правого умножения на b при всех a и b коммутируют.

Если $\{\lambda_i\}$ есть набор собственных значений оператора a, а $\{\delta_j\}$ – собственных значений оператора b, то набор $\{\lambda_i\delta_j\}$ есть набор собственных значений оператора $L(a)R(b)$. Отсюда можно получить выражения для "двусторонних форм". Рассмотрим оператор $\hat{\Phi}_k(L(a)R(b))$. Он определяется равенством:

$$\hat{\Phi}_k(L(a)R(b))f(x_1, \ldots, x_{n^2}, \overrightarrow{y}) = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n^2\};|I|=k} f(x_1, \ldots, x_{n^2}, \overrightarrow{y})|_{x_i=ax_ib;i\in I}$$

и выражается через операторы типа $\Psi(a)$, $\Psi(b)$:

$$\hat{\Phi}_k(L(a)R(b)) = \sum_{|\mathcal{P}_1|=|\mathcal{P}_2|=k} \Psi_{\mathcal{P}_1}(a)\Psi_{\mathcal{P}_2}(b)\mu(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2),$$

где коэффициент $\mu(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ есть скалярное произведение характеров, отвечающих разбиениям $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Он равен числу способов , которыми объекты, разбитые на группы в соответствии с $\mathcal{P}_1$, разбиваются на группы в соответствии с $\mathcal{P}_2$ так, чтобы не было объектов, два раза попавших в одну группу.

Например, для случая $k = 1$ имеет место равенство:

$$\mathrm{Tr}(a)\,\mathrm{Tr}(b)C(x_1, \ldots, x_{n^2}; y_1, \ldots, y_{n^2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \ldots, x_{n^2}; y_1, \ldots, y_{n^2})|_{x_i=ax_ib}.$$

А для случая $k = n^2$ – равенство

$$C(ax_1b, \dots, ax_{n^2}b; y_1, \dots, y_{n^2}) = \det(a)^n \det(b)^n C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}).$$

Мы рассматривали преимущественно случай форм от одной переменной. Что касается форм от нескольких переменных, то они и выражения от них получаются путем линеаризации выражений от форм, рассмотренных выше. Поскольку вид этих выражений нам не важен, он здесь не приводится.

Суммируем полученные результаты, а также несколько других классических фактов, которые нам понадобятся:

Теорема (Ю. П. Размыслов). *а) В алгебре общих матриц размера n выполняется тождество Капелли порядка n^2+1 и не выполняется тождество Капелли порядка n^2.*

б) Имеют место равенства (x_i — альтернируются, y_i — "прокладки"):

$$n \operatorname{Tr}(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) \\ = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Zx_i}, \tag{2}$$

$$\det(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) = C(Zx_1, \dots, Zx_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) = \\ = C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Zx_i \forall i} \tag{3}$$

$$\operatorname{Tr}(Z_1) \operatorname{Tr}(Z_2) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) = \\ = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Z_1 x_i Z_2} \tag{4}$$

в) Следующий полином является центральным в алгебре общих матриц:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_{i+1}, \dots, y_{n^2}, y_1, \dots, y_i).$$

□

(Равенство (4) полезно для работы в положительной характеристике)

Полином называется *центральным*, если он не является тождеством и его значения лежат в центре алгебры.

Замечания 1. Многочлен Размыслова Z_k можно представлять себе так. Запишем каждый член многочлена C_{n^2} по кольцу. Затем разорвем кольцо во всевозможных местах (сразу после вхождения одной из переменных x_i) и результаты сложим. Подобным образом на базе тождества алгебраичности получается центральный полином Э. Форманека [144]. Его конструкция приведена в разделе 2.7 на стр. 153.

2. Впервые центральный полином $c(x)$ от одной переменной для алгебры матриц порядка k над полем из q элементов был построен В. Н. Латышевым и А. Л. Шмелькиным:

$$c(x) = \prod_{m=1}^{k-1} (x^{q^m} - x)^{(q^k-1)k} \left(\frac{x^{q^k} - x}{P(x)} \right)^{(q^k-1)k},$$

где $P(x)$ – произвольный неприводимый многочлен степени k в поле $\mathbb{F}_q$.

3. Основная идея, лежащая в основе формул Размыслова, такова. Если матричный многочлен F полилинеен и кососимметричен относительно n^2 переменных $\{x_i\}$, B – линейный оператор в пространстве матриц, то в результате подстановки $x_i \to B(x_i)$ получается умножение значения F на $\det(B)$. Формулы Размыслова получаются как линеаризация этого равенства, когда B есть оператор умножения на Z или композиция операторов левого умножения на Z_1 и правого – на Z_2.

Когда основное поле имеет нулевую характеристику, построенный полином Z_n не обращается тождественно в нуль в алгебре общих матриц порядка n. Однако в положительной характеристике это, вообще говоря, не так (а именно, когда p делит n). . Тем не менее, как показал Ю. П. Размыслов, в алгебре общих матриц n-го порядка всегда существует ненулевой центральный полином, обращающийся в нуль на матрицах меньшего порядка. Этот полином устойчив относительно умножения на следы (формы) и будет также обозначаться через Z_n. Устойчивость означает, что в результате умножения на след (форму) получается элемент алгебры общих матриц, а не расширенной алгебры.

В случае, когда основное поле имеет характеристику нуль, все симметрические многочлены от переменных x_i выражаются через суммы степеней $\sum x_i^k$. Тогда в силу тождества Гамильтона-Кэли имеет место следующее

Предложение 0.7. *Матрица Z порядка k цела над множеством*

$$\{\mathrm{Tr}(Z), \dots, \mathrm{Tr}(Z^k)\}.$$

В случае положительной характеристики надо рассматривать не только следы (суммы главных миноров порядка 1), но и суммы главных миноров произвольного порядка. Такие суммы называются *формами.*

Из предыдущего предложения и следствия теоремы Ширшова о высоте (если все слова длины не выше степени алгебры алгебраичны, то такая алгебра конечномерна) непосредственно вытекает

Предложение 0.8. *а) Пусть Y — множество слов длины не выше $2n$ алгебры общих матриц M_n, Z есть следующее множество следов:*

$$Z = \{\mathrm{Tr}(y_i^{k_j}) | y_i \in Y, 0 < k_j \leq \deg(A)\}.$$

Тогда расширение $M_n[Z]$ алгебры M_n цело над $\mathbb{K}[Z]$ и является нетеровым модулем.

б) Алгебра общих матриц со следом (формами) является нетеровым модулем над значениями оператора следа (взятия формы). Значения этих операторов сами порождают нетерово коммутативное кольцо. □

Следствие 0.1. *Аналогичное утверждение справедливо для любой представимой алгебры A. Расширение $\hat{A}$ представимой алгебры A значением оператора следа на элементах описанного выше типа является нетеровым модулем над коммутативным кольцом. (Следы (формы) определяются исходя из представления.)*

Замечания. 1. Если воспользоваться ограниченностью высоты над множеством слов степени не выше сложности алгебры, то параметр $2n$ в определении Y можно заменить на параметр n (а в следствии — на $\mathrm{PIdeg}(A)$).

2. Если $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) > 0$, то в качестве множества Z следует взять множество значений форм на элементах из Y.

Пусть в алгебре выполнено любое тождество вида $S_{\Lambda_1}\cdots S_{\Lambda_{k+1}}f=0$, где $|\Lambda_i|=m+1$ при всех i, S_Λ обозначает альтернирование по переменным из набора Λ.

Пусть полилинейный многочлен g кососимметричен по наборам переменных из Λ_i, где $|\Lambda_i|=n+1$ при $i>0$ и $|\Lambda_0|=|\Lambda_0'|=n$. Можно считать, что g имеет вид $g=S_{\Lambda_0}S_{\Lambda_0'}S_{\Lambda_1}\cdots S_{\Lambda_k}f$. Для каждого x определим оператор внутренней формы $\delta_k(x)$ (линейный относительно g) на $\mathrm{T}(g)$ следующим образом:

$$\delta_k(x)=\sum_{I\subset\{1,\ldots n\};|I|=k} g|_{a_i=xa_i\forall i\in I};\text{где } a_i\in\Lambda_0.$$

Полная линеаризация этого оператора есть оператор $\Psi(x_1,\ldots,x_k)$, который выражается равенством:

$$\Psi(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{i_1<\cdots<i_k} g|_{a_{i_\alpha}=xa_{i_\alpha}};\text{где } a_{i_\alpha}\in\Lambda_0.$$

В частности, определен линейный по x оператор внутреннего следа $\mathrm{Tr}(x)=\delta_1(x)$:

$$\mathrm{Tr}(x)g=\sum_{i=1}^{k} g|_{a_i=xa_i};\text{где } a_i\in\Lambda_0.$$

Следующее предложение приведено для удобства ссылок. Оно суммирует результаты раздела 2.1. Оно является непосредственным переносом основной теоремы в работе К. А. Зубрилина [42] на экстремальные многочлены.

Предложение 0.9. *Пусть $g\in S(D)$, $g=S_{\Lambda_0}S_{\Lambda_0'}S_{\Lambda_1}\ldots S_{\Lambda_d}(f)$, D – диаграмма Кемера, $|\Lambda_0|=|\Lambda_0'|=m$, $|\Lambda_i|=m+1; i=1,\ldots,d=d(A)$. Тогда*

а) Операторы внутренних форм, определенные выше, коммутируют. В частности, $\mathrm{Tr}(x)\,\mathrm{Tr}(y)=\mathrm{Tr}(y)\,\mathrm{Tr}(x)$.

б) $\mathrm{Tr}(ab)=\mathrm{Tr}(ba)$.

в) Пусть многочлен g линеен по переменной $z\notin\cup\Lambda_i$. Положим $g_h=g|_{h\to z}$. Пусть $h^{(k)}=h'a^kh''$, $g^{(k)}=g_{h^{(k)}}$.

Тогда имеет место равенство ("тождество Гамильтона-Кэли"):

$$g^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\delta_k(a)g^{(n-k)}.$$

г) Пусть h принадлежит препятствию к Гамильтону–Кэли порядка n. Тогда $g_h=0$.

д) Подпространство $\mathrm{T}(g)$, кососимметрическое по наборам переменных из Λ_i, является нетеровом модулем над операторами δ_k и вкладывается в представимую алгебру.

е) Пусть полилинейный многочлен g линеен по переменной $z\notin\cup\Lambda_i$ а также полилинеен и кососимметричен по наборам переменных из Λ_i; где $|\Lambda_i|=n+1$ при $i>0$, $|\Lambda_0|=n$ (в отличие от ситуации в остальных пунктах, набор Λ_0' отсутствует).

Тогда имеет место аналог тождества Гамильтона–Кэли:

$$g^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\delta_k(a)g^{(n-k)}.$$

И если h принадлежит препятствию к каноническому алгебраическому представлению порядка m, то $g_h=0$.

ж) Пространство многочленов, полилинейных по переменным из набора

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_0' \cup \bigcup_{i>0} \Lambda_i$$

и кососимметричных относительно Λ_0, Λ_0' и каждого Λ_i $(i > 0)$, представимо. Естественный морфизм в каноническое алгебраическое представление некоторого порядка является вложением. □

Отметим, что конструкция канонического алгебраического представления строится и для алгебр с ассоциативными степенями. Для них справедлив аналог леммы 0.3. Что касается предложения 0.9, то его аналог справедлив в самом общем общем случае для многоосновных алгебр с произвольным набором n_i-арных операций (см. работу [42], аналог п.ж) и верен также для т.н. *курошевых многообразий.*

Сложностным типом алгебры A мы будем называть класс всех полупрямых произведений матричных алгебр $M_1 \rtimes \cdots \rtimes M_k$ из $\mathrm{Var}(A)$. Это понятие включает в себя *классическую сложность* $\mathrm{PIdeg}(A)$ (максимальный размер матриц из $\mathrm{Var}(A)$) и *сложность Латышева* (максимальный размер верхнетреугольных матриц из $\mathrm{Var}(A)$). Это число разнотипных клеток в минимальном графе представления – параметр $b(A)$ Кемера – есть максимальная размерность алгебры из сложностного типа.

Отметим, что доказательство А. Р. Кемера конечной базируемости использует двойную индукцию: по сложностному типу и по индексу нильпотентности радикала.

0.2.4. Представления симметрической группы и супериоризация

Данный раздел посвящен краткому обзору теории супер–тождеств в связи со сведением бесконечно порожденного случая к конечно порожденному, но суперслучаю.

T_2-идеалом в суперменее называется идеал, порожденный значениям супертождеств или идеалом полиномов, устойчивым относительно всех эндоморфизмов свободной супералгебры, сохраняющих суперструктуру. Аналогично определяются *T_2-пространства.*

Слово называется *полилинейным*, если каждый символ встречается в нем не более чем по разу. Через $c_{\mathfrak{M}}(n)$ обозначим размерность пространства полилинейных слов длины n от букв $x_1, \ldots, x_n$ в свободной алгебре из многообразия $\mathfrak{M}$. Функция $c_{\mathfrak{M}}(n)$ называется *функцией роста коразмерностей*, а ряд $\sum c_{\mathfrak{M}}(n)t^n$ – *рядом коразмерностей*. Эти понятия были введены А. Регевым. Если $c_{\mathfrak{M}}(n) \sim e(\mathfrak{M})^n$, то величина $e = e(\mathfrak{M})^n$ называется *экспонентой* многообразия $\mathfrak{M}$. Ее существование и цеоочисленность для ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристике установлена в работе [136] (см. также [137]). Вопрос о целочисленности экспоненты многообразия ассоциативных PI-алгебр над полем положительной характеристики остается открытым.

Пусть в алгебре A над полем нулевой характеристики выполнено тождество f степени m. Это тождество можно считать полилинейным (см. раздел 0.2.2). Поскольку перестановка переменных в многочлене f осуществляет переход к равносильному тождеству, с каждым полилинейным многочленом g степени n можно связать $\mathbb{F}[S_n]$-модуль $N(g) \subset \mathrm{T}(g)$ над групповой алгеброй симметрической группы S_n.

Если $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$, то модуль $N(g)$ вполне приводим и раскладывается в прямую сумму компонент, отвечающих диаграммам Юнга. Строки отвечают симметрированию, а столбцы — альтернированию. Перейдем к точным формулировкам.

Каждая подстановка $\sigma \in S_n$ есть произведение циклов без общих элементов. Набору длин этих циклов, если их расположить в порядке невозрастания, отвечает диаграмма Юнга. Две перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда соответствующие диаграммы Юнга совпадают. Таким образом, классы сопряженности задаются диаграммами Юнга.

Пусть D – диаграмма Юнга из n клеток. Размещение чисел $1, \ldots, n!$ по клеткам D называется *таблицей Юнга* и обозначается D_α. Строки таблицы D_α можно рассматривать как циклы длин $n_1, \ldots, n_h$. Они определяют некоторую перестановку, а именно, произведение таких циклов. По каждой такой таблице D_α построим элемент групповой алгебры симметрической группы e_{D_α} следующим образом:

$$e_{D_\alpha} = \sum_{\pi \in R_{D_\alpha}, \rho \in C_{D_\alpha}} (-1)^\rho \pi\rho,$$

где R_{D_α} и C_{D_α} суть подгруппы S_n, оставляющие инвариантными соответственно строки или столбцы в D_α.

Элемент e_{D_α} пропорционален идемпотенту и порождает левый неприводимый $\mathbb{K}[S_n]$-модуль M_{D_α}. (Если $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) = p > 0$, то неприводимость выполняется тогда и только тогда, когда диаграмма D p-регулярна).

Размерность модуля M_{D_α} зависит только от D и дается *формулой крюков*:

$$\dim(M_{D_\alpha}) = \dim(M_D) = \frac{n!}{\prod_{ij} h_{ij}(D)}. \tag{5}$$

Здесь пары индексов ij отвечают клеткам D, и $h_{ij}(D) = (n_i - i) + (n'_j - j) + 1$ есть *величина крюка*; n_i – число клеток в i-й строке, n'_j – в j-ом столбце.

Пусть D есть квадрат размера $k \times k$, то $n = k^2$. Воспользовавшись формулой Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ и оценками

$$\exp\left(\int_1^k\int_1^k (x+y-1)\ln(x+y-1)dxdy\right) < \prod_{ij} h_{ij}(D) <$$
$$< \exp\left(\int_1^k\int_1^k (x+y)\ln(x+y)dxdy\right),$$

имеем:

$$\prod_{ij} h_{ij}(D) \sim \exp\left(k^2\ln(k) + k^2(2\ln 2 - 1/2)\right) = n^{n/2}2^{2n}e^{-n/2}.$$

Нетрудно убедиться также, что

$$\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{16e}\right)^{(n-1)/2} < \dim(M_D) < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{16e}\right)^{n/2}. \tag{6}$$

Каждый неприводимый $\mathbb{K}[S_n]$-подмодуль в $\mathbb{K}[S_n]$ порождается элементом вида $\sum k_{D_\alpha} e_{D_\alpha}$, сумма берется по таблицам с одинаковой диаграммой, которая и определяет класс эквивалентности соответствующего неприводимого представления. Групповая алгебра изоморфна прямой сумме своих гомоморфных образов по всем таким классам эквивалентности. Каждый из этих образов изоморфен алгебре матриц порядка, равного размерности соответствующего модуля. И сумма модулей, класс которых соответствует диаграмме D, есть такая простая компонента групповой алгебры $\mathbb{K}[S_n]$. Поэтому сумма квадратов размерностей разных классов неприводимых представлений равна $n!$ или размерности всей групповой алгебры.

Следующая лемма связывает неприводимые представления $\mathbb{K}[S_n]$-модулей и ограничений на $\mathbb{K}[S_{n-1}]$.

Лемма 0.6 (О ветвлении). *Пусть $\mathbb{K}$ – поле нулевой характеристики, и пусть M – неприводимый $\mathbb{K}[S_n]$-модуль с диаграммой Юнга D, M' – ограничение M, т.е. модуль M, рассматриваемый как $\mathbb{K}[S_{n-1}]$-модуль. Тогда M' есть прямая сумма модулей, диаграммы Юнга которых получаются из D путем удаления одной угловой клетки.* □

Характером называется функция следа в соответствующем представлении. Значение характера в единице равно размерности.

В случае характеристики $p > 0$ неприводимым модулям соответствуют p-*регулярные* диаграммы (и таблицы) Юнга, т.е. не имеющие p одинаковых строк. Групповая алгебра $\mathbb{K}[S_n]$ при $n \geq p$ не является полупростой (а при $n < p$ является), но раскладывается в композиционный ряд, факторы которого отвечают неприводимым $\mathbb{K}[S_n]$-модулям, соответствующим p-регулярным таблицам Юнга.

Диаграмма Юнга, все строки которой различны, является p-регулярной для любого p. В положительной характеристике будет рассматриваться диаграмма D_m из $m = n(n+1)/2$ клеток, состоящая из строк длины $1, 2, \dots, n$. S_m-модули, соответствующие D_m, неприводимы для любого p и имеют размерность, вычисляемую по формуле крюков. Эту размерность можно оценить так:

$$\sqrt{\frac{\pi}{(2m)^{1/2}e}}2^{-m}m^{1/2(m-\sqrt{m})}e^{-\sqrt{18m}} < \dim(M_{D_m}) < \sqrt{\frac{\pi}{(2m)^{1/2}e}}2^{-m}m^{1/2(m-\sqrt{m})}. \tag{7}$$

Каждому элементу групповой алгебры $\mu = \sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma$ отвечает полилинейный многочлен

$$\psi(\mu) = \sum_\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Элементам вида $\psi(\sum k_{D_\alpha} e_{D_\alpha})$ отвечают “самые слабые” тождества или неприводимые $\mathbb{K}[S_n]$-подмодули в пространстве полилинейных многочленов.

Наличие параметров k_{D_α} приводит к появлению систем тождеств, зависящих от параметров. Обсуждение этого явления на языке носителей (“гашение путей”, взаимодействие радикала в однотипных анфиладах) содержится в главе 4.

Отметим также, что группа S_n действует и на разреженных тождествах и все сказанное выше относится и к этому случаю.

Взаимосвязь между следованием тождеств и диаграммами, соответствующими этим тождествам, весьма загадочна. Отметим только, что если одна диаграмма содержит другую, то отсюда не вытекает следование соответствующих тождеств (иначе проблема Шпехта легко бы решалась). Тем не менее некоторые оценки можно сделать и на этом пути устанавливаются некоторые важные факты.

Прежде всего заметим, что если система сильных тождеств содержит подмодуль из некоторого класса, отвечающего диаграмме D, то она содержит и все подмодули из этого класса. Более того, в нулевой характеристике это равносильно определению понятия сильного тождества. Если каждый многочлен, являющийся тождеством в $\mathfrak{M}$, задает сильное тождество в $\mathfrak{M}$, то многообразие $\mathfrak{M}$ является *устойчивым*. Равносильное определение устойчивости: если полилинейный многочлен f есть тождество в $\mathfrak{M}$, то если каждый моном вида ux_iv заменить на моном vx_iu, то получившийся многочлен f' есть снова тождество в $\mathfrak{M}$. Таким образом, в нулевой характеристике параметрических семейств устойчивых тождеств нет.

Далее, если $D' \subset D$, то любое разреженное тождество, отвечающее модулю с диаграммой D, в силу леммы 0.6 о ветвлении есть следствие разреженного тождества, отвечающего модулю с диаграммой D'. Таким образом, если $D' \subset D$, то система сильных разреженных тождеств, соответствующих D, есть следствие системы сильных разреженных тождеств, соответствующих D'. Любая бесконечная цепочка диаграмм содержит диаграммы, сравнимые по включению. Поэтому любая возрастающая цепочка систем сильных разреженных тождеств стабилизируется.

Кроме того, в силу результата А. Е. Залесского [38] о слабой нетеровости групповой алгебры финитарной симметрической группы над полем нулевой характеристики, любая система разреженных тождеств над полем нулевой характеристики задается конечной подсистемой (в неассоциативном случае систему разреженных тождеств приходится определять как систему сильных разреженных тождеств так что ничего нового нельзя добавить).

Теперь заметим, что пространство, порожденное словами, которые не являются $\deg(f)$-разбиваемыми, вместе с $\mathrm{T}(f)$ порождает пространство всех полилинейных слов, поэтому величина $c_k(\mathfrak{M})$ не превосходит количества полилинейных слов степени k, не являющихся $m = \deg(f)$-разбиваемыми.

В. Н. Латышев [68] получил следующие оценки:

Теорема (В. Н. Латышев). *Количество полилинейных слов длины R из символов $x_1, \ldots, x_R$, не являющихся m-разбиваемыми, не превосходит $(m-1)^{2R}$.*

Доказательство. С каждым полилинейным словом u от $x_1, \ldots, x_R$ свяжем отношение частичного порядка на множестве входящих в него букв. А именно, $x_i \prec x_j$, если $i < j$ и, кроме того, буква x_i стоит в слове u левее. Получившееся отношение есть пересечение двух отношений линейного порядка (стандартного порядка на образующих и расположения букв в слове).

Если слово u не является m-разбиваемым, то это равносильно тому, что в данном отношении порядка нет антицепей мощности m. Но тогда, в силу теоремы Дилворса, само это множество разбивается не более чем на $m-1$ цепь.

Это означает, что множество позиций в слове u можно так раскрасить в $m-1$ цвет, что буквы, стоящие на позициях одного цвета, идут в порядке убывания.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что по цветам букв и по цветам позиций однозначно восстанавливается слово u, а количество раскрасок в $m-1$ цвет R-элементного множества равно $(m-1)^R$, соответственно количество таких раскрасок для пары множеств равно $(m-1)^{2R}$. $\square$

Данная теорема дает оценку на размерность полилинейных компонент относительно свободных алгебр. Заметив, что $(m^4/2)! > (m-1)^{2m^4}$, получаем

Следствие 0.2. *В PI-алгебре степени m над полем нулевой характеристики выполняется разреженное тождество порядка m^4.* $\square$

В общем случае вместо квадратной диаграммы Юнга D можно использовать треугольную и, воспользовавшись оценками на $\dim(M_D)$ для нее, показать, что в случае основного поля произвольной характеристики выполняется разреженное тождество порядка $3m^4$.

Из этой теоремы также легко выводится теорема Регева, утверждающая, что тензорное произведение PI-алгебр есть PI-алгебра.

Нам понадобится другое следствие. Если размерность модуля, отвечающего диаграмме D из n клеток, больше размерности пространства полилинейных полиномов степени n для многообразия $\mathfrak{M}$, то соответствующие компоненты входят с нулевой кратностью. Сравнивая оценки на размерности полилинейных полиномов в многообразии степени m с оценками на размерностями неприводимых модулей, имеем следующее

Предложение 0.10. *Пусть в алгебре A выполняется полилинейное тождество степени m. И пусть D есть квадрат $k \times k$, $n = k^2$, $m = \deg(\mathfrak{M})$, D' есть таблица, состоящая из k столбцов размера $1, \ldots, k$, $n' = k(k+1)/2$. Тогда*

а) Если $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$ и $n \geq 16em^4$, то любое тождество, отвечающее диаграмме D, выполняется в $\mathfrak{M}$. Если $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ произвольна и $n' \geq 3e^3m^4$, то любое тождество, отвечающее диаграмме D', выполняется в $\mathfrak{M}$.

б) Если $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$ и $n \geq 16em^8$, то любое разреженное тождество порядка m, отвечающее диаграмме D, выполняется в $\mathfrak{M}$. Кроме того, в $\mathfrak{M}$ выполняется любое разреженное тождество, отвечающее диаграмме $D' \supseteq D$ (для произвольной характеристики выполняется любое разреженное тождество, отвечающее D', если только $n' \geq 10e^3m^8$). $\square$

Как следствие п.б) данного предложения, получается следующий **фундаментальный факт**:

Предложение 0.11. *Пусть в алгебре A выполняется полилинейное тождество степени m. Если $k > 4\sqrt{e}\deg(\mathfrak{M})^4$, то многочлен g из любого неприводимого $\mathbb{F}[S_n]$-модуля, для которого соответствующая диаграмма Юнга содержит квадрат $k \times k$, содержится в $\mathrm{T}(f)$.*

Отметим, что в заключениях обеих пунктов предложения 0.10 можно добавить прилагательное “сильный” (см. определение 0.1). Поэтому можно сформулировать такое следствие

Предложение 0.12. *Пусть Γ – произвольный T-идеал. Тогда существует набор коэффициентов $\{\alpha_t\}$ такой, что для любой перестановки $\tau \in S_n$ и любых x_t, y_t по модулю Γ выполняется равенство*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma y_0 x_{\tau(\sigma(1))} y_1 \ldots x_{\tau(\sigma(n))} y_n = 0.$$

$\square$

Замечание. Размерность неприводимого $\mathbb{F}[S_n]$-модуля, диаграмма Юнга которого содержит квадрат $\deg(f)^2 \times \deg(f)^2$, может оказаться небольшой по сравнению с любой экспонентой. Например, алгебра Витта — алгебра Ли векторных полей порождает многообразие с экспоненциальным ростом коразмерностей. Однако, даже в случае алгебры векторных полей на прямой W_1 диаграммы Юнга, отвечающие ненулевым полиномам могут содержать квадраты любого размера. Поэтому рассуждения с разреженными тождествами необходимы.

Их успешность в ассоциативном случае связана с тем, что система разреженных тождеств порядка l задается многочленами степени $2l-1$. Для алгебр Ли это не так, и система разреженных тождеств порядка l может задаваться многочленами высокой степени (между альтернирующимися переменными могут стоять сколь угодно длинные прокладки). В случае хороших многообразий выполняется условие “сборки” для операторных произведений, так что удается получить те же качественные результаты, что и в ассоциативном случае.

Если в алгебре Ли выполняется некоторая система разреженных тождеств (такие алгебры Ли называются *API-алгебрами*), то аналоги предложений 0.12, 0.10, 0.11 выполняются и все рассуждения, связанные с супериоризацией, проходят, см. [15]. Отметим также, что для многообразий *PI*-алгебр Ли функция $c_{\mathfrak{M}}(n)$ может расти сверхэкспоненциально, например как $(\varepsilon n)!$.

Супериоризация. Итак, все ненулевые многочлены в алгебрах из многообразия, заданного тождеством f, соответствуют суммам модулей, диаграмма Юнга которых содержится в объединении бесконечной горизонтальной полосы толщины $m = \deg(f)^2$ и бесконечной вертикальной полосы той же толщины. Отсюда выводится

Предложение 0.13. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебр, в котором выполняется тождество f степени m и $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$. Пусть $k = 6m^4$. Тогда имеет место изоморфизм между решеткой T-идеалов (T-пространств) в относительно свободной бесконечно порожденной алгебре из многообразия $\mathfrak{M}$ и решеткой T-идеалов (соответственно, T-пространств) в алгебре*

$$B = \mathbb{F}\ll x_{j1}, \ldots, x_{jk}, y_{j1}, \ldots, y_{jk}\gg,$$

свободной в классе алгебр из $\mathfrak{M}$, порожденных k бесконечными семействами абсолютно коммутирующих переменных $\{x_{js}\}, s = 1, \ldots, k$ и m бесконечными семействами абсолютно антикоммутирующих переменных $\{y_{js}\}, s = 1, \ldots, m$. □

Многочлены, полилинейные по $X_{i\alpha}$, можно рассматривать как результат линеаризации многочленов от переменной x^*_α. А что можно сделать с семействами Y_α? Как определить "косую линеаризацию"?

Зададим на алгебре B суперструктуру, считая $x_{i\alpha}$ четными переменными, а $y_{i\alpha}$ – нечетными. Рассмотрим тензорное произведение алгебры B с бесконечно порожденной грассмановой алгеброй G с нечетными антикоммутирующими образующими e_{ij}, а затем — алгебру $*B \subset G \otimes B$, порожденную переменными из семейств X_α и элементами $*y_{i\alpha} = e_{i\alpha}y_{i\alpha}$. Имеется естественный изоморфизм $*$ между решеткой полилинейных компонент T_2-идеалов (и T_2-пространств) в алгебрах B и $*B$ соответственно. А поскольку T_2-идеалы, как и T-идеалы, задаются своими полилинейными компонентами, то этот изоморфизм есть также изоморфизм решетки T_2-идеалов. При этом семейства абсолютно антикоммутирующих переменных Y_α переходят в семейства абсолютно коммутирующих переменных. Изоморфизм $*$ решетки T_2-идеалов естественно определяется для свободной супералгебры и является инволюцией решетки (поскольку алгебры B и $**B$ естественно изоморфны). Итак, мы свели изучение решетки T_2-идеалов в супералгебре с семействами абсолютно антикоммутирующих нечетных переменных Y_α к изучению T_2-идеалов в супералгебре, порожденной $2m$ наборами абсолютно коммутирующих переменных X_α и $*Y_\alpha$. Но, в силу процесса линеаризации, решетка T_2-идеалов в алгебре $*B$ изоморфна решетке T_2-идеалов в алгебре $*B^*$, порожденной m переменными x^*_α и m переменными $*y^*_\alpha$. Все сказанное для T-идеалов переносится на T-пространства.

Таким образом, изучение T-идеалов (T-пространств) в бесконечно порожденных алгебрах сводится к изучению T_2-идеалов (T_2-пространств) в конечно порожденных супералгебрах. Все сказанное относительно T-идеалов непосредственно переносится на T-пространства и, кроме того, результат переносится и на любое многообразие неассоциативных алгебр, в котором все диаграммы Юнга, отвечающие ненулевым полиномам, не могут содержать квадраты слишком большого размера.

Таким образом, из предложения 0.13 выводится

Предложение 0.14. *Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$, $\mathfrak{M}$ – многообразие степени n. Тогда $\mathfrak{M}$ порождается грассмановой оболочкой алгебры A, в которой выполняется тождество Капелли порядка $12m^4 + 1$.* □

Поскольку базисный ранг многообразия, в котором выполняется тождество Капелли порядка k, строго меньше k, имеет место

Следствие 0.3. *Пусть* $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$, $\mathfrak{M}$ – *многообразие степени* n. *Тогда* $\mathfrak{M}$ *порождается грассмановой оболочкой* $12m^4$-*порожденной алгебры.* □

Таким образом, если $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$, то любое многообразие порождается грассмановой оболочкой конечно порожденной алгебры.

Отметим, что это свойство может не выполняться, даже когда рост пространства полилинейных полиномов не более чем экспоненциальный.

T-идеалы и теория инвариантов. При изучении T-идеалов используется другое представление симметрической группы $\sigma \to \varphi(\sigma)$, которое связано с инвариантами. Оно было введено Ю. П. Размысловым [108] и К. Прочези [158]. При этом соответствии разложению перестановки σ на циклы

$$\sigma = (i_{11}, \dots, i_{1k_1}), \dots, (i_{s1}, \dots, i_{sk_s}).$$

отвечает моном со следом

$$\varphi(\sigma) = \mathrm{Tr}(x_{i_{11}} \cdots x_{i_{1k_1}}) \cdots \mathrm{Tr}(x_{i_{s1}} \cdots x_{i_{sk_s}}).$$

Соответствие φ удобно тем, что умножение на элементы S_n согласовано с подстановками (и тождество, отвечающее таблице D, для любой ме́ньшей таблицы $D' \subset D$ есть следствие некоторого тождества, отвечающего D'. (Его неудобством является то, что следы не всегда определены. Их приходится имитировать, путем нахождения "киллеров следов" или многочленов, умножение которых на след не выводит за пределы исходной алгебры (без следов).)

Важность данного соответствия обусловлена следующим обстоятельством. С точки зрения полилинейных инвариантов (а в нулевой характеристике полиномиальные инварианты определяются полилинейными) матрица есть составной объект — сумма тензорных произведений вектора на ковектор. Все полилинейные инварианты получаются путем спаривания векторов и ковекторов. Если векторы, соответствующие x_1, спарить с ковекторами x_2, векторы x_2 – с ковекторами x_3, …, векторы x_n – с ковекторами x_1, то получится величина, равная $\mathrm{Tr}(x_1 \cdots x_n)$. Если же i-й вектор спарить с $\sigma(i)$-м ковектором, то получится моном со следом $\varphi(\sigma)$.

Оказывается, что все полилинейные (а значит, в силу поляризации и все алгебраические) инварианты получаются путем указанного спаривания и, следовательно, выражаются через следы произведений. Все соотношения между инвариантами для матриц порядка n выводятся из тождества, означающего обращение в ноль результата альтернирования набора из $n+1$ вектора (или, что то же самое, ковектора). Это тождество оказывается тождеством Гамильтона–Кэли. Вот точные формулировки.

Первая фундаментальная теорема. *Пусть* $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$. *Тогда любая инвариантная функция на* n-*ке матриц относительно одновременного сопряжения есть полином от величин вида*

$$\mathrm{Tr}(x_{i_1} \cdots x_{i_k}).$$

Вторая фундаментальная теорема. *Пусть* $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$. *Тогда все соотношения между инвариантными функциями являются следствиями линеаризованного тождества Гамильтона–Келли:*

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \varphi(\sigma) = 0.$$

Тождество Гамильтона–Кэли ξ_n имеет вид $\xi_n(X) = X^n - \Phi_1(X)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\Phi_n(X)$, где величины $\Phi_n(X)$ суть *элементарные формы* (см. начало раздела 0.2.3).

Позднее, когда (прежде всего С. Донкиным) была развита теория представлений групп в положительной характеристике ('tilting modules'), были получены обобщения первой и второй фундаментальной теорем на произвольную характеристику.

Первая фундаментальная теорема (С. Донкин). *Пусть* $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ *произвольна. Тогда любая инвариантная функция на* n*-ке матриц относительно одновременного сопряжения есть полином от значений форм* Φ_n *и их линеаризаций на произведениях элементов.*

Аналог второй фундаментальной теоремы в положительной характеристике был установлен А. Н. Зубковым [41]:

Вторая фундаментальная теорема (А. Н. Зубков [41]). *Идеал* T_n *соотношений между матричными ковариантами для алгебры матриц* n*-го порядка порождается многочленами* ξ_k $(k \geq n)$*, а идеал* D_n *соотношений между инвариантами порождается формами* Φ_k $(k \geq n)$*.*

n-разбиваемые слова и полилинейные инварианты в алгебре общих матриц. А. Р. Кемер [148] установил, что базис инвариантов алгебры матриц порядка n со следом над полем произвольной характеристики отвечает перестановкам, не являющимся n-разбиваемыми. При этом каждой перестановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & q \\ i_1 & i_2 & \dots & i_q \end{pmatrix}$$

отвечает моном $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_q}$.

Тем самым размерность пространства полилинейных инвариантов степени q алгебры общих матриц со следом совпадает с числом слов длины q, не являющихся n-разбиваемыми.

С другой стороны, указанная размерность вычислена в работе Е. Форманека [145]. Он явно указал коэффициенты ряда Гильберта кольца инвариантов $P(C)$ алгебры общих матриц со следом. Приведем соответствующие равенства:

для ряда Гильберта алгебры инвариантов

$$P(C) = \int_{U(n,\mathbb{C})} \left(\prod_{i=1}^{m} \det(1 - x_i\phi^P)^{-1}\right) d\mu(P)$$

и для ряда Гильберта алгебры общих матриц со следом:

$$P(R) = \int_{U(n,\mathbb{C})} \mathrm{Tr}(\phi^P) \left(\prod_{i=1}^{m} \det(1 - x_i\phi^P)^{-1}\right) d\mu(P),$$

где для каждого $P \in U(n,\mathbb{C})$ $\phi^P \in U(n^2,\mathbb{C})$ есть оператор сопряжения. Интегрирование ведется по мере Хаара на группе унитарных матриц $U(n,\mathbb{C})$.

Замечание. Переход от алгебры инвариантов к алгебре общих матриц со следом осуществляется путем введения фиктивной переменной x_0. Выражению $\mathrm{Tr}(ux_0v)$ отвечает бесследовый моном vu. Формально соответствие задается так: $v \to \mathrm{Tr}(x_0v)$. Оно осуществляет изоморфизм векторных пространств.

Ряд коразмерностей получается путем выделения полилинейных компонент и их интегрирования. Для каждого n получается явная формула для количества слов, не являющихся n-разбиваемыми. Отметим, что при $n = 3$ эти количества совпадают с числами Каталана.

Другой способ получить формулу на коразмерности таков. Поскольку все тождества алгебры общих матриц со следом порядка n выводятся из тождества Гамильтона–Кэли, которое задается одним столбцом длины n, то величина c_k или размерность пространства полилинейных слов порядка k равна сумме квадратов размерностей модулей, отвечающих диаграммам Юнга, лежащим в полосе ширины $n-1$.

Для каждой такой диаграммы размерность вычисляется по формуле крюков. Окончательно имеем

$$c_n(k) = \sum_{h<n, i_1 \geq \cdots \geq i_h, \sum i_j = k} \left(\frac{n!}{\prod_{j=1}^h \frac{(i_j+j-1)!}{(j-1)!}} \right)^2$$

Таким образом, чисто комбинаторная задача перечисления всех перестановочно упорядоченных множеств диаметра $n-1$ или, что то же самое, полилинейных слов, не являющихся n-разбиваемыми, решается с помощью PI-теории.

1. Базисы алгебр и комбинаторика слов

В комбинаторных рассуждениях теории колец прежде всего имеют дело со словами, т.е. с записью элементов через образующие. Техника работы со словами использует мономиальные алгебры. Ряд вопросов теории колец, например, изучение рядов Гильберта, сводится к мономиальному случаю. Перейдем к определениям.

Куском или *подсловом* v *слова* W мы называем набор символов, встречающихся в W, идущих подряд. Место, где этот кусок встречается, называется *вхождением* v *в* W.

Порядок $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_s$ на образующих индуцирует *лексикографический порядок* на множестве слов. При этом два слова оказываются *лексикографически несравнимыми* (или просто *несравнимыми*) если одно есть начало другого. Иногда мы рассматриваем *смешанный порядок* при котором слова сначала сравниваются по длине, а слова одной длины — лексикографически.

Определение 1.1. Алгебра называется *мономиальной*, если все ее определяющие соотношения заданы словами (данное понятие зависит от выбора системы образующих). Мономиальная алгебра A_Γ называется *автоматной*, если множество ее ненулевых слов совпадает с множеством слов, которые соответствуют путям ориентированного графа Γ, стрелки которого размечены буквами, символизирующими образующие этой алгебры.

Свойства графов связаны со свойствами матричных алгебр и со свойствами полупрямого произведения (см. [164]): Циклам отвечает полупростая часть, а стрелкам, не лежащим полностью внутри цикла — радикальные компоненты алгебры. Максимальная длина цикла равна сложности алгебры ($\mathrm{PIdeg}(A)$) (результат В. В. Борисенко). Максимальная длина пути по стрелкам, не принадлежащих (полностью) циклам — индексу нильпотентности радикала. Если Γ состоит из одного цикла длины n, то $\mathrm{Var}(A_\Gamma) = \mathbb{M}_n$. Если граф Γ не имеет параллельных ребер и все стрелки помечены разными буквами, то многообразие, порожденное алгеброй, соответствующей Γ, есть полупрямое произведение матричных многообразий и многообразий, заданных тождествами вида

$x_1x_2\dots x_{n_i} = 0$. Соответствующий T-идеал есть произведение идеалов тождеств этих алгебр.

Отметим следующее полезное утверждение, доказываемое с помощью комбинаторики слов.

Предложение 1.1. *Пусть A — к.п. градуированная алгебра, M — конечный набор однородных элементов такой, что при всех k факторалгебра $A/M^{(k)}$ нильпотентна. Тогда любая факторалгебра $A' = A/I$, в которой все проекции элементов из M алгебраичны, конечномерна.*

Доказательство. Пусть k — максимум из степеней многочленов, аннулирующих элементы из проекции M. Пусть $A/M^{(k)}$ нильпотентна индекса l. Это означает, что все слова в A длины, не меньшей l, линейно представимы словами от образующих A и элементов $m \in M$, содержащих m^k своим подсловом. Поэтому проекции слов длины l линейно представимы проекциями слов ме́ньшей длины. $\square$

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathrm{Wd}\langle\{x_i\}\rangle$. Через $\widehat{\mathcal{M}}$ обозначается множество подслов слов из $\mathcal{M}$. Тогда $\mathrm{Wd}\langle\{x_i\}\rangle\backslash\widehat{\mathcal{M}}$ — идеал в полугруппе $\mathrm{Wd}\langle\{x_i\}\rangle$. Он порождает идеал $I_{\mathcal{M}}$ в алгебре $\Phi\langle\{x_i\}\rangle$. Соответствующая факторалгебра обозначается $A_{\mathcal{M}}$. Пусть W — бесконечное слово. Тогда A_W — это алгебра, все соотношения в которой имеют вид $v = 0$, где v — слово, не являющееся подсловом W. Если $\{W_i\}$ — набор слов, то A_{W_i} суть алгебра, все соотношения в которой имеют вид $v = 0$, где v — слово, не являющееся подсловом ни одного из $\{W_i\}$. Если u есть конечное слово, то алгебра A_{u^∞} обозначается просто A_u, где u^∞ есть бесконечное слово с периодом, равным слову u. Известен следующий факт:

Теорема. *Для любой алгебры A существует мономиальная алгебра $\widehat{A}$ с той же функцией роста.*

Таким образом, изучение функций роста в алгебрах сводится к мономиальному случаю. Отметим, однако, что алгебра $\widehat{A}$ может оказаться не конечно определенной даже в том случае, когда A конечно определена.

1.1. Рост в словах и в алгебрах

Понятие роста измеряет количество соотношений в алгебраической системе, степень ее "бесконечности". Оно служит, в частности, обобщением понятия размерности в бесконечномерном случае. Вопрос о поведении функций роста в группах, полугруппах и алгебрах изучался многими авторами. Достаточно часто встречается полиномиальный (например, в коммутативном случае) и экспоненциальный (в свободных алгебрах) рост. Дж. Милнор поставил вопрос о наличии групп промежуточного роста. Проблема Милнора была решена Р. И. Григорчуком [23]. Рост конечно определенной мономиальной алгебры либо полиномиален, либо экспоненциален. В. А. Уфнаровский [113] построил пример конечно определенной алгебры промежуточного роста. Она явилась универсальной обертывающей алгеброй для бесконечномерной алгебры Ли. А. А. Кириллов и М. Л. Концевич построили относительно свободную алгебру Ли промежуточного роста — алгебру Ли векторных полей общего положения на многообразиях. Поэтому представляет интерес вопрос о поведении функций роста алгебр в общем случае.

Определения. Пусть A — алгебра с фиксированным набором образующих над полем F. Через (x) обозначается идеал, порожденный элементом x, а через (α) — идеал, порожденный множеством α. Положим $T_A(n) = V_A(n) - V_A(n-1)$. В случае, когда алгебра однородна и все a_i имеют степень однородности единица, $T_A(n)$

есть размерность пространства, порожденного словами длины ровно n. *Функция роста* бесконечного слова W определяются аналогично: $V_W(n)$ — это число его различных подслов длины не выше n, $T_W(n) = V_W(n) - V_W(n-1)$ есть число различных подслов слова W длины ровно n.

Следующая теорема говорит о возможном "аномальном" поведении функций роста.

Теорема 1.2. *а) Пусть $\psi(n) = e^{o(n)}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \ln\psi(n)/n = 0$. Пусть $\varphi(n) = n(n+3)/2+1/o(1)$, т.е. $\lim_{n\to\infty}(\varphi(n)-n(n+3)/2) = \infty$. Тогда существует такая алгебра A и два бесконечные подмножества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ натурального ряда, что*

1) при всех $n \in \mathcal{K}$ $\quad V_A(n) > \psi(n)$;

2) при всех $n \in \mathcal{L}$ $\quad V_A(n) < \varphi(n)$.

Если $\psi(n)$ есть многочлен, то A может быть выбрана PI-алгеброй.

б) Пусть $\psi(n) < Cn^k$. Тогда существует PI-алгебра, удовлетворяющая условиям предыдущего пункта для функций φ и ψ .

Например, пусть $\psi(n) = e^{\sqrt{n}}$, $\varphi(n) = n(n+3)/2 + \ln(n)$. Тогда функция роста алгебры A то растет медленно и отстает от φ, то вдруг начинает расти быстро и обгоняет ψ, и это происходит бесконечно много раз.

Доказательство. Нам понадобится рассмотреть две вспомогательные алгебры.

1. Алгебра $A^\infty = \Phi\langle a,b\rangle/(b)^2$. Слова этой алгебры — это суть слова, не содержащие двух вхождений букв b. Как легко видеть, $T_{A^\infty}(n) = n+1$, поэтому $V_{A^\infty}(n) = n(n+3)/2$. Очевидно следующее

Предложение 1.2. *Для любой константы C существует такое $K(C,\varphi)$, что при $n > K(C,\varphi)$ $\quad V_{A^\infty}(n) + C < \varphi(n)$.* □

2. Алгебра $A^n = \Phi\langle a,b\rangle/I_b^n$, где I_b^n — идеал, состоящий из слов, не содержащих подслов вида ba^kb, где $k < n$. Ясно, что при $k < n$ $\quad T_{A^n}(k) = T_{A^\infty}(k) = k+1$. Легко видеть также, что $T_{A^\infty}(k) \geq 2^{[k/n]}$. Для этого достаточно рассмотреть множество слов, у которых на позициях с номером, не кратным n (номер отсчитывается слева), стоит буква a, а в остальных позициях стоит все что угодно. Число таких слов равно $2^{[k/n]}$. Поэтому справедливо

Предложение 1.3. *Существует такое $N_\psi(n)$, что при $k > N_\psi(n)$ справедливы неравенства*

$$V_{A^n}(k) > T_{A^n}(k) \geq \psi(k).$$

□

Итак, алгебра A^n есть алгебра экспоненциального роста. Множество слов алгебры, которую мы будем строить, при некоторых длинах слов будет устроено как множество слов алгебры A^∞, при других длинах — как множество слов алгебры A^{l_i}.

Основная конструкция. Пусть α: $l_1 < k_1 < l_2 < k_2 < \ldots < l_i < k_i < l_{i+1} < \ldots$ — последовательность натуральных чисел. Через $I(\alpha)$ мы обозначим идеал, порожденный следующими множествами $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$:

$$\mathcal{W}_1 = \{W \mid l_i < |W| < k_i \quad \& \quad \exists k < l_i :\ ba^kb \subset W\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{W \mid k_i < |W| < l_{i+1} \quad \& \quad \exists k < l_{i+1} :\ ba^kb \subset W\}.$$

Положим $W(\alpha) = \mathrm{Wd}(a,b)\backslash I(\alpha)$, $A(\alpha) = \Phi(a,b)/I(\alpha)$.

Ясно, что при $l_i \le n < k_i$ $T_{A(\alpha)}(n) = T_{A^{l_i}}(n)$, а при $k_i \le n < l_{i+1}$ $T_{A(\alpha)}(n) = T_{A^\infty}(n) = n+1$. Предложение 1.3 позволяет выбрать k_i так, чтобы выполнялось неравенство $V_{A(\alpha)}(k_i-1) > T_{A(\alpha)}(k_i-1) = T_{A^{l_i}}(k_i-1) > \psi(k_i-1)$, а предложение 1.2 позволяет выбрать l_{i+1} так, чтобы выполнялось неравенство $V_{A(\alpha)}(l_{i+1}-1) < \varphi(l_{i+1}-1)$. В этом случае построенная алгебра $A(\alpha)$ будет искомой алгеброй, удовлетворяющей условиям теоремы. Доказательство первой части теоремы завершено.

Доказательство п.б) аналогично. Достаточно отметить, что алгебра $F\langle a,b\rangle/\operatorname{id}(b)^k$ является *PI*-алгеброй и что число слов, имеющих k вхождений букв b, у которых любые два вхождения букв b находятся на расстоянии, большем R, растет как n^k. $\square$

Для случая алгебр Ли справедлива следующая

Теорема 1.3. *Пусть $\psi(n) = e^{o(n)}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \ln\psi(n)/n = 0$. Пусть $\varphi(n) = n + 1/o(1)$, т.е. $\lim_{n\to\infty}(\varphi(n)-n) = \infty$. Тогда существуют такие алгебра Ли L и два бесконечных подмножества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ натурального ряда, что*

а) при всех $n \in \mathcal{K}$ $V_L(n) > \psi(n)$;

б) при всех $n \in \mathcal{L}$ $V_L(n) < \varphi(n)$.

Например, пусть $\psi(n) = e^{\sqrt{n}}$, $\varphi(n) = n + \ln(n)$. Тогда функция роста некоторой алгебры то отстает от φ, то обгоняет ψ.

Идея доказательства. Каждой алгебре A с фиксированным набором образующих можно поставить в соответствие алгебру $A^{(-)}$ — подалгебру алгебры A^-, порожденную образующими алгебры A. Легко убедиться в том, что при $k > 1$ $T^{(-)}_{A^\infty}(k) = 1$, и что $T^{(-)}_{A^n}(k)$ имеет экспоненциальный рост. Поэтому алгебра Ли, удовлетворяющая условиям теоремы, строится как алгебра $A(\alpha)^{(-)}$. $\square$

С другой стороны, условия этих теорем нельзя улучшить. А именно, как для функций T_A и V_A, так и для функций T_W и V_W можно утверждать следующее.

Теорема 1.4. *Существуют следующие пределы:*

а) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \ln(T(n))/n$;

б) $\lim_{n\to\infty}(T(n)-n)$, и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(V(n) - n(n+3)/2)$;

в) если L — алгебра Ли, то существует предел $\lim_{n\to\infty}(V_L(n)-n)$.

Таким образом, рост бывает экспоненциальным, подэкспоненциальным, квадратичным, линейным, константой.

1.1.1. Комбинаторика слов конечной длины. Эффекты периодичности

В вопросах бернсайдовского типа важную роль играют комбинаторные эффекты, связанные с периодичностью. Почти периодичность и равномерная рекуррентность также лежат в основе наших рассмотрений. Последовательное применение этих понятий позволяет получить простые доказательства таких известных теорем теории колец, как теорема Ширшова об ограниченности высот *PI*-алгебры, теорема Уфнаровского о независимости, теорема Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной *PI*-алгебры и т.п.

Порядок $a_1 \prec \cdots \prec a_s$ индуцирует лексикографический порядок на множестве слов. При этом два слова *лексикографически несравнимы* если одно начало другого. Иногда мы рассматриваем линейный порядок на множестве слов, когда они сравниваются сперва по длине, а потом — лексикографически.

Хочется обратить внимание на связь между периодичностью и лексикографической несравнимостью: если подстановка $u \to v$ приводит к результату, несравнимому с исходным словом, то рассматриваемое вхождение слова v завершает периодический кусок. Многие трудности связаны с тем, что лексикографический порядок частичен. Однако имеет место своего рода альтернатива: квазипериодичность или лексикографическая сравнимость. Если $u \neq v$ и слова us и vs несравнимы, то слова us и vs имеют общий предпериод и квазипериод.

Положительное решение проблем берсайдовского типа означает возникновение периодичности, и периодические последовательности представляют собой комбинаторно самый чистый случай.

Свойства последовательности u^∞. Определим оператор δ, действующий на словах. Пусть слово u имеет вид $u = u'b$, где b — буква. Положим $\delta(u) = bu'$. Обозначим $m = |u|$.

Предложение 1.4. *Множество $\{\delta^k(u)\}$ есть множество слов, циклически сопряженных к слову u. Пусть $u = v^q$, где слово v не является степенью. Тогда $\delta^k(u) = u \iff q$ делит k.* □

Следующее предложение связывает сдвиги u^∞ и оператор циклического сопряжения δ. Через u мы обозначаем слово, не являющееся степенью.

Предложение 1.5. *а) Пусть $|v| = N|u| = |v'|$, и первая буква v' находится на расстоянии 1 справа от первой буквы v. Тогда $v' = \delta(v)$.*

б) Если первая буква v' находится на расстоянии k справа от первой буквы v, то $v' = \delta^k(v)$.

в) Любые два подслова u^∞ длины $N|u|$ циклически сопряжены.

г) Любые два подслова u^∞ длины $|u| - 1$ совпадают тогда и только тогда, когда расстояние между их начальными буквами кратно периоду.

Из данного предложения вытекает следующее часто используемое

Предложение 1.6. *а) Начальное подслово длины m однозначно определяет слово из A_{u^∞}. Если начальные подслова длины $|u|$ у двух подслов v и v' сверхслова u^∞ совпадают, то одно из них является подсловом другого. Если $|c| \geq |u|$, а d_1 и d_2 лексикографически сравнимы, то по крайней мере одно из слов cd_1 или cd_2 не является подсловом u^∞.*

б) Начальные позиции расположений в слове u^∞ слова v длины больше $|u|$ отличаются на кратное периода.

в) Пусть $|v| \geq |u|, v^2 \subset u^\infty$. Тогда v циклически сопряжено степени слова u. Таким образом, в алгебре A_{u^∞} ненильпотентные слова — это в точности слова, циклически сопряженные словам вида u^k. □

Предложение 1.7. *Если все подслова длины $|u|$ в слове W являются подсловами u^∞, т.е. циклически сопряжены u, то само слово $W \subset u^\infty$. Иными словами, алгебра A_u^F задается набором определяющих соотношений длины $\leq |u|$.* □

Следующее утверждение является комбинаторным аналогом утверждения об унитарной замкнутости многообразия, порожденного матричной алгеброй:

Лемма 1.1 (о вычеркиваниях и приписках). *Пусть $t = t_1 v t_2 \subset u^\infty$, v циклически сопряжено с u. Тогда $\forall k \geq 0$ $t_1 v^k t_2 \subset u^\infty$. В частности, $t_1 t_2 \subset u^\infty$ и $t_1 v^2 t_2 \subset u^\infty$.* □

Периодичность бесконечного слова означает инвариантность относительно сдвига. В случае односторонней бесконечности возникает предпериод, а в конечном случае — эффекты, связанные с обрезанием. Именно это является ядром очень многих комбинаторных рассуждений. В качестве примера можно привести доказательство гипотезы Шестакова, теоремы о независимости, теоремы Ширшова о высоте, совпадения нильрадикала и радикала Джекобсона для мономиальных алгебр. Ниже собраны соответствующие комбинаторные леммы. Не случайно они часто используются.

Предложение 1.8. *Пусть $uW = Ws$. Тогда uW — подслово u^∞. Слово W имеет вид $u^n r$, где r — начальный сегмент слова u.*

Доказательство. Если W — начало uW, то $\forall k \quad u^k W$ есть начало $u^{k+1}W$. Следовательно, uW — начало $u^{\infty/2}$. $\square$

Следствие 1.1. *Если слово u одновременно является и началом и концом W, то при некоторых s и t слова u, W имеют вид: $u = t(st)^l$, $W = t(st)^k$, $k \geq l$.* $\square$

Следующее предложение аналогично предыдущему:

Предложение 1.9. $uW \succ Ws \iff Ws \prec u^{\infty/2}$, $uW \prec Ws \iff Ws \succ u^{\infty/2}$. $\square$

Следствие 1.2. *Цепочка слов $\mathcal{U} = \{u^k t\}_{k=0}^{\infty}$ либо строго монотонна относительно лексикографического порядка, либо квазипериодична с периодом u (т.е. t есть начало $u^{\infty/2}$).* $\square$

Следствие 1.3. *Пусть u, v различные подслова W, $|u| \geq |v|$. Фиксируем вхождение u. Тогда выполняется одно из трех утверждений:*

а) Подслова u, v – сравнимы. Тогда замена меньшего слова на большее всегда ведет к увеличению порядка, вне зависимости от вхождения.

б) Одна из замен $u \to v$ либо $v \to u$ ведет к увеличению W.

в) v есть начало u, слово W оканчивается квазипериодическим куском с периодом v и наше вхождение слова u находится в этом куске. $\square$

Предложение 1.10. *а) Пусть W — бесконечное вправо слово, $W = vuW' = vW'$. Тогда W периодично с периодом u и предпериодом v. В частности, если W совпадает со своим правым концом, то оно периодично.*

б) Пусть W — конечное слово, $W = vuW'$ и vW' — начало W. Тогда слово W имеет вид $vu^k r$, где r — начальный сегмент слова u.

Иначе говоря, если слова ut, vt несравнимы, то они оба псевдопериодичны порядка не выше $\max(|u|, |v|)$.

в) Пусть e_i — собственные начала нециклического слова u, а f_i — его собственные концы. Тогда если $f_1 u^2$ сравнимо с $f_2 u^2$, то $f_1 = f_2$; если $u^2 e_1$ есть конец $u^2 e_2$, то $e_1 = e_2$. $\square$

Определения. Слово $W = u^k$, где $k > 1$, называется *циклическим* или *периодическим*. Если $W = u^k r$, r — начало u, то W называется *квазипериодическим*. Если $W = vu^k r$ (r — начало u), то слово W называется *псевдопериодическим*; v — его *предпериод*, а u — *период*. *Порядок слова* W есть минимально возможное значение $|v| + |u|$. Если $W = vu^k$, то W называется *предпериодическим* словом. Отметим, что слово псевдопериодично порядка $m \iff$ существует автомат, имеющий m состояний, который может его напечатать.

Понятие квазипериодичности связано с эффектами обрезания слов в различных местах периода.

Следующее предложение полезно для осуществления индукционного спуска.

Предложение 1.11. *Если псевдопериодическое слово не является квазипериодическим, то при выбрасывании первой буквы его порядок уменьшается на единицу.* □

О левой и правой квазипериодичности говорить не имеет смысла, поскольку квазипериодические слова порядка m — это в точности подслова периодических слов периода m, и если $W = u^k r$, где r — начало u, то $W = sv^k$, где v циклически сопряжено с u, s есть конец v. При этом $v = \delta^{|s|}(u)$. С псевдопериодичностью дело обстоит иначе. Фактически мы определили (и будем преимущественно использовать) псевдопериодичность слева. Можно показать, что если $|W| \geq 2m$, то псевдопериодичность порядка не выше m справа и слева влечет квазипериодичность.

Определение 1.5. Слово называется *m-собственным*, если любое его начало является псевдопериодическим порядка не выше m, а оно само таким не является. m-собственное слово называется *минимальным*, если любой его конец тоже является псевдопериодическим порядка не выше m.

Предложение 1.12. *Каждое m-собственное слово содержит единственное минимальное m-собственное слово, являющееся его концом. Если одно m-собственное слово содержит другое, то они содержат общее минимальное m-собственное слово, являющееся концом обоих.* □

Предложение 1.13. *Пусть l — количество букв в алфавите, $X(R)$ — количество m-собственных слов длины R, $X_k(m)$ — количество m-собственных слов, не содержащих k-ю степень слова длины $\leq m$. Пусть $T(m,R)$ — количество m-собственных слов длины $\leq m$. Тогда*

а) $X(m) < l^{m+1}m, \quad T(m,R) < Rml^{m+1}$*;*

б) $X_k(m) < l^m(l-1)m \cdot km = l^m(l-1)m^2k$.

Доказательство. Начальный участок длины m может быть выбран l^m способами. Имеется m способов его разбиения на предпериод и период. Последняя буква может быть выбрана $(l-1)$ способом. Наконец, m-собственное слово, не содержащее k-ю степень, имеет длину не выше mk. □

Предложение 1.14. *а) Минимальное m-собственное слово и имеет длину не меньше $m+1$ и не больше $2m$.*

б) Количество $Y(m)$ таких слов не превосходит $l^m(l-1)m$.

Доказательство. В силу предложения 1.11 и индукции, можно считать, что начало или конец слова u длины $|u|-1$ квазипериодичен порядка ровно m. Остается воспользоваться леммой о перекрытиях. Пункт б) есть непосредственное следствие пункта а). □

Замечание. Интересно было бы провести точное вычисление количества m-собственных и минимальных m-собственных слов.

Перекрытия слов. Изучим теперь расположение подслов внутри слова.

Лемма 1.2 (о перекрытиях). *Если два периодических слова периода m и n имеют одинаковое подслово длины $m + n - \text{НОД}(m, n)$, то они составлены из одинаковых подслов.* $\square$

Из этой леммы выводятся следующие факты, представляющие самостоятельный интерес. Мы их суммируем в виде следующего предложения (подробнее – см. [164]).

Предложение 1.15. *а) Пусть даны две периодические последовательности периодов m и n соответственно, $m \geq n$. Тогда если эти две последовательности имеют общий кусок длины $2m$, то они совпадают.*

б) Если два псевдопериодических слова порядка $\leq n$ и порядка $\leq m$ соответственно имеют общий участок длины $m + n - 1$, то их объединение есть псевдопериодическое слово порядка не выше $\max(m, n)$.

в) Два m-собственных подслова не могут иметь общий участок длины $2m$.

г) Если два одинаковых квазипериодических (псевдопериодических) подслова порядка m имеют общий участок длины m, то их объединение квазипериодично (псевдопериодично) того же порядка.

д) Два одинаковых m-собственных подслова не могут иметь общий участок длины $\geq m + 1$.

е) Никакие три одинаковых m-собственных подслова не могут иметь общий символ. $\square$

Квазипериодические участки слов. m-собственное слово u назовем *концом*, если любой его начальный участок квазипериодичен порядка не выше m; если же u — минимальное m-собственное слово, то u называется *минимальным m-концом.*

Предложение 1.16. *а) Два различных m-конца не могут иметь общий участок длины $m + 1$. В частности, один m-конец не может содержать другого.*

б) Количество минимальных m-концов не превосходит $l^m(l - 1)$.

Доказательство. Пункт а) следует из предыдущего; m-конец однозначно определяется последним символом и последним периодом. $\square$

1.2. Методы символической динамики и мономиальные алгебры

Методы символической динамики позволяют получать результаты в комбинаторной теории колец. Помимо теории радикала мономиальных алгебр и классификации слабо нетеровых мономиальных алгебр, следует упомянуть доказательство нильпотентности идеала в алгебре Ли, порожденного сэндвичами [115], а также классификацию алгебр с экстремальной функцией роста $n(n + 3)/2$ (последовательности Штурма) [164].

В этом разделе рассматриваются только мономиальные алгебры без единицы.

1.2.1. Сверхслова в алгебрах

Большинство комбинаторных результатов данной части основывается на рассмотрении бесконечных слов или сверхслов. В данном пункте собраны основные технические факты и конструкции, относящиеся к сверхсловам в алгебрах.

Определение 1.6. *Сверхсловом* называется слово, бесконечное в обоих направлениях; слово, бесконечное только налево, называется *левым сверхсловом*, а бесконечное направо — *правым*.

Определение 1.7. Через u^∞ обозначается сверхслово с периодом u, через $u^{\infty/2}$ — правое (левое) сверхслово с периодом u, начинающееся (заканчивающееся) словом u.

Из контекста всегда будет ясно, какое одностороннее сверхслово имеется ввиду — правое или левое, поэтому мы не вводим специальных обозначений. Например, запись $u^{\infty/2}\cdot s\cdot v^{\infty/2}$ подразумевает, что $u^{\infty/2}$ — левое сверхслово, а $v^{\infty/2}$ — правое.

Правые сверхслова (в отличие от конечных слов, где есть несравнимые элементы) образуют линейно упорядоченное множество относительно левого лексикографического порядка, а левые — относительно правого. Мы по преимуществу рассматриваем сверхслова и правые сверхслова.

Мы не можем говорить о значении сверхслова в алгебре, но можем говорить о его равенстве или неравенстве нулю, а в некоторых случаях — и о линейной зависимости.

Определение 1.8. а) Сверхслово W называется *нулевым*, если у него есть нулевое подслово конечной длины, и *ненулевым*, если все его подслова конечной длины ненулевые.

б) Конечный набор правых сверхслов $\{W_i\}$ называется *линейно зависимым*, если существуют такие $\{\lambda_i\}$, не все равные нулю, что для всех достаточно больших k выполняется соотношение:

$$\sum \lambda_i (W_i)_k = 0$$

(через $(W)_k$ обозначается начальный отрезок W длины k).

в) Пусть M — правый A-модуль, W — правое сверхслово в алгебре A, $m\in M$. Мы говорим, что $mW\neq 0$, если $\forall k \quad m(W)_k\neq 0$. Иначе $Mw=0$.

г) Пусть M — правый A-модуль, $\{W_i\}$ — конечный набор правых сверхслов в алгебре A, $\{m_i\}\subseteq M$. Мы говорим, что $\sum m_iW_i=0$, если для всех достаточно больших $k \quad \sum m_i(W_i)_k=0$.

Аналогичные определения можно дать для левых сверхслов и левых модулей.

Если не оговорено противное, то мы рассматриваем случай, когда алфавит $\mathcal{A}$ конечен. При этом множество сверхслов (левых, правых, двусторонних) над $\mathcal{A}$ образует компактное пространство $\mathcal{A}^\infty$ в топологии тихоновского произведения, индуцированной дискретной топологией в $\mathcal{A}$. Правые сверхслова относительно левого лексикографического порядка (а левые — относительно правого) образуют линейно упорядоченное множество, при этом для каждого подмножества существует инфимум и супремум.

Из леммы о существовании сверхслова, каждое подслово которого есть подслово данного семейства конечных слов неограниченной длины, вытекает следующее

Предложение 1.17. *а) В конечно порожденной ненильпотентной алгебре A существуют ненулевые сверхслова.*

б) Пусть M — к.п. правый A-модуль, A — к.п. алгебра. Тогда если $\forall k$ $MA^k\neq 0$, то существуют $m\in M$ и правое сверхслово W такие, что $mW\neq 0$.

□

Из определений нулевого сверхслова и тихоновской топологии следует, что множество нулевых сверхслов открыто, а множество ненулевых — замкнуто. Из существования точной верхней и нижней грани у любого множества правых сверхслов вытекает следующее

Предложение 1.18. *а) Пусть W — сверхслово. Тогда среди правых сверхслов, все подслова которых содержатся в W, есть как максимальное, так и минимальное.*

б) Пусть $\forall k \quad mA^k \neq 0$. Тогда множество правых сверхслов W таких, что $mW \neq 0$, содержит как максимальное, так и минимальное сверхслово.

в) Если A не нильпотентна, то среди ненулевых правых сверхслов в A есть как максимальное, так и минимальное. □

Определение 1.9. а) Набор слов $\{w_i\}$ называется *выделенным*, если факторалгебра $A/Id(\{w_i\})$ нильпотентна.

б) Набор сверхслов $\{W_i\}$ называется *выделенным*, если набор слов $\{w_i\}$, получающийся заменой каждого сверхслова W_i на его конечное подслово w_i, является выделенным.

Пусть u — слово в алгебре A, максимальное среди всех ненулевых слов в A длины $\leq n$. К сожалению, u может не продолжаться до слова большей длины. Поэтому, чтобы применять технику сверхслов, мы будем пользоваться следующей конструкцией.

Конструкция 1. Пусть A — алгебра с образующими $a_s \succ \cdots \succ a_1$. Положим $a_1 \succ x$ и рассмотрим свободное произведение $A' = A * F\langle x\rangle$.

Тогда каждое слово u в алгебре A есть начало некоторого сверхслова в алгебре A'. Если u — максимальное слово в алгебре A среди всех слов длины не выше $|u|$, то максимальное сверхслово в A', начинающееся с u, является сверхсловом в A. Если u — сверхслово в A, каждое начало которого обладает этим свойством, то максимальное сверхслово в A' есть u.

Для работы с модулями полезна следующая конструкция.

Конструкция 2. Пусть A — алгебра с образующими $a_s \succ \cdots \succ a_1$, M — к.п. правый A-модуль с образующими $m_k \succ \cdots \succ m_1$. Положим $m_1 \succ a_s$, $a_1 \succ x$. Положим $\widetilde{A} = A \oplus M$, $\forall i, j \ 0 = m_i m_j = a_i m_j$; $\mu\alpha$ ($\mu \in M$, $\alpha \in A$) есть результат действия α на μ, $\alpha\beta$ (α, $\beta \in A$) определяется как произведение в A. Обозначим через A'' фактор свободного произведения $\widetilde{A} * F\langle x\rangle/I$, где идеал I порожден элементами вида xm_i.

В алгебре A'' максимальное правое сверхслово начинается с m_k, любое слово из $\widetilde{A}$ продолжается до сверхслова в A''; если $\forall k \ MA^k \neq 0$, то максимальное сверхслово в $\widetilde{A}$ начинается с некоторого m_i. Если u — максимальное слово в алгебре A среди всех слов длины не выше $|u|$, действующих ненулевым образом на образующие модуля, то при подходящей перенумерации m_i максимальное сверхслово в A'' является сверхсловом в $\widetilde{A}$. Если u — сверхслово в $\widetilde{A}$, каждое начало которого обладает этим свойством, то максимальное сверхслово в A'' есть u.

Отметим, что если алгебра не имеет нильпотентного идеала, то любое слово продолжается до сверхслова.

При исследовании вопросов нильпотентности часто пользуются следующим соображением.

Предложение 1.19. *Если в алгебре (полугруппе) нет ненулевого периодического сверхслова, то все ее слова нильпотентны.* □

Отметим, что таким свойством обладает алгебра A_W, где W — равномерно рекуррентное непериодическое слово (см. определение 1.11).

1.2.2. Сверхслова и динамика

Через $|W|$ мы обозначаем множество всех конечных подслов бесконечного слова W. $W_1 \sqsupset W_2$ означает, что $|W_1| \supset |W_2|$, и $W_1 \sqsupseteq W_2$ означает, что $|W_1| \supseteq |W_2|$. В первом случае мы говорим, что W_1 *богаче кусками*, чем W_2, во втором — что *не беднее кусками*. Два слова U и V называются *эквивалентными:* $U \sim V$, если они имеют одинаковые конечные подслова, т.е. $|U| = |V|$. Понятия *"не богаче кусками"*, *"беднее кусками"* определяются аналогично.

Определение 1.10. *(Бесконечным) словом* U называется последовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ из символов. *Оператором сдвига* τ называется оператор $U \to \tau(U)$, определенный покомпонентно:

$$\tau(\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}; \quad v_n = u_{n+1}.$$

Расстоянием между словами W_1 и W_2 мы назовем величину $d(W_1, W_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n 2^{-|n|}$, где $\lambda_n = 0$, если n-е позиции слов совпадают, и $\lambda_n = 1$, если они не совпадают. (Такое расстояние называется *расстоянием Хемминга.*)

Справедливы следующие утверждения:

1. Множество слов $\mathbf{W}$ — компактное метрическое пространство.

2. Операторы сдвига τ и τ^{-1} непрерывны, т.е. $\tau : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ — гомеоморфизм. Более того,

$$d(\tau(W_1), \tau(W_2)) \le 2d(W_1, W_2), \quad d(\tau^{-1}(W_1), \tau^{-1}(W_2)) \le 2d(W_1, W_2).$$

3. Для слова W через $\widehat{W}$ обозначим множество всех слов, к каждому из которых сколь угодно близок сдвиг слова W, т.е. $U \in \widehat{W} \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{Z} : d(U, T^n W) < \varepsilon$, т.е. $\widehat{W}$ — замыкание $\{T^n W,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Следующие свойства слова U равносильны:

а) $U \in \widehat{W}$,

б) U принадлежит замкнутой орбите слова W,

в) $|U| \subset |W|$ (т.е. $U \sqsubset W$).

Пусть $U < V$, если $\widehat{U} \subset \widehat{V}$, и $U \vdash V$, если $\widehat{U} = \widehat{V}$.

Предложение 1.20. $U < V \iff |U| \subset |V|$ *(любой конечный кусок слова* U *встречается в* V*).* □

Пример. Рассмотрим последовательность $123\ldots$, которая получается, если выписать подряд все числа в десятичной записи. В ней встречается любая комбинация цифр, поэтому ее замкнутая орбита совпадает с множеством всех слов вообще.

Определение 1.11. Слово U называется *равномерно рекуррентным*, если $\forall k$ $\exists n(k)$ такое, что всякий кусок длины k слова U содержится в любом куске слова U длины $n(k)$.

Равносильное определение: $\forall u \subset U\ \exists n(u) \colon \forall v \subset U \colon |v| \ge n(u) \Longrightarrow u \subset v$.

Теорема 1.12. *Следующие два свойства бесконечного слова* W *равносильны:*

а) для любого k *можно найти* $N(k)$ *такое, что любой участок* W *длины* k *можно найти в любом участке* W *длины* $N(k)$*;*

б) если все конечные куски слова V *являются конечными кусками слова* W*, то и все конечные куски слова* W *являются конечными кусками слова* V*.* □

Следующая лемма очень часто используется:

Лемма 1.3 (о компактности). *Пусть $\mathcal{M}$ — множество слов неограниченной длины над конечным алфавитом $\mathcal{A}$. Тогда существует бесконечное слово V, все подслова которого являются подсловами слов из $\mathcal{M}$.* □

Следствие 1.4. *а) Если u — подслово слова W, и в слове W есть сколь угодно длинные подслова, не содержащие u, то существует слово W', которое беднее кусками, чем W. При этом можно выбрать W так, чтобы u не входило в W'.*

б) Для любой убывающей в смысле отношения $\sqsupseteq$ цепочки сверхслов найдется инфимум. □

Следствие 1.5. *Для слова W найдется беднейшее по подсловам слово W' такое, что $W \sqsupseteq W'$.* □

Мы имеем следующую теорему, означающую, что из кусков любого слова можно составить р.р. слово.

Теорема 1.13. *Пусть W — бесконечное слово. Тогда существует равномерно рекуррентное слово $\widehat{W}$, все подслова которого являются подсловами W.* □

Эта теорема исключительно важна в комбинаторике слов, т.к. очень часто позволяет сводить изучение произвольных слов к изучению р.р. слов.

Рассмотрим действие оператора сдвига τ на множестве сверхслов. *Инвариантное подмножество* —это подмножество множества всех сверхслов, которое инвариантно относительно действия τ. *Минимальное замкнутое инвариантное множество*, сокращенно м.з.и.м., — это замкнутое (относительно введенной выше метрики) инвариантное подмножество, которое не пусто, не содержит замкнутых инвариантных подмножеств, кроме себя самого и пустого. Обычно оно обозначается через N.

Свойства замкнутых инвариантных множеств. а) М.з.и.м. N есть замкнутая орбита любой своей точки.

б) Любые два м.з.и.м. либо совпадают, либо имеют пустое пересечение. В этом случае они отстоят на ограниченное сверху и снизу расстояние.

в) Следующие свойства слова W равносильны: 1) W — равномерно рекуррентное; 2) $|W|$ минимально по включению среди класса множеств вида $|V|$ (для любого U, если $W \sqsubseteq U$, то $U \sqsubseteq W$, т.е. $U \sim W$); 3) замкнутая орбита W минимальна и представляет собой м.з.и.м.

Фактически пункт а) означает почти возвращаемость к любой точке x: N есть замкнутая орбита любой своей точки, в том числе и точки $y = f(x)$. Это значит, что орбита y сколь угодно близко приближается к любой точке N, в том числе и к x! Однако справедлива более интересная и сильная вещь: в N наблюдается равномерная почти возвращаемость. Имеет место следующая

Теорема 1.14. *Пусть U — открытое множество такое, что $U \cap M \neq \varnothing$. Тогда существует такое $n = n(U) \in \mathbb{N}$, что для всех y из N некоторая итерация $f^{(k)}(y)$, где $1 \leq k \leq n$, попадет в U.* □

Теорема 1.15. *Пусть L — замкнутое инвариантное множество. Тогда существует м.з.и.м. N, содержащееся в L.*

Понятие р.р. слова имеет динамический смысл. Если на k-ом месте последовательности W стоит 0 или 1 в зависимости от попадания $f^{(k)}(y_0)$ в U, то в случае общего положения (когда при всех k $f^{(k)}(y_0)$ не попадает на границу U) слово W р.р. и любое р.р. слово может быть получено похожим образом. В качестве f можно рассматривать оператор сдвига, а в качестве N — м.з.и.м. в пространстве сверхслов, снабженном Тихоновской топологией.

1.2.3. Периодичность и бесконечные слова

Соображения, связанные со сдвиговой инвариантностью, образуют доказательство следующей комбинаторной леммы, лежащей в основе доказательства совпадения нильрадикала и радикала Джекобсона.

Лемма 1.4. *Пусть $u \neq v$ — два различных подслова сверхслова W. В этом случае верно одно из следующих утверждений:*

а) $\exists t: \quad ut \subset W, \quad vt \not\subset W$;

б) $\exists t: \quad ut \subset W, \quad vt \subset W$; ut, vt лексикографически сравнимы. (Если u, v сравнимы, то в качестве t можно взять пустое слово Λ);

в) $\exists s: \ \forall n \in \mathbb{N} \quad s^n \subset W$ и либо $u = vs$, либо $v = us$.

Доказательство. Предположим, что а) и б) не выполняются. Тогда для некоторого непустого слова s либо $u = vs$, либо $v = us$. Покажем, что $s^n \subset W$. Возьмем такое t, что $ut \subset W$, $|t| > 2n|s|$. Тогда ut и vt лексикографически сравнимы и $vt \subset W$.

Из сравнимости ut и vt вытекает, что t есть начало st, поэтому t есть начало s^∞. Поскольку $|t| > 2n|s|$, то $s^n \subset t \subset W$. Таким образом, выполняется условие в). $\square$

Лемма 1.5. *Пусть $u \neq v$ — два различных подслова сверхслова W. В этом случае верно одно из следующих утверждений:*

а) в слове W существуют подслова сколь угодно большой длины, свободные от вхождения u;

б) $\exists r, t$: $rut \subset W$, $rvt \not\subset W$;

в) $\exists s: \ \forall n \in \mathbb{N} \quad s^n \subset W$ и либо $u = vs$, либо $v = us$.

Доказательство. Если б) и в) не выполняются, то по предыдущей лемме $\exists t$: $ut \subset W$, $vt \subset W$, ut и vt лексикографически сравнимы. Положим $u_1 = ut$, $v_1 = vt$; переупорядочив образующие, можно добиться того, чтобы $v_1 \succ u_1$. Итак, нам достаточно доказать лемму для случая, когда $v \succ u$.

Отметим, что если условие б) не выполняется, то замена подслов $u \to v$ сохраняет свойство слова x быть подсловом W. Если же слово X бесконечно, то указанная замена сохраняет свойство “каждое подслово слова X является подсловом W”.

1.2.4. Нильрадикал и радикал Джекобсона

Рассмотрим $\mathcal{W}$ — множество слов, бесконечных вправо, таких, что каждое подслово слова из $\mathcal{W}$ содержится в W. Замена подслов $u \to v$ сохраняет принадлежность $\mathcal{W}$, повышая при этом лексикографический порядок слова. Поэтому W' — максимальное слово из $\mathcal{W}$ (которое существует в силу предложения 1.18) — не имеет вхождений слова u.

Поскольку каждое подслово из W' является подсловом W, а слово W', будучи бесконечным, содержит подслова любой длины, условие а) данной леммы выполняется. $\square$

Следствие 1.6. *Пусть $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ — конечный набор попарно различных подслов сверхслова W. В этом случае для каждого i верно одно из следующих утверждений:*

а) в слове W существуют подслова сколь угодно большой длины, свободные от вхождения u_i;

б) $\exists r_i, t_i: \quad r_i u_i t_i \subset W$, и $\forall j \neq i \quad r_i u_j t_i \not\subset W$;

в) При некотором $j \quad \exists s: \ \forall n \in \mathbb{N} \quad s^n \subset W$ и либо $u_i = u_j s$, либо $u_j = u_i s$.

Доказательство — индукция по числу слов в наборе $\mathcal{U}$.

Теорема 1.16. *а) Пусть W — равномерно рекуррентное непериодическое сверхслово, $u \neq v$ — его подслова. Тогда $\exists r, t$: $rut \subset W$ и $rvt \not\subset W$.*

б) Если $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ — конечный набор попарно различных подслов сверхслова W, то $\forall i$, $1 \le i \le n$ $\exists r_i, t_i$: $r_i u_i t_i \subset W$, и $\forall j \neq i \quad r_i u_j t_i \not\subset W$.

в) Если $I \neq 0$ — идеал алгебры A_W, то I содержит моном, а следовательно и все достаточно длинные мономы, так что факторалгебра A_W/I нильпотентна. (Определения р.р. слова и алгебры A_W даны в параграфе 1.2.2.)

Доказательство. Справедливость частей а) и б) настоящего следствия следует из того, что при непериодичном р.р. слове W случаи а) и в) предыдущих лемм исключаются.

Пусть $\sum \lambda_i u_i \in I$. По предыдущему следствию мы можем выбрать такие r_i и t_i, что $r_i u_i t_i \subset W$, и $\forall j \neq i \quad r_i u_j t_i \not\subset W$. Следовательно, $r_i u_j t_i = 0$ в алгебре A_W, и $I \ni r_i(\sum_j \lambda_j u_j)t_i = \lambda_i r_i u_i t_i$. Таким образом, I содержит моном. □

Следствие 1.7. *Если слово W равномерно рекуррентно и непериодично, то радикал Джекобсона $J(A_W) = 0$.* □

Замечание. В главе 1.2 показано, что нильрадикал мономиальной алгебры A совпадает с пересечением идеалов I_W для всех р.р. слов W алгебры A, имеющих вхождение только конечного числа букв алфавита (т.е. образующих). Там же показано, что $J(A_W) = 0$ в периодическом случае. Из этого следует совпадение нильрадикала и радикала Джекобсона для произвольной мономиальной алгебры.

Простых мономиальных алгебр не бывает (кроме нулевой), однако правильным аналогом понятия простоты служит почти простота. Ненильпотентная алгебра A называется *мономиально почти простой,* если каждый ее фактор по идеалу, порожденному мономом, нильпотентен; A называется *почти простой,* если каждый ее фактор нильпотентен. Любая почти простая алгебра является мономиально почти простой. Слово в A — это ненулевое слово, бесконечное слово в A — это бесконечное слово без нулевых подслов. Через k будем обозначать число букв в рассматриваемом алфавите или число образующих в алгебре.

Определение 1.17. Пусть W — бесконечное слово. Тогда A_W — это алгебра, все соотношения в которой имеют вид $v = 0$, где v — слово, не являющееся подсловом W.

Следующая теорема дает описание всех почти простых и мономиально почти простых алгебр.

Теорема 1.18. *Пусть A — мономиально почти простая алгебра. Тогда существует равномерно рекуррентное слово W такое, что $A = A_W$. Алгебра A почти проста тогда и только тогда, когда W не периодично.*

Теорема будет следовать из предложения 1.21 ниже.

Определение 1.19. а) *Слово c плотно встречается в алгебре A*, если есть такая константа M и сколь угодно длинные ненулевые слова в A, что любой кусок такого слова длины M имеет вхождение слова c.

б) *Слово c плотно в алгебре A*, если все достаточно длинные ненулевые слова в A имеют вхождение слова c.

Напомним, что слово называется *равномерно рекуррентным* (р.р.), если его любое подслово плотно встречается в нем. Отметим, что если алгебра A мономиально почти простая, то любое слово в ней плотно встречается. Действительно, фактор по любому слову нильпотентен индекса n; это n можно взять в качестве константы M из определения.

Предложение 1.21. *а) Слово c плотно встречается в алгебре A в том и только в том случае, когда c плотно в некотором сверхслове W алгебры A.*

б) При этом сверхслово W можно считать равномерно рекуррентным.

Доказательство. Очевидно, что если c плотно в W, то c плотно в алгебре. Обратное утверждение получается, если взять набор слов $\{w_i\}$ неограниченной длины таких, что c входит в любой кусок w_i длины M, и применить лемму о составлении сверхслова. □

Следующая теорема дает описание нильрадикала мономиальной алгебры.

Теорема 1.20. *$N(A)$ есть пересечение всех мономиально почти простых идеалов. Иными словами, $x \in N(A) \iff x$ проецируется в 0 для любого мономиально почти простого фактора $\iff$ если $x = \sum \lambda_i c_i$, $\lambda_i \neq 0$, — представление x в виде линейной комбинации слов c_i, то ни одно c_i не может плотно встречаться.*

Доказательство. Теорема вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 1.22. *Пусть слово u не может плотно встречаться. Тогда $u \in N(A)$.*

Доказательство. Если $u \notin N(A)$, то для некоторых $\{c_i\}$ и $\{d_i\}$ сумма $x = \sum \alpha_i c_i u d_i$ не нильпотентна. Пусть $M = \max(|c_i| + |d_j|) + 2|u|$. Тогда любая степень x есть линейная комбинация слов, в которых каждый участок длины M имеет вхождение слова u. □

Предложение 1.23. *Пусть слово $u \in N(A)$. Тогда u не может плотно встречаться.*

Доказательство. Пусть слово u встречается в каждом участке длины M некоторого сверхслова W. Представим W в виде произведения слов $c_i u$ таких, что никакой начальный сегмент $c_i u$ не содержит вхождения u. Поскольку $|c_i| < M$, слов вида c_i конечное число. Положим $x = \sum c_i u$. Тогда элемент x принадлежит $\mathrm{id}(u)$ и не является нильпотентным, т.к. каждая его степень содержит член, являющийся подсловом W, и все члены, получающиеся при раскрытии скобок в $(\sum c_i u)^n$, различны. □

Предложение 1.24. *Пусть A — почти простая мономиальная алгебра. Тогда радикал Джекобсона $J(A)$ алгебры A равен нулю.* □

Теорема 1.21. *Если бесконечное слово W периодично с периодом n, то A_W первична и представима. Существует мономорфизм A_W в алгебру $n \times n$ матриц над кольцом многочленов и эпиморфизм A_W на алгебру $n \times n$ матриц над основным полем.*

Доказательство. Первичность следует из того, что для всяких ненулевых слов u, v в алгебре A_W существует слово $w \neq 0$ такое, что $uvw \neq 0$. □

Алгебра A_u, отвечающая периодическому р.р. слову, не является почти простой; например, $A_u/\operatorname{id}\{u-u^2\}$ не нильпотентна. Однако имеет место следующее

Предложение 1.25. *Если $I \neq 0$ — однородный идеал алгебры A_u, то A_u/I нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $I \ni s = \lambda_0 c_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i$, $|c_i| = |c_0|$, $c_i \neq c_0$ при $i \neq 0$. Каждое слово R длины, большей $2|u|+|c_0|$, в алгебре A_u имеет вид $R = v_1 c_0 v_2$, где $|v_1| \geq |u|$. Поэтому $I \ni v_1 s v_2 = \lambda_0 v_1 c_0 v_2 + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_1 c_i v_2 = \lambda_0 R$, поскольку последняя сумма по предложению 1.6 равна нулю. □

В разделе 1.2.3 было доказано следующее утверждение (теорема 1.16).

Теорема. *Пусть W — равномерно рекуррентное непериодическое слово. Тогда, если $I \neq 0$ — идеал алгебры A_W, то I содержит моном, а следовательно и все достаточно длинные мономы, так что факторалгебра A_W/I нильпотентна.* □

Следствие 1.8. *а) Если W — непериодическое равномерно рекуррентное слово, то любой идеал содержит некоторое слово, и алгебра A_W почти проста.*

б) Радикал Джекобсона мономиальной алгебры совпадает с нильрадикалом.

Доказательство. Пункт а) вытекает непосредственно из сформулированной выше теоремы. Пункт б) следствия вытекает из теорем 1.20, 1.18, 1.21, предложения 1.24 и пункта а). □

Назовем алгебру *приведенной*, если любой ее гомоморфный образ конечномерен. Суммируя результаты предложения 1.25 и теоремы 1.16, имеем следующее

Предложение 1.26. *Мономиальная алгебра приведена тогда и только тогда, когда она почти простая.* □

В заключение отметим, что в автоматном случае $N(A) = J(A) = B(A)$ В случае произвольных мономиальных алгебр верно только $N(A) = J(A)$.

1.2.5. Классификация слабо нетеровых мономиальных алгебр

Данный параграф посвящен классификации слабо нетеровых мономиальных алгебр. Известно, что все левонетеровы (правонетеровы) мономиальные алгебры автоматны. Однако для слабо нетеровых алгебр (удовлетворяющих условию обрыва возрастающих цепей двусторонних идеалов) это уже не так. Например, если W — р.р. непериодическое слово над конечным алфавитом, то неавтоматная алгебра A_W конечно порождена и не содержит идеалов с ненильпотентным фактором (см. теорему 1.16) и, следовательно, является нетеровой.

Описание слабо нетеровых мономиальных алгебр осуществляется в терминах р.р. слов. Назовем семейство $\mathcal{U}$, состоящее из (сверх)слов, *нетеровым*, если оно конечно и каждый элемент $\mathcal{U}$ есть либо конечное слово, либо сверхслово, которое при выбрасывании конечного куска распадается на р.р. части. Иными словами, каждый элемент $\mathcal{U}$ принадлежит к одному из следующих типов:

1) конечное слово;

2) правое сверхслово вида uW, где $|u| < \infty$, W — р.р. сверхслово;

3) левое сверхслово вида Wu, где $|u| < \infty$, W — р.р. сверхслово;

4) сверхслово вида $W_1 u W_2$, где $|u| < \infty$, W_1 и W_2 — р.р. сверхслова;

5) равномерно рекуррентное сверхслово.

Теорема 1.22. *Мономиальная алгебра A слабо нетерова $\iff$ существует нетерово множество $\mathcal{U}$ такое, что $A = A_{\mathcal{U}}$.*

Из этой теоремы непосредственно следует

Предложение 1.27. *Слабо нетерова алгебра A автоматна тогда и только тогда, когда все р.р. части сверхслов из $\mathcal{U}$ периодичны. В этом случае конечным словам соответствуют отрезки графа, р.р. словам — циклы, словам вида 2 — циклы с входными отрезками, словам вида 3 — циклы с выходными отрезками, словам вида 4 — пара циклов, соединенная перемычкой.*

Для доказательства теоремы 1.22 нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 1.6. *Пусть мономиальная алгебра B содержит множество ненулевых слов вида cv_ic, где $|v_i| \Rightarrow \infty$, и при всех i слово c — не подслово v_i. Тогда алгебра B не является слабо нетеровой.* □

Следствие 1.9. *а) Пусть A — слабо нетерова мономиальная алгебра. Тогда для любого $c \in \mathrm{Wd}(A)$ существует константа $\varphi(c)$ такая, что для любого $u \in \mathrm{Wd}(A)$ вида cvc каждый участок слова u длины $\varphi(c)$ имеет вхождение слова c.*

б) Если правое сверхслово W имеет бесконечно много вхождений c, то, начиная с некоторого места, каждый участок сверхслова W длины $\varphi(c)$ имеет вхождение c. Симметричное утверждение верно и для левых сверхслов.

в) Если сверхслово W имеет бесконечно много вхождений c как слева, так и справа от заданной позиции, то каждый участок сверхслова W длины $\varphi(c)$ имеет вхождение c. □

Итак, бесконечная встречаемость равносильна плотной встречаемости, причем плотность ограничена снизу для всех сверхслов алгебры. Нам понадобится следующее

Предложение 1.28. *Количество попарно неэквивалентных р.р. сверхслов в слабо нетеровой мономиальной алгебре конечно.*

Это предложение вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.7. *Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность попарно неэквивалентных р.р. сверхслов. Тогда при некотором k существует конечное подслово $v \subset W_k$ и бесконечная подпоследовательность сверхслов $\{W_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$, не имеющих вхождения v.*

Доказательство предложения 1.28. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность попарно неэквивалентных р.р. сверхслов из A. Применяя данную лемму к $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, а затем — к $\{W_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и т.д., получаем бесконечную последовательность слов v_i, не содержащих друг друга. Они порождают идеал, который не является конечно порожденным. □

Доказательство леммы 1.7. Предположим противное. Тогда для любого подслова v слова из $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно указать такое число $N(v)$, что при всех $i > N(v)$ слово v содержится в W_i. В силу леммы 1.6, при всех $i > N(v)$ каждый участок сверхслова W_i длины $\varphi(v)$ содержит v. Пусть u_i — произвольное подслово W_i длины i. В силу леммы о компактности, существует сверхслово U, каждое подслово которого есть подслово некоторого u_i. Для любого $v \subset U$ каждый участок длины $\varphi(v)$ слова U содержит v. То же верно и для любого подслова c любого слова W_i. Поэтому U равномерно рекуррентно и содержит все подслова всех W_i. Но р.р. слово (см. теорему 1.12) имеет минимальный по включению набор конечных подслов. Значит, U эквивалентно всем W_i и, следовательно, все W_i эквивалентны между собой. Получили противоречие с условием леммы. □

Выше было показано, что нильрадикал $N(A)$ есть пересечение всех мономиально почти простых идеалов. Каждый такой идеал состоит из всех слов, не являющихся подсловами р.р. слова и, по только что доказанному, множество всех мономиально почти простых идеалов конечно.

Пусть $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ — образующие $N(A)$ (в силу слабо нетеровости A их конечное число). Поскольку c_i не могут плотно встречаться, то из леммы 1.6 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.8. *а) Существует такое натуральное k, что в любом слове v из $\mathrm{Wd}(A)$ можно указать такое подслово u длины k, что $v = sut$, где s и t — подслова р.р. слов из A (т.е. s и t не лежат в $N(A)$).*

б) При всех достаточно больших k для любого слова $u \in N(A)$ длины k любое слово из $\mathrm{Wd}(A)$ имеет не более одного вхождения слова u. □

(Пункт б) следует из квазипериодичности решений уравнения $uw = su$ см. предложение 1.8.)

Из п.б) данной леммы и слабой нетеровости алгебры A следует

Лемма 1.9. *Пусть $|u| = k$, $u \in N(A)$. Тогда двусторонний идеал, порожденный словом u, конечно порожден как левый идеал. То же верно и для правых идеалов.* □

Эта лемма означает конечность числа ветвлений в графе левых (правых) умножений.

Для доказательства теоремы 1.22 остается воспользоваться этой леммой. □

1.2.6. Радикал Бэра мономиальных алгебр. Первичные слова

Определение 1.23. Бесконечное слово W называется *первичным*, если каждое его подслово имеет бесконечное количество вхождений в W.

Замечание. Любое р.р. слово (в частности, периодическое) является первичным. Обратное неверно — слово, в котором встречается любая комбинация букв, является первичным, но не является р.р., поскольку в силу наличия для любых n вхождений b^n в таком слове найдутся сколь угодно длинные участки, свободные от вхождений других букв. Идея рассмотрения первичных бесконечных слов была предложена Т. Гатевой–Ивановой.

Хорошо известен следующий факт.

Теорема 1.24. *A полупервична $\iff$ радикал Бэра $B(A) = 0$.* □

Поскольку данный результат доказан в [164], мы ограничиваемся формулировкой:

Теорема 1.25. *а) Счетно порожденная мономиальная алгебра A является первичной тогда и только тогда, когда $A = A_W$ для некоторого первичного сверхслова W.*

б) Мономиальная алгебра A является полупервичной $\iff$ существует семейство первичных слов $\mathcal{W} = \{W_i\}$ такое, что $A = A_{\mathcal{W}}$.

в) Если A — произвольная мономиальная алгебра, то A первична $\iff$ существует такое семейство первичных слов $\mathcal{W} = \{W_i\}$, что $A = A_{\mathcal{W}}$, и для любых W_i, W_j существует W_k такое, что каждое подслово из W_i или из W_j содержится в W_k.

Следствие 1.10. *Радикал Бэра $B(A)$ есть пересечение идеалов I_W для всех первичных слов W.*

Замечание. A является PI и мономиальной первичной $\iff$ A имеет вид A_W для некоторого периодического $W = u^\infty$.

1.3. Представления мономиальных алгебр

Данный раздел посвящен представлениям мономиальных алгебр и построению представимых алгебр с трансцендентным рядом Гильберта.

Мы изучаем многообразия, порожденные мономиальными алгебрами. Таковыми, к примеру, оказываются $M_n = \mathrm{Var}(A_u)$ и многообразие, порожденное верхнетреугольными матрицами. Рассмотрение этих многообразий нужно для комбинаторного использования сложности тождеств.

Необходимым условием представимости является выполнение теоремы о высоте. В этом случае при некотором h все слова алгебры имеют вид $u_1^{k_1}u_2^{k_2}\dots u_l^{k_l}$, где $l \le h$, а $\{u_i\}$ — фиксированный набор слов. Необходимое и достаточное условие представимости формулируется как условие на множество векторов степеней $\overrightarrow{k} = \langle k_1, \dots, k_l\rangle$. Оно означает, что множество таких $\langle k_1, \dots, k_l\rangle$, что $u_1^{k_1}\dots u_l^{k_l} = 0$, должно задаваться системой экспоненциальных диофантовых уравнений.

Что касается классификацией представлений, то ручными задачами являются только описание представлений 1-порожденной мономиальной алгебры и 2-порожденной мономиальной алгебры с нулевым умножением. Задача классификации о неприводимых представлений мономиальной алгебры имеет смысл только в первичном случае и ручной является задача о неприводимых представлениях только для алгебр типа A_u ([164]).

Для исследования описанных выше вопросов нам понадобится техника, связанная с заданием представлений графами, представлениями прямых сумм и тензорных произведений.

1.3.1. Вспомогательные конструкции

Напомним, что ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух вершин существует путь, ведущий из первой вершины во вторую. Можно показать, что в *PI*-случае (т.е. когда нет зацепляющихся циклов — это результат В. А. Уфнаровского [115]) все сильно связные компоненты графа без параллельных ребер суть циклы.

Определение 1.26. По графу Γ мономиальной алгебры A_Γ строится ее представление следующим образом. Вершинам отвечают базисные вектора, стрелке, соединяющей i-ю вершину с j-ой, — матричная единица E_{ij}, каждой образующей a_p алгебры A_Γ — оператор $\sum \alpha_{ij}^p E_{ij}$, где $\alpha_{ij}^p = 0$, если буква a_p не написана на стрелке, соединяющей соответствующую пару вершин, а в остальных случаях α_{ij}^p образуют набор независимых взаимно трансцендентных параметров. Оно называется *каноническим представлением* мономиальной алгебры.

Если нет зацепляющихся циклов (PI-случай), то каноническое представление оказывается точным. Базисные векторы можно занумеровать таким образом, что циклам будут отвечать блоки на главной диагонали (клетки), под диагональю будут нули и ниже будет идти блок, отвечающий тому циклу, который идет после.

Предложение 1.29. *Пусть A — мономиальная алгебра, $a_{11}, \ldots, a_{1k_1}$, $a_{21}, \ldots, a_{2k_2}$, ... , a_{sk_s} — ее образующие. Положим $b_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}$. Тогда*

а) элементы $b_1, \ldots, b_s$ порождают мономиальную алгебру;

б) слово $U(b_1, \ldots, b_s) = 0$ в том и только том случае, когда для любой подстановки $b_i \to a_{ij}$ (для разных вхождений b_i могут подставляться a_{ij} с различными индексами j) результат подстановки есть 0.

Доказательство. Если подставить вместо b_i сумму $\sum_j a_{ij}$ и раскрыть скобки, то члены, соответствующие разным словам, не будут совпадать. Поэтому элементы b_i порождают мономиальную алгебру. Пункт б) следует из того, что все члены, получающиеся раскрытием скобок, различны, причем находятся во взаимно однозначном соответствии с указанными подстановками. □

Из этого предложения непосредственно следует

Предложение 1.30 (о диагональном вложении). *Пусть $A_j = \langle a_{j1} \ldots a_{js} \rangle$ — мономиальные алгебры, $A = \oplus A_j$. Положим $a_i = \sum_j a_{ji}$. Тогда $a_1, \ldots, a_s$ порождают мономиальную алгебру $\widehat{A}$, и множество нулевых слов в $\widehat{A}$ есть пересечение множеств нулевых слов в алгебрах A_j.* □

Следствие 1.11. *Пусть A — мономиальная алгебра, $I_1, \ldots, I_n$ — мономиальные идеалы. Тогда если для любого j алгебра A/I_j представима, то представима и алгебра $A/\bigcap_j I_j$.* □

Пусть Γ — граф мономиальной алгебры A. Пометим стрелки графа Γ разными буквами. Пусть это будут образующие новой алгебры A_Γ. Введем очевидное умножение: $b_1 b_2 = 0$, если конец стрелки b_1 не совпадает с началом стрелки b_2, иначе имеем ненулевой моном. Тогда соответствие $a_i \to \sum b_i$ (b_i отвечают стрелкам, помеченным буквой a_i) дает вложение мономиальной алгебры A в алгебру A_Γ, которую мы будем называть Γ-*накрытием* алгебры A.

Предложение 1.31. *а) Пусть A — мономиальная алгебра, $\widehat{A}$ — ее Γ-накрытие. Тогда слову в алгебре A соответствует сумма слов в алгебре $\widehat{A}$, соответствующих его всевозможным расположениям в графе Γ.*

б) Если $\Gamma(A)$ получается из $\Gamma(A')$ расклейкой букв, то A вкладывается в A' и $\mathrm{Var}(A') \subseteq \mathrm{Var}(A)$.

в) Любая автоматная мономиальная алгебра вкладывается в конечно-определенную. □

Предложение 1.32. *а) Если каждое ненулевое слово в A' является ненулевым в A, то A' есть фактор-алгебра алгебры A и* $\mathrm{Var}(A') \subseteq \mathrm{Var}(A)$. *Стиранию стрелок в графе отвечает факторизация.*

б) Пусть Γ_i - связные компоненты графа Γ. Тогда имеется естественное вложение A_Γ в прямую сумму A_{Γ_i}. Многообразие $\mathrm{Var}(A_\Gamma)$ *есть объединение* $\mathrm{Var}(A_{\Gamma_i})$. □

(*Расположением* слова мы называем путь, ребра которого в порядке их прохождения помечены буквами данного слова. Если расположения нет, то слово нулевое. Для сверхслов ситуация аналогичная.)

Следующая конструкция связана с тензорным произведением. Тензорное произведение не определено в категории мономиальных алгебр (например, $k\langle x\rangle \otimes k\langle y\rangle \simeq k[x,y]$, а кольцо коммутативных многочленов от двух переменных не является мономиальной алгеброй). Поэтому в тензорном произведении надо выбирать подходящую подалгебру.

Предложение 1.33. *Пусть A_i, $i = 1, \dots, n$, — семейство мономиальных алгебр с образующими a_{ij}, $j = 1, \dots, s$. Рассмотрим подалгебру $\widehat{A}$ тензорного произведения $\otimes_i A_i$, порожденную элементами $a_{1j} \otimes a_{2j} \otimes \cdots \otimes a_{nj}$, $j = 1, \dots, s$. Тогда $\widehat{A}$ — мономиальная алгебра. Слово в A равно нулю в том и только том случае, когда оно равно нулю в одной из алгебр A_i.* □

Таким образом, идеал слов в алгебре $\widehat{A}$ есть сумма идеалов слов в алгебрах A_i.

Замечание. Если есть изоморфизм у ориентированных графов Γ_1 и Γ_2 (не обязательно сохраняющий разметку стрелок), то можно рассмотреть подпространство в тензорном произведении пространств канонических представлений Γ_1 и Γ_2, порожденное произведением соответствующих векторов. Разметим парами букв "тензорное произведение" стрелок. Получится каноническое представление мономиальной алгебры, образующие которой обозначены парами букв, отвечающих стрелкам Γ_1 и Γ_2. Можно также рассматривать подпространства тензорных произведений канонических представлений, порожденные произведением векторов "соответствующих уровней" (в смысле порядка на сильно связных компонентах).

Если алгебры A_i представимы, то, беря тензорное произведение представлений, мы получаем

Предложение 1.34. *а) Рассмотрим алгебру $\widehat{A}$ и семейство алгебр A_i из предыдущего предложения. Пусть алгебры A_i представимы, W_i — соответствующие пространства представлений. Тогда алгебра $\widehat{A}$ также представима, и $\otimes W_i$ — пространство ее представления.*

б) Если A — мономиальная алгебра, $I_1, \dots, I_k$ — мономиальные идеалы (т.е. идеалы, порожденные наборами мономов), и алгебры A/I_j представимы, то алгебра $A/(I_1 + \cdots + I_k)$ также представима. □

Итак, для наборов нулевых слов, факторы по которым представимы, мы можем использовать операции пересечения, объединения и суммы.

Всюду ниже мы будем рассматривать только графы, не имеющие пересекающихся циклов. Как правило, различным стрелкам в графе будут соответствовать разные образующие мономиальной алгебры.

Предложение 1.35. *Пусть разным стрелкам в графе мономиальной алгебры соответствуют разные образующие. Тогда стиранию стрелки в графе соответствует факторизация по соответствующей образующей.* □

Определение 1.27. Две стрелки графа называются *параллельными*, если не существует пути, проходящего через обе эти стрелки.

Следующее предложение будет использоваться при осуществлении редукции.

Предложение 1.36. *Если $\Gamma(A)$ содержит параллельные стрелки, то соответствующая алгебра вкладывается в прямую сумму алгебр A_α, получающихся стиранием одной из стрелок. T-идеал тождеств алгебры A есть пересечение идеалов тождеств соответствующих алгебр, а многообразие, порожденное алгеброй A, — объединение соответствующих многообразий. Пусть I — мономиальный идеал в A такой, что для всякого α факторалгебра A_α/I представима. Тогда алгебра A/I тоже представима.* □

Мы будем рассматривать фактор-алгебры автоматных алгебр, которые перестают быть автоматными. При этом, однако, все равно будет использоваться техника графов.

1.3.2. Многообразия мономиальных алгебр

Многообразием мономиальных алгебр называется многообразие алгебр, порожденное некоторым множеством мономиальных алгебр.

Через многообразия мономиальных алгебр проходит мост, связывающий структурные свойства тождеств и комбинаторику слов. Вот общая схема рассуждений: тождество f не выполняется в многообразии $\Longrightarrow$ f не выполняется в "тестовой" мономиальной алгебре $A \Longrightarrow$ некоторое слово в произвольной алгебре, графически совпадающее со словом из A, с помощью тождества f переводится в линейную комбинацию других слов. Последнее дает возможность осуществлять приведение. Мы применим этот подход для алгебры матриц и алгебры верхнетреугольных матриц, а также докажем леммы, нужные для параграфа 1.4.4. Говоря о словах из $\mathrm{Wd}(A)$, мы говорим о словах, графически совпадающих со словами алгебры A.

Обозначим через A_u мономиальную алгебру, все ненулевые слова которой являются подсловами бесконечного циклического слова $u^\infty = uuu\dots$. Будем считать, что u не циклично, т.е. не равно степени никакого своего собственного подслова.

Теорема 1.28. *Множество полиномиальных тождеств алгебры A_u совпадает с множеством тождеств алгебры матриц K_n, где n — длина слова u.*

Доказательство. Алгебру A_u можно представить циклическим графом $G(A)$ (мы допускаем, что любая вершина графа является начальной). Метки ребер цикла в порядке их прохождения совпадают со словом u. Обозначим через $T(A)$ идеал тождеств A, через $T(K_n)$ — идеал тождеств алгебры матриц K_n. Конструкция представления ψ дает нам вложение A в алгебру матриц порядка n над расширением F исходного поля K. Так как поле бесконечно, то при расширении поля набор тождеств сохраняется. Следовательно, $T(A) \supseteq T(F_n) = T(K_n)$.

Обратное включение следует из того, что образ $\psi(A)$ порождает над полем F всю матричную алгебру F_n. Достаточно проверить, что матричные единицы принадлежат $F \cdot \psi(A)$. Пусть $u = a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n}$, ребра $i \to i+1$ графа $G(A)$ помечены буквами a_i, $i = 1, \dots, n-1$, ребро $n \to 1$ помечено буквой a_{k_n}. Легко видеть, что образ слова

$$\psi(a_{k_i} a_{k_{i+1}} \dots a_{k_n} u a_{k_1} \dots a_{k_{j-1}})$$

является матрицей, у которой на всех местах, кроме (i,j), стоят нули, а на месте (i,j) стоит ненулевой элемент поля F. Чтобы получить матричную единицу e_{ij}, достаточно домножить эту матрицу на обратный элемент. $\square$

Предложение 1.37. *а) Пусть f — тождество, не выполняющееся в мономиальной алгебре A, B — произвольная алгебра с теми же именами образующих. Тогда существует слово u из $\mathrm{Wd}(A)$ в алгебре B, линейно представимое по модулю $T(f)$ словами, не равными u.*

б) Пусть f — полилинейное тождество вида $\sum_{\sigma \in S} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}$; $\alpha_\sigma \in F$. Тогда существуют слова $v_1, \dots, v_p$ из $\mathrm{Wd}(A)$ и коэффициенты $\beta_\sigma \in S_p$ такие, что

$$\begin{array}{l} V = v_1 v_2 \dots v_p \in \mathrm{Wd}(A), \\ v_1 v_2 \dots v_p \equiv \sum_{V_\sigma \neq V} \beta_\sigma V_\sigma \pmod{T(f)}, \quad \textit{где} \\ V_\sigma = v_{\sigma(1)} v_{\sigma(2)} \dots v_{\sigma(p)}. \end{array} \tag{1}$$

Доказательство. Взяв фактор по словам не из $\mathrm{Wd}(A)$, мы сведем доказательство к случаю самой алгебры A. Последний очевиден. $\square$

Отметим, что зачастую обеспечивается линейная представимость w словами не из $\mathrm{Wd}(A)$.

Предложение 1.38. *Пусть $\mathfrak{M}$ — унитарно замкнутое многообразие, f — произвольное тождество степени p, v_i, v_i' — слова, свободные от переменных x_i. Тогда выполнимость тождества $f(x_1, \dots, x_p)$ в многообразии $\mathfrak{M}$ равносильна выполнимости тождества $f(v_1 x_1 v_1', \dots, v_p x_p v_p')$.*

Доказательство. Достаточно подставить единицу вместо переменных, входящих в v_i и v_i'. $\square$

Следствие 1.12. *Пусть $\mathrm{Var}(A)$ — унитарно замкнутое многообразие. Тогда слова v_i в равенстве (1) могут быть выбраны одновременно сколь угодно длинными.*

Итак, "вычеркивания и приписки" (см. лемму 1.1) являются комбинаторным аналогом унитарной замкнутости. Воспользуемся полученными утверждениями для матричной алгебры и для алгебры верхнетреугольных матриц. Следующее предложение используется в параграфе 1.4.4.

Предложение 1.39. *Пусть u — нециклическое слово длины n, и пусть f — полилинейное тождество сложности меньше n и степени p. Тогда существует подслово t в сверхслове u^∞, представимое в виде $t = t_0 \dots t_{p+1}$, где длины подслов t_i находятся в пределах $2n \le |t_i| \le 3n$; при этом слово t представимо также в виде линейной комбинации слов вида $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$, не входящих в сверхслово u^∞.*

Доказательство. По теореме 1.28 $\mathrm{Var}(A_u) = \mathbb{M}_n$. Применим предыдущее следствие к алгебре A_u и заметим, что по предложению 1.37, если $t_\sigma \neq t$, то $t_\sigma \notin \mathrm{Wd}(A_u)$. Выполнения неравенств $2n \le t_i \le 3n$ добиваемся с помощью леммы 1.1 о вычеркиваниях и приписках. $\square$

Определение 1.29. Рассмотрим нематричное многообразие $\mathfrak{M}$, порожденное конечно порожденной алгеброй. *Сложностью Латышева* $\mathrm{Lat}(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ называется максимальное n такое, что алгебра верхнетреугольных матриц $\mathbb{T}_n$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Сложностью Латышева $\mathrm{Lat}(A)$ конечно порожденной алгебры A называется сложность порождаемого ею многообразия $\mathrm{Var}(A)$ (в том случае, если $\mathrm{Var}(A)$ нематричное).

Пусть алгебра A имеет вид

$$A = F\langle x, c_1, \dots, c_n\rangle / \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{id}(c_i)^2 + \mathrm{id}(c_1, \dots, c_n)^n\right).$$

Она мономиальна и $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(\mathbb{T}_n)$. Воспользовавшись следствием 1.12, получаем

Предложение 1.40. *Если в алгебре A выполняется тождество f, которое не выполняется в многообразии $\mathbb{T}_{n+1}$, то в A выполняется тождество слабой (а следовательно, в силу предложения 2.31, и сильной) алгебраичности порядка не выше n.*

Это дает возможность перекачивать n степеней одного и того же слова в меньшее число степеней (см. пункт 1.5). Следующее предложение полезно при оценке размерности Гельфанда—Кириллова.

Предложение 1.41. *а)* $\mathrm{GKdim}(A) \le S \cdot \mathrm{Lat}(A)$, *где S — минимальное число элементов s-базиса.*

б) Пусть A — конечно порожденная алгебра, порождающая нематричное многообразие. Тогда в алгебре A выполняется сильная алгебраичность порядка $\mathrm{Lat}(A)$ *и не выполняется слабая алгебраичность порядка* $\mathrm{Lat}(A) - 1$.

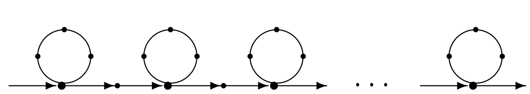
Доказательство. Пункт а) следует из предложения 1.40 и процедуры перекачки: всякий элемент алгебры линейно представим словами вида $d_0 v_{i_1}^{e_1} d_1 v_{i_2}^{e_2} \dots d_{h-1} v_{i_h}^{e_h} d_h$, где все слова d_i имеют ограниченную степень, слова v_{i_j} принадлежат s-базису, и для каждого элемента v из s-базиса среди слов v_{i_j} может быть не более $\mathrm{Lat}(A)$ слов, равных v. Отсюда вытекает, что $h \le S \cdot \mathrm{Lat}(A)$.

Пункт б) следует из предложения 1.40 и из того, что в $\mathbb{T}_n$ не выполняется сильная алгебраичность порядка $\mathrm{Lat}(A) - 1$. □

Итак, сложность Латышева и просто сложность многообразий определяются в терминах мономиальных алгебр. Интересно, что более общие "сложности" возникали в работах, посвященных проблеме Шпехта. Эти сложности соответствуют полупрямым произведениям матричных алгебр, т.е. многообразиям, порожденным унитарно замкнутыми мономиальными алгебрами.

Описание многообразий автоматных алгебр в терминах графов. Теоремы, приведенные в конце данного раздела не являются основными в диссертации, поэтому мы ограничиваемся формулировками, подробности — см.[164].

Определение 1.30. Граф называется *замечательным*, если имеет следующий вид



(линейные пути между циклами и сами циклы имеют произвольную длину), входные и выходные вершины циклов совпадают и кроме того, *каждая стрелка, имеющая хотя бы одну общую вершину с циклом, помечена буквой, которая нигде больше не встречается*;

кусочно замечательным, если он конечен, каждая связная компонента замечательна и стрелки из разных компонент помечены разными буквами.

Предложение 1.42. *Любой кусочно замечательный граф задает конечно определенную алгебру.* □

В работе [164] доказана следующая теорема.

Теорема 1.31. *Любое многообразие $\mathfrak{M}$ мономиальных алгебр порождается алгеброй некоторого кусочно замечательного графа.*

Иными словами, $\mathfrak{M}$ есть конечное объединение многообразий, заданных алгебрами замечательных графов.

Следствие 1.13. *Любое многообразие мономиальных алгебр порождается конечно определенной алгеброй.* □

Дадим другую формулировку данной теоремы.

Теорема 1.32. *Каждое унитарно замкнутое многообразие мономиальных алгебр представляется в виде конечного объединения многообразий вида*

$$\mathbb{M}_{n_1}\mathbb{M}_{n_2}\dots\mathbb{M}_{n_k}.$$

Здесь через $\mathbb{M}_{n_i}$ обозначено многообразие, порожденное алгеброй матриц размера n_i, произведение многообразий определяется через произведение T-идеалов (ему отвечает полупрямое произведение алгебр). □

Предложение 1.43. *Алгебра, заданная кусочно-замечательным графом, порождает унитарно-замкнутое многообразие $\iff$ она может быть задана кусочно-замечательным графом, все соседние циклы в котором близки и нет перемычек: входящей в начальный цикл и выходящей из финального.* □

Замечание. По сути дела, через многообразия вида $\mathbb{M}_{n_1}\mathbb{M}_{n_2}\dots\mathbb{M}_{n_k}$ в работах, посвященных проблеме Шпехта, определялась обобщенная сложность. Если все $n_k = 1$, то мы имеем сложность Латышева; если $k = 1$, то мы имеем обычную сложность.

1.3.3. Критерий представимости мономиальной алгебры

Если мономиальная алгебра представима, то она PI, и в ней выполняется теорема о высоте. Обратное, вообще говоря, неверно. (Например, алгебра с дробной размерностью Гельфанда—Кириллова не может быть представимой.) Мы дадим критерий представимости.

По теореме о высоте множество слов алгебры имеет вид $v_1^{k_1}v_2^{k_2}\dots v_l^{k_l}$, где $l \le H$, H — высота алгебры, и v_i принадлежат конечному множеству слов. Таким образом, каждое слово алгебры A задается своим *типом* — упорядоченным набором $(v_1,\dots,v_l)$ — и *вектором степеней* $\overrightarrow{k} = (k_1,\dots,k_l)$. При этом число различных типов конечно. Условия представимости суть условия на типы и векторы степеней. Назовем тип $(u_1,\dots,u_k)$ *подтипом* типа $(v_1,\dots,v_l)$, если последовательность $(v_1,\dots,v_l)$ имеет вид $(v_1,\dots,v_m,u_1,\dots,u_k,v_{m+k+1},\dots,v_l)$. Иначе говоря, слова типа $(u_1, \ldots, u_k)$ являются подсловами слов типа $(v_1, \ldots, v_l)$ с указанием разбиения на степени. Мы считаем, что слова v_i нециклические (т.е. не являются степенями) и что несколько подряд идущих слов в типе $v_\alpha^{k_\alpha} \ldots v_\beta^{k_\beta}$ не представимы в виде произведения меньшего числа степеней. (Это условие не только на v_i, но и на соответствующие степени k_i.)

Зафиксируем число N. Его в дальнейшем выберем достаточно большим. Назовем компоненту $v_i^{k_i}$ *существенной*, если $k_i > N$. Отметим, что из равенства существенной высоты размерности Гельфанда—Кириллова (теорема 1.59) вытекает, что число существенных компонент при достаточно больших N равно размерности Гельфанда—Кириллова. Отметим в произведениях существенные компоненты. Представим слово $v_1^{k_1} \ldots v_l^{k_l}$ в виде

$$D_0 v_{i_1}^{k_{i_1}} D_1 \ldots v_{i_s}^{k_{i_s}} D_s,$$

где $k_{i_1}, \ldots, k_{i_s} \geq N$ и D_α — произведения несущественных компонент. Выбор достаточно большого N гарантирует, что s не больше существенной высоты. Представление в таком виде может быть сделано однозначно. Для этого мы считаем v_i правильными (в указанном выше смысле) словами. Отметим, что степени не могут иметь больших перекрытий. Если слово представимо в виде $D_0 v_{i_1}^{k_{i_1}} \ldots D_s$ несколькими способами, то выберем тот, который отвечает минимальному по длине D_0, затем — максимальному $v_{i_1}^{k_1}$, потом — минимальному D_2 и т.д. Полученное однозначное представление $(D_0, v_{i_1}, D_1, v_{i_2}, \ldots, D_s)$ слова называется *существенным типом* (мы опускаем вектор степеней). Суммируем сделанные наблюдения и сформулируем некоторые полезные замечания.

Предложение 1.44. *При достаточно большом N каждому слову однозначно соответствует его существенный тип. Имеется конечное число различных существенных типов. Подтип существенного типа $(D_0, v_1, \ldots, v_s, D_s)$ имеет один из следующих видов: $(v_i, D_i, \ldots, v_j)$, $(v_i, \ldots, D''_j)$, $(D'_{i-1}, v_i, \ldots, v_j)$, $(D'_{i-1}, \ldots, v_j, D''_j)$, где D'_{i-1} — конец $v_{i-1}^{k_{i-1}} D_i$, а D''_j — начало $D_j v_{j+1}^{k_{j+1}}$. Каждое слово подтипа является подсловом слова данного типа. Каждому существенному типу соответствует граф без параллельных ребер такой, что все слова этого типа получаются как пути в графе. При этом v_i соответствуют циклам, а D_j — путям, их соединяющим.* □

Теперь мы можем сформулировать критерий представимости.

Теорема 1.33. *Мономиальная алгебра A представима в том и только том случае, когда A имеет ограниченную высоту и векторы степеней удовлетворяют следующим условиям.*

1. Для каждого существенного типа задана конечная система экспоненциальных диофантовых уравнений $\{P_{j,\alpha,t} = 0\}$ на показатели степеней существенных компонент. При этом

$$D_0 v_{i_1}^{k_1} D_1 \ldots v_{i_s}^{k_s} D_s = 0 \tag{2}$$

в том и только том случае, когда выполняется система уравнений

$$P_{\alpha,t}(k_1, \ldots, k_s) = 0 \qquad \forall j \tag{3}$$

(через t мы обозначили существенный тип $(D_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_s} D_s)$).

2. Если P_α — система уравнений для подтипа, то ей соответствует система уравнений для типа.

Равносильная формулировка: мономиальная алгебра представима тогда и только тогда, когда

- Ее высота ограничена.
- Множество определяющих соотношений имеет вид (2).

Доказательство. Сначала докажем **необходимость** (и заодно проясним условие теоремы). Последнее условие означает, что если слово имеет нулевое подслово, то оно равно нулю. О необходимости выполнения теоремы о высоте уже говорилось выше.

Чтобы показать, как из условия равенства слова нулю вытекает выполнение системы экспоненциальных диофантовых уравнений, нам понадобится следующее

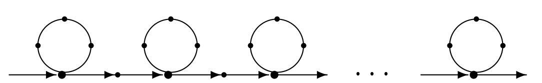
Предложение 1.45. *Пусть A — квадратная матрица. Тогда (ij)-я компонента ее степени A^n для любого n имеет вид $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^n P_i(n)$, где λ_i — элемент из конечного алгебраического расширения K основного поля $P_i \in K[x]$.*

Доказательство. Данное предложение есть непосредственное следствие теоремы о жордановой клетке. □

Таким образом, равенство нулю слова данного типа означает равенство нулю всех компонент соответствующего оператора, и необходимость условий теоремы получается из раскрытия скобок.

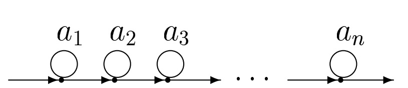
Перейдем к **доказательству достаточности**. Пусть выполняется условие теоремы. Наша алгебра есть факторалгебра алгебры, граф которой состоит из несвязанных кусков, отвечающих разным типам. В силу соображений, связанных с прямым произведением, достаточно рассмотреть случай графа одного типа и соответствующих этому типу уравнений. Предложение 1.31 сводит задачу к случаю графа, все стрелки которого помечены разными буквами. Наконец, предложение 1.34 позволяет ограничиться случаем одного уравнения. Итак, наша задача свелась к следующей.

Пусть A — алгебра графа вида



все стрелки которого помечены разными буквами, $P(k_1,\dots,k_s)$ — произвольный экспоненциальный диофантов полином от $k_1,\dots,k_s$. Пусть I — идеал, порожденный словами, в которых первый цикл пройден k_1 раз, второй — k_2 раз и т.д., причем $P(k_1,\dots,k_s)=0$. Докажем, что тогда факторалгебра A/I представима.

Сведем сначала это утверждение к случаю графа с единичными петлями и единичными стрелками, соединяющими петли. Пусть мы построили представление, отвечающее факторалгебре графа



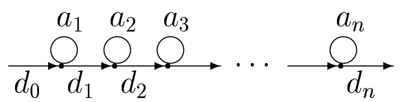
Пусть V — пространство представления. Обозначим через $W_i \subset V$ образ оператора, соответствующего элементу a_i. Рассмотрим прямую сумму пространства V и пространств $W_i^1,\dots,W_i^l$, изоморфных подпространству W_i, и определим операторы $a_i^0, a_i^1,\dots,a_i^l$: a_i^j при $1\le j<n$ суть изоморфизмы W_i^j на W_i^{j+1}; на остальных компонентах представления они действуют нулевым образом. Оператор a_i^0 есть композиция a_i и изоморфизма W_i на W_i^1; наконец, оператор a_i^l есть изоморфизм W_i^l на W_i. Тогда произведение операторов $a_i^0 a_i^1\dots a_i^l$ действует на пространстве

V так же, как и оператор a_i, т.е. прохождение цикла соответствует применению оператора a_i.

С помощью аналогичной процедуры можно легко добиться того, чтобы циклы были соединены путями единичной длины.

Подведем предварительный итог. Доказательство свелось к следующей лемме.

Лемма 1.10 (о представлении). *Рассмотрим граф* Γ *следующего вида*



Пусть $P(k_1,\dots,k_n)$ *— произвольный экспоненциальный диофантов полином от переменных* $k_1,\dots,k_n$. *Пусть* I *— идеал, порожденный элементами вида* $d_0a_1^{k_1}d_1a_2^{k_2}\dots d_{n-1}a_n^{k_n}d_n$ *такими, что* $P(k_1,\dots,k_n)=0$. *Тогда алгебра* A_Γ/I *представима.*

В доказательстве мы будем использовать технику обобщенных графов.

Обобщенные графы. Обобщенные графы будут использоваться нами для построения примеров представимых (но не автоматных!) мономиальных алгебр с заданными свойствами.

Определение 1.34.
1. Ориентированный граф, вершины которого помечены буквами a_i и числами λ_i, называется *обобщенным.*

2. *Алгебра обобщенного графа* (и ее представление) строится следующим образом:

1) вершинам графа соответствуют базисные векторы пространства представления;

2) каждой букве a_i соответствует своя трансцендентная константа $\bar{a}_i$, не зависящая от расположения этой буквы в графе;

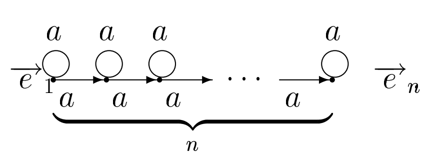
3) стрелке, соединяющей i-ю вершину с j-й, помеченной буквой a_k и числом λ_s, соответствует оператор $\bar{a}_k\lambda_sE_{ij}$ (где E_{ij} — матричная единица, т.е. оператор, переводящий i-й базисный вектор e_i в j-й);

4) каждой образующей a_i соответствует сумма операторов, отвечающих стрелкам, на которых она написана (если из вершины не выходит стрелка, помеченная буквой a_i, то действие оператора на соответствующий базисный вектор нулевое, поэтому, если $\lambda=0$, то стрелку можно стереть);

5) если на стрелке не написано никакое число λ, то оно по умолчанию полагается равным единице.

Рассмотрим жорданову клетку A. Как связано изображение операторов A и A^k с помощью обобщенных графов?

Предложение 1.46. *Рассмотрим следующий обобщенный граф*



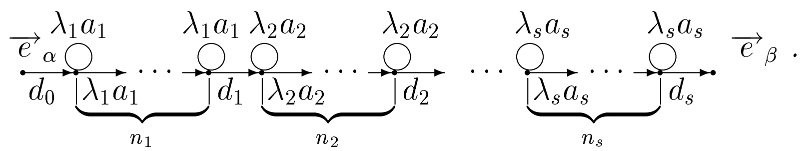
Обозначим через A оператор, соответствующий образующей a. Тогда оператору A^k соответствует граф, у которого на стрелках, соединяющих вершины $\overrightarrow{e}_i$ и $\overrightarrow{e}_j$, где $i < j$, написаны числа $\binom{k}{j-i}\overline{A^k}$, где $\overline{A^k} = \bar{a}^k$ — соответствующая трансцендентная константа (мы полагаем $\binom{k}{0} = \binom{k}{n} = 1$, $\binom{k}{n} = 0$ при $n > k$).

Доказательство. Данное утверждение есть перевод на язык графов хорошо известного утверждения о степени жордановой клетки (которое нетрудно доказать, например, по индукции). $\square$

Нас будет интересовать стрелка, соединяющая крайние вершины $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_n$. На ней написано $\binom{k}{n-1}\bar{a}^k$. Если бы на всех стрелках графа из условия предложения было дополнительно написано число λ, то на интересующей нас стрелке было бы написано $\lambda^k\binom{k}{n-1}\bar{a}^k$. Трансцендентные константы нам нужны для обеспечения однородности по каждой переменной.

Следующее предложение есть непосредственное следствие предыдущего.

Предложение 1.47. *Рассмотрим алгебру, заданную обобщенным графом*



Пусть образующим d_i соответствуют операторы D_i, образующим a_i — операторы A_i, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда

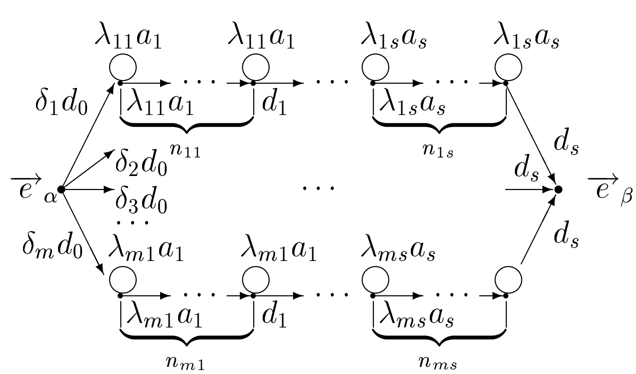
$$D_0 A_1^{k_1} D_1 A_2^{k_2} \ldots D_{s-1} A_s^{k_s} D_s = E_{\alpha\beta} \cdot \bar{d}_0 \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{k_i} \binom{k_i}{n_i - 1} \bar{a}_i^{k_i} \bar{d}_i \quad ,$$

где через $E_{\alpha\beta}$ обозначена матричная единица. $\square$

Предложение 1.48. *Полиномы вида $\binom{k_1}{n_1-1}\binom{k_2}{n_2-1}\ldots\binom{k_s}{n_s-1}$ для всевозможных наборов $n_1, \ldots, n_s$ образуют базис в пространстве всех полиномов $K[k_1, \ldots, k_s]$. Полиномы с экспонентами $\lambda_1^{k_1}\ldots\lambda_s^{k_s}\binom{k_1}{n_1-1}\ldots\binom{k_s}{n_s-1}$ образуют базис в пространстве полиномов с экспонентами.* $\square$

Замечание. Полиномы $\binom{k_1}{n_1-1}\binom{k_2}{n_2-1}\ldots\binom{k_s}{n_s-1}$ суть $\mathbb{Z}$-базис полиномов от переменных $k_1, \ldots, k_s$, принимающих в целых точках целые значения.

Предложение 1.49. *а) Пусть задан обобщенный граф:*



Пусть образующим a_i соответствуют операторы A_i, образующим d_i — операторы D_i. Тогда

$$D_0 A_1^{k_1} D_1 A_2^{k_2} \ldots A_s^{k_s} D_s = E_{\alpha\beta} \cdot \left(\bar{d}_0 \prod_{j=1}^{s} \bar{a}_j^{k_j} \bar{d}_j\right) \cdot \sum_{i=1}^{m} \delta_i \prod_{j=1}^{s} \lambda_{ij}^{k_j} \binom{k_j}{n_{ij} - 1} .$$

Таким образом, $D_0A_1^{k_1}D_1\dots A_s^{k_s}D_s=0$ тогда и только тогда, когда

$$P(k_1,\dots,k_s)=\sum_{i=1}^{m}\delta_i\prod_{j=1}^{s}\lambda_{ij}^{k_j}\binom{k_j}{n_{ij}-1}=0.$$

б) Любому слову, имеющему расположение в этом графе, кроме, возможно, некоторых слов, соединяющих вершины $\overrightarrow{e}_\alpha$ и $\overrightarrow{e}_\beta$, соответствует ненулевой оператор. Ненулевые операторы, соответствующие разным словам, линейно независимы. □

Предложение 1.49 позволяет соорудить любую линейную комбинацию из произведений биномиальных коэффициентов, а предложение 1.48 показывает, что таким образом можно получить любой экспоненциально–диофантов полином. Итак, лемма о представлении, а вместе с ней и критерий представимости, доказаны.

Замечание. Каждому слагаемому $\left(\bar{d}_0\prod_{j=1}^{s}\bar{a}_j^{k_j}\bar{d}_j\right)\cdot\delta_i\prod_{j=1}^{s}\lambda_{ij}^{k_j}\binom{k_j}{n_{ij}-1}$ отвечает путь на обобщенном графе. Обращение в ноль происходит из-за эффекта интерференции или “гашения путей”.

1.3.4. Представимые алгебры с трансцендентным рядом Гильберта и алгоритмические вопросы

Мы воспользуемся критерием представимости для доказательства автоматности представимой алгебры, размерность Гельфанда—Кириллова которой равна единице, а также для построения примеров представимых мономиальных алгебр с экзотическими свойствами.

Теорема 1.35. *Представимая мономиальная алгебра над полем характеристики нуль, размерность Гельфанда—Кириллова которой равна единице, является автоматной, а ее ряд Гильберта рационален.*

Доказательство. Данная теорема вытекает из теоремы о совпадении существенной высоты с размерностью Гельфанда—Кириллова, критерия представимости и следующего известного факта:

Теорема. *Множество целочисленных нулей экспоненциально-полиномиального диофантового уравнения над полем характеристики нуль есть объединение конечного множества точек и конечного набора арифметических прогрессий.*

Теорема доказывается методом Сколема (см. [13]) путем рассмотрения линейной рекурренты как функции на $\mathbb{Z}$ с использованием аналитичности p-адического продолжения экспоненты при подходящем основании.

Мы приведем вспомогательные факты из алгебры и теории чисел.

1. Из набора элементов $\{\lambda_i\}$ поля (т.е. параметров, связанных с изучаемым уравнением) можно выбрать максимальный набор алгебраически независимых элементов $\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$, именуемый *базисом трансцендентности*. Каждое λ_i является корнем алгебраического уравнения вида $P_{i0}\lambda_i^n+\dots+P_{in}=0$, где все P_{ij} суть значения многочленов с целыми коэффициентами от $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. Любое отображение базиса трансцендентности в набор алгебраически независимых элементов поля H продолжается до гомоморфизма поля $\mathbb{Q}(\{\lambda_i\})$ в некоторое конечное алгебраическое расширение поля H.

2. Возьмем достаточно большое простое число p такое, что для некоторого набора остатков $\{\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_k\}$ все полиномы $P_{in_i}(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_k)$, $P_{i0}(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_k)\neq 0$ (т.е. обеспечим, чтобы p не входило в знаменатель). Возьмем алгебраически независимые над $\mathbb{Z}$

p-адические числа $\{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k\}$ с остатками по модулю p, равными $\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k\}$ соответственно. Тогда отображение $\lambda_i \to \lambda'_i$ продолжается до вложения $\mathbb{Z}[\{\lambda_i\}]$ в некоторое конечное алгебраическое расширение $\mathbb{H}$ кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. При этом образы $P_{js}(\lambda_i)$ не принадлежат главному идеалу $\mathbb{H}_p$ кольца $\mathbb{H}$. Пусть m — степень $\mathbb{H}$ над $\mathbb{Z}_p$.

3. Если λ не принадлежит идеалу $\mathbb{H}_p$, то $\lambda^{p^m-1} - 1 \in \mathbb{H}_p$. В этом случае функция t^x, где $t = \lambda^{p^m-1}$, аналитична по x.

4. Любое конечное расширение $\mathbb{H}$ кольца целых p-адических чисел компактно.

5. Аналитическая функция f, имеющая бесконечно много нулей в $\mathbb{H}$, тождественно равна нулю. (Множество нулей имеет предельную точку, в которой f имеет нулевой ряд Тейлора.)

Перейдем к доказательству. Пусть $r = p^m - 1$. Перейдем с помощью шагов 1–2 к кольцу $\mathbb{H}$. Разобьем множество показателей степеней $\mathbb{N}$ на r арифметических прогрессий с шагом r. Каждая такая прогрессия P_i отвечает уравнению с основаниями степеней λ_i^r (т.к. показатель степени меняется с шагом r). Левая часть этого уравнения аналитична. Поэтому P_i либо содержит только конечное число нулей, либо вся нулевая. □

То обстоятельство, что данная теорема в случае ненулевой характеристики неверна, позволяет привести пример мономиальной полугруппы, представимой над полем характеристики p и не представимой над полем характеристики 0. Рассмотрим уравнение на $x \in \mathbb{N}$: $(1+t)^x - t^x - 1 = 0$, t — трансцендентный элемент. Основания степеней лежат в поле характеристики p. Его решения суть $x = p^k$. Поэтому полугруппа с соотношениями $AC = DA = DC = CD = 0$, $CA^nD = 0$ при $n = p^k$ в соответствии с критерием представимости представима над полем характеристики p, но не представима над полем характеристики 0 по предыдущей теореме. Выпишем матричные элементы ее представления:

$$\begin{aligned}
A:&\quad (1+\lambda)aE_{11} + \lambda aE_{22} + aE_{33},\\
C:&\quad c(E_{01} - E_{02} - E_{03}),\\
D:&\quad d(E_{14} + E_{24} + E_{34})\ .
\end{aligned}$$

Ряд Гильберта соответствующей мономиальной алгебры трансцендентен. Можно показать, что данная алгебра не представима над полем характеристики, отличной от p.

Приведем пример представимой над полем характеристики 0 мономиальной алгебры с размерностью Гельфанда—Кириллова 2. Известно, что все решения уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1 (d \neq k^2)$ имеют вид (x_n, y_n): $\quad x_n + \sqrt{d}y_n = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n$, где (x_0, y_0) — минимальное решение. Множество решений имеет логарифмическую плотность, и ряд Гильберта указанной ниже алгебры трансцендентен:

$$\begin{aligned}
&CA^xB^yD = 0, \qquad \text{если } x^2 - dy^2 = 0,\\
&C^2 = D^2 = AC = BC = DC = DB = DA = 0,\\
&BA = AD = CB = CD = 0\ .
\end{aligned}$$

(Это алгебра подслов множества слов вида CA^xB^yD, где $x^2 - dy^2 \neq 0$.)

Итак, вопрос о представимости мономиальной алгебры сводится к следующей проблеме: является ли данное множество множеством нулей некоторого экспоненциального диофантового полинома от нескольких переменных. Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима. Алгоритмически неразрешима также проблема распознавания наличия натурального нуля у такого полинома. Поэтому справедлива следующая

Теорема 1.36. *Проблема изоморфизма и проблема равенства рядов Гильберта двух мономиальных подалгебр матричных алгебр алгоритмически неразрешимы.* □

Можно ограничиться матрицами размера 1000×1000 над $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_9]$.

Замечания. Свойство нулей аналитической функции (не тождественно равной нулю) не иметь предельных точек есть специфика случая одной переменной. Известно, что задача отыскания решения системы диофантовых уравнений от двух переменных алгоритмически разрешима. Если обобщить этот результат на экспоненциальные диофантовы уравнения, то мы получим алгоритмическую разрешимость проблем, связанных с представимыми мономиальными алгебрами размерности Гельфанда—Кириллова 2.

1.4. Теорема Ширшова о высоте и базисы алгебр

Эта теорема дает в первом приближении описание базисов ассоциативных *PI*-алгебр. Данный раздел посвящен дальнейшим ее уточнениям в свете исследования нормальных базисов.

Теорема о высоте означает возможность приведения к кусочно периодическому виду. Из нее непосредственно следует положительное решение проблем бернсайдовского типа: локальная конечность алгебраических *PI*-алгебр (проблема Куроша) и, в частности, локальная нильпотентность нильалгебр ограниченного индекса. Кроме того, из теоремы Ширшова вытекает ограниченность размерности Гельфанда—Кириллова.

Определение 1.37. Пусть $Y = \{u_i\}$ — набор слов. *Высотой множества слов* W *относительно* Y называется наименьшее h такое, что любое слово $w \in W$ представимо в виде $u_{i_1}^{k_1} u_{i_2}^{k_2} \ldots u_{i_r}^{k_r}$, где $r \le h$. *Алгебра* A *имеет высоту* h *над* Y, если A линейно представима множеством слов, имеющим высоту h над Y. При этом Y называется *базисом Ширшова алгебры* A.

Теорема Ширшова о высоте. *Пусть A — конечно порожденная PI-алгебра степени m, Y — множество слов степени не выше m. Тогда A имеет ограниченную высоту над Y.* □

В связи с теоремой Ширшова возникает вопрос о том, над какими множествами слов Y алгебра A имеет ограниченную высоту. Это частный случай вопроса об устройстве базиса в *PI*-алгебрах. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1.38 (А. Я. Белов). *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \mathrm{PIdeg}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова u.*

Доказательство. Заметим, что $(uv)^n = u(vu)^{n-1}v$, и если Y содержит два циклически сопряженных слова v_1 и v_2, то одно из них можно удалить из базиса. Таким образом, достаточность условия теоремы следует из теоремы 1.57, которая будет доказана ниже. Покажем необходимость. Пусть $|u| \le n$ и u нециклично. Согласно теореме 1.28, $A_u \in \mathrm{Var}(A)$ и, следовательно, является факторалгеброй алгебры A. В силу ненильпотентности A_u, проекция Y должна содержать ненильпотентный элемент. По предложению 1.6 множество ненильпотентных слов в алгебре A_u есть множество слов, циклически сопряженных к степеням слова u. Поэтому Y содержит слово требуемого типа. □

Замечание. Ограниченность высоты PI-алгебры над множеством слов степени не выше сложности была анонсирована также Г. П. Чекану [119]. Оценка на длину слов из Y впервые была снижена И. В. Львовым [73] (с m до $m-1$).

Нас будут интересовать также оценки на высоту h. Идея состоит в том, что если высота большая, то слово линейно представимо меньшими словами.

Определение 1.39. Слово W называется *m-разбиваемым*, если его можно разбить на m лексикографически убывающих частей

$$W = w_1 w_2 \dots w_m, \quad \text{где } w_1 \succ w_2 \succ \dots \succ w_m.$$

Другое (равносильное) определение n-разбиваемости. Слово W m-разбиваемо, если оно имеет вид $s_0 v_1 s_1 v_2 \dots s_{m-1} v_m s_m$, где $v_1 \succ v_2 \succ \dots \succ v_m$.

Следующее предложение объясняет важность понятия m-разбиваемости.

Предложение 1.50 (А. И. Ширшов). *а) Пусть слово W является m-разбиваемым. Тогда любое слово, получающееся из W нетождественной перестановкой w_i, лексикографически меньше W.*

б) Если в алгебре A выполнено тождество

$$x_1 \dots x_m = \sum_{\sigma \neq id} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}$$

степени m, то слово W представимо в виде линейной комбинации меньших слов.

Таким образом, в PI-алгебре степени m слова, не представимые в виде линейной комбинации меньших слов, m-разбиваемыми не являются и достаточно проверить, что множество m-разбиваемых слов имеет ограниченную высоту.

1.4.1. Оценки в теореме о высоте

В данном разделе используется техника, развитая в разделе 1.1.1.

Предложение 1.51. *Если слово W имеет вид $W = s_0 v s_1 v \dots s_{m-1} v s_m$, а слово v содержит m попарно лексикографически сравнимых подслов (возможно, перекрывающихся), то W является m-разбиваемым.*

Доказательство. Выберем из первого вхождения v самое старшее подслово, из второго — второе по величине и т.д. Таким образом, из слова W мы выбрали убывающую цепочку из уже неперекрывающихся подслов. $\square$

Итак, слово, содержащее n лексикографически сравнимых подслов, n-встречаемо только в n-разбиваемом слове.

Следствие 1.14. *Слово, не являющееся m-разбиваемым, не содержит m неперекрывающихся подслов одинакового m-типа, а также минимального m-типа.* $\square$

Определение 1.40. *m-типом слова W* назовем его m-собственное начало, а в случае, когда W псевдопериодично порядка m, m-типом W назовем само W. *Минимальным m-типом* назовем минимальное m-собственое подслово у собственного m-начала.

Итак, нам нужно находить m попарно лексикографически сравнимых подслов. Следующая лемма чрезвычайно важна. Она устанавливает альтернативу псевдопериодичность — лексикографическая сравнимость. Эта альтернатива лежит в основе получения оценок для высоты, доказательства теоремы о независимости, теоремы о совпадении нильрадикала и радикала Джекобсона мономиальной алгебры и т.д.

Лемма 1.11. *а) Пусть $u_0 = W$, $W = v_1u_1 = v_2u_2 = \cdots = v_mu_m$, $|v_i| = i$. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:*

1) слова u_i лексикографически сравнимы и образуют цепь;

2) слово W псевдопериодично с предпериодом v_i для некоторого i и периодом s, причем $v_is = v_j$; порядок W не превосходит m.

б) Пусть u — нециклическое слово, $u^{(i)}$ — его собственные концы. Тогда $u^{(i)}uu$ образуют цепь.

Пункт а) непосредственно следует из предыдущего предложения. Пункт б) следует из леммы о том, что если в квазипериодическом слове есть квадрат подслова длины, большей периода, то это слово есть степень периода. □

Следствие 1.15. *а) Пусть $\forall i \quad |v_i| \leq m$ и при $i \neq j \quad v_i \neq v_j$. Тогда либо множество слов $\{v_it\}$ линейно упорядочено относительно лексикографического порядка, либо t квазипериодично порядка не выше m.*

б) Определим $(zv)^{(i)}$ с помощью равенства $(zv)_i(zv)^{(i)} = zv$. Пусть $|zv| > R > m$. Тогда либо $(zv)_R$ псевдопериодично порядка $\leq m$, либо $((zv)^{(i)})_R$ образуют линейно упорядоченное множество. □

Отметим, что W может быть правым сверхсловом. Если оно не предпериодично, то все его концы попарно различны. Этот случай нам понадобится при доказательстве теоремы о независимости.

Псевдо- и квазипериодичность естественно возникают в проблемах бернсайдовского типа. Следующая лемма является непосредственным следствием из предыдущих предложений.

Лемма 1.12. *а) Пусть $|z| = R$, z псевдопериодично порядка $\leq m$. Тогда z содержит $[R/m]$-ю степень слова длины $\leq m$.*

б) В условиях предыдущей леммы, пусть W бесконечно, $\mathcal{K}$ — множество индексов i таких, что $(u)^{(i)} = V$, где V — некоторый конец сверхслова W, и k_0 — минимальное число из $\mathcal{K}$, $v = v_{k_0}$. Тогда существует такое слово s, что для любого $k \in \mathcal{K} \quad v_k = vs^{n_k}$, где $n_k = (k - k_0)/|s|$. □

Следствие 1.16. *Если $|t| \geq mk$, то t содержит либо k-ю степень слова длины не выше m, либо m подслов, образующих цепь.* □

Эти подслова перекрываются, но если само t имеет m неперекрывающихся вхождений в слово W, то W является m-разбиваемым.

Из предложения 1.13 вытекает

Предложение 1.52. *а) Количество m-типов слов, не содержащих k-ю степень слова длины $\leq m$, не превосходит $l^{m+1}m^2k$.*

б) Каждое слово длины $\geq mk$ либо является псевдопериодичным порядка m и содержит k-ю степень слова длины $\leq m$, либо не совпадает со своим m-типом.

в) Если слово W имеет длину, бо́льшую, чем $l^{m+1}m^4k^2$, то в слове W можно указать $l^{m+1}m^3k$ кусков длины mk, из них m будут иметь одинаковый m-тип.
□

Следствие 1.17. *Если слово W имеет длину, бо́льшую, чем $l^{m+1}m^4k^2$, то либо W m-разбиваемо, либо какая-то комбинация из $n < m$ букв повторяется k раз подряд.* $\square$

Отметим, что без использования m-типов оценка получается порядка l^{mk}: в слове длины m^2kl^{mk} найдутся m непересекающихся одинаковых подслов длины mk каждое.

Следствие 1.18. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра степени m. Пусть все слова длины не выше m от образующих нильпотентны индекса k. Тогда A нильпотентна индекса $l^{m+1}m^4k^2$.* $\square$

Замечание. Вопрос о локальной конечности алгебраических *PI*-алгебр был поставлен А. Г. Курошем. Он был решен положительно И. Капланским. Его доказательство было неконструктивным. Первое комбинаторное доказательство было получено А. И. Ширшовым как следствие из теоремы о высоте. Однако оригинальное доказательство теоремы Ширшова имело только рекурсивную оценку. Впоследствии эта оценка была улучшена А. Т. Колотовым (до повторной экспоненты) и А. Я. Беловым (до экспоненциальной [167]). Для случая характеристики 0 Нагатой и Хигманом была показана нильпотентность (не обязательно конечно-порожденных) ниль-алгебр индекса n. Ими была получена экспоненциальная оценка на степень нильпотентности. Ю. П. Размыслов улучшил эту оценку до n^2. (В случае положительной характеристики глобальная нильпотентность не имеет места.) Локальная конечность алгебраических *PI*-алгебр Ли в случае характеристики ноль была доказана А. И. Кострикиным. Е. И. Зельманов доказал это в общем случае и показал глобальную нильпотентность энгелевой алгебры Ли в случае характеристики нуль.

Приведенные оценки можно улучшить, если воспользоваться следующими соображениями: во-первых, достаточно установить повторяемость минимального m-типа для обеспечения m-разбиваемости. Кроме того, нет тройных перекрытий у одинаковых m-типов. Поэтому нет нужды резать слово на куски длины mk и устанавливать повторение m типов кусков. Перекрытия одинакового типа могут быть двойные, а кусков в mk раз меньше. Приведем улучшенные оценки.

Предложение 1.53. *а) Если слово W имеет длину, большую чем $2l^{m+1}m^2k$, то либо W m-разбиваемо, либо какая-то комбинация из $n < m$ букв повторяется k раз подряд. В только что приведенном следствии оценку $l^{m+1}m^4k^2$ можно заменить на оценку $2l^{m+1}m^2k$.*

б) Слово, не являющееся m-разбиваемым, содержит менее чем $2ml^{m+1}$ подслов, являющихся m-концами.

в) Слово, не являющееся m-разбиваемым, разбивается на ml^{m+1} псевдопериодических порядка не выше m частей. $\square$

Таким образом, слово c, не являющееся m-разбиваемым, имеет вид

$$c = c_0\omega_0c_1\omega_1\ldots\omega_{r-1}c_r,$$

где ω_i — квазипериодические порядка не выше m слова длины не меньшей $2m$ каждое, c_i не содержат таких подслов, произведение ω_i на первую букву c_i не псевдопериодично порядка m. Следовательно, $r < ml^{m+1}$ и $\sum|c_i| < ml^{m+1}$.

Представим ω_i в виде $\omega_i = u_i^{k_i}S_i$, где S_i — начало ω_i, $|u_i| \le m$. Мы имеем следующий результат, уточняющий теорему А. И. Ширшова о высоте:

Теорема 1.41. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра степени m. Тогда A имеет ограниченную функцией $H(m,l)$ высоту над множеством слов степени не выше m. При этом*
$$H(m,l) < 3ml^{m+1}.$$

Замечание. Разобравшись с концами ω_i, можно показать, что $H(m,l) < 2ml^{m+1}$.

Нас будет интересовать возникновение q-й степени слова, содержащего данную букву. Из предыдущей теоремы вытекает следующее

Предложение 1.54. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра степени m. Пусть буква z имеет $(q+3)ml^{m+1}$ вхождений в слово W. Тогда W линейно представимо словами, каждое из которых содержит подслово вида $(zv)^q$.* □

Данное предложение нам понадобится для получения оценок на высоту относительно множества слов степени не выше сложности.

В заключение отметим, что указанная техника работает и для полуколец, в том числе с некоммутативным сложением. Имеют место следующие результаты:

Теорема 1.42. *а) Пусть A — l-порожденное полукольцо с коммутативным сложением, в котором выполняется тождество $x^m = 0$. Тогда A нильпотентно степени не выше $2l^{m+1}m^3$.*

б) Пусть A — произвольное l-порожденное полукольцо, в котором выполняется тождество $x^m = 0$. Тогда A нильпотентно степени не выше $m^m \cdot 2l^{m+1}m^3 + m$.

Подробнее — см. [164], [169].

Замечание. В последующем И. И. Богдановым [11] были улучшены оценки. При этом он использовал результаты и технику работ [164], [169] (и ссылался на них).

1.4.2. Базисы Ширшова и структурно-комбинаторный параллелизм

Предложение 1.55. *Пусть $\{u_i\}$ – множество попарно несравнимых подслов экстремального слова. Тогда они линейно независимы.* □

Из леммы 1.11 вытекает следующая

Теорема 1.43 (о независимости для сверхслов). *Пусть W — минимальное ненулевое сверхслово. Тогда выполняется одно из условий:*

а) слова $(W)_1, \ldots, (W)_n$ линейно независимы;

б) W псевдопериодично порядка не выше n. Его предпериод есть некоторое $(W)_i$, а период — один из концов $(W)_n$.

Доказательство. Определим бесконечные слова $(W)^i$ с помощью равенства $W = (W)_i(W)^i$. Если условие б) не выполняется, то множество $\{(W)^i\}$ образует цепь. Пусть $\sum \alpha_i (W)_i = 0$ и пусть $(W)^j$ — минимальное $(W)^i$ для всех i таких, что $\alpha_i \neq 0$. Тогда $W = (W)_i(W)^i \succ (W)_i(W)^j$ при $i \neq j$ и $\alpha_i \neq 0$. Но так как $(W)_j$ представимо линейной комбинацией $(W)_i$, слово $W = (W)_j(W)^j$ тоже представимо линейной комбинацией меньших слов. Но это противоречит тому, что W — минимальное ненулевое слово. □

Замечание. а) В формулировке теоремы минимальность можно заменить на максимальность.

б) Если все подслова длины не выше n слова W нильпотентны, то слова $(W)_1, \dots, (W)_n$ линейно независимы.

Следствие 1.19. *а) Пусть A — подалгебра алгебры $n \times n$ матриц, W — минимальное ненулевое (сверх)слово. Тогда W псеводопериодично порядка не выше n.*

б) Пусть M — к.п. A-модуль, и при всех k $\ MA^k \neq 0$. Тогда минимальное сверхслово в алгебре A'' (получающейся с помощью конструкции 2 из параграфа 1.2.1), псевдопериодично порядка не выше $n+1$ (единичка добавилась за счет образующей модуля, стоящей перед словом из A). □

Из теоремы о независимости для сверхслов и конструкции 1 параграфа 1.2.1 вытекает следующее

Следствие 1.20. (Теорема о независимости, В. А. Уфнаровский.) *Пусть*

1) *слово $W = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ является минимальным в левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n;*

2) *концы слова W нильпотентны.*

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы. □

Эта теорема была доказана ранее В. А. Уфнаровским [114] и Г. П. Чекану [117].

Следствие 1.21 (гипотеза Шестакова). *а) Пусть A — подалгебра алгебры матриц $\mathbb{M}_n$, имеющая фиксированный набор образующих. Тогда если все слова степени $\leq n$ нильпотентны, то алгебра A нильпотентна.*

б) Пусть A — алгебра сложности n с фиксированным набором образующих. Тогда если все слова степени $\leq n$ нильпотентны, то алгебра A локально нильпотентна.

Доказательство. а) Алгебра A имеет точное представление операторами в n-мерном пространстве. Пусть $m_1, \dots, m_n$ — базис этого пространства. Осталось применить конструкцию 2 и теорему о независимости для сверхслов. Для доказательства пункта б) достаточно взять фактор по радикалу и воспользоваться представимостью. □

Пункт а) данного следствия был впервые сформулирован И.В.Львовым. Им же [73] было замечено наличие редукции пункта б) к а).

Г. П. Чекану [118] сделал следующие наблюдения: 1) условие нильпотентности можно заменить квазирегулярностью значений некоторых многочленов, 2) линейно независимыми оказываются не только начала слова W, но и все его различные подслова. Техника периодичности в бесконечных словах позволяет получить несколько более сильный результат.

Пусть W — максимальное ненулевое слово, и пусть его начальные подслова линейно зависимы, т.е. имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (W)_k = 0.$$

Пусть $\widetilde{W} = \max_{\alpha_k \neq 0} (W)^k$ (напомним, что $(W)^k$ — конец W, соответствующий $(W)_k$ — началу длины k, $W = (W)_k (W)^k$). Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких k, что $\alpha_k \neq 0$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$. Справедливо следующее

Предложение 1.56. *а) Сверхслово $\widetilde{W}$ периодично. Существует слово s минимальной длины такое, что $\widetilde{W} = s^\infty$.*

б) Пусть k_0 — минимальное число из $\mathcal{K}$, $v = (W)_{k_0}$. Тогда для любого $k \in \mathcal{K}$ $(W)_k = vs^{n_k}$, где $n_k = (k - k_0)/|s|$.

в) При достаточно большом m имеет место соотношение:

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \alpha_k v s^{m+n_k} = 0.$$

г) Элемент

$$x = \alpha_{k_0}^{-1} \sum_{k\in\mathcal{K},\ k>k_0} \alpha_k s^{n_k}$$

не является квазиобратимым.

Доказательство. Пункты а) и б) следуют из леммы 1.12. Если $k \notin \mathcal{K}$, то $(W)_k\widetilde{W} = 0$. Отсюда по определению нулевого бесконечного слова следует равенство нулю произведения $(W)_k$ на некоторый начальный отрезок $\widetilde{W}$, а следовательно, и на некоторую степень s^p, поскольку $\widetilde{W} = s^\infty$. Взяв в качестве m максимум таких p, мы получаем пункт в). Равенство $\sum_{k\in\mathcal{K}} \alpha_k v s^{m+n_k} = 0$ можно переписать в виде $vs\sum_{k\in\mathcal{K}} \alpha_k s^{n_k} = 0$. Откуда непосредственно следует, что x не квазиобратим. $\square$

Следствие 1.22. (Локальная теорема о независимости, Г. П. Чекану.) *Пусть*

1) *слово $W = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ является минимальным в левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n;*

2) *если v_i — концы слова W, то для любых многочленов $f_i(x) \in xF[x]$, $\deg f_i(x) \le n$ элементы $f_i(v_i)$ квазирегулярны.*

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы.

В условиях данного следствия легко получить также, что множество попарно несравнимых концов экстремального слова линейно независимо.

Рассмотрим правый идеал, порожденный как модуль элементом u. Воспользуемся конструкцией 2 из параграфа 1.2.1. Применив данную теорему к алгебре A'', получаем

Следствие 1.23 (Г. П. Чекану). *Если слово W удовлетворяет условиям (1) и (2) и $uW \ne 0$, то элементы $u(W)_i$, $i = 1, \dots n$ линейно независимы ($(W)_i$ обозначает начало слова W длины i).* $\square$

Назовем слово W *максимальным*, если оно удовлетворяет условию (1) теоремы о независимости.

Из следствия 1.3 вытекает

Предложение 1.57. *Пусть W - максимальное слово. Тогда*

а) Пусть u, v — различные подслова W, причем $|u| \ge |v|$. Пусть они изображают одинаковые элементы алгебры. Тогда они лексикографически несравнимы (т.е. $u = vs$). Если $v \triangleright u$, то расположению u отвечает псевдопериодический конец W.

б) Пусть $(W)_k$ — k-начало W. Тогда если $(W)_p(W)_q \ne 0$, $p + q \le |W|$, то $(W)_p(W)_q = (W)_{p+q}$. $\square$

Из утверждения 1.22 выводится также следующая теорема (см. [118]).

Теорема 1.44. ("Глобальная теорема о независимости", Г. П. Чекану.) *Если слово W удовлетворяет условиям локальной теоремы о независимости, то все различные подслова W линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\sum \lambda_i U_i = 0$ — линейное соотношение между подсловами W. Выберем из множества $\{U_i\}$ подмножество $\mathcal{U}$ слов, лексикографически минимальных в множестве $\{U_i\}$, а в множестве $\mathcal{U}$ — слово U_j максимальной длины. Пусть $W = SU_jT$. Тогда $0 = \sum \lambda_i SU_i$ и SU_i либо равно нулю, либо есть начало W в силу условия (1) — максимальности W среди ненулевых слов. Это противоречит локальной теореме о независимости. □

Пусть W - экстремальное сверхслово от матриц порядка n. Оно предпериодично порядка l, причем $l \le n$. Пусть A — матрица, соответствующая букве a. Каждому ее вхождению в сверхслово W отвечает начало W, заканчивающееся этим вхождением. Перед каждым вхождением буквы, ме́ньшей a, стоит начало W, зануляемое оператором A (в силу экстремальности W). Теперь отметим, что ранг оператора равен размерности образа, а коранг — ядра.

Применив конструкцию 2 из параграфа 1.2.1 и воспользовавшись теоремой о независимости для сверхслов, имеем следующее

Предложение 1.58. *а) Общее число вхождений буквы a в период и предпериод экстремального слова не превосходит ранга оператора A.*

б) Общее число вхождений букв, меньших a в период и предпериод экстремального слова не превосходит размерности ядра оператора A. □

Следующее утверждение несколько усиливает результаты Г. П. Чекану:

Следствие 1.24. *а) Пусть $A_1, \dots, A_s - n \times n$-матрицы, $k_i = \mathrm{rk}(A_i)$. Тогда если все слова, содержащие для каждого i не более k_i вхождений буквы a_i, нильпотентны, то матрицы $A_1, \dots, A_s$ порождают нильпотентную алгебру.*

б) Аналогичное утверждение верно, если зафиксировать s и потребовать нильпотентность слов, имеющих не более $n - k_s$ вхождений букв, отличных от a_s, и ровно k_s вхождений a_s.

Доказательство. п.а) непосредственно следует из п.а) предложения 1.58. Для доказательства п.б) достаточно рассмотреть такой порядок на образующих a_i, чтобы образующая a_s была бы старшей. □

Замечание. Можно рассмотреть вхождения произвольного слова u в сверхслово W, начальная буква которых находится на расстоянии не выше l от левого края W. Число таких вхождений u не меньше ранга соответствующего оператора, а число вхождений слов лексикографически меньших u — коранга. (Чтобы не считать вхождение слова и его начала дважды, рассматриваются подслова той же длины $|u|$.) Формулировку утверждения, аналогичному следствию 1.24, мы предоставляем читателю.

Отметим, что доказательства теоремы о независимости, предложенные ранее ([114], [117]), достаточно трудные. Краткость и ясность получилась из-за прояснения связи периодичности и сдвигов. Кроме того, с помощью сверхслов можно получать также более простое доказательство теоремы о высоте. Экстремальные слова изучались также многими авторами (De Luca etc.).

1.4.3. Теорема об экстремальных словах

Утверждения типа теоремы о независимости проясняют, как отражаются свойства матричных единиц на комбинаторике слов. На данной проблематике может быть понято комбинаторное отражение структурной теории.

И. Хёрстейн так сформулировал общую схему структурных рассуждений:

- Докажите теорему для тел ...
- Затем переходите к примитивным кольцам, сводя утверждение с помощью теоремы плотности к матричным кольцам.
- Отсюда получите теорему для полупростых колец; теперь мы знаем ее для R/J;
- Остается прояснить вопрос для радикала ...

Эта структурная схема имеет хорошее комбинаторное отражение в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 1.45 (Об экстремальных словах). *Множество лексикографически неуменьшаемых слов в PI-алгебре A имеет ограниченную высоту над множеством слов, степень которых не превышает сложности алгебры A.*

Доказательство. Пусть m — минимальная степень тождеств алгебры A, $n = \operatorname{PIdeg}(A)$ — сложность A. Поскольку A имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше m, достаточно показать, что, если $|u|$ — нециклическое слово длины, бóльшей n, то при достаточно больших k слово u^k есть линейная комбинация лексикографически меньших слов.

Шаг 1. Рассмотрим правый A-модуль M, заданный образующей v и соотношениями $vW = 0$, где $W \prec u^{\infty/2}$ (т.е. W меньше некоторой степени u). (Через $u^{\infty/2}$ обозначается бесконечное вправо слово с периодом u, через "$\prec$" — отношение лексикографического порядка.) Наша цель — показать, что $Mu^k = 0$ при некотором k.

В самом деле: тогда некоторая степень u^k линейно представима меньшими словами. В силу теоремы Ширшова о высоте, множество неуменьшаемых слов имеет ограниченную высоту над множеством Y_m — множеством слов степени не выше m. А если любая достаточно большая степень нециклического слова длины больше $n = \operatorname{PIdeg}(A)$ линейно представима меньшими словами, то слова длины бóльшей, чем n можно исключить из Y_m.

Шаг 2. Соответствие $t : vs \to vus$ задает корректно определенный эндоморфизм модуля M, поэтому M можно рассматривать как $A[t]$-модуль. Наша цель — показать, что $Mt^k = 0$ при некотором k или, что то же самое, $\bar{M} = M \otimes \mathbb{F}[t, t^{-1}] = 0$.

Шаг 3. Если $Mt^k \in M \cdot J(\operatorname{Ann} M)$, где $J(\operatorname{Ann} M)$ — радикал Джекобсона аннулятора, то $Mt^{lk} \in M \cdot J(\operatorname{Ann} M)^l$, и по теореме Брауна о нильпотентности радикала $Mt^{lk} = 0$ при достаточно большом l. (Воспользовавшись центральностью t в $A[t]$, можно обойтись и теоремой Амицура о локальной нильпотентности радикала.) Поэтому, переходя к модулю M над факторалгеброй $B = A[t]/J(\operatorname{Ann} M)$, можем считать, что $J(\operatorname{Ann} M) = 0$.

Шаг 4. Используя примарное разложение, сводим доказательство к случаю, когда M есть точный модуль над первичным кольцом B.

Шаг 5. Элементы центра $Z(B)$ не имеют аннулятора, поэтому мы можем по ним локализовать и, сделав алгебраическое расширение $Z(B)$, прийти к случаю, когда B — алгебра матриц порядка k над полем, а $\bar{M}$ есть k-мерное векторное пространство. При этом $k \leq n$.

Шаг 5. Применив конструкцию 2 из раздела 1.2.1, мы получаем минимальное ненулевое правое сверхслово $vu^{\infty/2}$, что противоречит следствию 1.19 из теоремы о независимости (см. пункт 1.4.2).

1.4.4. Прямое комбинаторное доказательство гипотез Шестакова и Амицура

Конструкции данного раздела, связанные с приведением слов к нужному виду, в некотором роде параллельны объектам структурной теории.

Обычный подход приведения слова к удобному виду состоит в выражении слова через линейную комбинацию лексикографически меньших слов и изучении неуменьшаемых слов. Например, если слово $t = t_1 \dots t_n$ является n-разбиваемым, $t_1 \succ \dots \succ t_p$, то для любой нетождественной перестановки $\sigma \in S_p$ слово $t_\sigma = t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}$ лексикографически меньше t. Таким образом, если в алгебре выполняется полилинейное тождество степени p, то слово t оказывается линейно представимо меньшими словами. Поэтому неуменьшаемое слово не является n-разбиваемым. Но мы видели, что множество всех не n-разбиваемых слов имеет ограниченную высоту. В частности, все не n-разбиваемые слова достаточной длины содержат степень подслова. Это обстоятельство служит основой для решения проблем бернсайдовского типа.

Но часто бывает достаточно найти интересное подслово, не обязательно вначале, а где угодно. Меньшее подслово обычно проще создать где-то внутри, проведя “сгущение” (хотя возможное ухудшение порядка всего слова может вызывать психологические трудности). Основная идея, лежащая в основе соответствующей техники, состоит в том, что если где-то что-то увеличилось, то в другом месте где-то что-то уменьшилось, поэтому достаточно устанавливать только наличие изменений.

Предложение 1.59. *Пусть T — линейно упорядоченное множество, $\overrightarrow{\tau} = \{\tau_i\}_{i=1}^p$ — вектор из T^p. Тогда для любой перестановки $\sigma \in S_p$ верно либо а), либо б):*

а) $\forall i$ τ_i и $\tau_{\sigma(i)}$ совпадают как элементы T;

б) $\exists i$: $t_i > t_{\sigma(i)}$ и $\exists j : t_j < t_{\sigma(j)}$. □

Отметим, что если множество T только частично упорядочено, то предложение перестает быть верным, даже если в пункте а) условие совпадения заменить условием несравнимости в смысле порядка в T. Поэтому нам понадобятся леммы, устанавливающие линейную упорядоченность некоторых подмножеств слов относительно $\succ$. Все основывается на альтернативе: псевдопериодичность либо линейная упорядоченность. Приведем список соответствующих утверждений, вытекающих из доказанных ранее свойств псевдопериодических слов и слова u^∞ (предложение 1.6).

Предложение 1.60. *Пусть e_i — собственные начала нециклического слова u, а f_i — его собственные концы. Тогда если f_1u^2 сравнимо с f_2u^2, то $f_1 = f_2$; если u^2e_1 есть конец u^2e_2, то $e_1 = e_2$.* □

Предложение 1.61. *1. Пусть $\forall i$ $|v_i| \leq n$ и $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Тогда верно либо а), либо б):*

а) множество слов $\{v_it\}$ линейно упорядочено относительно лексикографического порядка;

б) t квазипериодично порядка не выше n.

2. Определим $(zv)^i$ с помощью равенства $(zv)_i(zv)^i = zv$. Пусть $|zv| > R > n$. Тогда либо а), либо б) верно:

а) $(zv)_R$ псевдопериодично порядка $\leq n$;

б) $((zv)^i)_R$ образуют линейно упорядоченное множество. □

Предложение 1.62. *Если все подслова длины $|u|$ в слове W являются подсловами u^∞, т.е. циклически сопряжены u, то само слово $W \subset u^\infty$. Иными словами, алгебра A_u^F задается набором определяющих соотношений длины $\leq |u|$.* □

Напомним доказанную ранее лемму 1.1.

Лемма о вычеркиваниях и приписках. *Пусть $t = t_1 v t_2 \subset u^\infty$, v циклически сопряжено с u. Тогда $\forall k \geq 0$ $t_1 v^k t_2 \subset u^\infty$. В частности, $t_1 t_2 \subset u^\infty$ и $t_1 v^2 t_2 \subset u^\infty$.* □

Следующее утверждение также было доказано ранее (см. лемму 1.12).

Предложение. *Пусть $|z| = R$, z псевдопериодично порядка $\leq n$. Тогда z содержит $[R/n]$-ю степень слова длины $\leq n$.* □

Предложение 1.63. *Если z_1 и z_2 не псевдопериодичны порядка $\leq n$, $z_1 \succ z_2$, и n-типы слов z_1 и z_2 различны, то n-тип z_1 больше n-типа z_2.* □

Теперь займемся перестановками. Следующее предложение получается, если объединить предложения 1.59 и 1.61 о перестановках и о линейной упорядоченности.

Предложение 1.64. *Пусть $u = (z)_n$, $e_i f_i = u$, $i = 1, \dots, p$; $z = uy$, z не является псевдопериодическим порядка $\leq n$. Пусть $\sigma \in S_p$. Тогда верно либо а), либо б):*

а) $\forall i$ $e_i f_{\sigma(i)} y = uy$;

б) $\exists i, j : e_i f_{\sigma(i)} y \succ uy \succ e_j f_{\sigma(j)} y$. □

Нам будет удобнее пользоваться не соответствием $i \to \sigma(i)$, а соответствием $\sigma(i) + 1 \to \sigma(i+1)$. Это соответствие возникает при рассмотрении слова $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$. Концу подслова $t_{\sigma(i)}$ соответствует начало подслова $t_{\sigma(i+1)}$. Переформулируем данное предложение.

Предложение 1.65. *В условиях предыдущего предложения пусть $\{e_i\}_{i=0}^p$ нумеруются числами от 0 до p, а $\{f_i\}_{i=1}^{p+1}$ — числами от 1 до $p+1$. При этом $e_i f_{i+1} = u$. Пусть $\sigma \in S_p$. Положим $\sigma(0) = 0$, $\sigma(p+1) = p+1$. Тогда верно либо а), либо б):*

а) $\forall i$ $e_{\sigma(i)} f_{\sigma(i+1)} y = uy$;

б) $\exists i, j$: $e_{\sigma(i)} f_{\sigma(i+1)} y \succ uy \succ e_{\sigma(j)} f_{\sigma(j+1)} y$.

в) Если $x \succ z \succ y$, то $(x)_{|z|} \succ z \succ (y)_{|z|}$ □

Нам понадобится

Предложение 1.66. *Пусть $\forall i$, $0 \leq i \leq p+1$, $|t_i| \geq n = |u|$, $t = t_0 \dots t_{p+1} \subset u^\infty$. Тогда если $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \not\subset u^\infty$, то слово t_σ содержит подслова α и β такие, что $|\alpha| = |\beta| = |u| = n$ и $\alpha \succ u \succ \beta$.*

Доказательство. В силу леммы о вычеркиваниях и приписках 1.1, все t_i можно считать достаточно длинными (например, $|t_i| > 10n$). Представим t_i в виде $t_i = f_i u^{k_i} e_i$, где $k > 2$, $e_i f_{i+1} = u$, $|e_i| < n$. Если $\forall i$ $e_{\sigma(i)} f_{\sigma(i+1)} = u$, то $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \subset u^\infty$. Остается воспользоваться предыдущими предложениями. □

Приведем следствие, удобное для дальнейшего.

Предложение 1.67. *Пусть слово z не является псевдопериодическим порядка $\leq n$, $u = (z)_n$; $|z| = K$. Пусть $zv \subset t_i$, $i = 1, \dots, p+1$,*

$$t = t_0 \dots t_{p+1} \subset (zv)^\infty, \quad t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \not\subset (zv)^\infty, \ \sigma \in S_p.$$

Тогда слово t_σ содержит подслова α и β такие, что $|\alpha| = |\beta| = |z|$ и $\alpha \succ z \succ \beta$.

При этом, если α', β', z' — n-типы слов α, β и z соответственно, то $\alpha \succ z \succ \beta$. □

В пункте 1.3.2 (см. [165]) доказано следующее утверждение.

Предложение 1.68. *Пусть u — нециклическое слово длины n, и пусть f — полилинейное тождество сложности меньше n и степени p. Тогда $\exists t \subset u^\infty$, $t = t_0 \dots t_{p+1}$ и $\forall i$ $2n \leq t_i \leq 3n$ такие, что t линейно представимо словами вида $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$ такими, что $t_\sigma \not\subset u^\infty$.* □

Таким образом, тождество сложности n позволяет разрушать период длины больше n.

Из предложений 1.67 и 1.68 вытекает

Предложение 1.69. *а) Пусть f — полилинейное тождество степени p и сложности меньше n, $T(f)$ — соответствующий T-идеал, z не является псевдопериодическим словом порядка n. Тогда слово $(zv)^{2(p+1)}$ линейно представимо по модулю $T(f)$ словами, содержащими подслова вида α, $|\alpha| = |z|$, $\alpha \succ z$, и вида β, $|\beta| = |z|$, $z \succ \beta$.*

При этом n-типы слов α, β и z удовлетворяют тем же неравенствам. □

Итак, с помощью "порчи периода" можно создавать подслова, лексикографически меньшие периода.

Замечания. а) Путь к доказательству ограниченности высоты над множеством слов длины не выше сложности был таков. Вначале рассматривалась ситуация маленькой сложности. Легко заметить, что при нарушении периода в слове $(ab)^\infty$ возникают степени букв a и b. Эти степени можно собирать вместе с помощью процедуры "перекачки". Далее, в случае сложности 2 (разрушения периода длины 3) можно осуществлять "сгущение" старших букв. Затем возникла идея о понижении лексикографического порядка внутри периода. Таков путь к предложению 1.69.

б) В комбинаторике слов часто встречается такое рассуждение. Пусть $e_i f_i = w$. Порядку на концах f_i соответствует порядок на началах e_i. Тогда если e_i умножается на конец f_j бо́льший, чем ему полагается (т.е. $f_j \succ f_i$), то $e_i f_j \succ w$. Такая ситуация возникает при перестановке концов f_i.

в) Действие тождества полезно представлять как "недетерминированное T-преобразование", осуществляющее переход от произведения $v_0 v_1 \dots v_m v_{m+1}$ к "худшему члену" линейной комбинации $\sum_{\sigma \neq id} \alpha_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} x_{m+1}$.

Выделенные наборы слов и операции над ними. Наша цель — добиваться появления внутри слова нужного подслова, поэтапно создавая промежуточные объекты.

Определение 1.46. Набор слов $\mathcal{W}$ мы называем *выделенным*, если алгебра $A/\operatorname{id}(\mathcal{W})$ нильпотентна, $l(\mathcal{W})$ обозначает степень нильпотентности. (Комбинаторный смысл состоит в том, что любое слово длины $\geq l(\mathcal{W})$ линейно представимо словами, содержащими подслово из $\mathcal{W}$.) Если любое слово длины $\geq l_k(\mathcal{W})$ линейно представимо словами, имеющими k вхождений одного из слов $\mathcal{W}$, то набор $\mathcal{W}$ назовем k-*выделенным*. Через $|\mathcal{W}|$ мы обозначаем количество слов в $\mathcal{W}$.

Отметим, что факторизация алгебры по радикалу не дает новых выделенных наборов. Поэтому техника поиска таких наборов по сути дела означает работу в полупростой части и иногда способна заменить обращение к структурной теории. Добиваться появления нужного подслова мы будем поэтапно, создавая вначале вспомогательные подслова. Набор слов будет постепенно улучшаться, пока не превратиться в набор степеней базисных слов. Оказывается, что если слово неквазипериодично порядка n, то его можно заменить на набор слов меньших типов. Поэтому следует изучить операции над выделенными наборами. Начнем с технических утверждений.

Предложение 1.70. *а) Если набор $\{u_i\}$ выделенный и $\forall i\ v_i \subset u_i$, то набор $\{v_i\}$ выделенный и $l(\{v_i\}) \leq l(\{u_i\})$.*

б) Если набор $\mathcal{A}$ выделенный, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, то набор $\mathcal{B}$ — выделенный и $l(\mathcal{B}) \leq l(\mathcal{A})$.

в) Слово выделенного набора можно заменить на семейство слов, которыми оно линейно представимо. При этом степень выделенности не возрастает. □

Прежде всего отметим, что если мы можем создать одно из слов набора, то мы это можем сделать много раз.

Предложение 1.71. *Если набор α выделенный, то он k-выделенный и $l_k(\alpha) \leq k|\alpha| \cdot l(\alpha)$.* □

Лемма 1.13 (о тиражировании). *Пусть f — полилинейное тождество алгебры A степени p, $D = \{d_j\}$ — множество слов степени не выше p (включая пустое слово Λ) от образующих алгебры A и элементов c_i, $C = \{c_i\}$ — выделенный набор. Тогда для любого натурального R набор $\{(c_i d_j)^R;\ i = 1, \dots, |C|, j = 1, \dots, |D|\}$ — также выделенный. ($|M|$ – число элементов M.)*

Доказательство. Каждое слово длины не меньше $l(\{c_i\})$ линейно представимо словами вида $d_k c_i e_k$, d_k, e_k — произведение образующих. Воспользуемся этим фактом, а также тем, что каждое слово, имеющее достаточно высокую степень по $\alpha = \{c_i\}$, нужным образом представимо по теореме Ширшова о высоте (см. предложение 1.54). □

Определение 1.47. Пусть z — слово. Обозначим через z' следующий набор слов.

Если z псевдопериодично порядка $\leq n$, то $z' = \{z\}$.

Иначе $z' = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, где $\mathcal{N}_1$ есть множество лексикографически меньших не псевдопериодических слов, совпадающих со своими n-типами (т.е. любое собственное начало слова из $\mathcal{N}_1$ псевдопериодично порядка $\leq n$), $\mathcal{N}_2$ есть множество псевдопериодических слов порядка $\leq n$ длины R, которые лексикографически меньше z. (R фиксировано. Мы положим $R = 2nk$, k есть требуемый показатель степени.)

Предложение 1.72. *Если к слову z и ко всем, получаемым из него, последовательно применять операцию $'$ (и всякий раз переходить к объединению образовавшихся множеств), то получится слово z или множество $\mathcal{N}_2$. При этом можно обойтись не более чем $T(n,R)$ операциями. $T(n,R)$ — количество n-типов, не являющихся псевдопериодическими порядка n и имеющих длину не выше R. Набор всех n-типов длины $\leq R$ также можно привести к набору псевдопериодических слов за $T(n,R)$ операций.* □

Мы уже установили, что $T(n,R) < Rnl^{n+1}$.

Отметим, что вместо оператора $'$ с тем же успехом можно использовать операцию взятия множества меньших слов той же длины. Оператор $'$ нужен для осуществления более быстрого спуска к псевдопериодическим словам. Это дает снижение оценок с порядка l^{m^2} до порядка l^m (l — число образующих, m — степень алгебры). Кстати, понятие n-типа в доказательстве теоремы о высоте тоже использовалось с этой целью.

Итак, мы уже установили, что нарушить период можно так, чтобы создать и большее, и меньшее подслово. Лемма о тиражировании позволяет создавать период. Суммируем результаты предложения 1.69 и леммы 1.13.

Предложение 1.73. *Пусть α — конечный выделенный набор, $z \in \alpha$, z не является псевдопериодическим словом порядка $\leq n$. Пусть в алгебре A выполняется полилинейное тождество f степени p сложности n. Тогда*

а) Если заменить z множеством всех лексикографически меньших слов той же длины, то получившийся набор α' останется выделенным;

б) Слово z можно заменить набором z'. □

Из предложений 1.72 и 1.73 вытекает

Следствие 1.25 (гипотеза Шестакова). *Пусть A — конечно порожденная PI-алгебра сложности n. Тогда $\forall k$ множество k-х степеней слов длины $\leq n$ является выделенным. Если все эти слова являются алгебраическими элементами, то A конечномерна.* □

Замечание. Тот же самый результат получен как следствие теоремы о независимости (следствие 1.21). Однако здесь мы не используем структурную теорию (не факторизуем по радикалу) и можем дать конструктивные оценки. Эти оценки мы не выписываем, поскольку ниже будет изложена техника, позволяющая сделать их экспоненциальными.

Введем на множестве наборов слов следующее отношение порядка: вначале сравниваются старшие слова, потом вторые по величине, и т.д. Если первые k старших слов в двух наборах совпадают, а старшие слова из оставшихся лексикографически не сравнимы, то два набора не сравнимы. Если при этом в одном наборе слов не осталось, то набор с большим количеством слов считается большим.

Поскольку операция замены слова z на набор z' понижает его порядок (мы рассматриваем множества без кратностей), справедлива

Теорема 1.48. *Если A — к.п. PI-алгебра сложности n, то минимальный выделенный набор слов длины R состоит из псевдопериодических слов порядка не выше n.* □

Эта теорема параллельна структурным утверждениям о строении первичных алгебр и имеет интересное следствие. У любого нециклического слова есть циклически сопряженное правильное слово. Оно отвечает старшему члену некоторого лиева (йорданова) монома. Отсюда получается

Следствие 1.26. *Пусть A — лиева или йорданова алгебра, вложенная в ассоциативную алгебру сложности n. Если все мономы в A от ее образующих длины не выше n алгебраичны, то A локально конечна.* □

Этот результат был анонсирован в работе [178].

1.5. Метод перекачки

Метод перекачки представляет собой комбинаторную конструкцию, параллельную классическому понятию алгебраичности. Он позволяет единообразно решать ряд вопросов, относящихся к PI-теории. Основная комбинаторная идея этого метода такова.

Предложение 1.74. *Рассмотрим игру. Дано n куч предметов. Первый игрок может выбрать любые m куч и каждую из них разложить на правую и левую части. Второй игрок правые части нетождественно переставляет. Тогда первый игрок может добиться того, чтобы все кучи, кроме $m-1$, содержали не более чем по $m-1$ предмета.*

Замечание. Данное предложение предлагалось в качестве задачи на Московской Городской олимпиаде (задача 6б, 9 класс, 1995 год.)

Доказательство. Упорядочим кучи. Составим вектор, i-я координата которого есть количество предметов в i-й куче. Упорядочим их лексикографически. Покажем, что если первый игрок не может увеличить вектор, соответствующий кучам, то расположение предметов в кучах искомое.

В самом деле, пусть имеется m куч; $k_1, \dots, k_m$ — соответствующие количества предметов. Пусть $\forall i\ k_i \geq m$. Положим $k_i = k_i' + q_i$, $q_i = i$, $k_i' = k_i - i$. Поскольку $k_i \geq m$, $k_i' \geq 0$. Остается применить предложение 1.75. □

Предложение 1.75. *Пусть $k_i \geq m$, положим $k_i = k_i' + q_i$. Пусть $k_i' \geq 0$, и $q_j > q_i$ при $j > i$. Тогда для любой нетождественной перестановки $\sigma \in S_m$ вектор $\overrightarrow{k_\sigma} = (k_1' + q_{\sigma(1)}, \dots, k_m' + q_{\sigma(m)})$ лексикографически меньше вектора $\overrightarrow{k} = (k_1' + q_1, \dots, k_m' + q_m)$.*

Доказательство. Если $\sigma(1) \neq 1$, то $\sigma(1) > 1$ и $k_1' + q_{\sigma(1)} > k_1' + q_1$. В этом случае $\overrightarrow{k_\sigma} \succ \overrightarrow{k}$. Если $\sigma(1) = 1$, то мы имеем индукционный спуск от m к $m-1$. □

Из предложения 1.74 получается

Лемма 1.14 (о перекачке). *Пусть A — PI-алгебра, в которой выполняется полилинейное тождество f степени m. Пусть слово W имеет вид*

$$W = c_0 v_1 c_1 \dots v_m c_{m+1},$$

где c_i — буквы, не входящие в слова v_j. Тогда W по модулю $T(f)$ можно представить в виде линейной комбинации слов вида

$$W' = c_{i_0} v_1' c_{i_1} \dots v_m' c_{i_{m+1}},$$

где c_i не входят в слова v_j', и не более чем $m-1$ слово v_i' имеет длину, большую, чем $m-1$. □

Смысл этой леммы заключается в том, что с помощью тождества почти все символы из "куч" v_i можно собрать в $m-1$ кучу v_i'.

Мы играем роль первого игрока, когда представляем слово W в виде произведения $W_0 \cdot \ldots \cdot W_{m+1}$, "разрезая" при этом слова v_i. Далее тождество перерабатывает $W_0 \cdot \ldots \cdot W_{m+1}$ в сумму слов, где W_i нетождественно переставлены. Второй игрок выбирает самый "неприятный" член.

Близкие рассуждения встречаются при доказательстве ограниченности высоты для алгебры Ли с разреженным тождеством.

Замечание. Фактически доказательство леммы о перекачке основано на линейном представлении словами с максимальным вектором степеней.

С помощью процедуры перекачки легко доказывается следующее

Предложение 1.76. *Пусть J – к.п. нильпотентный идеал PI-алгебры A, $m = \deg(A)$. Тогда* $\mathrm{GKdim}(A) \le m \cdot \mathrm{GKdim}(A/J)$. □

На самом деле справедливо более сильное неравенство $\mathrm{GKdim}(A) \le \mathrm{Lat}(A) \cdot \mathrm{GKdim}(A/J)$ (см. начало главы 1.3.2).

1.5.1. Проблемы бернсайдовского типа и ограниченность высот

Если все v_i есть степени одного и того же элемента, то мы получаем собирательный процесс. Пусть $M \subset A$. Обозначим через $M^{(k)}$ идеал, порожденный k-ми степенями элементов из M. Из леммы о перекачке следует

Предложение 1.77. *Пусть A — конечно порожденная градуированная ассоциативная PI-алгебра, $M \subset A$ — конечный набор однородных элементов, порождающий A как алгебру. Пусть факторалгебра $A/M^{(m)}$ нильпотентна степени r. Тогда A порождается как линейное пространство элементами вида*

$$v_0 m_0^{k_0} v_1 m_1^{k_1} \ldots m_{s-1}^{k_{s-1}} v_s,$$

где $\forall i$ $|v_i| < r$, $k_i \ge m$, среди слов v_i не более чем $m-1$ имеет длину $\ge m$, $m_i \in M$, и среди m_i нет m одинаковых элементов.

Иными словами, A имеет ограниченную *существенную высоту* над M (см. определение 1.58).

Доказательство. Степени $m_i^{k_i}$ можно закодировать буквами и применить к словам v_i лемму о перекачке. Если слово v_i имеет длину $\ge r$, то оно линейно представимо словами, содержащими m-ю степень элемента из M. Если среди m_i есть m одинаковых элементов, то к ним можно применить перекачку, закодировав промежутки между ними новыми буквами. □

В работе [165] таким образом доказано следующее утверждение ("обращение вывода проблемы Куроша из теоремы о высоте для градуированного случая").

Теорема 1.49. *Пусть A — конечно порожденная градуированная ассоциативная (альтернативная, йорданова) PI-алгебра. Пусть $M \subset A$ — конечный набор однородных элементов, порождающий A как алгебру, $M^{(k)}$ — идеал, порожденный k-ми степенями элементов из M. Тогда если для любых k факторалгебра $A/M^{(k)}$ нильпотентна, то A имеет ограниченную высоту над M.* □

Из этой теоремы и следствия 1.26 вытекает

Следствие 1.27. *Пусть A — к.п. лиева или йорданова алгебра, вложенная в ассоциативную алгебру сложности n. Тогда A имеет ограниченную высоту над множеством мономов (от ее образующих) длины не выше n.* $\square$

Замечание. Если отказаться от "случайного" условия – порождаемости алгебры A множеством M, то ограниченной будет *существенная высота* над M (определение аналогично определению 1.58).

В работе [165] процедура перекачки описана более подробно. В этой работе показано, что аналог предыдущей теоремы верен для класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, а именно, для хороших многообразий (в этот класс входят альтернативные и йордановы кольца).

Отметим, что в условиях предложения 1.77 можно ограничиться требованием нильпотентности $A/M^{(\mathrm{PIdeg}(A))}$. Пример алгебры $\mathbb{M}_n \otimes xF[x]$ и набора M, состоящего из одного нильпотента степени n, показывает, что обойтись условием нильпотентности $A/M^{(\mathrm{PIdeg}(A)-1)}$ нельзя.

1.5.2. Неоднородный случай в проблеме Куроша

Пусть A — PI-алгебра, и подмножество $M \subseteq A$ является ее s-базисом [1] . Тогда, если все элементы множества M алгебраичны над K, то алгебра A конечномерна (проблема Куроша). Следующую теорему можно рассматривать как обращение этого утверждения.

Теорема 1.50. *Подмножество $M \subseteq A$ курошево тогда и только тогда, когда оно s-базис алгебры A.*

Определение 1.51. Конечное подмножество $M \subseteq A$ в алгебре A называется *Курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$.

Замечание. 1. Как показывает следующий пример, непосредственное обращение проблемы Куроша для неградуированного случая неверно. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π такая, что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s-базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение условия целости.

2. Отметим, что в случае PI-алгебр Ли положительно решается проблема Куроша, но теорема о высоте не выполняется.

3. Теорема обобщается для хороших многообразий (см. приложение A).

Доказательство. Нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 1.15. *Если идеал I и факторалгебра A/I имеют ограниченную существенную высоту над (проекцией) M, то A тоже имеет ограниченную существенную высоту над M.* $\square$

Через $|M|$ обозначается число элементов множества M, $p = \deg(A)$, под словом понимается слово от образующих A и элементов из M. D — конечное множество слов, $l(D)$ — максимальная длина слова из D. Так же, как и теорема 1.56, из леммы о перекачке выводится

[1] см. определение 1.58.

Лемма 1.16. *Пусть любое слово длины k линейно представимо элементами вида $t_1 t_2 \cdots t_s$, $\forall i$ либо $t_i \in D$, либо $t_i = m_i^{k_i}$, $m_i \in M$. При этом $s < 2|M|p + 1$. Тогда если $k > 2(2|M|p+1)|D| \cdot l(D)$, то M — s-базис A.*

Идея доказательства. Заменив слово длины k словом указанного вида и удалив, с помощью перекачки, более чем p-е степени элементов из M, мы уменьшим его длину. Аккуратное оформление этих рассуждений с помощью ширины аналогично доказательству предложения 1.85. □

С помощью леммы 1.16 получается следующее

Предложение 1.78. *Пусть $\pi(M)$ — s-базис A/I, A — конечно порожденная алгебра. Тогда существует конечный набор элементов $\{I_1, \ldots, I_p\} \subseteq I$ такой, что $M \cup \{I_1, \ldots, I_p\}$ — s-базис A.*

Доказательство. Для любого k модуль A_k, порожденный словами (от образующих A и элементов из M) степени не выше k, конечномерен. Существуют $H \in \mathbb{N}$ и конечное множество $D = D(\pi(M))$ из определения существенной высоты такие, что при всех k A_k по модулю линейной комбинации конечного числа (зависящего от k) элементов из I линейно представимо элементами существенной высоты H относительно этого D. Остается выбрать число k достаточно большим, чтобы выполнялось условие предыдущей леммы, и применить лемму о тиражировании 1.13. □

Замечание. а) В однородном случае достаточно использовать только лемму о тиражировании.

б) Данное предложение позволяет индукционным путем построить следующий интересный базис Ширшова $M = \cup_{k=1}^{n} M_k$, где n — сложность алгебры, M_1 — образующие A, M_i суть центральные многочлены в алгебре общих s-порожденных $i \times i$ матриц. Их количество равно (см. работу [24]) $\mathrm{PIdeg}(\mathbb{M}_i/\mathrm{id}(M_i)) < i$ — степени трансцендентности центра алгебры общих матриц.

Перейдем к **доказательству теоремы 1.50.**

Шаг 1. Переход к фактору по радикалу. Используя индукцию по степени нильпотентности радикала, считаем ограниченной существенную высоту любого к.п. идеала I из $R(A)$. Если предположить справедливость доказываемой теоремы для полупервичных алгебр, то условие леммы 1.16 будет выполнено по модулю такого идеала. Осталось воспользоваться предложением 1.78. (Проведя более аккуратные рассуждения, можно ограничиться теоремой Амицура о локальной нильпотентности радикала.)

Шаг 2. Используя примарное разложение и лемму 1.15, переходим к случаю, когда A первична.

Шаг 3. Известно, что первичная алгебра A вкладывается в первичную алгебру A', конечномерную над своим центром. При этом если A конечно порождена, то $Z(A')$ конечно порожден, целозамкнут и является целым замыканием $Z(A)$, $A' = A \otimes_{Z(A)} Z(A')$, и при некотором $h \neq 0$ $h \in Z(A)A'h \subseteq A$. Применив лемму 1.15 к идеалу $\mathrm{id}(h)$, получаем переход к случаю алгебры, конечномерной над своим целозамкнутым центром.

Шаг 4. Сведение к случаю алгебры матриц над целозамкнутым коммутативным кольцом. Существует конечное целое расширение Z' центра Z такое, что $A' = A \otimes_{Z(A)} Z'$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(Z')$. При этом Z' содержит все собственные значения элементов из M. Пусть M — s-базис в A'. Тогда $\forall a \in A$ $a = \sum \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \in Z'$ линейно независимы над полем частных кольца Z, $x_i \in A$ —

сумма членов существенной высоты H над M. В этом случае члены с $\lambda_i \notin Z$ можно опустить, и a равно одному из x_i.

Завершение доказательства. Легко видеть, что условие "M — s-базис A" равносильно условию "M' — s-базис Z", где M' — набор собственных чисел элементов M. Мы пришли к коммутативному случаю, справедливость которого есть непосредственное следствие условия теоремы. □

Замечание. "Условие Куроша" сформулировано в терминах расширения $A \otimes K[X]$. В качестве X можно взять алфавит из одной образующей, поскольку, если M' не цело над $K[X]$, то некоторое $x \in X$ не цело над M' в подходящем факторе $K[X]$ степени трансцендентности 1. А именно, возьмем кольцо функций на кривой, проходящей через особенность элемента x.

1.5.3. Перекачка и тождество алгебраичности

Здесь доказывается выполнимость тождества Капелли, тождества алгебраичности, даются конструктивные оценки. Нам понадобится следующее

Предложение 1.79. *а) Пусть x, c_i, $i = 0, \dots, m$, — фиксированные образующие. Тогда количество слов вида*

$$c_0 x^{k_0} c_1 x^{k_1} \dots x^{k_{r-1}} c_r, \quad \sum k_i = N,$$

есть многочлен степени $r-1$.

б) Пусть A — PI-алгебра степени m. Тогда размерность векторного пространства, порожденного словами вида

$$c_0 x^{k_0} c_1 x^{k_1} \dots x^{k_{r-1}} c_r, \quad \sum k_i = N,$$

при фиксированном r оценивается многочленом степени $m-1$ от N. Это — коразмерность T-идеала алгебры A в этом подпространстве.

Доказательство. Указанное в пункте а) число есть $\binom{N}{r-1}$. Пункт б) следует из а) и леммы о перекачке. Количество способов выбрать $m-1$ позицию равно $\binom{r}{m-1}$, а количество способов разместить степени x в остальных позициях не превосходит $(m-1)^{r-m}$. □

Слабая алгебраичность допускает перестановки c_i, а сильная алгебраичность означает, что группы степеней x можно переставить, не изменив коэффициенты. Поэтому имеет место следующее

Предложение 1.80. *Пусть в алгебре выполняется тождество сильной алгебраичности f указанного выше вида. Пусть $g(z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s)$ — произвольный полилинейный полином. Тогда выполняется и тождество*

$$f_g = \sum_{|I|=N} \lambda_I g(a_0 x^{i_{\sigma(0)}} b_0, \dots, a_{r-1} x^{i_{\sigma(r-1)}} b_{r-1}, y_1, \dots, y_s) = 0.$$

Доказательство. Для каждого члена из g со своей перестановкой σ первых r переменных группируется тождество f_σ. □

Воспользуемся теоремой о высоте, доказанным предложением и процедурой перекачки. Мы имеем

Следствие 1.28. *Результат подстановки в g слов вместо переменных линейно представим результатами подстановок таких наборов слов, что в каждом наборе во все переменные, кроме, быть может, Nml^{m+1}, подставлены слова длины не выше $N^2m^3l^{m-1}$.* □

Мы доказали следующие теоремы.

Теорема 1.52. *В конечно порожденной PI-алгебре выполняется тождество Капелли некоторого порядка.* □

Замечание. а) Воспользовавшись предыдущим замечанием и оценив количество слов, не содержащих N-ю степень слова длины $\leq m$, мы получим следующую оценку на порядок тождества Капелли: $m^4l^nl^{m^4l^m}$. По сути дела, мы доказали также выполнимость тождеств с достаточно широкой диаграммой Юнга.

б) Для перекачки можно с тем же успехом, что и тождество сильной алгебраичности, использовать тождество Капелли.

в) Фактически мы получили некоторую оценку на степень тождества Капелли. Далее, воспользовавшись результатами [42], легко получаем оценку на степень нильпотентности радикала.

Теорема 1.53. *Конечно базируемый T-идеал I, лежащий в радикале конечно порожденной PI-алгебры, нильпотентен.*

Доказательство. Рассмотрим в качестве g достаточно длинное произведение многочленов из I. По следствию 1.28 g представляется в виде линейной комбинации произведений многочленов из I, в которые вместо почти всех переменных, за исключением ограниченного числа, подставлены короткие слова. Так как коротких слов конечное число, то в каждом произведении один из многочленов, в который подставлены одни и те же слова, повторится много раз. Остается заметить, что идеал, порожденный одним элементом из радикала к.п. PI-алгебры, нильпотентен. Это следует из теоремы Амицура о том, что радикал PI-алгебры состоит из нильпотентных элементов, и из теоремы Ширшова об ограниченности высот. □

Это облегчает доказательство теоремы Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала: можно считать, что выполняются тождества, обеспечивающие конечномерность алгебры над локализацией центра. Мы получаем, что произведение степени радикала на некоторый центральный полином есть нуль. По этому полиному можно взять фактор и воспользоваться индукцией по степени трансцендентности центра первичных факторов и по сложности.

1.5.4. Разреженные тождества и перекачка

Использование разреженных тождеств (в частности, тождества Капелли) очень похоже на использование сильной алгебраичности. Таким же образом можно провести доказательство нильпотентности конечно базируемого T-идеала, а также выполнимости тождества Капелли. Доказательство следующего результата А. Д. Чанышева довольно просто осуществляется с помощью такой перекачки.

Теорема 1.54 (А. Д. Чанышев). *Пусть в $\mathbb{Z}$-градуированной PI-алгебре A степени r все образующие имеют степень однородности 1 и для любого однородного элемента x выполняется равенство $x^n = 0$. Тогда A нильпотентна.*

Известно, что в PI-алгебре A выполняется разреженное тождество. Пусть m — его степень. Нам потребуются вспомогательные утверждения.

Рост в многообразиях. $G_{\mathfrak{M}}(n)$ есть размерность векторного пространства, порожденного словами длины n, содержащими каждую из букв $x_1, \ldots, x_n$ по одному разу, в относительно свободной n-порожденной алгебре из $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие ассоциативных алгебр, то $G_{\mathfrak{M}}(n) = n!$

Из предложения 0.12 вытекает нужное нам для дальнейшего

Предложение 1.81. *Существует такое k и коэффициенты α_σ, что для любого полинома $F(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_r)$, полилинейного по x_i, выполняется равенство*

$$\sum_\sigma \alpha_\sigma F(c_1 v_{\sigma(1)} d_1, \ldots, c_k v_{\sigma(k)} d_k, y_1, \ldots, y_r) = 0. \tag{4}$$

Доказательство состоит в рассмотрении членов полинома F с фиксированным расположением y_i, применении к ним предложения 0.12 и использовании линейности. □

Точно так же, как и лемма о перекачке, с использованием этого предложения доказывается

Лемма 1.17 (о разреженной перекачке). *Пусть A — PI-алгебра, в которой при всех F, полилинейных по переменным x_i, выполняется равенство (4). Подставим вместо x_i слова v_i. Тогда $F(v_1, \ldots, v_m, \overrightarrow{y})$ линейно представим элементами вида $F(v_1', \ldots, v_m', \overrightarrow{y})$, где не более чем $k-1$ слово v_i' имеет длину, большую, чем $k-1$.* □

Замечание. Равенство $\forall F \quad \sum \alpha_\sigma F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}, \overrightarrow{y}) = 0$ служит определением разреженного тождества в неассоциативном случае (и даже в случае алгебраических систем произвольной “арности”).

Из теоремы о высоте следует конечно порожденный случай теоремы Чанышева. Сформулируем его в удобном для нас виде.

Предложение 1.82. *Существует функция $R(s, n, r)$ такая, что любая s-порожденная PI-алгебра степени r с однородными образующими, в которой для любого однородного элемента x выполняется равенство $x^n = 0$, нильпотентна индекса не выше $R(s, n, r)$.* □

Технику линеаризации можно применять и к тождествам, выполняющимся на однородных элементах. Все рассуждения переносятся без изменений. Сформулируем вспомогательные утверждения.

Предложение 1.83. *Пусть $x^n = 0$ для любого однородного элемента x. Тогда если все v_i имеют одинаковую степень однородности, то выполняется равенство*

$$\sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} = 0.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться равенством

$$\sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} = (v_1 + \cdots + v_n)^n - \sum_k (v_1 + \cdots + \widehat{v}_k + \cdots + v_n)^n +$$
$$+ \sum_{i_1 < i_2} (v_1 + \cdots + \widehat{v}_{i_1} + \cdots \widehat{v}_{i_2} + \cdots + v_n)^n + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_i v_i^n.$$

(как обычно, знак $\widehat{\ }$ означает, что соответствующий член опускается). □

Следующее предложение получается из предложения 1.82 путем линеаризации.

Предложение 1.84. *Пусть a_{ij} при фиксированном i имеют одинаковую степень однородности, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, k$. Пусть F — полилинейный многочлен от a_{ij} степени ks, в который каждое a_{ij} входит один раз. Пусть F симметричен по каждой группе переменных a_{ij} при фиксированном i. Тогда если $ks \geq R(s, n, r)$, то $F(a_{ij}) = 0$.* □

Доказательство теоремы Чанышева. В силу теоремы Нагаты—Хигмана, достаточно проверить выполнимость тождества $x^R = 0$ или, что то же самое, его линеаризации $\sum_{\sigma \in S_R} v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(R)} = 0$. Последнее следует из предложений 1.82 и 1.84 (при этом s полагается равным $2m$, $R = R(s, n, r)$). □

Замечание. Доказательство можно провести и с помощью обобщенной алгебраичности (хотя и путем, более сложным технически). Целью является “скачать” буквы внутри v_i в полиноме $F(v_1, \ldots, v_m, \overrightarrow{y})$. Если все v_i содержат достаточную степень некоторого x, то работает обобщенная алгебраичность. Воспользовавшись теоремой Нагаты—Хигмана, можно добиться появления степеней элемента x_i (зависящего от v_i) внутри v_i. Если x_i просимметрировать, то получится линеаризация обобщенной алгебраичности. Симметрирование добавляет члены, в которых x_i переходят в “чужие” v_j. Но можно добиться того, чтобы длины минимальных однородных компонент x_i с ростом i росли достаточно быстро (минимальная компонента x_i много старше максимальной x_{i-1}), и переход к добавочному члену тоже давал бы перекачку.

1.5.5. Оценки для высоты над множеством слов степени не выше сложности

Общий план состоит в том, чтобы, стартуя от набора всех слов длины $2n$, поэтапно улучшать выделенный набор α. Улучшение строится так. Пусть в любом слове w длины $l(\alpha)$ можно “создать” подслово из α (т.е. линейно представить w словами, содержащими подслово из α). Тогда в любом слове длины $kl(\alpha)$ можно создать k неперекрывающихся подслов из α. При больших k из этих подслов будет много одинаковых. Собирая с помощью перекачки эти подслова вместе, применив лемму 1.13 о тиражировании а затем — соображения, связанные с появлением ме́ньшего подслова при “порче” периода (см. предложение 1.69), мы создадим подслово из α'.

Однако при каждом таком переходе длины слов, с которыми мы оперируем, возрастают в $2m^3l^m$ раз, а общее число переходов имеет порядок l^m (l – число образующих). В результате получается оценка на высоту порядка l^{m^2}.

Чтобы получить более реальные оценки, следует использовать те участки слова w, которые остаются после создания подслов из α. С помощью перекачки легко добиться, чтобы почти все такие участки (т.е. все, кроме $\deg(A) - 1$) имели длину строго меньше $m = \deg(A)$. Тогда каждая замена приводит не к увеличению требуемых длин по порядку в m^3l^m раз, а только к добавлению слагаемого порядка m^3l^m.

Итак, мы работаем в ситуации, когда слово разбито на участки, которые можно переставлять, но не залезать внутрь, и на свободные участки, с которыми можно делать что угодно. Вместо длины слова мы оперируем с *шириной* – общей длиной $m-1$ свободного участка максимальной длины.

Рассмотрим относительно свободную алгебру A с образующими a_i и c_j, где $j = 1, \ldots, m+1$. Через u_α и v_β обозначаются слова, в которые c_j не входят. Мы считаем, что в A выполняется полилинейное тождество f степени m.

Определение 1.55. Назовем слово вида $c_1v_1\dots c_kv_k$ такое, что $\sum|v_i|\ge h$, *словом ширины* h. Назовем набор слов $\{u_\alpha\}$ m*-выделенным ширины* h, если любое слово ширины h линейно представимо словами, содержащими подслово из $\{u_\alpha\}$.

(c_i можно только переставлять как единые куски.)

c_i суть уже созданные объекты, а v_i суть "материал" для создания нового. "Ширина" измеряет количество пригодного "материала". Из леммы о перекачке 1.14 вытекает следующее

Предложение 1.85. *а) Пусть α — набор слов ширины h, l — максимальная длина слова из α. Тогда любое слово ширины $\ge h+m+l$ линейно представимо словами, каждое из которых имеет два вхождения слов из α.*

б) Любое слово ширины $\ge h+(k-1)(m+l)$ линейно представимо словами, каждое из которых имеет k вхождений слов из α.

Доказательство. Выразим слово указанной ширины через слова, имеющие вхождение элемента из α. В каждом из таких слов отметим указанное вхождение, обозначим его через c' и произведем перекачку. Затем два c_i, оказавшиеся на расстоянии $< m$, объединим в одно. Потеря ширины будет не более $m+l$. Пункт б) получается очевидной индукцией. $\square$

Таким образом, оценки на ширину при переходе $\alpha\to\alpha'$ растут не мультипликативно, но аддитивно.

Следствие 1.29. *Пусть p — число слов в наборе α, который является m-выделенным ширины h. Тогда при $h' > h+(kp-1)(m+l)$ слово ширины h' линейно представимо словами, каждое из которых имеет k вхождений какого-нибудь слова из α.* $\square$

Напомним доказанное ранее

Предложение 1.54. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра степени m. Пусть буква z имеет $(q+3)ml^{m+1}$ вхождений в слово W. Тогда W линейно представимо словами, каждое из которых содержит подслово вида $(zv)^q$.* $\square$

Пусть n — сложность алгебры, m — ее степень, l — число образующих, p — минимальная степень полилинейного тождества сложности n. Обозначим $R=2mn$, и пусть все квазипериодические слова набора α имеют длину R. Из предложения 1.72 и следствия 1.29 вытекает

Предложение 1.86. *Замена слова z из набора α на набор z' повышает m-ширину не более чем на $((p+3)ml^{m+1}-1)\cdot(m+R)$.* $\square$

Из предложений 1.54, 1.86 следует

Теорема 1.56. *Набор, состоящий из псевдопериодических слов порядка не выше n длины R, является выделенным ширины*

$$h=((p+3)ml^{m+1}-1)\cdot Rnl^{n+1}(m+R).$$

$\square$

Из этой теоремы и предложения 1.72 получается следующая

Теорема 1.57. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра сложности n. Пусть m — степень минимального тождества в A (т.е. $m = \deg(A)$), p — минимальная степень тождества сложности n. Тогда A имеет над множеством слов степени не выше n высоту*

$$H(l,m,p) = ((p+3)ml^{m+1} - 1) \cdot 2mnl^{n+1}m(2n+1) + ml^n.$$

Доказательство. Положим M — множество всех слов длины не выше n. Любое слово линейно представимо элементами указанного в определении 1.55 вида той же степени однородности. Если $\sum |v_i| \geq h$, то можно создать новую m-ю степень элемента из M и, применив перекачку, увеличить $\sum k_i - s$. Высота оценивается как $s + (\sum |v_i|)/n$. $\square$

Отметим, что $H(l,m,p)$ асимптотически эквивалентно pm^2nl^{m+n+2}.

Следствие 1.30. *Если l-порожденная PI-алгебра A имеет степень $m = \deg(A)$, то A имеет над множеством слов степени не выше $[m/2]$ высоту*

$$H(l,m) = ((m+3)ml^{m+1} - 1) \cdot m^4 l^{m/2+1} + ml^{m/2}.$$

Доказательство. В силу теоремы Амицура–Левицкого $\mathrm{PIdeg}(A) \leq \deg(A)/2$. $\square$

1.6. Высота алгебр и размерность Гельфанда—Кириллова

1.6.1. Ассоциативный случай

Между теоремой о высоте и проблемой Куроша имеется обратная связь: “ограниченность высоты над $Y \iff$ Курош над Y”. Другая обратная связь между теоремой о высоте и структурными свойствами алгебр присутствует в представимом случае.

Число элементов вида $y_1^{k_1} \ldots y_H^{k_H}$ таких, что $\sum k_i \leq n$, имеет порядок n^H. Следовательно, при данных D и Y число элементов существенной высоты $\mathrm{H_{Ess}}$ таких, что сумма степеней однородности старших компонент t_i не превосходит N, растет по порядку как $N^{\mathrm{H_{Ess}}}$. Имеет место

Предложение 1.87. *а)* $\mathrm{GKdim}(A) \leq \mathrm{H_{Ess}}(A)$.
б) $\mathrm{H_{Ess}} \geq \overline{\lim}\,(V_A(n))/\ln(n)$. $\square$

Для представимых алгебр (а стало быть, по теореме Кемера и для относительно свободных) верна и обратная оценка.

Определение 1.58. Y есть *s-базис алгебры A*, если существует число $\mathrm{H_{Ess}}$ и конечное множество $D(Y)$ такое, что A порождается как линейное пространство элементами вида $t_1 \ldots t_N$, где $N \leq 2\,\mathrm{H_{Ess}} + 1$, и $\forall i\ t_i \in D(Y)$ либо $t_i = y_i^{k_i}$, $y_i \in Y$. При этом количество множителей $t_i \notin D(Y)$ не превосходит $\mathrm{H_{Ess}}$. Под *существенной высотой алгебры A над Y* мы понимаем минимальное число $\mathrm{H_{Ess}}(A)$, удовлетворяющее этим свойствам. Для многообразий с ассоциативными степенями определение аналогично.

Говоря неформально, ограниченность высоты означает приведение слов к кусочно периодическому виду, высота есть число кусков. Существенная высота есть максимальное число сколь угодно длинных периодических кусков, одновременно необходимых для построения базиса алгебры. Множество $D(Y)$ — это множество конечных “прокладок” между периодическими кусками (которые “случайны”). Отметим, что если Y есть s-базис алгебры A и порождает A как алгебру, то “прокладки” выражаются через Y и A имеет ограниченную высоту над Y.

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.59. *Пусть A — конечно порожденная представимая алгебра. Тогда* $\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{H}_{\mathrm{Ess}}(A)$ *(размерность Гельфанда—Кириллова равна существенной высоте).*

Следствие 1.31. *Существенная высота представимой алгебры не зависит от выбора Y, а размерность Гельфанда—Кириллова есть целое число.* $\square$

Замечания. Ранее целочисленность размерности Гельфанда—Кириллова представимой алгебры была установлена В. Т. Марковым. Отметим, что имеются *PI*-алгебры с нецелой размерностью Гельфанда—Кириллова, так что в общем случае равенство $\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{H}_{\mathrm{Ess}}(A)$ не имеет места. Было бы интересно построить пример, показывающий зависимость $\mathrm{H}_{\mathrm{Ess}}(A)$ от выбора s-базиса. Из результатов К. Прочези вытекает полиномиальная оценка размерности Гельфанда—Кириллова *PI*-алгебры и, следовательно, полиномиальная оценка существенной высоты.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Следующее предложение вытекает из теоремы Гамильтона—Кэли.

Предложение 1.88. *Пусть A вкладывается в $\mathrm{End}_n(R)$, где R — коммутативное кольцо. Тогда любой элемент $x \in A$ удовлетворяет уравнению вида*

$$x^n + t_1(x)x^{n-1} + \dots + t_n(x) = 0, \quad \forall i \ t_i(x) \in R.$$

$\square$

Из этого предложения непосредственно вытекает следующее

Предложение 1.89. *Пусть A вкладывается в $\mathrm{End}_n(R)$, R — коммутативное кольцо. Через $I = (i_1, \dots, i_k)$ обозначим мультииндекс, $|I| = i_1 + \ldots + i_k$. Пусть в A для некоторых элементов $c_0, \dots, c_k \in A$, $x_1, \dots, x_k \in A$ выполняется соотношение*

$$\sum_{|I| \le r} \alpha_I c_0 x_1^{i_1} c_1 \ldots x_k^{i_k} c_k = 0, \tag{5}$$

а также все соотношения вида

$$\sum_{|I| \le r} \alpha_I c_0 x_1^{m_1} x_1^{i_1} c_1 \ldots x_k^{m_k} x_k^{i_k} c_k = 0 \tag{6}$$

для всех n^k наборов векторов $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $0 \le m_i \le n-1$ (коэффициенты α_i не зависят от вектора $\overrightarrow{m}$). Тогда для любых целых чисел $M_1, \dots, M_k$ выполняется соотношение

$$\sum_{|I| \le r} \alpha_I c_0 x_1^{M_1 + i_1} c_1 \ldots x_k^{M_k + i_k} c_k = 0. \tag{7}$$

$\square$

Предложение 1.90. *Пусть U — линейная оболочка членов вида*

$$c_0 x_1^{M_1} c_1 \ldots x_k^{M_k} c_k.$$

Тогда линейная оболочка таких членов, что одно из M_i меньше r, совпадает с U.

Доказательство аналогично доказательству леммы о перекачке. Изложим его здесь более подробно. Упорядочим векторы $(M_1, \dots, M_k)$ лексикографически и покажем, что члены, линейно не представимые членами с меньшими векторами, имеют искомый вид. Выберем в соотношении (5) член с максимальным мультииндексом I таким, что $\alpha_I \neq 0$. Положим $m_j = M_j - i_j$. Поскольку $M_j \geq r$, $m_j \geq 0$, степень $x_j^{M_j}$ можно представить в виде $x_j^{m_j} x_j^{i_j}$. Применив соотношение (6), мы представим член $c_0 x_1^{M_1} c_1 \dots x_k^{M_k} c_k$ в виде линейной комбинации членов с меньшими векторами степеней. □

Следствие 1.32. *Пусть $S(q)$ — размерность линейной оболочки членов вида $c_0 x_1^{M_1} c_1 \dots x_k^{M_k} c_k$ таких, что $\sum M_j \leq q$. Тогда если выполняется система соотношений типа (6), то существует константа C такая, что $S(q) < Cq^{k-1}$.* □

Приступим к доказательству теоремы 1.59. Оценим размерности. При некотором q_0 все c_j, x_j лежат в линейной оболочке слов длины не выше q_0. Тогда $S(q) \leq V_A((k+1+kq)q_0)$. Отметим, что выполнимость системы соотношений (6) означает линейную зависимость системы n^k-мерных векторов с компонентами $c_0 x_1^{m_1+i_1} c_1 \dots x_k^{m_k+i_k} c_k$. Компоненты нумеруются наборами $(m_1, \dots, m_k)$ неотрицательных целых чисел, меньших n. Если $i_j \leq q$, то размерность пространства таких векторов не превосходит $n^k S(kn+q)$, а следовательно и $n^k V_A((k+1+k(kn+q))q_0) = C_0 V_A(C_1 + C_2 q)$. Пусть $\underline{\lim}\, \ln(V_A(n))/\ln(n) < k$. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ при бесконечно многих q $V_A(q) < q^{k-\varepsilon}$. Но тогда из наших вычислений следует, что размерность пространства описанных выше векторов при некоторых q становится меньше $q^{k-\varepsilon/2}$, что обеспечивает выполнение системы соотношений типа (6). Выполнимость этой системы для любых наборов c_j и x_j означает, как это следует из предыдущего предложения, что существенная высота меньше k. Итак, мы установили, что $\mathrm{H}_{\mathrm{Ess}} \leq \underline{\lim}\, \ln(V_A(n))/\ln(n)$. Остается воспользоваться неравенством $\mathrm{GKdim}(A) \geq \underline{\lim}\, \ln(V_A(n))/\ln(n)$. Теорема доказана. □

1.6.2. Представимые алгебры общей сигнатуры

(Определение (многоосновных) алгебр произвольной сигнатуры — см. стр. 34)

Целью данного раздела является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1.60. *Размерность Гельфанда–Кириллова представимой многоосновной алгебры произвольной сигнатуры есть целое число.*

Доказательство. Из леммы 2.8 (о дереве) и теореме о высоте следует, что существует конечный набор операторов $\{B_j\}$ из операторной алгебры $D(A)$, конечное подмножество $\mathcal{A} \subset A$ и конечный набор объединяющих форм $f_{ij} = f_i(\overrightarrow{a}, Z_1, \dots, Z_{q_i})$ $(\overrightarrow{a} \in \mathcal{A}^r)$ валентности q_i, полилинейных относительно указанных аргументов, таких, что A линейно представима множеством

$$\{f_{ij}(B_{j_1}^{k_{l_1}}, \dots, B_{j_{q_i}}^{k_{l_{q_i}}})\}.$$

(В формах f_i участвуют элементы из $\mathcal{A}$, к которым применяются операторы B_μ^ν.)

Будем сравнивать наборы натуральных чисел следующим образом. Сперва сравним наибольшие из чисел в наборах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Тот набор больше, для которого максимум больше. Если максимумы совпадают, то будем сравнивать количества максимальных элементов, если совпадают эти количества — то перейдем к рассмотрению элементов, следующих по величине и т.д. Получившееся отношение порядка линейно и удовлетворяет условиям обрыва убывающих цепей.

Мы покажем, что максимальное q_i и есть размерность Гельфанда–Кириллова исходной алгебры, либо некоторая форма линейно представима значениями конечного набора форм ме́ньшей валентности и, таким образом, набор форм можно уменьшить. Тогда процесс приведения очевидным образом останавливается на наборе операторных форм, максимальная валентность которых равна размерности Гельфанда–Кириллова исходной алгебры.

Докажем следующую лемму:

Лемма 1.18 (Перекачка). *Пусть для всех $\overrightarrow{k} = (k_1, \ldots, k_q)$ имеет место соотношение*

$$\sum_{\overrightarrow{r}=(r_1,\ldots,r_s)} \alpha_{\overrightarrow{r}} f(B_{j_1}^{k_1+r_1}, \ldots, B_{j_q}^{k_q+r_q}) = 0; \tag{8}$$

Положим $f(\overrightarrow{k}) = f(B_{j_1}^{k_1}, \ldots, B_{j_q}^{k_q})$. Тогда $f(\overrightarrow{k})$ линейно представимо элементами вида $f(\overrightarrow{k}_j)$, где наименьшая координата вектора $\overrightarrow{k}_j$ не превосходит $\max r_q$.

Доказательство. Упорядочим множество векторов степеней лексикографически. Возьмем среди членов в выражении 8 член с максимальным вектором степеней. Таким образом, выражение 8 можно переписать в виде

$$f(B_{j_1}^{r_1}, \ldots, B_{j_q}^{r_q}) = \sum_{\overrightarrow{k}\prec(r_1,\ldots,r_s)} \mu_{\overrightarrow{k}} f(B_{j_1}^{k_1}, \ldots, B_{j_q}^{k_q}). \tag{9}$$

Поскольку лексикографический порядок удовлетворяет условиям обрыва убывающих цепей, отсюда следует, что множество векторов $\overrightarrow{k}$ таких, что $f(\overrightarrow{k})$ не линейно представимо множеством $\{f(\overrightarrow{k'})\}$, где $\overrightarrow{k}' \prec \overrightarrow{k}$ имеет наименьшую координату, не больше $\max(r_i, k_i)$. □

Данная лемма позволяет заменить форму f на конечный набор форм ме́ньшей валентности. В самом деле. Имеется конечный набор возможностей для наименьшей координаты вектора степеней, каждой из них отвечает форма f_j на единицу ме́ньшей валентности. Наименьшая степень есть параметр.

Итак, пусть q больше чем $\mathrm{GKdim}(A)$. Нам достаточно доказать существование соотношения вида (8), которое выполнено для всех $\overrightarrow{k} = (k_1, \ldots, k_q)$.

В этом случае, рассуждая как в доказательстве предложения 1.90, можно добиться того, чтобы величина одного из показателей степеней при одном из операторов B_{j_s} была не больше $\max(q_i)$, что позволяет заменить форму f на конечный набор форм ме́ньшей валентности.

Из нетеровости кольца коэффициентов легко получается

Лемма 1.19. *Пусть C – представимая алгебра, $b \in D(C)$. Тогда существует M такое, что при всех s b^s есть линейная комбинация форм $\sum_{j=1}^{M} \alpha_j b^j$, где элементы α_j принадлежат кольцу представления R.* □

Из этой леммы вытекает

Лемма 1.20. *Существует такое M (зависящее от A), что если при некотором $\overrightarrow{k} = (k_1, \ldots, k_q)$ и всех наборах $\overrightarrow{k}' = (k_1 + m_1, \ldots, k_q + m_q)$ таких, что $m_i \leq M$, выполняется соотношение (8), то оно выполняется при всех наборах $\overrightarrow{k}' = (k_1', \ldots, k_q')$, удовлетворяющих условию: $\forall i k_i' \geq k_i$.* □

Теперь зафиксируем показатель M, как в предыдущей лемме. С формой $f(b_1^{k_1},\dots,b_s^{k_s})$ свяжем вектор $\overrightarrow{F}$, состоящий из форм

$$\overrightarrow{F}=\{f(b_1^{k_1+m_{j1}}),\dots,b_s^{k_s+m_{js}})\}_{\overrightarrow{m}\in\mathcal{M}_M},\ \text{где}\ \ \overrightarrow{m}=\{(m_{j1},\dots,m_{js})\},$$

$\mathcal{M}_M$ есть множество векторов с целыми неотрицательными координатами, не превосходящими M.

Из предыдущей леммы непосредственно получается

Лемма 1.21. *Либо значения $\overrightarrow{F}$ линейно независимы для разных наборов степеней $(k_1,\dots,k_q)$, либо имеется соотношение вида (8), выполняющееся для всех k.* □

Поскольку в первом случае нижняя размерность Гельфанда–Кириллова не меньше q, а во втором случае форму f можно заменить конечным набором форм ме́ньшей валентности, основная теорема данного раздела доказана. □

Замечание. Рассуждения из данного раздела во многом аналогичны рассуждениям из предыдущего раздела. Похожим образом доказывается совпадение существенной высоты и размерности Гельфанда–Кириллова для представимой алгебры. Утверждение о представлении A набором форм от степеней операторов можно рассматривать как обобщение теоремы о высоте, а утверждение о том, что максимальная валентность форм есть размерность Гельфанда–Кириллова, — как обобщение утверждения о совпадении существенной высоты и размерности Гельфанда–Кириллова в представимых алгебрах.

2. Многочлены Капелли и многочлены Кемера

Данный раздел посвящен одному из основных технических средств, используемых в данной работе — многочленам, полилинейным и кососимметричным по нескольким группам переменных.

Как уже говорилось, *многочлен Капелли C_n порядка n* представляет собой многочлен вида

$$C_n=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}\cdot\dots\cdot y_{n-1}x_{\sigma(n)}.$$

При этом y_i называются *прокладками.*

В неассоциативном случае (в том числе для алгебры произвольной сигнатуры Ω) под *системой полиномов Капелли C_n порядка n* понимается набор многочленов, полилинейных и кососимметричных относительно некоторого набора из n переменных $\{x_i\}$. Если в алгебре B каждый полином Капелли порядка n обращается в ноль, то говорим, что в B выполняется *система тождеств Капелли.* Система C_n выполняется во всех алгебрах размерности меньше n. Например, в алгебре матриц порядка n выполняется тождество C_{n^2+1} (но не выполняется C_{n^2}).

С каждой диаграммой Юнга D можно связать множество непересекающихся наборов переменных $\{\Lambda_i\}$, соответствующих ее столбцам. При этом число элементов в наборе Λ_i равно длине соответствующего столбца. Через $S(D)$ обозначим T-идеал, порожденный многочленами, полилинейными и кососимметричными по каждому Λ_i.

Определим недетерминированный оператор $'$ на множестве диаграмм. Если все столбцы диаграммы D различны, то диаграмма D' получается из D путем добавления двух единичных столбцов. Иначе берем два максимальных совпадающих столбца. Пусть m – их длина. Заменим один из них на столбец длины $m-k$, другой — на столбец длины $m+k$. Таким образом, получается m различных диаграмм вида D' (при $k=1,\ldots,m$). Нулевые столбцы не пишутся.

Лемма 2.1. *Любая диаграмма вида $D^{(s)}$ при $s \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ имеет столбец длины не меньше n.* □

Доказательство. Данную лемму можно переформулировать так. Пусть $s \geq n(n+1)(2n+1)/12$. Операция над набором чисел состоит в добавлении двух единиц, если среди чисел нет совпадающих. Если же m, m есть пара наибольших совпадающих чисел в наборе, то они заменяются на числа $m-h, m+h$, где $1 \leq h \leq m$. Тогда s-кратное применение указанной операции приводит к появлению числа, не ме́ньшего n.

Прежде всего, легко понять что числа не могут оставаться ограниченными. В самом деле. Рассмотрим максимальные числа, к которым бесконечно много раз применялась наша операция. Но если она более n раз применялась к числу n, то возникает два одинаковых числа бо́льших n. Поэтому максимального числа, к которому бесконечно много раз применяется наша операция, быть не может.

Итак, число $\geq n$ рано или поздно появится – вопрос только в числе операций. Рассмотрим процедуру с максимальным числом шагов до появления числа $\geq n$. Ясно, что на предпоследнем шаге имеются два числа равных $n-1$ (иначе появление числа $\geq n$ на следующем шаге можно предотвратить и процедура окажется не самой долгой).

Аналогичным образом, на предыдущем шаге должно наблюдаться одно число $n-1$ и два экземпляра числа $n-2$. Действуя по индукции, легко убедиться, что на k-ом от конца шаге самой долгой процедуры должно наблюдаться по одному из чисел $n-(k-1),\ldots,n-1$ и два экземпляра числа $n-k$. На $n-2$-ом от конца шаге возникает набор $2,2,3,4,\ldots,n-1$, а на $n-1$-ом – набор $1,1,2,\ldots,n-1$ и еще, быть может, одна единица.

Но число операций, предшествующее появлению этого набора легко оценить. Легко видеть, что данная операция $'$ увеличивает сумму квадратов чисел в наборе не менее чем на 2. И это число не больше чем $(2+\sum_{k=1}^{n-1} k^2)/2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 1$. Общее число операций отличается от данного на величину n. В итоге получается требуемая оценка.

Замечание. Такая же оценка справедлива для максимального числа операций необходимого для получения числа n если при замене $n, n \to n-k, n+k$ число k обязано равняться 1. Соответствующая олимпиадная задача была предложена автором на 27 международный математический турнир городов.

Определим величину $b(\mathfrak{M})$ как наибольшее натуральное b, удовлетворяющее следующему условию:

Существуют диаграммы D из сколь угодно большого числа клеток, все столбцы в которых имеют длину не меньше b и при этом все полиномы из $S(D)$ не являются тождествами многообразия $\mathfrak{M}$.

Для алгебры C положим $b(C) = b(\mathrm{Var}(C))$. Если C нильпотентна, то $b(C)=0$, а если C порождает многообразие всех ассоциативных алгебр, то $b(C)=\infty$.

Определения. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебр сигнатуры Ω, D – диаграмма Юнга, все столбцы которой имеют длину не меньше $b=b(\mathfrak{M})$. Если кроме того $S(D)|_{\mathfrak{M}} \neq 0$, то такую диаграмму мы будем называть *любопытной*. Диаграмма

D называется *интересной*, если существуют сколь угодно большие любопытные диаграммы, содержащие D. Назовем столбец любопытной диаграммы D *большим*, если его длина строго больше b, а если она равна b, то он *малый*. *Малым* является набор переменных, отвечающих малому столбцу, а *большим* – большому. Множество больших столбцов образует *голову $H(D)$ диаграммы D*. Диаграмма называется *экстремальной*, если она интересная и, кроме того, при $H(D') \supset H(D)$ и $D' \supset D$ все многочлены из $S(D')$ являются тождествами $\mathfrak{M}$; $k(H)$ есть минимальное число малых столбцов в экстремальной диаграмме с головой H (если такой диаграммы нет, то $k(H) = \infty$). *Хорошей диаграммой с головой H* называется экстремальная диаграмма не менее чем с $k+1$ малым столбцом. Экстремальная диаграмма называется *диаграммой Кемера*, если все большие столбцы имеют длину $b+1$. Тогда d обозначает их число, а k – минимальное количество малых столбцов в диаграмме Кемера. Итак, минимальная диаграмма Кемера описывается параметрами b, d и k. Тем самым для многообразия $\mathfrak{M}$ определены величины $b(\mathfrak{M})$, $d(\mathfrak{M})$ и $k(\mathfrak{M})$. Типы многообразий или тройки (b, d, k) сравниваются так. $(b_1, d_1, k_1) \prec (b_2, d_2, k_2)$, если выполняется одно из трех условий:

- $b_1 < b_2$;
- $b_1 = b_2, d_1 < d_2$;
- $b_1 = b_2, d_1 = d_2, k_1 > k_2$.

Промежутки между переменными, соответствующими диаграмме, называются *прокладками*. Когда это не вызывает недоразумений, термин “прокладка” будет использоваться и при изучении значений соответствующих многочленов (если подстановки переменных из набора $\bigcup \Lambda_i$ фиксированы).

В дальнейшем, если не оговорено обратное, под *диаграммой Кемера* понимается *хорошая диаграмма Кемера*.

Замечание. В “супер”-случае нужно рассматривать множество пар (b_0, b_1), (d_0, d_1) с отношением порядка: $(a, b) \prec (c, d)$, если $a \le b$, $c \le d$ и $(a, b) \ne (c, d)$. Поскольку имеются несравнимые элементы в этом отношении, то с алгеброй связывается набор экстремальных пар. В ассоциативном случае (с использованием носителей) несложно показать (см. раздел 3.5), что наличие нескольких несравнимых экстремальных пар ведет к наличию T-идеалов с нулевым пересечением. Было бы интересно получить чисто комбинаторное доказательство этого утверждения и осуществить перенос его в неассоциативную ситуацию и для алгебр произвольной сигнатуры.

Пусть B есть алгебра из многообразия $\mathfrak{M}$, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ – набор переменных. В следующей лемме строится вспомогательная алгебра $B_{\mathfrak{M}} < X >$ многочленов над B с коэффициентами из X (см. [42]):

Лемма 2.2. *Для любой алгебры $B \in \mathfrak{M}$ и произвольного X существует алгебра $B_{\mathfrak{M}} {<} X {>} \in \mathfrak{M}$, которая порождается B и X такая, что*

- *Любое отображение $X \to B_{\mathfrak{M}}{<}X{>}$ однозначно продолжается до эндоморфизма $B_{\mathfrak{M}}{<}X{>} \in \mathfrak{M}$.*
- *X порождает свободную алгебру из $\mathfrak{M}$.*
- *Алгебра $B_{\mathfrak{M}} < X > \in \mathfrak{M}$ есть универсальный притягивающий объект, удовлетворяющий свойствам предыдущих пунктов.*

Аналогичным образом, существует универсальная алгебра $B^{alt}_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$ в классе всех расширений алгебры B множеством из $|X|$ абсолютно антикоммутирующих элементов X а также алгебра $B_{\mathfrak{M}}(D)$, отвечающая диаграме D. При этом столбцам диаграммы соответствуют абсолютно антикоммутирующие наборы. $\square$

Когда $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(B)$, то индекс $\mathfrak{M}$ при обозначении алгебр типа $B_{\mathfrak{M}} \langle X \rangle$ опускается и мы пишем $B\langle X\rangle$.

Если $\mathfrak{M}'$ есть подмногообразие $\mathfrak{M}$, то алгебра $B_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$ естественным образом отображается на $B_{\mathfrak{M}'}\langle X\rangle$. Кроме того, морфизму алгебр $B^1 \to B^2$ естественным образом отвечает морфизм $B^1_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle \to B^2_{\mathfrak{M}}\langle X\rangle$ и данный функтор является точным.

2.1. Внутренние следы и препятствия к представимости

Данный раздел посвящен технике, изложенной в работах [42], [43]. Эти работы восходят к статье Ю. П. Размыслова [107], учеником которого является К. А. Зубрилин.

Пусть многочлен $F(\overrightarrow{y}, x_1, \dots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, $a \in A$. Определим операторы внутренних форм δ^k_a равенством

$$\delta^k_a(F) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} F(\overrightarrow{y}, x_1, \dots, x_n)|_{x_{i_1}=ax_{i_1},\dots,x_{i_k}=ax_{i_k}};\ \ \delta^0_a(F) = F. \qquad (1)$$

Многочлен $\delta^k_a(F)$ есть однородная степени k по a компонента результата подстановки $F|_{(a+1)x_i\to x_i; i=1,\dots,n}$.

Нетрудно проверить, что

$$\delta^k_a(C_n) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 \dots x_{\sigma(i_1)} a y_{i_1} \dots x_{\sigma(i_k)} a y_{i_k} \dots y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

Поэтому многочлен $\delta^k_a(F)$ по прежнему кососимметричен относительно набора переменных $\{x_i\}^n_{i=1}$.

Положим $\mathrm{Tr}(a) = \delta^1_a$. Ясно, что $\mathrm{Tr}(a+b) = \mathrm{Tr}(a) + \mathrm{Tr}(b)$.

Операторы δ^k_a определены только на записях элементов и результат их применения, вообще говоря, может зависеть от представления элемента алгебры A в виде многочлена F и выбора системы $\{x_i\}$. Если полином F полилинеен и кососимметричен по нескольким наборам, то, говоря об операторе δ_k, мы будем указывать, относительно какого набора он берется.

Нам понадобиться следующее техническое утверждение:

Лемма 2.3 (О поглощении переменной). *Пусть в алгебре выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$; многочлен F полилинеен и кососимметричен относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ и, кроме того, линеен по переменной z. Тогда выполняется равенство:*

$$F(z, x_1, \dots, x_n, \overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{n} F(z, x_1, \dots, x_n, \overrightarrow{y})|_{z=x_i; x_i=z}. \qquad (2)$$

Доказательство. Разность между правой и левой частями равенства есть многочлен из $\mathrm{T}(C_{n+1})$ ибо он полилинеен и кососимметричен относительно набора $\{z, x_1, \dots, x_n\}$. $\square$

Сформулируем основную лемму работы [42], которая служит аналогом теоремы Гамильтона–Кэли для операторов, определенных внутренним образом:

Лемма 2.4. *Пусть многочлен $F(y, \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, $a \in D(A)$ – элемент операторной алгебры (например, оператор умножения на $\bar{a}$). Тогда по модулю C_{n+1} выполняется равенство ("теорема Гамильтона–Кэли"):*

$$F(a^n(y), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \delta_a^k (F(a^{n-k}(y), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n)) \tag{3}$$

Доказательство. Перепишем равенство (3) в виде

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \delta_a^k (F(a^{n-k}(y), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n)) = 0 \tag{4}$$

Пусть $i_1 < \cdots < i_k$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Рассмотрим член

$$t_I = F(a^{n-k}(y), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n)|_{x_{i_1}=ax_{i_1},\ldots,x_{i_k}=ax_{i_k}}.$$

При $n-k>0$ представим $a^{n-k}y$ в виде $a^{n-k-1}ay$, и положим $y' = ay$. При $n = k$ представим $a^{n-k}y$ в виде y, и положим $y' = y$. Далее положим $x'_i = x_i$ при $i \notin I$ $x'_i = ax_i$ при $i \in I$. Применим тождество (2) из леммы 2.3 к члену t_I. Получим

$$\begin{aligned} t_I \ = \ & -\sum_{j \notin I} F(a^{n-k-1}(x_j), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, ay, \ldots, x_n)|_{x_{i_1}=ax_{i_1},\ldots,x_{i_k}=ax_{i_k}} - \\ & - \sum_{j \in I} F(a^{n-k}(x_j), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, ay, \ldots, x_n)|_{x_{i_1}=ax_{i_1},\ldots,x_{i_k}=ax_{i_k}}. \end{aligned}$$

при $I \neq \{1, \ldots, n\}$ и

$$t_{\{1,\ldots,n\}} = \sum_{j=1}^{n} F(x_j, \overrightarrow{z}, ax_1, \ldots, ay, \ldots, ax_n).$$

Для доказательства леммы остается заметить, что в выражении для $\sum_I (-1)^{|I|} t_I$ члены в суммах

$$\sum_{j \notin I} F(a^{n-|I|-1}(x_j), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, ay, \ldots, x_n)|_{x_{i_1}=ax_{i_1},\ldots,x_{i_{|I|}}=ax_{i_{|I|}}}$$

при $|I| = k < n$ сокращаются с членами в суммах

$$\sum_{j \in I} F(a^{n-|I|}(x_j), \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, ay, \ldots, x_n)|_{x_{i_1}=ax_{i_1},\ldots,x_{i_{|I|}}=ax_{i_{|I|}}}$$

при $|I| = k+1$ и, следовательно, $\sum_I (-1)^{|I|} t_I = 0$. □

Расширим исходную алгебру A коэффициентами λ_i. Рассмотрим идеал I_a, порожденный $a^{n+1} - \sum_i \lambda_i a^{n+1-i}$.

Пусть $\Lambda_{\mathfrak{M}}(A, X)$ есть подространство в алгебре $A_{\mathfrak{M}} < x_1, \ldots, x_n >$ состоящее из многочленов, полилинейных и кососимметричных относительно набора $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Положим $A(n; a) = A[\{\lambda_i\}]/I_a$.

Поставим в соответствие λ_i операторы $\delta_i(a)$. Из леммы 2.4 непосредственно получается

Предложение 2.1. *Пусть $A \in \mathfrak{M}$ и в многообразии $\mathfrak{M}$ выполняется система C_{n+1}. Тогда имеет место естественное вложение*

$$\Lambda_{\mathfrak{M}}(A,X) \to \Lambda_{\mathfrak{M}}(A(n;a),X).$$

$\square$

Пусть K_a есть ядро отображения $A \to A^n(a) = A[\{\lambda_i\}]/I_a$.

Следствие 2.1. *Если $h \in K_a$, $A = A'_{\mathfrak{M}}\!<\!y\!>$, y переменная не из X, $F(y,X) \in \Lambda_{\mathfrak{M}}(A(n),X)$, то $F(y,X)|_{h\to y} = 0$.* $\square$

Пусть $\mathcal{S} \subset A$ – набор элементов алгебры A. Естественным образом определяется алгебры $A(n,\mathcal{S})$, $A(n,\mathcal{S})_{\mathfrak{M}}\!<\!X\!>$ и пространство $\Lambda_{\mathfrak{M}}(A(n;\mathcal{S}),X)$. Пусть $A(n)$ есть минимальный универсальный объект, получающийся путем принудительного объявления всех элементов алгебры A алгебраическими порядка n. Он получается как инъективный предел расширений $A_0 = A$, $A_1 = A_0(n,A_0),\ldots,A_{k+1} = A_k(n,A_k)$. Пусть K_n – ядро естественного отображения $A \to A(n)$.

Заметим, что достаточно показать, что $F_h = 0$, если h принадлежит к препятствию к каноническому алгебраическому представлению порядка n любого наперед заданного конечного подмножества $\{a_1,\ldots,a_s\} \subseteq A$, ибо объединение таких препятствий есть препятствие к каноническому алгебраическому представлению порядка n всей алгебры. Поэтому из предложения 2.1 с помощью индукции получается

Следствие 2.2. *а) Пусть $A \in \mathfrak{M}$ и в многообразии $\mathfrak{M}$ выполняется система C_{n+1}. Тогда имеет место естественное вложение*

$$\Lambda_{\mathfrak{M}}(A,X) \to \Lambda_{\mathfrak{M}}(A(n),X).$$

б) Если $h \in K$, $A = A'_{\mathfrak{M}}\!<\!y\!>$, y переменная не из X, $F(y,X) \in \Lambda_{\mathfrak{M}}(A(n),X)$, то $F(y,X)|_{h\to y} = 0$. $\square$

Из данного следствия вытекает важное техническое утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по одному набору из n переменных Λ и кроме того, F линеен по переменной x_0, не входящей в набор Λ, v принадлежит препятствию Obstr_n к алгебраичности порядка n. Тогда $F_v = F|_{v\to x_0} \equiv 0$ по модулю C_{n+1}.*

Подпространство $\mathrm{T}(g)$, кососимметрическое по наборам переменных из Λ_i, является нетеровом модулем над операторами $\mathrm{Tr}(a)$, $\delta_k(a)$. $\square$

Следствие 2.3. *а) $C_n \operatorname{Obstr}_n \subseteq C_{n+1}$.*

б) $\mathrm{Obstr}_1 \cdots \mathrm{Obstr}_n \subseteq C_{n+1}$.

в) $(\mathrm{Obstr}_n)^n \subseteq C_{n+1}$. В частности, если в алгебре A выполняется C_{n+1}, то $(\mathrm{Obstr}_n)^n = 0$.

г) Если в конечно порожденной алгебре выполняется система тождеств Капелли, то радикал нильпотентен.

Доказательство. а) есть переформулировка предыдущей леммы, п.б) вытекает из п.а) очевидной индукцией, п.в) вытекает из п.б) и включения $\mathrm{Obstr}_k \subseteq \mathrm{Obstr}_n$ при $k \le n$. Таким образом, если в алгебре выполняется система C_{n+1} то в ней есть идеал Obstr_n степени нильпотентновсти n с представимым фактором. А в представимой конечно порожденной алгебре радикал нильпотентен. п.г) доказан. $\square$

Замечание. В разделе 1.5 доказано, что в конечно порожденной PI-алгебре выполняется система тождеств Капелли. Вместе в предыдущим следствием это дает теорему Размыслова–Кемера–Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной PI-алгебры.

Рассмотрим два непересекающихся m-элементных множества X и Y и симметрическую группу S_{2m}, действующую на $X \cup Y$. В групповой алгебре $\mathbb{Z}S_{2m}$ определим элементы $T(Z),\ Z \subseteq X$ следующим образом:

$$T(Z) = \sum_{\sigma(Z)\subseteq Y} (-1)^\sigma \cdot \sigma \quad Z \neq \emptyset,$$
$$T(\emptyset) = \sum_{\sigma\in S_{2m}} (-1)^\sigma \cdot \sigma. \tag{5}$$

Предложение 2.2 ([42]). *Имеет место равенство:*

$$\sum_{Z\subseteq X} (-1)^{|Z|} T(Z) = \sum_{\sigma(X)=X} (-1)^\sigma \cdot \sigma \tag{6}$$

Сумма в левой части берется по всем подмножествам Z множества X, включая само X и $\emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим перестановку $\sigma \in S_{2n}$ и сравним коэффициенты, с которыми элемент $(-1)^\sigma\sigma$ входит в обе части равенства (6).

Если $\sigma(X) \cap Y = \emptyset$, т.е. $\sigma(X) = X$ то оба этих коэффициента равны единице, поскольку в левой части соответствующий член появляется только при $Z = \emptyset$. Если же $\sigma(X) \neq X$, то правый коэффициент ноль а максимальное подмножество $Z' \subseteq X$ такое, что $\sigma(Z') \subseteq Y$ непусто и содержит $k > 0$ элементов.

Слагаемое $(-1)^\sigma\sigma$ входит в $T(Z)$ с коэффициентом 0 при $Z \not\subseteq Z'$ и с коэффициентом 1 при $Z \subseteq Z'$. Число s-элементных подмножеств k-элементного множества Z' равно $\binom{k}{s}$ и потому коэффициент при $(-1)^\sigma\sigma$ в левой части равентсва (6) равен

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} = 0 \quad \text{при } k > 0.$$

и тем самым совпадает с коэффициентом в правой части. □

Замечание. Пусть $X = \{1, \ldots, m\}$; $Y = \{m+1, \ldots, 2m\}$. Рассмотрим представление групповой алгебры $\mathbb{Z}S_{2m}$ в $\mathbb{Z}$-линейном пространстве полилинейных полиномов степени $2m$ от $2m$ переменных $x_1, \ldots, x_{2m}$, а именно

$$\sigma \cdot x_1, \ldots, x_{2m} = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2m)},$$

где $\sigma \in S_{2m}$. Тогда $T(Z) \cdot x_1 \ldots x_{2m}$ является полиномом, кососимметричным по переменным с номерами из Z и по переменным с номерами из $X \backslash Z \cup Y$. Если $Z \neq X$, то $|X \backslash Z \cup Y| \geq m + 1$ и если $|Z| = m - k$, то $|X \backslash Z \cup Y| \geq m + k$.

Следующая лемма вытекает из предложения 2.2, и предыдущего замечания.

Лемма 2.6. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_{2n})$ – многочлен, полилинейный и кососимметричный по наборам $x_1, \ldots, x_n$ и $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ и зависящий, быть может, от других переменных. Тогда*

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) - f(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod I,$$

где I есть сумма T-идеалов, порожденных полиномами, соответствующими диаграммам D со столбцом длины $n-k$ и другим столбцом длины $n+k$, $k = 1, \ldots, n$.

Следствие 2.4 (О переброске). *а) Пусть в алгебре A выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$ и пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по переменным $\{x_i\}_{i=1}^n; \{z_i\}_{i=1}^n$. Тогда значение $\delta_a^k(F)$ не зависит от того, какие группы переменных $\{x_i\}$ или $\{z_i\}$ используются, и операторы δ_a^k и δ_b^s коммутируют.*

б) Кроме того, в этом случае $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$.

Доказательство. П.а) непосредственно вытекает из предыдущего предложения, п.б) есть следствие п.а), ибо $\mathrm{Tr}(ab) = \delta_a^1\delta_b^1 - \delta^2(a,b)$, $\mathrm{Tr}(ba) = \delta_b^1\delta_a^1 - \tilde{\delta}^2(b,a)$, где $\tilde{\delta}^2$ есть линеаризация формы δ_a^2. □

Следствие 2.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть T-первичное многообразие, в котором выполняется тождество Капелли порядка $n+1$. Пусть многочлен $F(y, \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i; $a, b \in D(A)$ – элементы операторной алгебры. Тогда операторы δ_a^k и δ_b^s коммутируют.* □

Лемма 2.7. *Пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по каждому из двух непересекающихся наборов из n переменных $\Lambda_i; i = 1,2$ и кроме того, линеен по переменной x_0, не входящей в наборы Λ, v принадлежит препятствию к тождеству Гамильтона–Кэли порядка n. Тогда $F|_{x_0 \to v} \equiv 0$ по модулю $\sum_{k=1}^n (C_{n+k}, C_{n-k})$.*

Подпространство $\mathrm{T}(g)$, кососимметрическое по наборам переменных из Λ_i, является нетеровом модулем над операторами δ_k.

Здесь (C_r, C_s) обозначает T-идеал, порожденный многочленами, полилинейными и кососимметричными относительно двух групп из r и s переменных.

Доказательство. Данное утверждение доказывается аналогично и несколько проще чем лемма 2.5. Достаточно воспользоваться следствием 2.4 и замечанием после предложения 2.2. □

Замечание. Поскольку в вычислениях, устанавливающих лемму 2.5 (соответственно, лемму 2.7) участвуют переменные только из одного набора Λ_i (соответственно, только двух наборов), из доказательство этих лемм переносится на случай экстремальных диаграмм (т.е. нескольких наборов).

Имеем следующее

Предложение 2.3 (О переброске). *Пусть $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = n = b(A)$, многочлен F отвечает диаграмме Юнга $D = D_0 \cup D_1$, где D_0 есть экстремальная диаграмма Юнга, а диаграмма D_1 состоит из двух столбцов длины b, отвечающих наборам Λ_1 и Λ_2.*

Тогда выполняются все утверждения, аналогичные пп.а) и б) предыдущей леммы, леммы 2.4, а также следствия 2.4. □

Операторы $\delta_k(x)$ – это формы, определенные внутренним образом.

Следующее предложение является полным аналогом леммы 2.7 для экстремальных многочленов:

Предложение 2.4. *Пусть диаграмма Юнга D содержит пару столбцов одинаковой длины m, многочлен $f \in S(D)$ линеен, помимо переменных, соответствующих столбцам D, по переменной x_0, элемент $v \in A$ принадлежит препятствию к Гамильтону–Кэли порядка m, $g = f|_{v \to x_0}$. Тогда g принадлежит сумме идеалов вида $S(D_i)$, где диаграмма D_i получается из D путем замены пары столбцов* *длины n на пару столбцов длины $n+k$ и $n-k$ соответственно ($k>0$). В частности, если m есть максимальная длина совпадающих столбцов, то g принадлежит сумме $\bigoplus\limits_{D_i=D'} S(D_i)$.* □

(Суммирование ведется по всем возможным результатам применения оператора $'$.)

Теперь воспользуемся леммой 2.1. Тогда из индукционных соображений получается следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть в алгебре A выполняется система тождеств Капелли C_n. Тогда операторное препятствие к Гамильтону–Кэли порядка n имеет индекс нильпотентности не выше $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.* □

Отметим, что фактор по этому препятствию есть представимая алгебра, а для представимых алгебр теорема Размыслова–Кемера–Брауна очевидна. Тем самым мы фактически получили прямое комбинаторное доказательство этой теоремы. Оценкам нильпотентности радикала посвящен раздел Б.

Поскольку в ассоциативной алгебре со следом все матричные тождества следуют из тождества Гамильтона–Кэли [106], [157], [41], имеет место такое

Следствие 2.6. *В условиях предыдущей теоремы пусть A есть ассоциативная алгебра. Тогда вербальный идеал, порожденный тождествами матриц порядка n, имеет индекс нильпотентности не выше $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.* □

Результаты данного раздела приводят к такому интересному утверждению:

Предложение 2.5. *Пусть A – ассоциативная алгебра, в которой выполняется система C_{n+1}, но не выполняется система C_n, $(C_n)^2$ есть множество значений T-идеала, порожденного многочленами, полилинейными и кососимметричными относительно двух наборов из n переменных.*

а) Препятствие в M к структуре модуля над расширением алгебры A формами с условием алгебраичности элементов алгебры над формами аннулируется умножением на C_n.

б) Препятствие в M к структуре модуля над расширением алгебры A формами с наложенным тождеством Гамильтона–Кэли аннулируется умножением на $(C_n)^2$.

в) В условиях п.а) пусть A есть алгебра общих матриц и любой элемент из M не аннулируется $(C_n)^k$ при всех k. Тогда M содержит ненулевой модуль, снабженный структурой модуля над алгеброй общих матриц с формами.

Если M и A конечно порождены, то указанные подмодули обладают свойством стабилизации возрастающих цепей. □

Аналогичное утверждение естественным образом формулируется для бимодулей.

Замечания. 1. Хочется подчеркнуть, что установлены оценки на нильпотентность именно операторного препятствия к Гамильтону–Кэли. В ассоциативном случае операторная алгебра $D(A)$ изоморфна тензорному произведению $L[A]\otimes R[A]$ алгебры левых и алгебры правых умножений или $A\otimes A^*$, где A^* есть алгебра, антиизоморфная A. Вероятно, это обстоятельство позволит улучшить оценки нильпотентности радикала по сравнению с разделом Б. Поскольку вместо альтернирующихся переменных могут подставляться не только буквы и между возникающими объектами могут возникать различные соотношения, то предложение 2.5 ничего не утверждает о представимости соответствующих пространств.

2. Все результаты данного раздела и техника экстремальных диаграмм переносятся на многочлены, симметричные относительно переменных из каждого набора Λ_i, в частности, на симметричные многочлены Капелли:

$$C_n^{symm} = \sum_\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \dots x_{\sigma(n)} y_n.$$

Системы симметрических тождеств Капелли выполняются в положительной характеристике (а в нулевой характеристике ведут к нильпотентности ассоциативной алгебры).

3. Пусть $\mathfrak{M}$ – эластичное многообразие, $A \in \mathfrak{M}$, $X = \{x_i\} \subset A$. Можно определить X-*многочлены Капелли*, устроенные так же, как и обычные многочлены Капелли, только альтернируются степени одного и того же элемента из множества X. Для таких многочленов выполняются аналоги утверждений 2.4, 2.6, 2.2, а если многообразие $\mathfrak{M}$ – курошево, то и остальных утверждений данного раздела (за исключением комбинаторных оценок). Правильная формулировка утверждений о представимости означает рассмотрение многочленов, которые для каждого $x \in X$ полилинейны и кососимметричны по экстремальному набору его степеней (и это одновременно для всех элементов $x \in X$).

2.2. Представимые пространства

Определение 2.2. Пространство $S \subseteq A$ называется *представимым*, если оно пересекается по нулю с препятствием к представимости некоторого порядка. Назовем пространство $S \subset B$ *представимым в алгебре* B, если имеется морфизм B в алгебру нетерового типа, ограничение которого на S является вложением.

Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *курошевым*, если любая алгебраическая алгебра из $\mathfrak{M}$ локально конечна. Алгебра называется *алгебраической*, если любая 1-порожденная алгебра конечномерна.

(Равносильное определение: ограничение на S некоторого гомоморфизма A в алгебру нетерового типа является вложением.)

Для диаграммы D многообразия $\mathfrak{M} \supseteq \mathrm{Var}(A)$ и алгебры A определим подпространство $S_{D,\mathfrak{M}}(A) \subseteq A_{\mathfrak{M}} \lt\{\Lambda_i\}\gt$ как пространство многочленов, полилинейных и кососимметричных по переменным из каждого набора Λ_i, соответствующего диаграмме D. Когда ясно, какая алгебра имеется в виду, мы будем писать просто $S_{D,\mathfrak{M}}(A)$.

В силу замечания на стр. 123 справедливо следующее утверждение:

Предложение 2.6. *Пусть D – экстремальная диаграмма для курошева многообразия $\mathfrak{M} \supseteq \mathrm{Var}(A)$, $S = S_{D,\mathfrak{M}}$. Тогда если D содержит малый столбец, то пространство S представимо.* □

Замечание. Условие курошевости необходимо, поскольку почти все умножения могут последовательно применяться к переменным, соответствующим D, и степеней элементов из A может не возникать. Чтобы избавиться от такого рода ограничений нам понадобится рассматривать пару, состоящую из алгебры A и алгебры операторов, действующих на A.

Сопоставим диаграмме D систему наборов переменных $\xi_{ij} \in \Lambda_i$, где Λ_i – набор сильно антикоммутирующих переменных, отвечающий j-му столбцу диаграммы D.

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебр, D – диаграмма Кемера. Рассмотрим алгебру $K_0(A, D) = A *_{\mathfrak{M}} \lt\{\xi_{ij}\}\gt / Q$, где идеал Q порожден неассоциативными мономами

M_α, содержащими два вхождения любой из переменных ξ_{ij}, а также элементами вида $M(\xi_{ij_1},\xi_{ij_2})+M(\xi_{ij_2},\xi_{ij_1})$. Алгебра $K_0(A,D)$ есть расширение A в многообразии $\mathfrak{M}$ системой сильно антикоммутирующих переменных, заданной диаграммой D. Обычно $\mathfrak{M}=\mathrm{Var}(A)$ и это подразумевается, если индекс $\mathfrak{M}$ опущен. В любом случае, для корректности конструкций необходимо, чтобы выполнялось включение $\mathfrak{M}\supseteq \mathrm{Var}(A)$. Это всегда подразумевается.

Пусть J_{b+1} есть идеал в $K_0(A,D)$, порожденный значениями полиномов вида $f(u_1,\dots,u_{b+1},\overrightarrow{y})$, где u_k – мономы от образующих A, f полилинейно и кососимметрично относительно u_i. Положим $K_1(A,D)=K_0(A,D)/J_{b+1}$. $K(A,D)$ есть пространство (идеал) в $K_1(A,D)$, порожденное мономами, полилинейными по всем переменным вида ξ_{ij}. В силу экстремальности D соответствующие пространства в алгебрах $K_1(A,D)$ и $K_0(A,D)$ естественным образом изоморфны.

Предложение 2.7 (О представимых пространствах). *Пусть D – экстремальная диаграмма. Тогда:*

а) $\mathrm{Var}(A)=\mathrm{Var}(K_0(A,D))=\mathrm{Var}(K_1(A,D))$.

б) Пространства $S_1(A,D)$ и $S_0(A,D)$ в алгебрах $K_1(A,D)$ и $K_0(A,D)$ соответственно, порожденные мономами, полилинейными по всем переменным вида ξ_{ij}, естественным образом изоморфны (иногда обозначаются $S(A,D)$).

в) Если многообразие $\mathfrak{M}$ – курошево, то указанные пространства представимы. □

Если характеристика основного поля равна нулю, то пространство $K(A,D)$ изоморфно подпространству $A_{\mathfrak{M}}{<}X{>}$ — пространству многочленов с коэффициентами в A, полилинейных и кососимметричных относительно соответствующих наборов переменных.

В пространстве $K(A,D)$ естественным образом определено умножение на внутренние следы (формы), и если $\mathfrak{M}$ – курошево многообразие, то это действие задает структуру нетерова модуля на пространстве $K(A,D)$.

Сформулируем еще одно полезное утверждение, относящееся к приведенным выше конструкциям.

Предложение 2.8. *Соответствие $A\to K_{\mathfrak{M}}(A,D)$ есть ковариантный функтор. (Индекс $\mathfrak{M}$ указывает на используемое многообразие.) Пространство $K_{\mathfrak{M}}(A,D)$ всегда представимо и, кроме того, $K_{\mathfrak{M}}(A,D)$ изоморфно пространству $K_{\mathfrak{M}}(A',D)$ для некоторого A' – фактора A по некоторому представимому идеалу. При этом T-идеал $R(D)$ алгебры $K_{1\mathfrak{M}}(A,D)$ лежит в пространстве $K_{\mathfrak{M}}(A,D)$* □

Мы докажем несколько другое утверждение, относящееся к представимым пространствам.

Предложение 2.9. *Пусть D есть прямоугольник размера*

$$(k(\mathfrak{M})+d(\mathfrak{M})+1)\times b(\mathfrak{M})$$

и $\mathfrak{M}$ – курошево эластичное многообразие (т.е. с ассоциативными степенями). Тогда пространство $S=S_{D,\mathfrak{M}}$ представимо.

Доказательство. Достаточно показать, что S не пересекается с препятствием к алгебраическому представлению некоторого порядка (зависящего только от $\mathfrak{M}$) для произвольно выбранного элемента $r\in B$. В самом деле. Перейдем к алгебре $B[\delta_i(r)]$ которую будем рассматривать как алгебру над ассоциативно коммутативным кольцом $\mathbb{F}[\delta_i(r)]$, и выберем в ней новый элемент $r'\in B$ и т.д. Тем самым будет установлено, что можно перейти от B к ее операторному каноническому алгебраическому представлению некоторого порядка. А последняя алгебра является конечномерным модулем над ассоциативно-коммутативным кольцом.

Пусть $b = b(A)$, ψ_i есть операторы вида $x_i \to r(x_i)$. Достаточно показать, что оператор r алгебраичен над операторами ψ_i (и порядок алгебраичности зависит только от $\mathfrak{M}$). В самом деле. Тогда коэффициенты из соотношения алгебраичности можно интерпретировать с помощью операторов ψ_i и рассуждать, как в доказательстве лемм 2.5 и 2.7.

Таким образом, предложение будет установлено, если показать, что при некотором m для любого многочлена $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, r^m)$, полилинейного и кососимметричного по переменным из наборов Λ_i, имеет место равенство:

$$F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, r^k) = \sum_{i=1}^{k} \Psi_i F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, r^{m-i}),$$

где коэффициенты Ψ_i есть многочлены от операторов ψ_i и не зависят от F.

Пусть $\delta_{ik}(r)$ есть оператор внутренней формы порядка k, определенный с помощью набора Λ_j (см. предложение 0.9). Если многочлен G имеет вид $G(\overrightarrow{y}, \bigcup\limits_i \Lambda_i, r^b, d)$, то разность

$$G(\overrightarrow{y}, \bigcup_i \Lambda_i, r^b, d) - \sum_{k=1}^{b} \delta_{jk} \cdot G(\overrightarrow{y}, \bigcup_i \Lambda_i, r^{b-k}, d)$$

представима в виде линейной комбинации многочленов, получающихся путем выделения $b+1$ подслова внутри некоторого многочлена $\bar{G}$ и альтернирования этих подслов, причем подслова, содержащие переменную из Λ_j, при $j \neq i$ не принимают участия в альтернировании, и, кроме того, участвуют только те вхождения r, которые содержатся внутри отмеченной степени r^b.

Пусть $m = b \cdot (d+1)$. Тогда степень r^m разбивается на $d+1$ участок длины b и разность

$$G(\overrightarrow{y}, \bigcup_i \Lambda_i, r^m) - \sum_{k_1=1}^{b} \sum_{k_2=1}^{b} \cdots \sum_{k_{d+1}=1}^{b} \delta_{1k_1}(r)\delta_{2k_2}(r) \cdots \delta_{d+1,k_{d+1}}(r) \times$$
$$\times G(\overrightarrow{y}, \bigcup_i \Lambda_i, r^{m-\sum_i k_i})$$

принадлежит T-идеалу, отвечающему диаграмме, содержащей $d+1$ столбец длины $b+1$ и $k(A)$ столбцов длины b. А такой идеал в многообразии $\mathfrak{M}$ нулевой. □

Замечание. 1. Похожие рассуждения используются в доказательстве предложения 6.13 из раздела 6.2.2.

2. Утверждения о представимых пространствах можно сформулировать на языке препятствий к алгебраичности, которые обращаются в ноль при альтернировании относительно нескольких наборов переменных.

Отметим еще одно полезное

Предложение 2.10. *Конечный набор элементов, являющихся значениями многочленов из представимых пространств, описанных в данном разделе, порождает нетеров A-модуль (левый, правый, двусторонний).*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение данного предложения для многочлена $f \in S_{D,\mathrm{Var}(A)}$. Последнее вытекает из того факта, что любая возрастающая цепочка идеалов, которые представимы ограниченного порядка, стабилизируется. □

2.3. Утончение альтернаторов

Данный раздел посвящен одному из основных технических средств данной главы. Оно позволяет добиваться того, чтобы альтернируемые образования имели ограниченную степень. Мы работаем с многочленами Кемера.

Начнем с ассоциативного случая. Пусть дана пара (A, H) из алгебры A, с фиксированным набором образующих и натурального $H \in \mathbb{N}$.

Пусть D есть некоторая диаграмма, многочлен $f \in S(D) \cap A_{\mathfrak{M}} < \bigcup_i \Lambda_i >$, g получается из f путем подстановки слов $\{v_j\} \in A$ вместо переменных из $\bigcup_i \Lambda_i$. Если все эти слова имеют длину не выше H, то полином g (и наборы Λ_i) называется *тонким* относительно D. (Поскольку это понятие относится к записи многочлена g, то требуется существование хотя бы одного такого представления.)

Если же хотя бы одно v_j имеет длину больше H, то g считается *толстым.* Это понятие относится не к самому многочлену g, а к его записи. (Мы допускаем такую вольность речи, когда ясно, какая запись рассматривается и это не приводит к недоразумениям.)

Когда показатель H не фиксирован, то можно говорить об *h-тонких* и *h-толстых* многочленах для каждого $h \in \mathbb{N}$.

Если каждый многочлен Капелли толщины h обращается в нуль, то будем говорить, что в алгебре выполняется *система тождеств Капелли толщины h*. Если $h = H$, то в алгебре *выполняется система тонких тождеств Капелли.* Аналогично определяются несколько более общие понятия выполнимости *системы разреженных тождеств толщины h*, *тонкой системы разреженных тождеств*, понятия *толстого набора Λ_i* и *набора Λ_i толщины h*, а также толщины переменной, рассматриваемой как набор из одного элемента.

Для того, чтобы получить обобщения этих понятий для алгебр с произвольной сигнатурой Ω, надо видоизменить понятие *длины слова.* Под *словом* понимается произвольный моном от образующих. Порядку, в котором выполняются операции, отвечает дерево, висячим вершинам которого (кроме корня) соответствуют образующие, а корню — сам моном. Оно называется *деревом монома. Веткой* называется участок несамопересекающегося пути, ведущего из корня в висячую вершину. *Длиной v* будет называться максимальная длина ветки дерева монома v и обозначаться через $l(v)$. $l(v)$ есть максимальная длина цепи подмономов, попарно сравнимых по включению; $br(v)$ обозначает общее число веток длины $l(v)$. Показатель $CH(v)$ есть вектор $(l(v), br(v))$. Показатели сравниваются лексикографически, сначала по первой координате, потом по второй.

Следующая лемма, принадлежащая К. А. Зубрилину [43], относится к строению деревьев мономов для алгебр с разреженными тождествами. Ее доказательство легко получается с помощью перекачки.

Лемма 2.8 (О дереве). *Пусть в алгебре A выполняется система разреженных тождеств m-го порядка. Назовем ветку длина которой не меньше m* длинной.

Тогда любой моном линейно представим мономами, и каждое дерево, соответствующее такому моному, имеет не более $m-1$ непересекающейся длинной ветки. □

Легко видеть, что все понятия, связанные с толщиной, непосредственно переносятся на общий случай. В ассоциативном случае нет нужды рассматривать показатель CH, а достаточно работать только с длинами мономов. Тогда техническая часть доказательств сокращается и при первом чтении можно иметь в виду именно ассоциативный случай.

Отметим только, что степень монома v не превосходит $q^{l(v)}$, где q есть максимальная арность операции в сигнатуре Ω.

С помощью процедуры перекачки непосредственно доказывается следующее

Предложение 2.11. *Пусть в алгебре B выполняется система разреженных тождеств порядка h и толщины h, $g \in S(D)$. Тогда g линейно представим многочленами $g' \in S(D)$ такими, что для каждого из них не более h наборов переменных Λ_i будут иметь толщину больше h. Более того, общее число переменных (во всех наборах) толщины больше h не превосходит $h-1$.* $\square$

Следствие 2.7. *Если в алгебре B выполняется система тождеств Капелли порядка m толщины m, то в ней выполняется также тождество Капелли порядка $2m-1$.* $\square$

Мы рассматриваем многочлены из $A_{\mathfrak{M}} < \bigcup\limits_i \Lambda_i >$ вместе с семейством соответствий мономов переменным из набора $\bigcup\limits_i \Lambda_i$, которое задает подстановку, результат которой есть g. Это позволяет говорить о *толстых* или *тонких* переменных из $\bigcup\limits_i \Lambda_i$ а также переменных *толщины h*.

Определение 2.3. $S^{(m)}_{D,m_1,m_2,k}$ есть пространство, порожденное многочленами, отвечающими диаграмме $D \cup E$ таких, что

- Диаграмма E состоит из $m_1 + m_2$ столбцов длины k.
- Не более m_1 наборов переменных, отвечающих этим столбцам имеют толщину больше m.

Ясно, что $S^{(m)}_{D,m_1,m_2,k}$ является идеалом.

Нам понадобится еще одно следствие из предложения 2.11 и леммы о разреженной перекачки (см. раздел 1.5, лемма 1.17).

Следствие 2.8 (Утончение малых наборов). *Пусть в алгебре выполняется система разреженных тождеств порядка m толщины m, $m' = m_1 + m_2 \geq m$. Тогда имеет место равенство*

$$S^{(m)}_{D,m',0,k} = S^{(m)}_{D,m,m'-m,k}$$

и включение

$$S^{(m)}_{D,m',0,k} \subseteq S^{(m)}_{D,0,m'-m,k}$$

$\square$

Перейдем теперь к процедуре утончения больших наборов в многочленах Кемера. В основе лежит следующее соотношение. Пусть многочлен f полилинеен и кососимметричен относительно набора переменных $\{y_i\}_{i=1}^m$ и переменной x. Рассмотрим многочлен

$$f' = f - \sum_{i=1}^{m} f|_{x \to y_i; y_i \to x} \tag{7}$$

Тогда многочлен f' полилинеен и кососимметричен относительно набора $\{x\} \cup \{y_i\}_{i=1}^m$.

Замечание. Аналогичным образом, из многочлена, полилинейного и кососимметричного относительно набора переменных $\{y_i\}_{i=1}^{m_1}$ и $\{x_j\}_{j=1}^{m_2}$, строится многочлен f', полилинейный и кососимметричный относительно объединенного набора $f' = \sum_{\sigma \in S} (-1)^\sigma \sigma \cdot f$, где S есть система представителей смежных классов $S_{m_1+m_2}$ относительно $S_{m_1} \times S_{m_2}$.

Лемма 2.9. *Пусть $m = |\Lambda|$, многочлен $f \in A_{\mathfrak{M}} {<} \Lambda \cup \{x_0\} {>}$ полилинеен и кососимметричен относительно набора Λ и линеен по переменной x_0. Пусть многочлен $g \in \mathrm{T}(f)$ получается путем подстановки вместо x_0 монома v_0 длины k, $k > m+1$, а вместо переменных из Λ – мономов длины не бóльшей m.*

Тогда g линейно представим следующими многочленами:

1) *значениями подстановок в f, для которых $CH(v_0') < CH(v)$,*

2) *многочленами, отвечающими подстановкам толщины $m+1$ элементов A в многочлен из $A_{\mathfrak{M}} {<} \Lambda \cup \{x_0\} {>}$, полилинейный и кососимметричный относительно набора $\Lambda \cup x_0$.*

Доказательство. Выделим подмоном толщины $m+1$ монома v_0, обозначим его через x_0' и воспользуемся выражением (7). Остается заметить, что слагаемые, соответствующие

$$f' = f - \sum_{i=1}^{m} f|_{x \to y_i; y_i \to x},$$

удовлетворяют условию 2), а слагаемые, соответствующие членам суммы

$$\sum_{i=1}^{m} f|_{x \to y_i; y_i \to x},$$

удовлетворяют условию 1) доказываемой леммы. В самом деле. Пусть u есть подмоном монома v, причем u включается в цепочку подмономов, возрастающих по включению, которая имеет максимальную длину. Тогда замена u на моном ме́ньшей длины ведет к уменьшению показателя исходного монома. $\square$

Рассмотрим пару (A, H). Пусть $H \geq k$. Аналогично доказывается следующее

Предложение 2.12. *Пусть многочлен $f \in A_{\mathfrak{M}} {<} \bigcup_{i=0}^{1} \Lambda_i {>}$, $|\Lambda_0| = k$, $|\Lambda_1| = k+1$. Пусть набор Λ_1 содержит ровно s толстых переменных, а все переменные в наборе $|\Lambda_0|$ – тонкие. Тогда*

а) Если $s > 1$, то многочлен g, соответствующий f, линейно представим значениями многочленов g_μ, отвечающих не более чем одной толстой переменной в наборе Λ_1.

б) Пусть $s = 1$. Тогда многочлен g, соответствующий f, линейно представим значениями многочленов g_μ таких, что показатели (CH) всех переменных в наборе Λ_1 те же самые, а показатель одной переменной строго меньше.

(Все многочлены g_μ соответствуют f при некоторой вербальной подстановке $x_j \to v_j$, где $x_j \in \bigcup_{i=0}^{1} \Lambda_i$.)

Доказательство. П.а) использует ту же конструкцию, связанную с формулой (7), п.б) есть следствие предыдущего утверждения, примененного к толстой переменной набора Λ_1. $\square$

Замечание. Аналогичным образом, если $|\Lambda_0| = |\Lambda_1| - s$, то в силу предыдущего замечания, можно добиться того, чтобы не более s переменных из набора Λ_1 имело толщину, бóльшую m. Однако при $s > 1$ получить аналог п.б) не удается. Это одна из причин, по которой мы работаем с диаграммами Кемера, а не с произвольными экстремальными диаграммами.

Итак, мы утончаем большой набор ценой "утолшения" малого. Скомбинируем этот процесс с перекачкой, позволяющей утончать почти все малые наборы. Суммируя результаты предложения 2.12 и следствия 2.8, имеем окончательно

Предложение 2.13. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть многообразие алгебр с параметрами (b, d, k), в котором выполняется разреженное тождество степени m. S_{m_1,m_2} есть пространство значений многочленов Кемера с m_1+m_2 малыми столбцами, для которых все переменные, соответствующие большим наборам имеют толщину не более $m+1$, и не более чем m_1 переменных из малых наборов имеют толщину свыше m (а число больших наборов для многочлена Кемера всегда равно d). Тогда*

а) Если $m_1 = m - 1$ и $m_1 + m_2 \geq k + 1$, то пространство S_{m_1,m_2} совпадает с пространством, порожденным всеми значениями полиномов Кемера с диаграммой D, состоящей из d больших столбцов и $m_1 + m_2$ малых.

б) Пусть c есть число малых столбцов в диаграмме Кемера D, диаграмма E состоит из m столбцов длины b. Имеет место включение $S(D \cup E) \subset S(0, c)$, □

Смысл данного предложения (и данного раздела) в мажорировании: пространство значений полиномов, отвечающих диаграмме Кемера $D \cup E$, содержится в пространстве тонких значений полиномов Кемера, отвечающих чуть мéньшей диаграмме D.

Следствие 2.9. *Пусть A – PI-алгебра с показателем (b, d), в которой выполняется система разреженных тождеств порядка m, A' есть фактор по идеалу, порожденному многочленами толщины $\max(m, b + 1)$, отвечающим некоторой диаграмме Кемера для многообразия $\mathrm{Var}(A)$. Тогда пара (b, d) для многообразия $\mathrm{Var}(A')$ строго меньше пары (b, d) для многообразия $\mathrm{Var}(A)$.* □

Замечания. 1. Техника утончения работает для экстремальных многочленов, для которых соответствующая диаграмма содержит не менее m малых столбцов и вместе с большим столбцом длины q содержит столбец длины $q - 1$.

2. Для ассоциативных и структурируемых алгебр возможность утончения вытекает также из того, что экстремальный идеал образует нетеров модуль над следами (см. разделы 3.3, A).

2.3.1. Кольца с операторами.

Пусть B – алгебра с сигнатурой Ω, $D(B)$ есть операторная алгебра для алгебры B. Каждому элементу $D(B)$ отвечает моном из $B_{\mathrm{Var}(B)} < x >$, линейный по переменной x. Умножению операторов $D_1 * D_2$ соответствует подстановка $D_1 \to x$ в D_2, а действию оператора на элемент v – подстановка $v \to x$.

Таким образом, получается пара (B, D), где D есть операторная алгебра. Нас будут интересовать тождества этой пары. Естественным образом определяется многообразие $\mathfrak{M}$ двухосновных алгебр (операторы умножений должны входить в операторную алгебру D), а также расширения $B < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$, где $\overrightarrow{x}$ обозначает свободные переменные алгебры, а $\overrightarrow{y}$ – свободные операторные переменные. Аналогично определяется алгебра $B_{\mathfrak{M}} < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$ для любого многообразия $\mathfrak{M}$

двухосновных алгебр (а каждому многообразию обычных алгебр естественным образом соответствует многообразие двухосновных алгебр). Отметим, что при изучении альтернативных и йордановых алгебр наблюдается переход к многоосновным системам (Альтернативные системы, йордановы тройные системы).

Нас будут интересовать многообразия, для которых соответствующая операторная алгебра является PI-алгеброй. Данный класс алгебр является естественным для нас. Необходимость дополнительных ограничений такого рода видна из следующего примера:

Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ есть многообразие алгебр, заданное тождеством $x(yz) = 0$, B – свободная 2-порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{Var}(B)$. Легко видеть, что базис $\mathfrak{M}$ состоит из мономов вида $(\ldots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})x_{i_4})\ldots)x_{i_k})$, и подстановки мономов длины бо́льшей 1 во все позиции, кроме первой, приводят к нулевому результату. Поэтому при фиксированном x_{i_1} подстановки вида $x_{i_1} \to x_{i_1}x_\alpha$ осуществляют действие левого умножения на алгебре операторов. Легко видеть также, что в многообразии $\mathfrak{M}'$ выполняется система разреженных тождеств — тождеств Капелли четвертого порядка. Вместе с тем, рост в свободной алгебре из $\mathfrak{M}'$ экспоненциален, $\mathrm{GKdim}(B) = \infty$, а само многообразие $\mathfrak{M}'$ не является ни локально шпехтовым, ни локально представимым.

Точно так же, как и для обычных алгебр, можно рассматривать многочлены, полилинейные и кососимметричные относительно наборов операторных переменных (многочлены могут включать в себя также обычные переменные). Соответствующие диаграммы будем называть *операторными*, а пространство многочленов, отвечающее операторной диаграмме D, будет обозначаться $S_2(D)$; паре $\mathcal{D} = (D_1, D_2)$, состоящей из обычной и операторной диаграмм, естественным образом соответствует пространство $S(\mathcal{D}) = S(D_1, D_2)$. Пусть D_1 – экстремальная диаграмма для алгебры B. Операторная диаграмма D_2 *совместима с диаграммой* D_1, если в алгебре $B_{\mathfrak{M}} < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$ существует ненулевой многочлен из $S(D_1, D_2)$, и *допускает диаграмму* D_1, если она совместима с любой экстремальной диаграммой $D' \supset D_1$. Зафиксируем экстремальную диаграмму D_1 и рассмотрим множество операторных диаграмм, которые ее допускают. Аналогично случаю обычных алгебр определим операторные диаграммы, *экстремальные относительно* D_1, их *головы* и *хвосты*. Естественным образом определяется *пара экстремальных диаграмм* $\mathcal{D} = (D_1, D_2)$. (Диаграмма D_2 должна быть экстремальна в классе всех диаграмм, допускающих сколь угодно большие экстремальные диаграммы, содержащие D_1.)

Замечание. В определении экстремальной диаграммы D_2 требуется необращение в ноль многочлена, который не обязательно является чисто операторным. При этом пространство $S(D_2)$ в операторной алгебре D вполне может оказаться и нулевым.

Назовем семейство диаграмм *правильным*, если оно вместе с любой диаграммой содержит все ее поддиаграммы.

Лемма 2.10. *Любая убывающая по включению цепочка правильных семейств стабилизируется.* □

Пусть D_1 – диаграмма Кемера для алгебры B. С ростом D_1 множество диаграмм, совместимых с D_1, уменьшается и с некоторого момента стабилизируется. k теперь будет обозначать минимальное количество малых столбцов, требуемых для стабилизации, *хорошей диаграммой* будем называть диаграмму Кемера не менее чем с $k+2$ малыми столбцами. Рассматривая диаграммы, совместимые с хорошей диаграммой Кемера D_1, определим *операторную диаграмму Кемера* D_2, связанную с D_1, а также параметры b_2, d_2 и k_2. Пара (D_1, D_2) называется *парой диаграмм Кемера*.

Отметим, что операторные альтернаторы и альтернаторы элементов алгебры не пересекаются. Все утверждения, относящиеся к утончению альтернаторов и к представимым пространствам, непосредственно переносятся на этот случай. Приведем только формулировку итогового результата.

Предложение 2.14. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть многообразие двухосновных алгебр с параметрами (b, d, k), в котором выполняется разреженное тождество степени m и операторное разреженное тождество той же степени. $S_{m_1,m_1';m_2,m_2',n}$ есть пространство многочленов Кемера с m_1+m_1' малыми столбцами в первой диаграмме и m_2+m_2' во второй, удовлетворяющих следующим условиям.*

1) *Для каждого типа переменные, соответствующие большим наборам, имеют толщину не более $m+1$ (это значит, что в эти переменные из Λ подставляются мономы толщины не более $m+1$).*

2) *Не более чем m_1 переменных из малых наборов имеют толщину свыше m.*

3) *Все переменные из A, входящие в альтернируемые операторы, имеют толщину не выше n.*

Тогда

а) Если $m_1 = m_2 = m-1$, $m_1+m_1' \geq k+1, m_2+m_2' \geq k+1$, то пространство $S_{m_1,m_1';m_2,m_2'}$ совпадает с пространством, порожденном всеми значениями полиномов Кемера с парой диаграмм (D_1, D_2), где диаграмма D_i состоит из d_i больших столбцов и m_i+m_i' малых.

б) Пусть c_i есть число малых столбцов в D_i, диаграмма E_i состоит из m столбцов длины b_i. Имеет место включение $S(D_1 \cup E_1, D_2 \cup E_2) \subset S_{m_1,m_1';m_2,m_2',m} \subset S_{0,m_1';0,m_2',m}$. □

Поскольку операторная алгебра D является PI-алгеброй, и любая ее конечно порожденная подалгебра является курошевой, из леммы о дереве вытекает следующее

Предложение 2.15. *Пусть $\mathcal{D} = (D_1, D_2)$ – экстремальная пара диаграмм для многообразия $\mathfrak{M} \supseteq \mathrm{Var}(A)$ двухосновных алгебр с операторами, $S = S_{\mathcal{D},\mathfrak{M}}$. Тогда если каждое D_i содержит малый столбец, то пространство S представимо.* □

2.3.2. Размерность Гельфанда–Кириллова и ряды коразмерности

Процедура утончения позволяет воспользоваться следующим соображением. Пусть S' есть результат подстановки в переменные из $\bigcup \Lambda_i$ некоторого конечного подмножества $E \subset A$. Тогда размерность Гельфанда–Кириллова пространства S' не превосходит размерность Гельфанда–Кириллова пространства S. Аналогичное утверждение верно и для операторных пространств.

В силу процедуры утончения переменных, имеет место включение

$$H(D_1 \cup E_1, D_2 \cup E_2) \subset S_{m_1,m_1';m_2,m_2',m} \subset S_{0,m_1';0,m_2',m},$$

где все параметры удовлетворяют условиям предложения 2.13. Поэтому существует система разреженных тождеств с операторами ограниченной толщины, заданная представимым пространством $S_{0,m_1';0,m_2',m}$, фактор по которой имеет ме́ньшие численные характеристики. Размерность Гельфанда–Кириллова такой системы не превосходит размерности Гельфанда–Кириллова соответствующего представимого пространства.

По представимому пространству S_Λ можно определить представимую алгебру $A(\Lambda)$, которая получается из канонического (операторного) алгебраического представления A путем расширения переменными из набора Λ и взятия фактора по мономам, содержащим две одинаковых переменных из Λ.

Воспользовавшись предложением 2.9, получаем

Предложение 2.16. *а) Пусть для любого подмногообразия $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, любой относительно свободной алгебры $A \in \mathfrak{M}$ и любой хорошей пары диаграмм Кемера $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ размерность Гельфанда–Кириллова пространства $S_\Lambda(A)$ не превосходит размерности Гельфанда–Кириллова алгебры A. Тогда* $\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{GKdim}(A(\Lambda)) = \mathrm{GKdim}(A/I)$, *где I есть некоторый представимый идеал.*

Если $\mathfrak{M}$ есть курошево эластичное многообразие, то достаточно рассматривать только пространства, соответствующие просто хорошей диаграмме Кемера.

б) Пусть k – число образующих алгебры A, B – k-порожденная относительно свободная алгебра из $\mathrm{Var}(A(\Lambda))$. *Если* $\mathrm{GKdim}(B) = \mathrm{GKdim}(A(\Lambda)) = g$, *то* $\mathrm{GKdim}(A) = g$. □

Замечание. Интересно было бы избавиться от условия эластичности. И, кроме того, получить аналогичные результаты для экспоненты в ряде коразмерности.

Пусть A – относительно свободная k-порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. И пусть для любой представимой относительно свободной алгебры A' из любого подмногообразия $\mathfrak{M}' \subseteq \mathrm{Var}(A)$ ее размерность Гельфанда–Кириллова определяется ее *сложностной характеристикой* или наличием в $\mathrm{Var}(A')$ представимых подалгебр из некоторого базового набора $\mathcal{A}$. И кроме того, базисный ранг любого многообразия, порожденного элементом из $\mathcal{A}$, не превосходит k.

Для вычисления размерности Гельфанда–Кириллова естественно пойти таким путем. Размерность Гельфанда–Кириллова представимых пространств есть целое число, а фактор по T-идеалу, порожденному представимым пространством, имеет ме́ньшие численные характеристики.

Однако имеет место следующее явление. Рассмотрим представимое пространство $S_{\mathfrak{M},\Lambda}(A)$. Поскольку оно представимо, имеет место изоморфизм $S_{\mathfrak{M},\Lambda}(A) \cong S_{\mathfrak{M},\Lambda}(\bar{A})$, где $\bar{A}$ есть некоторый представимый фактор алгебры A. Пусть $\mathfrak{M}' = \mathrm{Var}(A')$. Тогда может случиться, что $S_{\mathfrak{M}',\Lambda}(\bar{A}) \ncong S_{\mathfrak{M},\Lambda}(\bar{A})$ и даже имеет ме́ньшую размерность Гельфанда–Кириллова. При этом возможно неравенство $\mathrm{GKdim}(A) > \mathrm{GKdim}(\bar{A})$, так что приведенные выше рассуждения дают только верхние оценки.

Мы покажем это явление на примере ассоциативной не относительно свободной алгебры, который легко модифицируется в пример относительно свободной неассоциативной алгебры из многообразия $\mathfrak{M}'$ (см. пример на стр. 132).

Пример. Рассмотрим мономиальную алгебру A, все ненулевые слова которой суть подслова множества слов вида $a^{q_1}ba^{k_1}ba^{k_2}ba^{q_2}$, где $k_1 \le k_2^2$. Легко видеть, что $\mathrm{GKdim}(A) = 3\frac{1}{2}$. С другой стороны, размерность Гельфанда–Кириллова любой представимой алгебры есть целое число, так что фактор A по любому представимому идеалу имеет указанную размерность не больше 3.

В алгебре A выполняется тождество Капелли 8 порядка, и кроме того диаграмма $D = 5^3 4^2$ (основания означают длины столбцов, показатели степеней — их количество) является хорошей диаграммой Кемера для этой алгебры, Λ есть система наборов переменных, соответствующих D. Пространство S_Λ представимо и $S_{\mathrm{Var}(A),\Lambda}(A) \cong S_{\mathrm{Var}(A),\Lambda}(\bar{A})$ для некоторого представимого фактора $\bar{A}$ алгебры A. Вместе с тем $S_{\mathrm{Var}(\bar{A}),\Lambda}(\bar{A}) = 0$.

При подстановке элементов из A вместо переменных происходит факторизация, а истончение переменных приводит к изменению промежутков между ними. Указанная факторизация не согласуется с модульной структурой, определяемой с помощью подстановок в переменные из $\bigcup \Lambda_i$. Запись нулевого полинома может перейти в запись ненулевого.

Тем не менее, если подставлять вместо $t_i \in \Lambda$ формальные степенные ряды, то факторизации не происходит, а представимость есть следствие своего рода “сглаживания” соотношений.

Предложение 2.17. *Пусть базисный ранг многообразия $\mathfrak{M}$ равен s. Тогда размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободной $r \geq s$-порожденной алгебры из $\mathfrak{M}$ и ее расширения конечно порожденным нильпотентным идеалом совпадают.*

Доказательство. Мы будем использовать предложение 0.5 для случая $k = 1$, т.е. для многочленов линейных по переменным из Λ. Пусть A – представимая алгебра. Тогда существует конечное подмножество $E \subseteq A$ такое, что если многочлен $F \in A_{\mathrm{Var}(A)} {<} \Lambda {>}$ полилинеен по переменным из Λ и обращается в ноль при подстановке элементов из E вместо переменных, то $F = 0$.

Если базисный ранг алгебр, отвечающих представимым пространствам равен r, то размерность Гельфанда–Кириллова этих пространств равна размерности Гельфанда–Кириллова ограниченно свободного расширения некоторого порядка для r-порожденной подалгебры общего положения в представимой алгебре $K(A, D)$. А тогда $\mathrm{GKdim}(K(A, D))$ совпадает с размерностью Гельфанда–Кириллова r-порожденной подалгебры общего положения, которая относительно свободна. □

Следствие 2.10. *В условии предложения 2.16 равенство базисного ранга многообразия* $\mathrm{Var}(A(\Lambda))$ *числу k влечет равенства* $\mathrm{GKdim}(B) = \mathrm{GKdim}(A(\Lambda)) = \mathrm{GKdim}(A)$. □

Замечание. По всей видимости, впервые свободные радикальные расширения рассматривал А. В. Гришин. Он показал следующее ([24], [25]). Дано многообразие $\mathfrak{M}$, порожденное конечномерной ассоциативной алгеброй. Рассматривается расширение (в $\mathfrak{M}$) d-порожденной относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ свободными элементами $\{x_i\}$ и рассматриваются слова, в которые дополнительные переменные входят не более c раз. Тогда при достаточно большом c размерность Гельфанда–Кириллова пространства S_c, порожденного этими словами стабилизируется. Введение дополнительных радикальных переменных обеспечивает контроль за радикальной частью в S_c, связывающей первичные компоненты и эта стабилильная величина, именуемая *показателем роста*, вычисляется. (Она совпадает, как мы сейчас видим, с размерностью Гельфанда–Кириллова относительно свободных алгебр.) Кроме того, в работах [24], [25] в нескольких частных случаях размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных алгебр вычисляется. Для полуения общего результата необходим контроль над радикалом в общей ситуации, что обеспечивается дополнительным ходом — рассмотрением замыканий (по Зарисскому или конструкцией ограниченно свободных расширений). Другой способ действий — работа с экстремальным T-идеалом в полупрямых произведений.

Вернемся к курошевым многообразиям, в число которых входит любое многообразие ассоциативных PI-алгебр. В этом случае нет необходимости рассматривать операторные алгебры. Построим представимые пространства. Пусть s – число образующих A, J – идеал, порожденный мономами, содержащими две одинаковые переменные из Λ. Индукционный шаг пройдет, если показать совпадение размерностей Гельфанда–Кириллова представимой алгебры $K_0(A,D)$, отвечающего s-порожденной алгебре A и s-порожденной алгебры общих элементов отвечающей $K_0(A,D)$. Эта алгебра общих элементов свободна в многообразии $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(K_0(A,D))$. Если базисный ранг $\mathfrak{M}$ равен s, то указанное совпадение вытекает из предложения 2.17 (см. следствие 2.10).

Однако условие на базисный ранг можно ослабить: достаточно потребовать, чтобы любая относительно свободная алгебра из $\mathfrak{M}$ имела бы фактор с той же размерностью Гельфанда–Кириллова и базисным рангом s (в ассоциативном случае $s = 2$). Сформулируем точный результат.

Предложение 2.18. *Пусть многообразие алгебр $\mathfrak{M}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Для любого подмногообразия $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, любой относительно свободной алгебры $A \in \mathfrak{M}$ и любой хорошей паре диаграмм Кемера $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ размерность Гельфанда–Кириллова пространства S_Λ не превосходит размерности Гельфанда–Кириллова алгебры A.*

   Либо — $\mathfrak{M}$ есть курошево эластичное многообразие.

2) *Имеется набор $\mathcal{C}$ конечномерных алгебр из $\mathfrak{M}$.*

3) *Для каждой алгебры $C_i \in \mathcal{C}$ базисный ранг многообразия $\mathrm{Var}(C_i)$ не превосходит s.*

4) *Размерность Гельфанда–Кириллова любой представимой алгебры $B \in \mathfrak{M}$ равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова множества $\{\Psi_i\}$ – факторов ее подалгебр, таких, что для некоторого бесконечного поля $K(\Psi_i)$ тензорное произведение $\Psi_i \otimes K(\Psi_i) \in \mathcal{C}$.*

Тогда $\mathrm{GKdim}(A)$ *при $r \geq s$ для относительно свободной r-порожденной алгебры $A \in \mathfrak{M}$ равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова своего фактора A_i такого, что* $\mathrm{Var}(A_i) = \mathrm{Var}(C_i)$, *где $C_i \in \mathcal{C}$.* □

Доказательство. Воспользуемся предложением 2.17. Базисный ранг тестовых алгебр из класса $\mathcal{C}$ равен s и размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободной представимой r-порожденной алгебры совпадает с указанной размерностью ее фактора отвечающего тождествам, выполняющимся в s-порожденных алгебрах. □

Замечания. 1. Аналог условия п.3 можно сформулировать в терминах замыкания по Зарисскому подалгебр (замыкание по Зарисскому s-порожденных подалгебры общего положение совпадает со всей алгеброй из $\mathcal{C}$). Такая формулировка удобна для случая конечного основного поля. Однако это условие более сильное, чем п.3. Рассмотрим прямую сумму алгебр $A = A_1 \oplus A_2$, $\mathrm{Var}(A_1) \supset \mathrm{Var}(A_2)$, базисный ранг A_2 больше s базисный ранг A_1 равен s. Тогда замыкание по зарисскому любой s-порожденной подалгебры из A не может породить всю алгебру, но может породить то же многообразие.

2. В ассоциативном случае $s = 2$ и класс $\mathcal{C}$ представляет собой набор полупрямых произведений алгебр матриц с бесконечным центром. Интересно найти этот класс для йордановых и альтернативных алгебр. Нахождение этого класса позволяет построить более тонкую теорию радикала, показывающую взаимодействие первичных компонент в объемлющей алгебре, в то время как обычная структурная теория ограничивается описанием таких компонент.

При изучении ряда коразмерности введение дополнительного числа добавочных переменных из набора Λ_1 не оказывает влияния на экспоненту и мы имеем следующую теорему:

Теорема 2.4. *Пусть $\mathfrak{M}$ – курошево многообразие конечного базисного ранга. Тогда экспонента подмногообразия $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ равна экспоненте подмногообразия $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$, порожденного представимой алгеброй.* □

Нетрудно убедиться, что наличие системы разреженных тождеств в алгебре произвольной сигнатуры ведет к не более чем экспоненциальному росту ряда коразмерностей и к возможности определить соответствующий показатель — *экспоненту.* В этом случае все утверждения, являющиеся непосредственным аналогами результатов раздела 0.2.4, имеют место.

Что касается более тонких утверждений, то в ситуации полной общности можно построить примеры, когда экспонента не является целым числом. С другой стороны, размерность Гельфанда–Кириллова для представимой алгебры произвольной сигнатуры есть целое число (см. раздел 1.6.2).

2.3.3. Высота и курошевость для хороших многообразий

В данном разделе техника утоньшения иллюстрируется доказательством следующей теоремы, обобщающей теорему 1.50 (доказываемую в разделе 1.5.2 другим путем):

Теорема 2.5. *Пусть Y – курошево множество (определение 1.51) в алгебре A из хорошего многообразия $\mathfrak{M}$ (см. раздел A.1). Тогда Y имеет ограниченную существенную высоту над Y.*

Доказательство. Пусть D – экстремальная диаграмма Кемера для многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим пространство $S_1(A, D)$, введенное в условиях предложения 2.7. В силу предложения 2.3, определения курошева множества и свойства хорошего многообразия оно конечномерно над операторами $\delta_k(y_i^s)$, где $y_i \in Y$. В силу ограниченности l-длины и моноассоциативности, указанное пространство имеет ограниченную существенную высоту над Y.

Следовательно, для любого конечного множества $L \subset A$ пространство S_L, получающееся из $S_1(A, D)$ путем подстановки элементов из L вместо переменных ξ_{ij}, также имеет ограниченную существенную высоту над Y.

Теперь воспользуемся процедурой утоньшения. Применим следствие 2.9, взяв в качестве L множество всех мономов толщины m (величина m указана в следствии 2.9). Таким образом, A имеет идеал, имеющий ограниченную существенную высоту над Y, фактор по которому имеет строго меньшие сложностные характеристики.

Теперь дело завершает индукция. □

Замечание. По всей видимости, условие “хорошести” многообразия $\mathfrak{M}$ можно ослабить и получить обобщения для алгебр произвольной сигнатуры. Конечномерность $\mathbb{F}[\{\delta_k(y_i)\}]$-модуля вытекает из свойства курошевости, а ограниченность высоты такого модуля формулируется в терминах операторных алгебр от 1-порожденной подалгебры алгебры из $\mathfrak{M}$.

2.4. Нетеровы конечно порожденные PI-алгебры конечно определены

Дж. Бергман построил пример нетеровой конечно порожденной и бесконечно определенной алгебры. Л. Смолл поставил вопрос о конечной определенности нетеровой конечно порожденной алгебры в PI-случае. Условие конечной порожденности необходимо, иначе легко строится контрпример: поле рациональных функций над $\mathbb{C}$. Оно нетерово, но коммутативно и не конечно порождено, и потому не конечно определено.

С другой стороны, условие слабой нетеровости не является достаточным.

Пример. Пусть $E \subset \mathbb{N}$ и алгебра R_E задана тремя образующими a, b, c и системой соотношений:

$$c^2 = b^2 = cb = ab = ca = 0;\ ba^k c = q_1 \text{ при } k \in E;\ ba^k c = q_2 \text{ при } k \in \mathbb{N} \backslash E.$$

Как легко убедиться, кольцо R_E является слабо нетеровым, PI (в нем выполняется тождество $[x_1, y_1][x_2, y_2][x_3, y_3] \equiv 0$), но не конечно определенным (ибо для любого E и натурального n можно указать множество $E' \neq E$, ограничение которого на отрезок $[1, n]$ натурального ряда совпадает с ограничением множества E). И если $E = \{n \in \mathbb{N} | \exists k : 2^{2k} < x < 2^{2k+1}\}$, то в силу леммы 1.20 (примененной к одномерному вектору степени k) кольцо R_E не является представимым.

Замечание. Отметим также, что подалгебра нетеровой конечно определенной PI-алгебры может не быть ни нетеровой, ни конечно определенной. Например, не нетерова алгебра общих матриц является подалгеброй нетеровой алгебры общих матриц со следом.

Данный раздел посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 2.6. *Любая конечно порожденная ассоциативная PI-алгебра конечно определена.*

Пусть A есть нетерова PI-алгебра с заданным конечным набором образующих $\{a_1, \dots, a_s\}$; A_n обозначает алгебру, для которой множество соотношений степени не выше n совпадает с множеством таких соотношений в алгебре A. При $n_1 > n_2$ алгебра A_{n_1} является фактором A_{n_2}. Естественным образом определены проекции $\pi_{n_1,n_2} : A_{n_1} \to A_{n_2}$ и $\pi_n : A_n \to A$. Алгебра A является прямым пределом системы алгебр A_n.

Наша цель — показать, что при достаточно больших n алгебры A и A_n изоморфны.

Вначале (для работы с экстремальными идеалами) будет установлено, что при больших n алгебра A_n является PI-алгеброй, для чего достаточно установить выполнимость системы тождеств Капелли ограниченной толщины. В конечно порожденной PI-алгебре A выполняется некоторая система тождеств Капелли C_k.

Лемма 2.11. *Пусть S есть конечное подмножество нетеровой конечно порожденной алгебры A над ассоциативно-коммутативном кольцом ψ. Тогда существует конечный набор слов $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i=1}^h \subset A$ такой, что для любого $V \in A$ и $s_j \in S$ выполняются равенства:*

$$V s_j = \sum_i \alpha_i v_i s_j u_i, \tag{8}$$

где $\alpha_i \in \Psi$, $v_i \in \mathcal{V}$.

При этом величины α_i, v_i и u_i не зависят от выбора $s_j \in S$ (но зависят от V).

Доказательство. Рассмотрим правый A-модуль N, порожденный векторами $\overrightarrow{f}_V$ вида $(Vs_1,\ldots,Vs_h)$, $V \in A$. Он является подпрямым произведением A-модулей, являющихся идеалами алгебры A, и потому нетеров и конечно порожден. Пусть $\overrightarrow{f}_{v_j} = (v_js_1,\ldots,v_js_h)$ – образующие N, причем v_j можно считать словами. Тогда для любого $V \in A$ элемент $\overrightarrow{f}_V$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{f}_j u_j$, т.е.

$$Vs_j = \sum_i \alpha_i v_i s_j u_i$$

Что и требуется доказать. □

Пусть $\mathcal{V}$ – конечный набор элементов из A, $\{v_i\}$ – набор слов, для которых выполняется заключение предыдущей леммы, k есть максимум их длин. Положим $K(\mathcal{V})$ равным наименьшему такому k для всех допустимых наборов.

Следствие 2.11. *Пусть алгебра A, наборы $\mathcal{V} = \{v_i\}$, $\mathcal{S} = \{s_j\}$ удовлетворяют условиям предыдущей леммы и $k = K(\mathcal{V})$. Тогда алгебра A_k удовлетворяет заключению леммы.* □

Из леммы 2.11 также вытекает

Предложение 2.19. *Пусть I есть двусторонний идеал в нетеровой алгебре A. Тогда I конечно порожден как правый A-модуль. И при всех достаточно больших n прообраз $\pi_n^{(-1)}(I)$ также конечно порожден как правый A_n-модуль.* □

Пусть мы нашли идеал I_n в алгебре A_n, являющийся нетеровым A_n-модулем, причем $I = \pi_n(I_n) \neq 0$. Тогда I также конечно порожден и является нетеровым A_n-модулем (и A-модулем), $\ker(\pi_n)$ конечно порождено и потому при всех достаточно больших m соответствующий идеал I_m изоморфен I как A_n-модуль.

С другой стороны, в силу нетеровости A можно воспользоваться индукционными соображениями и основную теорему можно считать установленной для всех фактор-алгебр. Поэтому можно считать, что при всех достаточно больших m фактор-алгебры A_m/I_m и A/I изоморфны. Но тогда ограничение π_m на I_m является вложением, и, кроме того, является вложением проекция соответствующих фактор-алгебр. Тогда и само отображение π_m является изоморфизмом и основное утверждение доказано.

Искомый экстремальный идеал будет получен путем утончения альтернаторов. Нам понадобится еще одно следствие леммы 2.11 (процесс, описанный в этой лемме, позволяет сократить промежутки между альтернирующимися образованиями):

Следствие 2.12. *Пусть в алгебре A выполняется разреженное тождество толщины h. Тогда при всех достаточно больших n в алгебре A_n также выполняется система разреженных тождеств толщины h.*

Кроме того, для любой системы разреженных тождеств порядка n толщины h при достаточно большом n соответствующий вербальный T-идеал конечно порожден как правый A_n-модуль.

(В частности, если все многочлены из $H(D)$ толщины H обращаются в ноль в алгебре A, то они же обращаются в ноль и в алгебре A_n при всех достаточно больших n.)

Доказательство. В силу леммы 2.11 значение любого такого многочлена линейно представимо его значениями при самой левой прокладке толщины не более $K = K(\mathcal{V})$, где $\mathcal{V}$ есть множество слов длины не более h. Еще раз применяя лемму

2.11 к указанным значениям, получим линейную представимость значениями указанных многочленов при первых двух самых левых прокладках толщины не более K. Последовательно применяя указанную лемму, добиваемся того, чтобы все прокладки имели толщину не более K. А все такие значения линейно представимы словами ограниченной длины. $\square$

Замечание. В случае слабой нетеровости не удается "загнать" s_i к фиксированному краю, поэтому не удается собрать вместе альтернирующиеся подслова (а только в две группы). Соответственно, для слабой нетеровости основное утверждение не имеет места (см. пример в начале этого раздела).

Алгебра A является PI-алгеброй, поэтому в ней выполняется тождество Капелли некоторого порядка k, в частности, выполняется и система тождеств Капелли порядка k толщины k. Следовательно, для некоторого n в алгебре A_n также выполняется система тождеств Капелли порядка k толщины k. Но тогда, в силу процедуры утончения, в той же алгебре A_n выполняется тождество Капелли порядка $2k-1$ и, таким образом, алгебра A_n является PI-алгеброй.

Нам потребуется несколько более сильный результат, который вытекает из только что полученного следствия и предложений 2.13, 2.10 из раздела 2.3:

Предложение 2.20. *При всех достаточно больших n у алгебр A и A_n показатели b, d и k совпадают. При этом в алгебре A_n выполняется система разреженных тождеств порядка m толщины m. Кроме того, в алгебре A_n множество значений полиномов толщины $h = b+2$, отвечающих диаграмме Кемера D, образует конечно порожденный правый нетеров A_n-модуль $N(D)$, содержащий пространство $H(D \cup E)$, и его проекция в алгебру A отлична от нуля.* $\square$

Здесь диаграмма E состоит из m столбцов длины b.

В силу замечаний, сделанных после предложения 2.19, основная теорема вытекает из данного утверждения с помощью очевидной индукции. (Тонкие пространства оказались изоморфны, а толстые альтернаторы оказались промажорированы тонкими. См. также предложение 2.13.)

Замечание. Построенный идеал является экстремальным и в том смысле, что, в силу следствия 2.9, фактор по нему имеет меньшую пару индукционных параметров (b, d). Для конечности спуска достаточно этого обстоятельства, но мы пошли несколько по другому, воспользовавшись нетеровостью алгебры A.

2.5. T-первичные многообразия: центральные полиномы, решение вопроса И. В. Львова

T-первичным называется многообразие алгебр, не содержащее двух ненулевых T-идеалов с нулевым произведением. Это понятие, впервые введенное А. Р. Кемером, есть аналог классического понятия первичности (см. раздел 0.1.2). Данный раздел посвящен изучению T-первичных многообразий. Основными результатами раздела являются доказательства существования центральных полиномов и слабых тождеств, а также решение известного вопроса И. В. Львова из Днестровской тетради [33]:

Существует ли PI-алгебра A, совпадающая со своим коммутатором $[A, A]$?

Мы покажем, что такой алгебры не существует.

Замечание. Ассоциативные алгебры, совпадающие со своим коммутатором, существуют. В случае нулевой характеристики это следует из результата Л. Г. Макар–Лиманова о существовании алгебраически замкнутого тела (хотя можно действовать проще), в положительной характеристике $p > 0$ алгебра указанного типа легко строится индуктивно с помощью следующего соображения. Коммутант алгебры матриц — это в точности матрицы с нулевым следом, а след любой матрицы, состоящей из p одинаковых блоков, идущих вдоль главной диагонали, равен нулю. Поэтому любая конечномерная алгебра A для любого $x \in A$ допускает конечномерное расширение элементами z, t такими, что $[z, t] = x$.

Нам потребуется следующее

Предложение 2.21. *Каждый T-идеал, задающий ненильпотентное многообразие ассоциативных алгебр, содержится в максимальном T-идеале, обладающим этим свойством.*

Доказательство. Условие ненильпотентности многообразия равносильно тому, что соответствующий T-идеал содержит полилинейное слово. Ясно, что объединение возрастающей цепочки T-идеалов, не содержащих полилинейных слов, снова обладает этим свойством. Поэтому в силу леммы Цорна любой T-идеал Γ с ненильпотентным фактором содержится в максимальном T-идеале J, обладающем этим свойством. T-первичность J следует из того обстоятельства, что нильпотентность A/J_1 и A/J_2 влечет нильпотентность A/J_1J_2 и если J_1, J_2 строго содержат J, то их произведение не может содержаться в J. □

Замечание. Пусть A – "квазипервичная" алгебра в следующем инвариантном смысле (см. раздел 0.1.2). Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – такой набор элементов A, что любая перестановка $X \to X$ продолжается до эндоморфизма алгебры A. Тогда если множество X не порождает нильпотентного идеала, то существует фактор $\bar{A} = A/I$, порождающий T-первичное многообразие, причем проекция множества X порождает ненильпотентный идеал. В качестве I можно взять произвольный идеал, максимальный среди инвариантных относительно перестановок элементов из X идеалов, не содержащих полилинейных слов от элементов x_i.

Пусть $A = [A, A]$ есть *PI*-алгебра, совпадающая со своим коммутатором. Тогда среди всех таких алгебр есть универсальная алгебра B, порождающая многообразие $\mathrm{Var}(A)$, удовлетворяющая условиям предыдущего замечания. Тем самым мы имеем

Предложение 2.22. *Если существует PI-алгебра, совпадающая со своим коммутатором, то существует PI-алгебра, совпадающая со своим коммутатором, порождающая T-первичное многообразие.* □

Определение 2.7. Полилинейный полином f называется *слабым тождеством*, если он не является тождеством, но он таковым становится после подстановки коммутатора вместо некоторой переменной.

Если установить, что в T-первичном многообразии есть слабые тождества (предложение 2.29), то алгебра, порождающая такое многообразие, не может совпасть со своим коммутатором и вопрос И. В. Львова получает отрицательное решение:

Теорема 2.8 (Гипотеза И. В. Львова). *Не существует ассоциативной PI-алгебры, совпадающей со своим коммутатором.* □

Известно, что функция следа в T-первичном многообразии может оказаться нулевой. (Примером может служить многообразие $\mathbb{M}_n(\mathbb{G})$, порожденное матрицами над бесконечной алгеброй Грассмана.) Однако мы покажем наличие ненулевой формы.

Другая цель данного раздела состоит в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 2.9. *В произвольном T-первичном многообразии существует центральный многочлен.*

Для случая нулевой характеристики все T-первичные многообразия описаны и существование центральных полиномов установлено. Поэтому можно ограничиться случаем положительной характеристики. Тогда, как показал Кемер, в T-первичном многообразии $\mathfrak{M}$ выполняется некоторое тождество Капелли. Пусть $n+1$ – его порядок и $k \leq n$. Для пары k-мерных векторов $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ определим оператор "смешанного объема" $\delta_k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$:

$$\delta_k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})[C_n(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})] = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} C_n(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|_{x_{i_\alpha} = a_\alpha x_{i_\alpha} b_\alpha}. \tag{9}$$

Из леммы 2.6 следует, что в T-первичном многообразии операторы внутренних форм коммутируют и, кроме того, определены корректно, независимо от записи.

Операторы $\delta_k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ есть линеаризации операторов внутренних форм, являющихся коэффициентами многочленов Гамильтона–Кэли.

Операторы форм в положительной характеристике, вообще говоря, не выражаются через следы. Тем не менее на полилинейном уровне такое представление имеет место.

Предложение 2.23. *Пусть $\delta_k(\overrightarrow{a})$ есть полная линеаризация формы Φ_k, выражающей k-й коэффициент многочлена Гамильтона–Кэли. Тогда имеет место равенство:*

$$\delta_k(\overrightarrow{a}) = \psi\left(\sum_\tau (-1)^\tau \tau\right)|_{a_i \to x_i}. \tag{10}$$

Здесь ψ – оператор из групповой алгебры S_k в пространство, порожденное полилинейными словами от $\{x_1, \ldots, x_k\}$, который был введен в разделе 0.2.4.

Доказательство. Сопоставим выражению $h = \delta_k(u_1, \ldots, u_k)$ произведение следов $f(h) = \mathrm{Tr}(u_1) \cdots \mathrm{Tr}(u_k)$. Если h полилинейно относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ и не зависит от других переменных то сопоставим h элемент $\varphi(h) \in S_n$, положив $\varphi(h) = \psi(f(h))$.

Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, $f = \psi^{(-1)}(\sigma)$, $h = \varphi^{(-1)}(\tau)$. Рассмотрим действие соответствующих внутренних форм. Тогда члены, отвечающие h появляются среди членов, отвечающих f с коэффициентами 0 или 1. При этом все эти коэффициенты равны 1 если подстановка σ получается из τ с помощью следующей операции: *каждый цикл τ режется на несколько частей и каждая часть замыкается в свой цикл.* Иначе все эти коэффициенты нули.

Цикл длины n можно разрезать на k частей ровно $\binom{n-1}{k-1}$ способами, а набор циклов длины которых равны $n_1, \ldots, n_s$ соответственно можно одновременно разрезать на $k_1, \ldots, k_s$ частей $\prod_{i=1}^s \binom{n_i-1}{k_i-1}$ способами.

Заметим также, что четность перестановки из S_n равна $(-1)^n \times$ число циклов. Отсюда следует, что в разложениии, отвечающем правой части равенства (10)

- Члены, отвечающие разложению левой части встретятся с коэффициентом $+1$.

- Пусть $\tau \in S_n$ – перестановка, $n_1, \ldots, n_s$ – ее циклы. Тогда члены, отвечающие разложению $\varphi^{-1}(\tau)$ встретятся с коэффициентом λ равным

$$\sum_{k_1,\ldots,k_s} (-1)^{n+\sum k_i} \prod_{i=1}^{s} \binom{n_i - 1}{k_i - 1}.$$

Остается заметить, что

$$\sum_{k_1,\ldots,k_s} (-1)^{n+\sum k_i} \prod_{i=1}^{s} \binom{n_i - 1}{k_i - 1} = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} \sum_{k_i=1}^{n_i} \binom{n_i - 1}{k_i - 1} =$$

$$= (-1)^{n+\sum n_i} \prod_{i=1}^{s} (1-1)^{n_i - 1} \tag{11}$$

Это выражение обращается в ноль, если хотя бы одно из n_i больше 1. (полагаем $(1-1)^0 = 1$). □

Лемма 2.12. *Пусть многочлен $f(\overrightarrow{y}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен относительно переменных x_i. Пусть $u_i \sqsupseteq z_i$ – слово, содержащее равно одно вхождение переменной z_i и не содержащее вхождений z_j при $j \neq i$, $u_i = u_{i1} z_i u_{i2}$.*

Тогда многочлен

$$\tilde{f} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma f(\overrightarrow{y}, u_1, \ldots, u_n)|_{z_i \to \sigma(z_i)}$$

есть линейная комбинация многочленов вида $\delta_i(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})(g)$

Доказательство. Легко видеть, что знак зависит только от расположения переменных из набора $\{z_i\}$ внутри монома, отвечающего моному многочлена f, и, кроме того, для каждого такого расположения переменных z_i все типы окружений $u_{\tau(i)1} * u_{\tau(i)2}$ для каждой перестановки τ встречаются по разу. □

Таким образом, если некоторый многочлен f, удовлетворяющий условиям данной леммы, — ненулевой, то имеется ненулевой оператор внутренней формы.

Напомним равенство (2) из леммы 2.3

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, \overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{n} F(z, x_1, \ldots, x_n, \overrightarrow{y})|_{z=x_i; x_i=z}.$$

Замечание. В конце этого раздела будет показано, что любое полилинейное T-первичное многообразие можно расширить операторами форм с сохранением набора тождеств. Если многочлен F имеет вид gz, где $g = \sum \alpha_k \Psi_k \in \mathrm{T}(C_n)$ есть многочлен от операторов форм, и в расширенной алгебре выполняется система тождеств C_{n+1}, то равенство (2) означает возможность оставить вне операторов форм только переменные из фиксированного конечного набора (входящего в g). Это обстоятельство можно рассматривать как своего рода "слабую представимость". При локализации относительно g она переходит в обычную представимость и все тождества совпадут с тождествами алгебры матриц.

Построим ненулевой многочлен вида $\tilde{f}$. Пусть f есть произвольный многочлен, полилинейный и кососимметричный относительно набора $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Зафиксируем переменную x_j и представим f в виде $f=\sum_i b_i x_j d_i$.

Пусть многочлены R_1 и R_2 полилинейны и кососимметричны относительно наборов переменных $\{z_1,\ldots,z_n\}$ и $\{y_1,\ldots,y_n\}$ соответственно. Воспользовавшись равенством (2) получим

$$
\begin{aligned}
fR_1R_2 = \sum_i b_i x_j d_i R_1 R_2 = \sum_{i,k} b_i x_j y_k R_1 R_2|_{d_i\to y_k} = \\
= \sum_k \sum_i b_i x_j y_k R_1 e_k d_i g_k = \sum_k f|_{x_j y_k R_1 e_k \to x_j} \cdot g_k.
\end{aligned}
$$

Итак, мы добились того, что вместо любой выбранной переменной x_j оказалось подставлено образование, кососимметричное относительно некоторой группы переменных. Установлено следующее

Предложение 2.24. *Пусть $\mathfrak{M}$ – T-первичное многообразие, в котором выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, но не порядка n. Пусть $g_i = C_n(\overrightarrow{y}_i, \overrightarrow{x}_i)$, $f = C_n(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{z})$, $h = f|_{g_i\to z_i}$. Тогда $h \not\equiv 0$ в $\mathfrak{M}$.* □

Замечание. В доказательстве данного предложения существенно используется ассоциативность. Все другие рассуждения из данного раздела легко переносятся на неассоциативную ситуацию. Более того, если для любого T-первичного подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$ справедливо предыдущее предложение и операция присоединения единицы не выводит из $\mathfrak{M}$, то отсюда будет следовать унитарная замкнутость T-первичных подмногообразий $\mathfrak{M}$ и существование центральных полиномов.

Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ порождено простой алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_n$ с присоединенной единицей (которая не является алгеброй Ли). Предыдущее предложение для многообразия $\mathfrak{M}$ не выполняется, хотя и выполняется для $\mathfrak{sl}_n$. И в многообразии $\mathfrak{M}$ центральных полиномов нет.

Из предыдущего предложения и леммы 2.3 вытекает такое

Следствие 2.13. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть T-первичное многообразие, в котором выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, но не n, g – полилинейный полином, не обращающийся в нуль на $\mathfrak{M}$, h получается из g путем подстановки в g вместо i-й переменной многочлена $C_n(\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{y}_i)$, причем множества переменных, участвующие в этих многочленах, не пересекаются. Тогда h также не обращается в нуль на $\mathfrak{M}$.* □

Если к свободной счетно порожденной алгебре из T-первичного многообразия присоединить единицу, то получится также T-первичное многообразие. Пусть A' получается из A путем присоединения единицы. Тогда $A'[A',A']A' \subseteq A$. В частности, все значения многочлена C_n при $n>1$ в алгебре A' лежат в A. Поэтому в силу предложения 2.24 в многообразии $\mathfrak{M}'$ выполняется система тождеств Капелли того же порядка. Воспользуемся следствием 2.13. Таким образом, установлено следующее

Предложение 2.25. *T-первичное многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр, в котором выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка, унитарно замкнуто.* □

Многообразие всех ассоциативных алгебр также унитарно замкнуто. Кроме того, в случае положительной характеристики в PI-алгебре всегда выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка (см. [148], а также раздел 2.6). Тем самым любое T-первичное многообразие ассоциативных алгебр над полем положительной характеристики на полилинейном уровне унитарно замкнуто. В случае нулевой характеристики имеется классификация T-первичных многообразий. Это многообразия, порожденные соответственно бесконечно порожденной алгеброй Грассмана $\mathbb{G}$, алгеброй $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G}$, алгеброй общих матриц $\mathbb{M}_n$, а также алгеброй $\mathbb{M}_{n,k}^0 \otimes \mathbb{G}^0 + \mathbb{M}_{n,k}^1 \otimes \mathbb{G}^1$ – грасмановой оболочкой простой супералгебры $\mathbb{M}_{n,k}$. Все эти алгебры содержат единицу. Суммируя вышеизложенное, имеем:

Теорема 2.10. *T-первичное многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр унитарно замкнуто (в положительной характеристике на полилинейном уровне).* □

Ранее эта теорема была установлена А. Р. Кемером.

Пусть F полилинеен и кососимметричен относительно двух наборов переменных $\Lambda_1 = \{x_i\}_{i=1}^n$ и $\Lambda_2 = \{z_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 2.3 позволяет осуществлять поглощение не только переменной, но и **позиции**. А именно. Зафиксируем позицию для переменных из Λ_1. Представим F в виде суммы $F = \sum_{i=1}^n F_i$, где F_i отвечает членам, у которых на данной позиции стоит переменная x_i.

Пусть $\bar{H} = \Psi(F, G, \overrightarrow{y})$, где $G = C_n(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{z})$, и Ψ линеен по первым двум аргументам, $H = \sum_i \Psi(F_i, G, \overrightarrow{y})$. Применим к каждому F_i равенство (2) из леммы 2.3 и проведем перегруппировку так, чтобы в каждой группе оказались члены с переменной z_j на зафиксированной позиции, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь H есть многочлен, построенный в предложении 2.24. Разнеся $n-1$ позицию для переменных, относительно которых кососимметричен g_1 по многочленам $g_2, \ldots, g_n$ (и оставив одну внутри g_1), мы получим линейную комбинацию многочленов вида

$$\tilde{f} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma f(\overrightarrow{y}, u_1, \ldots, u_n)|_{z_i \to \sigma(z_i)},$$

удовлетворяющих условиям леммы 2.12. В силу предложения 2.24 все эти члены не могут обратится в ноль. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.11. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть T-первичное многообразие. Тогда если основное поле имеет положительную характеристику, либо $\mathfrak{M}$ регулярно, то в $\mathfrak{M}$ операторы (двусторонних) внутренних форм не все нулевые.* □

(В случае нулевой характеристики данная теорема вытекает из классификации T-первичных многообразий.)

Перейдем к доказательству существования центрального полинома. Расширим свободную алгебру из T-первичного многообразия $\mathfrak{M}$ операторами форм и единицей. Идеал, порожденный многочленом Капелли $C_n = \sum (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} t_1 \ldots t_{n-1} x_{\sigma(n)}$, у расширенной и исходной алгебры совпадает. (Такой идеал называется "киллером форм".) Поэтому, в силу T-первичности, в алгебре с расширенной сигнатурой также выполняется система C_{n+1} (некоторые альтернируемые переменные могут находиться под операторами форм).

Пусть Ψ – ненулевая форма. Подставим вместо переменных, входящих в Ψ, значения полиномов Капелли $C_n(\{y_{ij}\}, \{x_{ij}\})$ (i номер набора, а j – переменной в наборе) от попарно непересекающихся наборов переменных. В силу предложения 2.24 получится ненулевое значение формы, которое обозначим через Ψ'. В силу унитарной замкнутости имеем $\Psi' \cdot 1 = \sum_j \Psi_j \cdot x_{1j}$. Полином с формами $\sum_j \Psi_j \cdot x_{1j}$ лежит в центре расширенной алгебры. Остается подставить вместо переменных x_{1j} значения полинома C_n на непересекающихся наборах переменных (между собой и с остальными переменными, участвующими в образовании формы Ψ). В силу предложения 2.24 получится ненулевой полином. При этом он лежит в исходной алгебре и централен.

Существование центрального полинома в T-первичном многообразии доказано.

Сформулируем еще одну теорему, которая получается из рассуждений данного раздела.

Теорема 2.12. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ (вообще говоря, неассоциативных алгебр) T-первично и унитарно замкнуто. И кроме того, операторная алгебра PI и операторы внутренних форм не обращаются в ноль тождественно. Тогда в многообразии $\mathfrak{M}$ есть центральный полином.* □

Из данной теоремы и предложения А.9 из раздела А.2.1 (утверждающего возможность определить внутренние следы для операторных алгебр) получается такое

Следствие 2.14. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ (вообще говоря, неассоциативных алгебр) порождено первичной конечномерной алгеброй с нетривиальным центром. Тогда в многообразии $\mathfrak{M}$ есть центральный полином.* □

Замечания. 1. Заметим, что ассоциативная алгебра, порожденная операторами ad в простой конечномерной алгебре Ли, является простой и имеет нетривиальный центр. Рассматривая трехосновную алгебру $(L, ad(L), U(L))$ и работая с внутренними следами операторов из $ad(L)$, которые применяются к элементам алгебры Ли L, точно так же можно установить существование центрального полинома в многообразии пар $(L, U(L))$, где L – свободная алгебра Ли из многообразия, порожденного конечномерной простой алгеброй Ли, а $U(L)$ – ее универсальная обертывающая.

2. Если многочлен F полилинеен и кососимметричен относительно переменных из двух групп $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, то $F|_{ax_ib \to x_i \forall i} = F|_{ay_i \to y_i; x_ib \to x_i \forall i}$ по модулю $\mathrm{T}(C_{n+1})$. Поэтому можно "перебрасывать" "левые" и "правые" подстановки из одной группы n антикоммутирующих переменных на другую. (В алгебре матриц этим подстановкам отвечает оператор $\det(a)^n \det(b)^n$.) Однако подход, связанный с линеаризацией "внутреннего определителя" – подстановки $ax_ib \to x_i \forall i$ встречает трудности, поскольку левые и правые подстановки, возникающие при таких линеаризациях ($x_i \to x_ib_j$, $x_i \to a_jx_i$), ведут себя независимо и выражения устроены симметрично.

Из унитарной замкнутости следует, что если T-первичное многообразие задано полилинейными тождествами, то в нем при любом n не выполняется тождество вида $x^n = 0$. Поскольку любое ненильпотентное многообразие имеет T-первичный фактор, то из рассуждений в начале данного параграфа следует

Предложение 2.26. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть ненильпотентное многообразие, заданное своими полилинейными тождествами. Тогда в нем не выполняется тождество $x^n = 0$ при всех n.* □

Тем самым локально нильпотентные ненильпотентные многообразия только полилинейными тождествами порождаться не могут и мы имеем еще одно доказательство теоремы Нагаты–Хигмана для бесконечно порожденных алгебр над полем нулевой характеристики. В этом случае любое многообразие задается полилинейными тождествами и в ненильпотентном многообразии тождество $x^n \equiv 0$ выполняться не может.

Комбинируя результат данного предложения и леммы 2.4, имеем, что если $\mathfrak{M}$ есть T-первичное многообразие, в котором выполняется тождество Капелли порядка n и которое задано своими полилинейными тождествами, то для некоторого $k \leq n$ оператор вида $\delta_k(a)$ ненулевой. Если $\mathfrak{M}$ нерегулярно, то $\delta_1(x) \equiv 0$. В любом случае (это будет показано ниже) полная линеаризация операторов δ_k выражается через следы — оператор δ_1. Поэтому в нерегулярном случае полная линеаризация операторов δ_k нулевая и, следовательно, $\delta_k(x) \equiv 0$ при $k < p = \mathrm{ch}(\mathbb{F})$.

Продолжим изучение T-первичных многообразий.

Поскольку формы δ_k не все нулевые, из предложения 2.23 следует, что оператор $\delta(a,b) = \delta_1(a,b)$ ненулевой.

Предложение 2.27. *Имеет место равенство*

$$\delta([a_1,a_2],b) = \delta(a,[b_1,b_2]) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Из определения внутреннего следа непосредственно следует равенство

$$[\delta(a,b),\delta(c,d)] = \delta([ac],bd) + \delta(ca,[bd]).$$

При этом $[\delta(a,b),\delta(c,d)] = 0$.

Пусть слово $w = w_1w_2 = u_1u_2$. Тогда из предыдущего тождества следует, что $\delta(ca,[w_1,w_2]) = \delta(ca,[u_1,u_2])$, и в силу унитарной замкнутости T-первичных многообразий имеет место тождество

$$\delta(a,[u_1,u_2] - [w_1,w_2]) \equiv 0.$$

Остается заметить, что $[x, y \cdot 1] = [x,y] - [xy,1]$.

Равенство $\delta([a_1,a_2],b) = 0$ доказывается аналогично. □

Итак, определен ненулевой оператор $\mathrm{Tr}_b(a) = \delta(a,b)$, обладающий некоторым полезными свойствами оператора Tr, в частности, $\mathrm{Tr}_b(a_1a_2) = \mathrm{Tr}_b(a_2a_1)$. Кроме того, из леммы 2.3, предложения 2.24 и следствия 2.13 вытекает

Предложение 2.28. *Пусть $\mathfrak{M}$ – T-первичное многообразие над полем положительной характеристики, A – относительно свободная бесконечно порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. Тогда $h \neq 0$ в A тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tr}_y(ax) \neq 0$ для некоторых x, y.* □

Поскольку $\mathrm{Tr}_b([c,d]) \equiv 0$ и $\mathrm{Tr}_b(c) \not\equiv 0$, многочлен

$$g = \mathrm{Tr}_b(a)C_n = \sum_i C_n(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|_{x_i \to ax_ib}$$

является слабым тождеством в T-первичном многообразии ранга n (т.е. в котором выполняется C_{n+1}, но не C_n).

Итак, имеем

Предложение 2.29. *В T-первичном многообразии ассоциативных алгебр есть слабые тождества.* □

Замечание. Анализ рассуждений данного раздела показывает, что для доказательства существования слабых тождеств достаточно, чтобы выполнялась система C_{n+1}, но n-я степень идеала, порожденного C_n, была ненулевой. Для существования центрального полинома достаточно, чтобы ненулевой была степень указанного идеала порядка n^2.

Поэтому для T-первичных многообразий в положительной характеристике работает техника двойственности. Докажем свойство устойчивости.

Определение 2.13. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым*, если для любого тождества $f = \sum u_i x v_i$, линейного по переменной x, выполнимость f равносильна выполнимости тождества $f^* = \sum v_i x u_i$.

Понятие устойчивости было введено В. Н. Латышевым.

Теорема 2.14. *T-первичное многообразие $\mathfrak{M}$ устойчиво.*

Доказательство. Для случая нулевой характеристики данная теорема является результатом С. В. Охитина [94] (полученным на основе Кемеровской классификации T-первичных многообразий над полем характеристики 0). Поэтому мы докажем это для случая положительной характеристики основного поля. Случай многообразия всех ассоциативных алгебр тривиален, а в PI-случае положительной характеристики выполняется система тождеств Капелли.

Пусть $g = \sum_i c_i x d_i = 0$ в $\mathfrak{M}$, g линейно по переменной x. В силу предыдущего предложения это равносильно тому, что $\mathrm{Tr}_z(\sum_i c_i x d_i y) = 0$ для всех z. Достаточно проверить равенство $\sum_i d_i z c_i = 0$ для всех z. Тогда, специализировав z в x и воспользовавшись предыдущим предложением, получим $\sum_i d_i x c_i = 0$, и условие устойчивости проверено.

Но $\mathrm{Tr}_z(\sum_i c_i x \cdot d_i y) = \mathrm{Tr}_z(\sum_i d_i y \cdot c_i x)$, откуда и получается требуемое. □

Замечание. Первоначально понятие *устойчивости* определялось в нулевой характеристике, поэтому в монографии [108] содержится ссылка, что “в работе [94] доказана устойчивость T-первичных многообразий”. На самом деле в указанной работе это сделано только в случае нулевой характеристики.

Из предыдущей теоремы и неравенства нулю формы δ_1 для T-первичных многообразий над полем положительной характеристики получается такое

Следствие 2.15. *Если $\mathfrak{M}$ есть T-первичное многообразие, то многообразие $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ регулярно.*

Доказательство. Для случая положительной характеристики это вытекает из устойчивости и наличия ненулевого следа в алгебре умножений $L[A] \otimes R[A]$ для относительно свободной алгебры A. При этом $L[A] \simeq A$, $R[A] \simeq A^{op}$ и в силу устойчивости $A^{op} \simeq A$.

Для случая нулевой характеристики это следует из классификации T-первичных многообразий, ибо $\mathbb{G} \otimes \mathbb{G} = \mathbb{M}_{1,1}$, $\mathbb{M}_{p,q} \otimes \mathbb{M}_{r,s} = \mathbb{M}_{pr+qs,ps+qr}$, $\mathbb{M}_{pq} \otimes \mathbb{G} = \mathbb{M}_{p+q} \otimes \mathbb{G}$, и $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G} \otimes \mathbb{M}_m \otimes \mathbb{G} = \mathbb{M}_{nm,nm}$. □

Замечание. Чтобы определить след вне зависимости от параметра b, достаточно установить тождество $\delta(a,b)\delta(c,d) = \delta(c,b)\delta(a,d)$. Однако в случае грассмановой алгебры перестановка образующих ведет к умножению на -1 и данное тождество места не имеет. По той же причине в грассмановой алгебре $\delta(a,b) \not\equiv \delta(b,a)$.

Вместе с тем, поскольку $\mathrm{Tr}(L(a) \otimes R(b)) = \mathrm{Tr}(\delta_1(L(a) \otimes 1 \cdot 1 \otimes R(b)) = \mathrm{Tr}(\delta_1(L(a) \otimes 1)\, \mathrm{Tr}(1 \otimes R(b)) - \delta_2(1 \otimes R(b)), L(a) \otimes 1)$ в операторах форм переменные a, b в слабом смысле разделяются. В сильном смысле они не могут разделиться, ибо тогда будут ненулевыми и операторы внутреннего следа, что невозможно в нерегулярном случае.

В нерегулярном случае $\mathrm{Tr}_b(Z) = 0$ для любого центрального элемента Z. Иначе можно определить односторонние следы.

Примеры. 1. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) > 2$, $\mathbb{G} = \mathbb{G}^0 + \mathbb{G}^1$ – бесконечно порожденная алгебра Грассмана с единицей над $\mathbb{F}$. Тогда в $\mathbb{G}$ выполняется тождество Капелли порядка $p+1$, но не порядка p. Если подставлять в C_p специализации переменных из $\mathbb{G}^0$ и $\mathbb{G}^1$, то ненулевой результат получается, если одна из переменных имеет четную специализацию, а $p-1$ – нечетную. Легко видеть, что если $a \in \mathbb{G}^0$ или $b \in \mathbb{G}^0$, то $\mathrm{Tr}_b(a) = 0$. Если же $a, b \in \mathbb{G}^1$, то $\mathrm{Tr}_b(a)$ есть оператор умножения на $2ab$. (Если $a, b \in \mathbb{G}^1$, то в $p-1$ случае $ax_ib = -abx_i$ и в одном случае $ax_ib = -abx_i$, для переменной x_i с четной специализацией элемент $ab \in \mathbb{G}^0 \subset Z(\mathbb{G})$.) Легко видеть, что $\mathrm{Tr}_b(a)$ есть оператор умножения на коммутатор $[a, b]$.

2. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 2$, $\mathbb{G}$ есть грассманова алгебра в характеристике 2, т.е. бесконечно порожденная алгебра с единицей, образующими x_i и соотношениями $[x_i, x_j] = \varepsilon_i\varepsilon_j x_i x_j$; $\varepsilon_i^2 = 0$, ε_i – центральные переменные (см. глава 7 раздел 7.1). Непосредственно проверяется, что тогда в алгебре $\mathbb{G}$ выполняется тождество C_5, но не выполняется C_4. И, кроме того, $\mathrm{Tr}_{x_i}(x_j) = \varepsilon_i\varepsilon_j R(x_i x_j)$, где $R(u)$ – оператор правого умножения на u. Таким образом, и в этом случае $\mathrm{Tr}_b(a)$ есть оператор умножения на коммутатор $[a, b]$.

3. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) > 2$, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\mathbb{M}_{nk})$. Тогда в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество Капелли порядка $n^2 + k^2 + 2nk(p-1) + 1$, но не порядка $n^2 + k^2 + 2nk(p-1) \equiv (n-k)^2 (\mod p)$. В этом случае $\mathrm{Tr}(1) = \delta_1(1) = (n-k)^2$, если его определять внутренним образом через подстановки. Если же его отнормировать, разделив на максимальный порядок многочлена Капелли, не выполняющегося в алгебре (см. равенства (2) из раздела 0.2.3), то получится, что $\mathrm{Tr}(1) = n - k$ – ожидаемый результат.

4. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) > 2$, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G})$. Тогда в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество Капелли порядка $n^2p + 1$, но не порядка n^2p. В этом случае

$$\mathrm{Tr}_x(y) = \sum_i [x_{ii}, y_{ii}]$$

и $\mathrm{Tr}_y(1) = \mathrm{Tr}_1(y) = 0$.

Известно, что в устойчивом многообразии наличие центральных полиномов равносильно наличию слабых тождеств [108]. Это позволяет указать явно центральные полиномы.

Пусть $Z = \sum_i c_i x d_i \neq 0$ есть центральный полином, т.е. $[Z, t] \equiv 0$ или

$$0 \equiv \mathrm{Tr}_b(\sum_i c_i x d_i t y - \sum_i t c_i x d_i y) = \mathrm{Tr}_b(\sum_i d_i [y, t] c_i x),$$

что равносильно условию $\sum_i d_i [y, t] c_i \equiv 0$, но в силу предложения 2.28 $\mathrm{Tr}_b(Zy) \not\equiv 0$ и $0 \neq \mathrm{Tr}_b(Z) = \mathrm{Tr}_b(\sum_i d_i y c_i x) \not\equiv 0$, последнее неравенство опять-таки в силу предложения 2.28 равносильно условию $\sum_i d_i y c_i \neq 0$. Мы построили слабое тождество $h = \sum_i d_i y c_i$.

Можно действовать и в обратном направлении. Если $h = \sum_i d_i y c_i \neq 0$, но $\sum_i d_i [y, t] c_i \equiv 0$, то $\tilde{h} = \sum_i c_i x d_i$ есть центральный полином. Пусть

$$h = \mathrm{Tr}_b(y) \cdot C_n(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{z}),$$

тогда соответствующий центральный полином $\tilde{h}$ можно указать явно:

$$\tilde{h} = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\sigma(i) = k} (-1)^\sigma (-1)^k b t_k z_{\sigma(k+1)} \dots z_{\sigma(n)} t_n x t_0 z_{\sigma(1)} \dots z_{\sigma(k-1)} t_{k-1}.$$

2.6. О тождествах ассоциативных алгебр в характеристике p

Данный раздел посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 2.15. *В случае характеристики $p > 0$ в любой относительно свободной алгебре выполняются все тождества алгебры матриц некоторого порядка.*

Доказательство мы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. В работе А. Р. Кемера [148] установлено, что в любой ассоциативной PI-алгебре выполняются все полилинейные тождества алгебры матриц некоторого порядка, в частности некоторое тождество Капелли C_n.

Шаг 2. Из результатов работы К. А. Зубрилина [42], изложенных в разделе 2.1, препятствие к тождеству Гамильтона–Кэли имеет индекс нильпотентности не превышающий 2^n (с помощью техники, изложенной в начале этой главы (см. теорему 2.1), можно улучшить оценку до $s \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$).

(Если расширить алгебру с тождеством Капелли порядка n, присоединив операторы взятия форм (конструкции и свойства таких операторов изложены в работе [55]), и наложить тождество Гамильтона–Келли, то ядро, возникающее при этой конструкции, нильпотентно степени не выше s.)

Шаг 3. В силу результатов А. Н. Зубкова [41], из системы тождеств с формами типа Гамильтона-Келли следуют все тождества алгебры матриц некоторого порядка.

Шаг 4. Из результатов Ж. Левина [151] следует, что если I – идеал степени нильпотентности q в алгебре A, то A есть фактор полупрямого произведения q экземпляров факторалгебр A/I. В нашем случае $q = 2^n$ (или, если пользоваться теоремой 2.1, можно положить $q = s \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$), A – PI-алгебра с тождеством Капелли порядка n, I – ядро, возникающее при расширении формами. При этом в факторе A/I выполняются все тождества матриц n-го порядка.

Шаг 5. Остается заметить, что полупрямое произведение q экземпляров алгебры матриц порядка n вкладывается в матричную алгебру порядка qn. Поэтому в A выполняются все тождества такой матричной алгебры порядка $\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{12}$.

$\square$

Отметим, что в случае нулевой характеристики аналог этой теоремы не имеет места: в любой конечно-порожденной алгебре выполняется тождество Капелли некоторого порядка, а в грассмановой алгебре — нет.

2.7. Тождество алгебраичности

Данный раздел посвящен работе с тождеством алгебраичности.

Если в многочлен Капелли вместо альтернирующихся переменных x_i подставить степени одного и того же элемента, то получится система тождеств сильной алгебраичности. При этом максимальный порядок многочлена Капелли, для которого возможен ненулевой результат, может уменьшиться (для алгебры общих матриц порядка n он равен n, в то время как максимальный порядок многочленов Капелли с ненулевым значением равен n^2). Рассматривая результаты такого рода подстановок степеней одного элемента y в многочлены Капелли, можно получить утверждения, аналогичные утверждениям раздела 2.1, только вместо препятствий к алгебраичности всех элементов алгебры будут фигурировать препятствия к алгебраичности одного элемента y. Соответствующие утверждения легко переписываются и аналоги операторов $\delta_k(y)$ определяются как вставки. При этом аналог утверждений о переброске (см. следствие 2.4) не нужен, ибо коммутируемость аналогов операторов $\delta_k(y)$ выполняется автоматически. Поскольку для конечномерности достаточно алгебраичности конечного числа элементов (например, всех слов от образующих длины не выше сложности), то данный путь приводит к тем же структурным результатам, но с, возможно, худшими оценками. Разумеется, данный путь можно осуществить и для курошевых многообразий.

Отметим, что А. Р. Кемер, рассматривая результаты подстановки степеней одного элемента в многочлены с несколькими группами антикоммутирующих переменных, аналогично характеристике многообразия $b(A)$ получил характеристику $a(A)$. При этом были доказаны некоторые аналоги утверждений из раздела 3.3, в частности, аналог леммы 3.6.

2.7.1. Выполнимость тождеств алгебраичности

Определение 2.16. Пусть I — мультииндекс, $I=(i_1,\ldots,i_r)$, $|I|=\sum_\alpha i_\alpha$. Тождество вида

$$f=\sum_{\sigma\in S_{r+1}}\sum_{|I|=N}\lambda_I c_0x^{i_1}c_1x^{i_2}\ldots x^{i_r}c_r=0$$

называется *тождеством слабой алгебраичности порядка r*. Тождество вида

$$f=\sum_{|I|=N}\lambda_I c_0x^{i_1}c_1x^{i_2}\ldots x^{i_r}c_r=0$$

называется *тождеством алгебраичности порядка r*. Если вместе с тождеством f для любой перестановки $\sigma\in S_r$ выполняется тождество f_σ:

$$f_\sigma=\sum_{|I|=N}\lambda_I c_0x^{i_{\sigma(1)}}c_1x^{i_{\sigma(2)}}\ldots x^{i_{\sigma(r)}}c_r=0,$$

то тождество f называется *тождеством сильной алгебраичности порядка r*. *Глубина $D(f)$* тождества f (сильной, слабой) алгебраичности есть максимальная степень переменной x, которая участвует в одном из слагаемых.

Ясно, что $D(f)<N$ и $\deg(f)=N+r+1$.

Докажем, что в PI-алгебре степени m выполняется тождество сильной алгебраичности.

Теорема 2.17. *В любой PI-алгебре степени m выполняется система тождеств вида*

$$(-1)^\sigma c_0x^{i_{\sigma(0)}}c_1x^{i_{\sigma(1)}}c_2\cdots x^{i_{\sigma(m)}}c_m \tag{13}$$

Зафиксируем переменные $c_0,\ldots,c_r$ и x. С каждым многочленом f вида

$$f=\sum_{|I|=N}\lambda_I c_0x^{i_1}c_1x^{i_2}\ldots x^{i_r}c_r$$

свяжем многочлен $S(f)\in\mathbb{K}[\gamma_1,\ldots,\gamma_r]$ от r коммутирующих переменных

$$S(f)=\sum_{|I|=N}\lambda_I\gamma_1^{i_1}\gamma_2^{i_2}\cdots\gamma_r^{i_r},$$

который будем называть *символом многочлена* f; γ_i есть *операторы вставки* в соответствующие места степеней переменной x. И обратно, с многочленом

$$g = \sum_{|I|=N} \lambda_I \gamma_1^{i_1} \gamma_2^{i_2} \cdots \gamma_r^{i_r}$$

свяжем многочлен

$$\theta(g)(x, c_0; c_1, \ldots, c_r) = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_1} c_1 x^{i_2} \ldots x^{i_r} c_r.$$

Докажем наличие тождества сильной алгебраичности в произвольной PI-алгебре. Данное утверждение было впервые доказано А. Р. Кемером. С его помощью было показана локальная выполнимость тождества Капелли, и тем самым, в силу результата Ю. П. Размыслова, нильпотентность радикала в нулевой характеристике. Впоследствии [164] автор получил другое доказательство этого факта с использованием техники "перекачки".

Перейдем к **доказательству.** Рассмотрим операторы

$$\mathrm{AD}_{ij}(f) = f|_{c_i \to c_i x} - f|_{c_j \to x c_j},$$

действующие на многочленах, полилинейных по каждому c_i. В свободной алгебре оператор AD_{ij} обращает в ноль члены, содержащие множители $c_i x^k c_j$ $(k \geq 0 \in \mathbb{Z})$, и не обращает в ноль остальные члены. С помощью операторов AD_{ij} легко уничтожить все полилинейные произведения, в которых порядок следования c_i отличен от их следования в члене $P = c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \cdots x^{k_r} c_r$. При этом сам P в ноль не обратится и возникнет выражение, отвечающее правой части тождества алгебраичности:

$$f_\sigma = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_{\sigma(0)}} c_1 x^{i_{\sigma(1)}} c_2 \cdots x^{i_{\sigma(r-1)}} c_r$$

Покажем, что это выражение обращается в ноль в любой PI-алгебре с полилинейным тождеством степени r. В самом деле. С помощью тождества вида

$$y_1 \cdots y_r = \sum_{\sigma \in S_r \setminus Id} \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(r)}$$

член $c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \cdots x^{k_r} c_r$ перерабатывается в линейную комбинацию членов, в которых порядок следования c_i нарушен и применение композиции "расталкивающих операторов" AD_{ij} каждый такой член обращает в ноль.

Суммируя приведенные рассуждения, имеем следующее

Предложение 2.30. *Многочлен f есть тождество в алгебре степени m, если $r = m$ и $S(f)$ делится на значение определителя Ван–Дер–Монда $\prod_{i<j}(\gamma_i - \gamma_j)$.* □

Следствие 2.16. *Для любых натуральных $i_1, \ldots, i_n$ в любой алгебре степени m выполняется следующее тождество*

$$\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma c_0 x^{i_{\sigma(0)}} c_1 x^{i_{\sigma(1)}} c_2 \cdots x^{i_{\sigma(m)}} c_m \qquad (14)$$

□

Таким образом, имеем

Предложение 2.31. *а) В PI-алгебре степени m выполняется тождество сильной алгебраичности. При этом r можно положить равным m.*

б) Если в PI-алгебре выполняется тождество слабой алгебраичности, то в ней выполняется тождество сильной алгебраичности того же порядка. □

Замечания. 1. Мы пользовались техникой расталкивающих замен в простейшей ситуации. Данная техника важна для доказательств конечной базируемости. Ей посвящен раздел 5.4.

2. Пусть

$$g = \prod_{i=2}^{k} (\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \prod_{2 \le i < j \le k} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Тогда многочлен

$$c(x, y_1, \ldots, y_k) = \theta(g)(x, 1, y_1, \ldots, y_k)\theta(g)(x, 1, y_2, \ldots, y_k, y_1) + \\ + \cdots + \theta(g)(x, 1, y_k, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

есть центральный полином Э. Форманека [144] для матриц порядка k.

2.7.2. Алгебраичность и тождество Капелли

Рассмотрим пару (A, B), A – алгебра, B ее подалгебра. Пусть B порождена одним элементом b и, стало быть, коммутативна. Рассмотрим систему относительных многочленов Капелли $C_n^{(A,b)}$, для которых вместо альтернируемых переменных x_i подставляются элементы из B, а вместо “прокладок” y_i – элементы из A. Если такой многочлен обращается в нуль при всех таких подстановках, то мы утверждаем, что выполняется *система относительных (по b) тождеств Капелли $C_n^{(A,b)}$ порядка n*. Относительные тождества Капелли суть тождества пары (A, B). Если при этом в качестве элементов B подставляются степени $b \in B$, то получаются многочлены типа тождества алгебраичности. Если в алгебре A для любого $b \in A$ выполняется система $C_n^{(A,b)}$, то это значит выполнимость некоторой системы сильных тождеств алгебраичности. Верно и обратное.

Пусть в алгебре A выполняется система $C_{n+1}^{(A,b)}$. Для относительного многочлена $F \in C_n^{(A,b)}$ для любого $\beta \in B$ определим относительные формы $\delta_\beta^{k,(A,b)}$ с помощью равенства

$$\delta_\beta^{k,(A,b)}(F) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} F(\overrightarrow{y}, x_1, \ldots, x_n)|_{x_{i_1} = \beta x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} = \beta x_{i_k}}; \tag{15}$$

и

$$\mathrm{Tr}_\beta^{(A,b)}(F) = \delta_\beta^{1,(A,b)}(F)$$

Ясно, что $\mathrm{Tr}_{\beta_1\beta_2}^{(A,b)}(F) = \mathrm{Tr}_{\beta_2\beta_1}^{(A,b)}(F)$ и операторы вида $\delta_{\beta_i}^{k,(A,b)}$ коммутируют.

В ассоциативном случае для относительных тождеств Капелли очевидным образом проходят те же конструкции, что и для обычных тождеств и доказательства аналогов утверждений из раздела 2.1 проходят без изменений. Сформулируем те из них, которые полезны для доказательства нильпотентности радикала. Мы их суммируем в виде одной теоремы.

Теорема 2.18. *а) Пусть относительный многочлен $F(y, \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, $\beta_1, \beta_2 \in B$. Тогда по модулю $C_{n+1}^{(A,b)}$ выполняется равенство (теорема Гамильтона–Кэли):*

$$F(\beta_1^n \beta_2, \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n) = \sum_k (-1)^k \delta_{\beta_1}^{k,(A,b)}(F(\beta_1^{n-k}\beta_2, \overrightarrow{z}, x_1, \ldots, x_n))$$

б) Пусть в алгебре A выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$ и пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по переменным $\{x_i\}_{i=1}^n; \{z_i\}_{i=1}^n$. Тогда значение $\delta_\beta^{(A,b)}(F)$ не зависит от того, какие группы переменных $\{x_i\}$ или $\{z_i\}$ используются (которым отвечают элементы подалгебры B).

в) Пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по одному набору из n переменных Λ и кроме того, F линеен по переменной x_0, не входящей в набор Λ, v принадлежит препятствию к алгебраичности элемента b порядка n. Тогда $F_h = F|_{h \to x_0} \equiv 0$ по модулю $C_{n+1}^{(A,b)}$.

г) Пусть $Y = \{b_i\}_{i=1}^m$ курошево множество. Рассмотрим систему алгебр $\{B_i\}$. Естественно определяются система относительных многочленов Капелли и система операторов типа δ. Тогда подпространство $\mathrm{T}(g)$, кососимметрическое по наборам переменных из Λ_i, является нетеровом модулем над относительными операторами Tr, δ_k.

д) Пусть $Y = \{b_i\}_{i=1}^m$ произвольное множество и для любого $b \in A$ в алгебре A выполняется система $C_n^{(A,b)}$. Тогда препятствие к алгебраичности порядка n всех элементов из Y нильпотентно индекса не выше nm. Если при этом Y курошево, то некоторое препятствие к представимости нильпотентно индекса не выше nm.

Поскольку в представимой алгебре радикал нильпотентен, теорема Размыслова–Кемера–Брауна вытекает из данной теоремы и следствия 2.16, утверждающей выполнимость систем $C_n^{(A,b)}$.

А. Р. Кемер рассматривал также величину $a(A)$ – сумму размеров матричных клеток, отвечающих первичным компонентам, и величину $a_1(A)$, определенную таким же образом, как и $b_1(A)$, с той только разницей, что в переменные из каждого набора Λ_i подставляются различные степени одного и того же элемента. Эта величина оказывается равной минимально возможному порядку тождества алгебраичности. Лемма в работе [52], аналогичная лемме 3.6, показывает, что величина $a_1(A)$ совпадает со сложностью Латышева.

2.7.3. Представимые пространства

Для многочленов типа тождества алгебраичности можно получить утверждения, аналогичные результатам раздела 2.2. Рассмотрим в относительно свободной алгебре из многообразия $\mathfrak{M}$ пространство S_k многочленов, степени не выше 1 относительно переменных из набора $\{c_i\}_{i=1}^k$ и зависящих еще от одной переменной x.

Подстановки вида $P(x)c_i \to c_i$ и $c_iP(x) \to c_i$ ($P(x)$ – произвольный многочлен от одной переменной) коммутируют между собой и задают на пространстве S_k структуру нетерового модуля над ассоциативно коммутативным кольцом. Кроме того, все такие подстановки являются T-пространственными операциями. Поэтому имеет место следующее утверждение:

Предложение 2.32. *Для любого многообразия $\mathfrak{M}$ пространство $S_k(\mathfrak{M})$ представимо, более того, решетка пересечений S_k с T-пространствами изоморфна аналогичной решетке для подмногообразия $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, порожденного некоторой представимой алгеброй.* □

В неассоциативном случае надо потребовать ассоциативность степеней и наличие структуры нетерова модуля относительно операторов подстановок $P(x)c_i \to c_i$; $c_iP(x) \to c_i$. Поэтому предложение 2.32 справедливо и для хороших многообразий (см. определение A.1 из раздела A).

Таким образом, богатство полугруппы эндоморфизмов влечет представимость.

2.7.4. Виртуальные операторы

В данный раздел посвящен формализму виртуальных операторов — “операционноу исчисление” для операторов, действующих на записях. (т.е. вместе с таким оператором рассматривается представления элементов в виде, позволяющим его применять). В качестве иллюстрации дается набросок доказательства теоремы 1.50. Автор убежден, что такого рода формализм может оказаться полезным довольно часто. Наша цель — изложить только основные идеи. Подробности — см. работу [174].

Нас будут интересовать *частичные тождества*, когда вместо переменной x_i можно подставлять только степени соответствующего ей элемента y_i. Займемся **группировкой членов** в тождестве (сильной) алгебраичности. Упорядочим мультииндексы I лексикографически, слева направо.

Определение 2.19. Пусть $f = \sum_{|I|=n} \lambda_I F(\overrightarrow{y}; x^{i_1}, \dots, x^{i_n})$ – система тождеств сильной алгебраичности. Запишем его члены в порядке убывания мультииндекса $I = (i_1, \dots, i_n)$. Рассмотрим такие члены, что $\lambda_I \neq 0$. Определим

$$I_1 = \max(i_1);\ I_2 = \max_{i_1=I_1}(i_2); \dots;\ I_n = \max_{i_1=I_1,\dots,i_{n-1}=I_{n-1}}(i_n).$$

n-хвостом f назовем само f, а *$n-k$-хвостом* f – выражение

$$\sum_{i_1=I_1,\dots,i_k=I_k} \lambda_I F(\overrightarrow{y}; x^{i_1}, \dots, x^{i_n})$$

Аналогичным образом определяются *хвосты тождества алгебраичности* а также *хвосты частичных тождеств*. Отметим, что хвосты тождества (сильной) алгебраичности ведут себя как (сильная) алгебраичность.

Указанная группировка осуществяется для следующей цели. Мы стремимся “откачать” вхождения переменной x, находящееся между c_0 и c_1 направо, а если это не удается — то откачать направо вхождения из второго “кармана” (между c_1 и c_2) и т.д.

Модельный пример. Рассмотрим случай, когда выполняется система частичных тождеств алгебраичности порядка 2 на элементы из Y. (Система таких частичных тождеств первого порядка означает нильпотентность элементов из Y. Тогда вся алгебра, в силу условия курошевости, конечномерна, т.е. имеет ограниченную существенную высоту над пустым множеством.)

Запишем частичное тождество алгебраичности двумя способами:

$$y_i^n C y^r = \sum_{k=1}^n \lambda_{ki} x^{r+n-k} C x^{r+k};\ \lambda_{ki} \in \mathbb{F}.$$

$$y_i^n C y^r = \sum_{k=1}^n \lambda'_{ki} x^{r+k} C x^{r+n-k};\ \lambda'_{ki} \in \mathbb{F}.$$

Первая запись будет использована при выносе степеней направо, вторая — налево.

Займемся теперь условием “курошевости” множества Y. Расширим алгебру A центральными константами a_{ij} и рассмотрим фактор алгебры $\mathbb{F}[a_{ij}]\otimes A$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$y_i^n - \sum_k a_{ik} y_i^{n-k}$$

Получившаяся алгебра A' цела и конечномерна над кольцом $\mathbb{F}[a_{ij}]$ (элементы A и их естественные образы когда нет недоразумений, обозначаются одинаково).

Дальнейшие рассужения мы разобъем на этапы.

1. Y можно считать подмножеством множества образующих A. Далее, для любого фиксированного R достаточно показать ограниченность существенной высоты для произведения всех идеалов $y_i^{(R)}$, порожденных R-ми степенями элементов из Y. Этот идеал линейно представим словами, содержащими R-ю степень каждой буквы из Y. Такие участки будут называться *большими степенями*.

В самом деле: рассмотрим фактор $A/y_i^{(R)}$ и набор $Y' = Y\backslash\{y_i\}$. Проекция Y' является курошевым множеством в алгебре A' и дело завершает индукция по числу элементов курошева множества Y.

2. Отметим в слове участки, являющиеся R-ми степенями y_i. Туда мы будем перекачивать содержимое остального. В конце концов, слова приведутся к виду произведений степеней переменных y_i между которыми стоят участки ограниченной длины. Такое приведение означает установление ограниченности существенной высоты над Y, ибо конечное множество $D(Y)$ из определения существенной высоты можно взять состоящее из таких “прокладок”.

Определим оператор вставки τ_i, который увеличивает только что зафиксированную “большую” степень y_i на 1. Подчеркнем, что этот оператор определен в только на записях и результат его применения зависит от представлении элемента в указанном виде, в частности, от фиксации большой степени.

Ясно, что операторы τ_i коммутируют.

3. Итак, зафиксируем в слове w вхождение “больших” (т.е. бóльших R) степеней элементов y_i для каждого i. Слово w разбивается на такие участки и промежутки между ними. Будем обрабатывать последние по-одному. Достаточно добиться того, чтобы данный участок имел длину не выше h, где h – некоторая константа, определенная для всей алгебры.

Итак, зафиксировали участок P слова w. Для каждого y_i можно сказать, находится ли участок, состоящий из его степени левее v или правее. В зависимости от этого выберем “операционную” интерпретацию умножения на добавленные переменные a_{ij}.

Если указанная степень элемента y_i находится правее P, то будем интерпретировать умножение на a_{ik} оператором $\lambda_{ki}\tau_i^k$, а если она находится левее — то оператором $\lambda'_{ki}\tau_i^k$.

4. Воспользуемся условием “курошевости” набора Y. Каждый участок P можно представить в виде

$$\sum_l \lambda_{l,\overrightarrow{k}} \prod a_{ij}^{k_{ijl}} P_{ijl};$$

где $\overrightarrow{k}$ означает набор чисел k_{ijl}, $\lambda_{l,\overrightarrow{k}} \in \mathbb{F}$.

Остается воспользоваться операционной интерпретацией коэффициентов a_i а также курошевостью Y (над “операторами уноса” все алгебраично).

Таким образом, случай частичной алгебраичности второго порядка разобран.

Пусть в алгебре выполняется тождество частичной алгебраичности порядка n для элемента $y_1 \in Y$. Ситуацию можно светси к случаю, когда $|Y| = 1$.

Частичная алгебраичность порядка 3, $|Y| = 1$. Частичное тождество алгебраичности (переупорядочив подходящим образом члены) можно записать так:

$$W = c_0 y^{n_1} c_1 y^{n_2} c_2 y^{n_3} c_3 = \sum_{n_2' < n_2; n_3' > n_3} \lambda_{\overrightarrow{n}'} c_0 y^{n_1'} c_1 y^{n_2'} c_2 y^{n_3'} c_3 +$$
$$+ \sum_{n_2' < n_2; n_3' < n_3} \lambda_{\overrightarrow{n}'} c_0 y^{n_1'} c_1 y^{n_2'} c_2 y^{n_3'} c_3 + \sum_{n_2' = n_2; n_3' > n_3} \lambda_{\overrightarrow{n}'} c_0 y^{n_1'} c_1 y^{n_2'} c_2 y^{n_3'} c_3. \qquad (16)$$

Если бы не было третьей группы членов, то мы бы действовали примерно так же, как и в случае частичных тождество алгебраичности второго порядка ("выкачивая" из средней группы). Аналогичным образом мы бы действовали, если не было членов первой и второй группы.

Будем работать со словами вида $W = \prod W_i$, где $W_i = C_i y^{n_i} D_i$. Такая запись удобно по тому, что куски W_i слова W будут прежде всего обрабатываться по-отдельности.

Только что выписанное равенство можно записать так:

$$W_1 C_2 y^{n_2} D_2 W_3 = \sum_{n_2' < n_2} \lambda_{\overrightarrow{n}'} W_1' C_2 y^{n_2'} D_2 W_3' +$$
$$+ \sum_{n_2' = n_2; n_3' > n_3} \lambda_{\overrightarrow{n}', i} \delta^i (W_1; W_3)(W_1 C_2 y^{n_2'} D_2 W_3) \qquad (17)$$

где $\delta(W_1; W_3)$ есть сумма операторов выноса из W_1 в W_3.

Положим $\Delta(W_1; W_3) = \sum \lambda_{\overrightarrow{n}', i} \delta^i (W_1; W_3)$. Если применить виртуальный (т.е. определенный на записях) оператор Δ достаточное число раз, то при надлежащей организации процесса произойдет уменьшение ширины, причем сколь угодно сильное. (Ибо выносы членов можно символически обозначать буквами, ведущими себя как переменные, над которыми элементы из Y алгебраичны.)

В процессе преобразований W_2 с помощью третьей группы членов также происходят промежуточные подъемы, однако процесс устроен так, что их величины ограничены. Поэтому если падение внутри W_1 больше величины промежуточных подъемов в W_2, то мы остановим процесс ибо уменьшили ширину. Это означает, что внутри W_2 степень при y удовлетворяет символическому уравнению:

$$y^{n_2} = \sum \alpha_j y^{n_2 - j} + y^{n_2} \Delta$$

где Δ – малый оператор. Хочется написать равенство

$$y^{n_2} = \frac{1}{1 - \Delta} \sum \alpha_j y^{n_2 - j} = y^{n_2} = (\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k)(\sum \alpha_j y^{n_2 - j}).$$

Далее в силу "малости" оператора Δ оборвать ряд, получив в невязке сумму членов ме́ньшей ширины. (Коммутируемость нужных операторов обеспечивает процедура "откатки", котрая, в свою очередь, также обеспечивается "операционным исчислением".) Отметим, что в доказательстве теоремы Амицура высокая степень Δ обращается в ноль на препятствии к алгебраичности, так что ряд обрывается. Все это служит оформлением такого соображения: если что-то достаточно не пропихивается в хвост, то происходит обработка "головой", которая имеет ме́ньший порядок.

В общем случае ведется индукция по порядку частичной алгебраичности. Пусть $W = W_1 \ldots W_q$; $W_i = C_i y^{n_i} D_i$. Аналогичным образом, можно считать, что вхождения степеней y внутри W_1 удовлетворяют символическому равенству:

$$y^{n_1} = \frac{1}{1-\Delta}\sum \alpha_j y^{n_2-j} = y^{n_1} = (\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k)(\sum \alpha_j y^{n_2-j}).$$

Здесь оператор Δ отвечает $(n-1)$-хвосту частичного тождества алгебраичности f порядка n. Можно сказать и так: если выпихивания из W_1 не происходит сначала и даже долго — то у остатка $W_2 \dots W_n$ сильно уменьшится ширина.

Поскольку $(n-1)$-хвост есть более сложное образование, и обращаться с ним мы можем неявно, в силу индукционного процесса, то можно наоборот, выкачку переменной из W_1 считать малым оператором и записать это символически

$$y^{n_1} = \sum W'\Delta' + y^{n_1}\Delta.$$

Разумеется, трудности, связанные с коммутируемостью операторов выноса остаются. Их преодоление основано на иерархии размеров обрабатываемых степеней переменной y внутри W_i. Подробности обсуждены в работе [174].

3. Концепция экстремального идеала. Рациональность рядов Гильберта.

3.1. Схема Кемера

Схема А. Р. Кемера состоит в сближении многообразия и конечномерной алгебры, все тождества которой выполняются в этом многообразии. Доказательство конечной базируемости систем тождеств устроено так:

Вначале находится *стартовая алгебра* — конечномерная алгебра A_0 такая, что $T(A_0) \subseteq \Gamma$. Существование такой алгебры следует из теоремы Размыслова–Кемера–Брауна о нильпотентности радикала и из результата Ж. Левина [151].

Теорема 3.1. $\mathrm{T}(A \rtimes B) = \mathrm{T}(A) \cdot \mathrm{T}(B)$, *где* $\mathrm{T}(A)$ *— идеал тождеств алгебры* A. $\square$

Из теоремы Ж. Левина следует, что если $c(A)$ – индекс нильпотентности радикала алгебры A, то A принадлежит многообразию, порожденному конечномерной алгеброй — полупрямым произведением $c(A)$ экземпляров алгебры матриц порядка n, где $n = \mathrm{PIdeg}(A)$ – максимальный размер матриц, все тождества которых выполняются в алгебре A.

Далее рассматриваются пары (A_i, Γ_i). При этом T-идеал алгебры A_i постепенно приближается к Γ_i и вопросы о конечной базируемости и представимости для i-ой пары сводятся к аналогичным вопросам для $(i+1)$-ой. Конечномерная алгебра A_i описывается набором параметров, по которым осуществляется индукционный спуск (размерность полупростой части, индекс нильпотентности радикала). В конце концов $\mathrm{T}(A_n)$ оказывается равным Γ_n. Такие вспомогательные алгебры A_i мы будем называть *промежуточными носителями.*

Схема Кемера идет сверху вниз, уменьшая промежуточный носитель. Это позволяет на каждом этапе пользоваться хорошими свойствами конечномерных алгебр, например, структурируемостью или отщепимостью радикала. Сближение многообразия с промежуточным носителем осуществляется так. Прежде всего, в силу индуктивных соображений можно считать, что в алгебрах A_i нет ненулевых идеалов с нулевым пересечением. В этом случае, как показал А. Р. Кемер, для любого T-идеала $\Gamma \not\subseteq \mathrm{T}(A)$ можно построить такой T-идеал Γ^0, что

1) $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$ и $\Gamma^0 \neq \mathrm{T}(A)$.

2) Фактор-алгебра A/Γ^0 имеет меньший набор значений индукционных параметров.

3) Относительно свободная алгебра из $\mathrm{Var}(A/I \cap \Gamma^0)$ представима.

Индукционный переход к следующей паре основан на построении в относительно свободной алгебре в многообразии, заданном Γ_i, *экстремального* T*-идеала* $J \neq 0$ такого, что J и $\Gamma_i \cap J$ являются нетеровыми модулями над "алгеброй следов" (нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом). Схема Кемера работает и при доказательстве рациональности рядов Гильберта относительно свободных ассоциативных алгебр. Наше изложение схемы Кемера носит более категорный или "алгебро–геометрический" характер, чем в оригинальных работах.

3.1.1. Индукционные параметры. Сложностной тип

При доказательствах конечной базируемости используют различного рода индукционные параметры — *сложность* алгебр. В самом общем виде понятие *сложности* обычно определяется исходя из набора "ключевых" алгебр, которые принадлежат данному многообразию. (Отметим, что в нулевой характеристике бесконечность базисного ранга равносильна тому, что многообразие содержит алгебру Грассмана.) Индукционные параметры служат инструментом перевода с языка носителя на язык тождеств и имеют комбинаторный смысл (например, индекс нильпотентности радикала несводимой алгебры $c(A)$ и размерность полупростой части $b(A)$).

Исторически первым параметром такого рода была сложность многообразия $\mathrm{PIdeg}(\mathfrak{M})$ – максимальный размер матричной алгебры из $\mathfrak{M}$. Эта величина определяет набор полупростых алгебр из $\mathfrak{M}$. В случае, когда основное поле $\mathbb{F}$ конечно, к размеру матриц добавляется еще одна характеристика — размер центра (число или символ ∞). Нас прежде всего интересует *существенная сложность* — максимальный размер матриц с бесконечным центром. Отметим, что базис Ширшова определяется существенной сложностью [165].

В. Н. Латышев [69] ввел понятие *сложности нематричного многообразия* $\mathrm{Lat}(\mathfrak{M})$ как максимальный размер алгебры верхнетреугольных матриц из $\mathfrak{M}$. При изучении нематричных многообразий оказалось, что нематричная сложность ведет себя во многом аналогично обычной сложности. Этот параметр А. Р. Кемер обозначал $a(\mathfrak{M})$. При переходе к конечному полю тут также возникает своя специфика. *Существенной сложностью Латышева* будем называть максимальный размер алгебры верхнетреугольных матриц над бесконечным полем из $\mathfrak{M}$. Существенная сложность Латышева используется для оценки размерности Гельфанда–Кириллова.

Сложностным типом многообразия, по которому ведется индукция служит набор алгебр из $\mathfrak{M}$, являющихся полупрямым произведением алгебр общих матриц (в нашей терминологии). Это понятие включает в себя и классическую сложность $\mathrm{PIdeg}(\mathfrak{M})$ и сложность Латышева. Отметим, что размерность Гельфанда–Кириллова s-порожденной относительно свободной алгебры из многообразия $\mathfrak{M}$ равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова s-порожденной алгебры из сложностного типа $\mathfrak{M}$. Эквивалентное определение сложностного типа: это множество наборов типов клеток ("составов путей"), которые может содержать одновременно элемент алгебры. *Существенным сложностным типом* служит набор полупрямых произведений алгебр общих матриц с бесконечным центром из данного многообразия.

Максимальная размерность полупростой части алгебры из сложностного типа $\mathfrak{M}$ есть параметр $b(\mathfrak{M})$, используемый Кемером (“внешнее определение”). Нас будут интересовать прежде всего полупрямые произведения матричных алгебр с бесконечным центром (*существенный состав* путей).

Кроме того, мы будем рассматривать произведения радикальных и полупростых (относящихся к матричным клеткам) элементов и интересоваться количеством граничных операторов — входов/выходов/переходов, относящихся прежде всего к *существенным* клеткам (отвечающих матрицам над бесконечным центром).

При рассмотрении бесконечно порожденных алгебр роль сложностного типа играет набор полупрямых произведений алгебр из T-первичных многообразий, лежащих в $\mathfrak{M}$. Эта величина, как было показано М. Зайцевым и A. Giambruno [136], для случая нулевой характеристики определяется сложностным типом и есть максимальная (по сложностному типу) сумма показателей для сомножителей полупрямого произведения. Сложностные параметры для неассоциативного случая обсуждаются на странице A.1 в разделе A.1.

3.1.2. О доказательствах рациональности

Отметим, что почти все шаги схемы Кемера проходит практически без изменений для альтернативных и йордановых алгебр и с изменениями — для более широкого класса неассоциативных колец (т.н. *хороших многообразий*). Исключение составляет первый шаг — построение стартовой алгебры, поскольку аналога результата Ж. Левина в этом случае пока нет. (На это обстоятельство мне указал А. В. Ильтяков).

Вопрос. *Верно ли, что в к.п. альтернативной или йордановой PI-алгебре выполняются все тождества некоторой конечномерной альтернативной или йордановой алгебры?*

Положительный ответ хотелось бы получить для некоторого общего класса колец, близких к ассоциативным (структурируемые хорошие многообразия). Отметим, аналог теоремы о нильпотентности радикала для к.п. алгебр из хороших многообразий выполняется.

Итак, пусть A — относительно свободная к.п. PI-алгебра над полем нулевой характеристики. В силу результата Кемера она представима. Для доказательства рациональности ряда Гильберта H_A алгебры A нужно уметь строить такой T-идеал $I \neq 0$, что производящая функция H_I размерностей его однородных компонент рациональна. В самом деле. В силу равенства $H_A = H_I + H_{A/I}$ имеет место следующая

Лемма 3.1 (О спуске). *Если $H_{A/I}$ и H_I рациональны, то H_A также рационален.* $\square$

Таким образом, проблема рациональности для A свелась к проблеме рациональности для ее фактора A/I. А в силу конечной базируемости для T-идеалов, индукционный спуск к относительно свободным факторам должен завершиться.

Пусть I_1 и I_2 — однородные идеалы алгебры A. Тогда $H_{I_1+I_2} = H_{I_1} + H_{I_2} - H_{I_1 \cap I_2}$. В частности, если $I_1 \cap I_2 = 0$, то $H_{I_1+I_2} = H_{I_1} + H_{I_2}$. Пусть $\mathrm{T}(I)$ — T-идеал, отвечающий тождествам фактор-алгебры A/I.

Суммируем сделанные наблюдения:

Лемма 3.2 (О расщеплении алгебры). *a) $T(I) \subseteq I$; поэтому если $I_1 \cap I_2 = 0$, то $T(I_1) \cap T(I_2) = 0$.*

б) Пусть $I_1 \cap I_2 = 0$, тогда из рациональности H_{A/I_1} и H_{A/I_2} следует рациональность $H_{A/(I_1+I_2)}$.

в) Пусть $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T_i = 0$. Тогда рациональность H_A следует из рациональности следующего множества рядов Гильберта:

$$\{H_J|\ J = \sum_{i\in I} T_i \quad \text{для некоторого непустого } I \subseteq \{1,\dots,n\}\}.$$

Доказательство. П.а) непосредственно следует из определения T-идеала, п.б) - из сделанных непосредственно перед леммой замечаний, п.в) получается из п.б) очевидной индукцией. □

Чтобы обеспечить рациональность H_I для некоторого I, достаточно указать идеал, наделенный структурой нетерового модуля над некоторым нетеровым коммутативным кольцом (алгеброй следов или форм). И наша дальнейшая цель заключается в поиске такого идеала. Хотя его надо уметь искать для любой конечно–порожденной относительно–свободной алгебры, мы начнем с конкретных примеров.

3.2. Примеры экстремальных идеалов

3.2.1. Алгебра общих матриц $\mathbb{M}_n$

$\mathbb{M}_n$ не является алгеброй нетерового типа. Но если ее расширить значениями оператора следа (формами), то получится алгебра, конечномерная над центром, который является нетеровым кольцом.

Из предложения 0.8 и теоремы вытекает

Следствие 3.1. *а) Пусть C_{n^2} — T-идеал алгебры общих матриц, порожденный полиномом Капелли порядка n^2. Тогда $\mathbb{K}(Z)C_{n^2} = C_{n^2}$.*

б) T-идеал C_{n^2} есть нетеров $\mathbb{K}(Z)$-модуль и его ряд Гильберта рационален.
□

Таким образом, хотя $M_n[Z]$ является собственным расширением M_n, у алгебр $M_n[Z]$ и M_n T-идеалы, порожденные полиномами Капелли порядка n^2, совпадают. Такой T-идеал, выдерживающий умножение на следы и поглощающий их, А. Р. Кемер называл "киллером" следов. Основа доказательства Кемера состояла в нахождении таких "киллеров" для общего многообразия.

Итак, для алгебры общих матриц $\mathbb{M}_n$ экстремальный T-идеал построен. Конечно, это еще не дает решения проблемы рациональности ряда Гильберта для $\mathbb{M}_n$. Ведь фактор, хотя и имеет меньшую сложность, но уже не является алгеброй общих матриц. Однако для $\mathbb{M}_2$ проблема рациональности тем самым сводится к нематричному случаю. Таким путем действовал В. Дренский в своей работе [140]. Он решил проблему рациональности для нематричного случая, а значит — и для $\mathbb{M}_2$.

3.2.2. Полупрямые произведения алгебр матриц

Мы начинаем изучать взаимодействие между простыми компонентами алгебр и как оно выражается на языке тождеств.

Рассмотрим простейший пример алгебры с заданной полупростой частью. Это алгебра матриц, вдоль главной диагонали которых стоят *клетки* — блоки фиксированных размеров, над ними — что угодно, под ними — нули. Ограничение на клетку дает эпиморфизм на алгебру матриц. Такую алгебру мы называем *полупрямым произведением матричных алгебр*. Выбирая общие элементы, получаем *алгебру общих блочно-треугольных матриц*. Мы говорим, что элемент (множитель) *содержит (данную) клетку (радикал)*, если он принадлежит идеалу, порожденному соответствующими матричными единицами.

Отметим, что размерность Гельфанда–Кириллова s-порожденной относительно свободной алгебры из многообразия $\mathfrak{M}$ равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова s-порожденной алгебры из $\mathfrak{M}$, являющейся полупрямым произведением алгебр общих матриц (в нашей терминологии). Набор таких алгебр из $\mathfrak{M}$ служит сложностной характеристикой многообразия, по которой ведется индукция. Эквивалентное определение сложностного типа: это множество наборов типов клеток ("составов путей"), которые может содержать одновременно элемент алгебры.

Итак, пусть A есть полупрямое произведение $\mathbb{M}_1 \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_s$. Напомним, что Z_{n_i} обозначает центральный многочлен алгебры общих матриц порядка n_i, определенный в теореме , где n_i — размер i-го сомножителя. Выпишем многочлен f, задающий экстремальный T-идеал:

$$f = \prod_{i=1}^{s} [Z_{n_i^2}, y_i]^{\varepsilon_i} C_{n_i^2}^r [Z_{n_i^2}, y_i']^{\delta_i}, \tag{1}$$

где r равно числу сомножителей в полупрямом произведении, а величины δ_i и ε_i, соответствующие i-ой клетке, принимают значение 0 или 1 и определяются по следующему правилу:

1) $\varepsilon_i = 0$, если $i = 1$ либо $n_i \leq n_{i+1}$.

2) $\delta_i = 0$, если $i = s$ либо $n_i < n_{i+1}$.

3) В остальных случаях величины δ_i и ε_i равны 1.

Т.е. приоритет имеет клетка бо́льшего размера, а когда размеры совпадают — то правая.

При задании тождеств под произведением многочленов понимается такое произведение, когда в них подставлены непересекающиеся множества переменных. Например, x^r есть $x_1 \cdot \ldots \cdot x_r$, а

$$x^r[z,t]x^s = x_1 \cdot \ldots \cdot x_r[z,t]x_{r+1} \cdot \ldots \cdot x_{r+s}.$$

Прокомментируем конструкцию. Прежде всего отметим, что множитель $[Z_n, y]$ не может располагаться на одной клетке размера n и любая его специализация либо содержит клетки бо́льшего размера, либо радикальный элемент. Его роль — вынудить межклеточный переход. Множитель $C_{n^2}^r$ либо содержит клетку размера не меньшего n (причем одно из $C_{n_i^2}$ входит туда полностью) либо принадлежит r-ой степени радикала, что при больших r ведет к равенству нулю. Таким образом, есть множитель Капелли $C_{n_i^2}$, "лежащий внутри i-ой клетки". Он дает возможность умножать на следы (формы), отвечающие этой клетке. Вот точное утверждение:

Предложение 3.1. *а) f не является тождеством A.*

б) При подстановке матричных единиц из $\hat{A}$, результат которой ненулевой, в каждое $C_{n_i^r}$ должны подставляться матричные единицы, отвечающие i-ой клетке.

в) T-идеал $T(f)$ является нетеровым $R_1 \otimes \cdots \otimes R_s$ модулем, где R_i — кольцо следов (форм) отвечающих i-ой клетке. Его размерность Гельфанда–Кириллова равна $\sum_i \mathrm{GKdim}(R_i)$

Замечание. В разделе 5.6 вычисляется размерность Гельфанда–Кириллова s-порожденной алгебры общих матриц. Она равна степени трансцендентности центра и равна размерности Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц, расширенной следами и формами. (Наше изложение следует работам [24], [25], [157].) Тем самым $\mathrm{GKdim}(R_i) = m(n_i^2) - n_i^2 + 1$ и $\mathrm{GKdim}(I) = (m-1) \cdot \sum_{i=1}^{s} n_i^2 + s$, m – число образующих A.

Доказательство. П.а) очевиден. п.в) легко следует из п.б) и предложения 0.8, поскольку тензорное произведение нетеровых модулей (колец) нетерово. Поэтому остается доказать п.б).

Пусть $n = \max(n_i)$. Возьмем произвольную подстановку, при которой вместо каждой переменной подставляются матричные единицы. Рассмотрим множители $[Z_{n_i}, y]$ такие, что $n_i = n$. Каждый из них обращается в ноль на соответствующей алгебре $\mathbb{M}_{n_i}$, так что в одну из переменных должна быть подставлена радикальная компонента алгебры и его значение должно лежать в радикале. С другой стороны, поскольку r равен индексу нильпотентности радикала, все сомножители C_{n_i} в $C_{n_i^r}$ не могут лежать в радикале, и хотя бы один из них принимает полупростое значение. В силу максимальности n_i оно должно соответствовать клетке размера $n = n_i$. Таким образом, каждому множителю $[Z_{n_i^2}, y]^{\varepsilon_i} C^r_{n_i^2} [Z_{n_i^2}, y]^{\delta_i}$ такому, что $n_i = n$, отвечает участок произведения, содержащий и радикальный множитель, и множитель, отвечающий полупростой клетке максимального размера. Поэтому все клетки максимального размера будут израсходованы. Кроме того, отметим, что ε_i и δ_i, соответствующие границам групп клеток размера n, равны 1. Отсюда видно, что все клетки максимального размера будут заняты и все граничные операторы “входа–выхода–перехода”, отвечающие их границам, тоже будут “истрачены”.

Теперь возьмем $n' = \max_{n_i \neq n}(n_i)$ и проведем для клеток порядка n' аналогичные рассмотрения. Далее доказательство завершается по индукции. □

Отметим, что схема, по которой мы на каждом этапе работаем с клетками одного размера, уменьшающегося с каждым новым этапом, будет встречаться неоднократно (см. раздел 5.4, доказательство лемм 5.13, 5.14).

Замечания. 1. Степень r при множителе совершенно необходима для данной конструкции. Может случиться так, что каждый множитель вида $[Z_n, x]$ разместится в наборе “мелких клеток”, а любое произведение вида

$$\prod_{n_i < n} [Z_{n_i^2}, y]^{\varepsilon_i} C^r_{n_i^2} [Z_{n_i^2}, y]^{\delta_i}$$

прекрасно размещается в *одной* клетке размера n.

2. Вместо множителей $[Z_{n_i}, y]$ можно брать любые полиномы, выполняющиеся в $\mathbb{M}_{n_i}$, но не выполняющиеся в алгебрах $B^l_{n_i}$, $B^r_{n_i}$, $B_{n_i, n_{i+1}}$. Эти алгебры отвечают входам, выходам и межклеточным переходам. Они определены в разделе 4.5.

Экстремальный идеал для полупрямых произведений можно строить и методом Кемера. Пусть x и y суть однотипные элементы (из одной первичной компоненты или, что то же самое, из одного полупрямого сомножителя), а z – смешанный элемент (в данном случае это значит элемент из радикала), тогда $xzy = 0$. Кроме того, если z — элемент другого типа, то все равно $xzy = 0$.

Рассмотрим специализацию переменных такую, что переменные, входящие в $C_{n_i^2}$, специализируются в матричные единицы, соответствующие i-му сомножителю полупрямого произведения, а переменные y_i, y_i' специализируются в радикал. Пусть Δ_i есть набор переменных, относительно которых многочлен $C_{n_i^2}$ кососимметричен.

Тогда перестановка, при которой переменная из Δ_i меняется местом с переменной из Δ_j при $i \neq j$ (или с переменной, имеющей радикальную специализацию), имеет результатом ноль. Поэтому наборы Δ_i можно объединить, получив новый набор Λ из $b = \sum n_i^2$ переменных, и результат альтернирования по набору Λ совпадает с результатом альтернирования относительно наборов Δ_i по отдельности. Кроме того, набор Λ можно дополнить любой "радикальной" переменной y_i или y_i'.

Пусть в равенстве (1) $r \geq s+1$. Тогда путем объединения наборов типа δ_i вместе с переменными типа y_i, y_i' можно построить s наборов из $b+1$ переменных Λ_k и один набор из b переменных, относительно которых некоторый многочлен h будет полилинейным и кососимметричным. Кроме того, многочлен h не есть тождественный нуль на A, и $\mathrm{T}(h)$ будет устойчив относительно умножений на следы (в случае нулевой характеристики — на формы). Многочлен h есть многочлен Кемера. Мы провели рассуждения Кемера в простейшей ситуации, подробности — см. разделы 3.3, 3.3.1.

Таким образом, конструкция Кемера получается из наших конструкций путем объединения групп переменных, отвечающих клеткам. Взаимоотношения между нашими конструкциями и конструкциями Кемера обсуждаются в разделе 4.6.3.

Следствие 3.2. *Ряд Гильберта $H_{T(f)}$ идеала $T(f)$ рационален.* □

Итак, $H_{T(f)}$ является искомым T-идеалом для многообразий, порожденных полупрямыми произведениями матричных алгебр.

Из наших рассмотрений также получается следующее

Предложение 3.2. *Различные полупрямые произведения порождают различные многообразия. Пусть $\{A_i\}$ – неизоморфные полупрямые произведения, отличающиеся порядком сомножителей. Тогда существуют многочлены $\{f_i\}$ такие, что $f_i|_{A_i} \neq 0$, но $f_i|_{A_j} = 0$ при $i \neq j$.* □

Замечание. Вместо множителей $[Z_{n_i^2}, y]$, "вынуждающих межклеточные переходы", для той же цели можно взять полиномы, являющиеся тождествами $\mathbb{M}_{\max(n_i, n_{i+1})}$ и не обращающиеся в нуль на $\mathbb{M}_{n_i} \rtimes \mathbb{M}_{n_{i+1}}$.

3.2.3. Многообразия мономиальных алгебр

В следующем примере видно, каким образом свойства графов, задающих алгебры, отражаются на языке тождеств. Кроме того, виден дополнительный эффект наличия клеток "нулевого размера". Рассмотрим многообразия, порожденные некоторым набором мономиальных алгебр (алгебра, все определяющие соотношения в которой являются словами). Согласно [164], каждое такое многообразие $\mathfrak{M}$ порождается одной конечно порожденной и конечно определенной (а, стало быть, автоматной) алгеброй, граф которой кусочно–замечателен (см. начало раздела 1, раздел 1.3.2 и определения 1.1, 1.30).

Перейдем к построению экстремального T-идеала. В силу леммы 3.2 достаточно ограничиться случаем, когда граф имеет одну связную компоненту.

Пусть r_i; $\quad i = 0, \ldots, s$ — длины перемычек, $r = \sum r_i$, n_i; $\quad i = 0, \ldots, s$ — размеры циклов, Отметим, что только r_0 и r_s могут равняться нулю (только перемычки, входящие в первый цикл и выходящие из последнего, могут отсутствовать), а остальные $r_i \geq 1, \quad i = 1, \ldots, s-1$. Теперь мы можем выписать многочлен f, задающий искомый T-идеал, с рациональным рядом Гильберта $H_{T(f)}$:

$$f = \prod_{i=1}^{s} x^{r_{i-1}-\delta_{i-1}-\varepsilon_i}[Z_{n_i^2}, y]^{\varepsilon_i} C_{n_i^2}^{r}[Z_{n_i^2}, y]^{\delta_i} \cdot x^{r_s-\delta_s}, \tag{2}$$

где величины δ_i и ε_i, соответствующие i-ой клетке, принимают значение 0 или 1 и определяются по следующему правилу:

1) $\varepsilon_i = 0$, если длина перемычки, входящей в i-й цикл, равна 1, и при этом слева стоит цикл не меньшего размера либо входящая перемычка отсутствует.

2) $\delta_i = 0$, если длина перемычки, выходящей из i-го цикла, равна 1, и при этом слева стоит цикл бо́льшего размера либо выходящая перемычка отсутствует.

3) В остальных случаях величины δ_i и ε_i равны 1.

(Отсутствие входящей перемычки возможно для начального цикла, а выходящей — для последнего.)

В отличие от предыдущего многочлена, появились множители $x_i^{r_i-1}$, которые обеспечивают прохождение перемычек.

Иными словами — если нельзя оставить множители, соответствующие обеим клеткам (т.е. когда длина перемычки равна 1), приоритет имеет клетка бо́льшего размера, а когда размеры совпадают — то правая.

Предложение 3.3. *а) f не является тождеством A_Γ.*

б) При подстановке матричных единиц из $\hat{A}$, результат которой ненулевой, в каждое $C_{n_i^2}$ должны подставляться матричные единицы, отвечающие i-ой клетке.

в) T-идеал $T(f)$ является нетеровым $R_1 \otimes \cdots \otimes R_s$ модулем, где R_i — кольцо следов (форм), отвечающих i-ой клетке.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 3.1 и мы его опускаем. Отметим только, что множители Капелли $C_{n_i^2}$ отвечают периодическим участкам слов периода n_i, коммутаторы $[Z_{n_i}, y]$ – концам таких участков, произведение x-ов — прохождению перемычки.

3.2.4. Нематричные многообразия

Нематричным называется многообразие алгебр, не содержащее алгебру матриц второго порядка. Это значит, что в этих алгебрах выполняется некоторое тождество, которое не выполняется в $\mathbb{M}_2$. В силу теоремы Брауна о нильпотентности радикала, в к.п. алгебре из этого многообразия выполняется тождество вида

$$[x_1, y_1]z_1[x_2, y_2]z_2 \cdot \ldots \cdot [x_k, y_k] = 0.$$

Рациональность рядов Гильберта для таких многообразий была доказана В. Дренски [140] методом, ранее разработанным В. Н. Латышевым [71]. Стратегия его действий хорошо соответствует концепции экстремального идеала I. В качестве I он брал идеал, порожденный максимальной ненулевой степенью коммутатора, которую мы обозначим через q. Для этого идеала можно явно указать базис (базис Шпехта). Он состоит из элементов вида

$$X = x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s} \cdot \prod_{\alpha=1}^{q} F_\alpha,$$

где полином F_α имеет вид

$$x_{j_\alpha} \circ ad(x_1)^{l_{\alpha 1}} \circ ad(x_2)^{l_{\alpha 2}} \circ \ldots \circ ad(x_s)^{k_s}.$$

Поскольку q — максимальная ненулевая степень коммутатора, начальные сомножители $x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s}$ перестановочны между собой, так что они ведут себя как коммутативные многочлены относительно левого умножения. По той же причине операторы коммутирования ad в каждом из множителей F_α перестановочны, кроме первого и второго, примененного к x_{j_α}. Поэтому начальный коммутатор $[[x_{j_\alpha}, z_\alpha], t_\alpha]$ можно зафиксировать, а далее переменные при операторах ad пусть идут в порядке возрастания. Искомое коммутативное кольцо Z, над которым возникает структура нетерова модуля, порождается операторами коммутирования с образующей и левого умножения, рассматриваемыми как операторы на I. А именно, имеет место равенство:

$$\left(x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s} \cdot \prod_{\alpha=1}^{q} F_\alpha\right) \circ ad(t) = x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s} \cdot \sum_{\tau=1}^{s} \prod_{\alpha=1}^{\tau-1} F_\alpha \cdot (F_\tau \circ ad(t)) \cdot \prod_{\alpha=\tau+1}^{q} F_\alpha.$$

Если через $t^{(\tau)}$ обозначить операцию коммутирования с t, примененную к множителю с номером τ (результат которой зависит от записи элемента), то данное равенство перепишется в виде: $ad(t) = \sum t^{(\tau)}$. Кроме того, в силу экстремальности числа коммутаторных множителей, $t_1^{(\tau)} t_2^{(\tau)} = (t_1 t_2)^{(\tau)}$. Отсюда следует, что хотя операторы $t^{(\tau)}$ определены только на записях, симметрические функции (по τ) от них определены корректно, а кольцо многочленов цело над симметрическими функциями и, стало быть, является нетеровым модулем.

В работе [140] рациональность рядов Гильберта также была установлена и для неассоциативного "нематричного" случая, в частности для некоторых йордановых алгебр.

Коммутаторное действие на граничных операторах, осуществляющих связь между первичными компонентами, эквивалентно действию подстановок, которое мы будем использовать при доказательстве конечной базируемости (см. лемму 4.6).

Нематричный случай характерен тривиальностью "клеток"— полупростых компонент. Они могут иметь размер не более 1. Теория центральных полиномов для работы с клеткой не нужна, все трудности — во взаимодействии между клетками. Этот случай противоположен случаю алгебры общих матриц, когда есть только одна клетка. В общем случае необходимо разбираться и с комбинаторикой внутри клеток и с взаимодействием между ними, при отсутствии явного базиса. Кроме того, по сравнению со случаем полупрямых произведений и мономиальных алгебр возникают дополнительные эффекты:

- Произведению, которое задавало нам экстремальный идеал, соответствовал путь в графе. В общем случае путей может быть несколько и, что важно, они могут "гасить" друг друга. Сумма элементов, отвечающих прохождению этих путей, может быть нулевой. Эта возможность связана с тем, что

- Клетки могут быть не только *независимыми* (т.е. когда в них стоят независимые переменные). Они могут быть еще и *похожими* – ограничения любых элементов алгебры на эти клетки могут совпадать.

- Группы похожих клеток, связанных радикалом, могут идти подряд, образуя анфилады. Радикальные компоненты, отвечающие переходам между анфиладами, контролируются, а внутри анфилад — гораздо хуже. Некоторые радикальные компоненты проявляются как препятствия при переброске следов при взаимодействии между разными анфиладами одного типа.

В случае бесконечного поля для клеток одного размера есть две возможности: быть “похожими” и “независимыми”. Но для конечного поля проявляются еще такие эффекты:

- Соответствующие матричные элементы x_{ij} и y_{ij} в клетках могут быть связаны автоморфизмом Фробениуса: $x_{ij}^{q_1} = y_{ij}^{q_2}$, где q_i – такие степени $p = \mathrm{ch}(\mathbb{F})$, что при всех $x \in \mathbb{F}$ имеет место равенство $x^{q_i} = x$. В этом случае мы говорим о *кратностях* клеток.

- Клетки могут иметь конечный центр (быть “несущественными”).

Эти эффекты надо будет уметь описывать на языке тождеств.

3.3. Доказательство рациональности рядов Гильберта методом Кемера

Для доказательства рациональности ряда Гильберта достаточно построить T-идеал $I \neq 0$, наделенный структурой нетерового модуля над нетеровым кольцом. Тогда H_I рационален и осуществляется спуск к фактор-алгебре A/I. В данном пункте мы осуществим построение экстремального идеала, используя технику Кемера, основанную на уменьшении промежуточного носителя и постепенном сближении идеала его тождеств с T-идеалом, представимость которого доказывается. Кроме того, мы собираемся переизложить результаты Кемера в более алгебро–геометрическом стиле.

Пусть A — представимая алгебра, Γ — T-идеал, содержащий $\mathrm{T}(A)$. Наша цель — показать представимость Γ. Рассмотрим кольцо некоммутативных многочленов $\mathbb{K}< \overrightarrow{x} >$ и множество всех его конечномерных факторов $\mathfrak{F}$. Помимо алгебры A мы работаем с алгеброй $\breve{A}$, образующие которой получаются путем суммирования базисных векторов из A “со взаимно трансцендентными коэффициентами” – т.е. свободными переменными, своими для каждой образующей и для каждого базисного вектора. Если алгебру $\breve{A}$ расширить следами элементов, то получится алгебра нетерового типа.

Определение 3.2. а) *Носителем полинома* f называется такое подмножество $\mathrm{supp}(f) \subset \mathfrak{F}$, на котором тождество f не выполняется. *Хорошим носителем* $\mathrm{supp}_G(f)$ называется такое подмножество алгебр из $\mathrm{supp}(f)$, все тождества которых лежат в $\mathrm{T}(f)$.

б) *Носителем T-идеала* Γ называется класс алгебр $\{A_i\}_{i\in I}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathrm{T}(A_i) \subset \Gamma$.

в) Мы говорим, что алгебра $A \in \mathfrak{F}$ *отделяет f от* Γ, если $f \notin \Gamma + \mathrm{T}(A)$, и обозначаем это $\mathrm{dist}(f, A, \Gamma)$. Если $\Gamma \supseteq \mathrm{T}(A)$, то это означает непринадлежность f к Γ, и в этом случае мы говорим, что A *хорошо отделяет* f от Γ. (Иными словами, имеется значение f в A, не являющееся значением полинома из Γ.)

Отметим, что $\mathrm{supp}_G(f) = \mathrm{supp}(\mathrm{T}(f)) \backslash \{\mathfrak{B}\}$, где $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ — множество алгебр, идеал тождеств которых совпадает с $\mathrm{T}(f)$. Если же $\mathrm{T}(\bigcup\limits_{\mu} A_{(\mu)}) = \mathrm{T}(A)$, то непосредственно осуществляется спуск к ме́ньшей паре.

Определение 3.3. а) Алгебра $A(d)$ или свободное присоединение радикала с индексом нильпотентности d в многообразии $\mathrm{Var}(A)$ определяется как $\bar{A} * \mathbb{K} < \theta_1, \dots, \theta_r > / \, \mathrm{id}(\mathrm{T}(A) + \Theta^d)$ ($*$ обозначает копроизведение, $\bar{A}$ – полупростая часть алгебры A).

б) Пусть $\bar{A}$ – полупростая алгебра. Тогда $A_\Gamma(d)$ определяется как

$$\bar{A} * \mathbb{K} < \theta_1, \dots, \theta_r > / (\Gamma + \mathrm{id}(\Theta)^d)$$

.

Лемма 3.3. *а) Если A конечномерна, то $A(d)$ и $A_\Gamma(d)$ конечномерны для каждого d.*

б) $\varinjlim\limits_{d \to \infty} A_\Gamma(d)$ порождает то же многообразие, что и Γ. □

Лемма справедлива для произвольного основного поля (в однородном случае очевидна, неоднородный случай возможен только для конечного поля а тогда это переформулировка свойства финитной аппроксимируемости).

Из нее вытекает важное

Предложение 3.4 (об обрезании радикала). *Пусть A – представимая алгебра, вложенная в R-алгебру $\hat{A}$, над ассоциативно коммутативным кольцом R, с расщепленным радикалом и полупростой частью, $\hat{I}_d$ – идеал в $\hat{A}$, порожденный d-й степенью радикала, $I_d = A \cap \hat{I}_d$. Тогда идеал I_d представим.* □

(Данное утверждение верно для любого идеала $I = A \cap \widehat{I}$, где $\widehat{I}$ – идеал в $\hat{A}$, но нам удобнее выделить этот частный случай.)

Замечание. Стабилизируемость многообразий $\mathrm{Var}(A_\Gamma(d))$ равносильна локальной представимости. В работе [31] изучаются представления относительно свободных алгебр, с использованием радикальных расширений. Вводятся новые понятия "типа" и "кратности".

Если $d \geq c(A)$, то A является фактором $A(d)$. Свойство универсальности $A(d)$ заключается в следующем. Пусть $\{x_i\}$ – произвольный набор элементов из A, каждый из которых принадлежит либо $\bar{A}$, либо $\mathrm{R}(A)$. Тогда имеется канонический гомоморфизм из $A(d)$, образ которого на пространстве, порожденном словами от x_i, содержащими не более d радикальных переменных, ведет себя как эпиморфизм.

Отметим, что если A представима, то A может и не быть вложима в алгебру нетерового типа $\hat{A}$ с тем же индексом нильпотентности радикала. Природа этого явления "неструктурируемости" связана с эффектом "непохожего радикала в похожих клетках", который обсуждается в разделе 4.5.2. Сейчас ограничимся примером.

Пример. Пусть A – подалгебра в $\mathbb{K} < a, \theta, \lambda > / I$, порожденная элементами $1, a + \lambda, \theta$. Идеал I порожден соотношениями:

$$[\theta, a] = 0; \;\; \lambda^n = 0; \;\; [\lambda, a] = 0, \;\; \theta\lambda = 0; \;\; \forall x \;\, \theta x \theta = 0.$$

($n \geq 2$ – параметр.)

Тогда $R(A) = \mathrm{id}(\theta)$ и $A/R(A) = A/\mathrm{id}(\theta) \cong \mathbb{K}[a]$; поэтому $c(A) = 1$. С другой стороны, индекс нильпотентности радикала любой алгебры, у которой радикал отщепляется и куда вкладывается A, не меньше $n+1$. Поэтому такова минимальная степень нильпотентности радикала у алгебры нетерового типа, куда вкладывается A.

План доказательства представимости относительно свободных алгебр таков. Надо построить конечномерную алгебру A такую, что если $f \in \Gamma$, то $f \in \mathrm{T}(A)$ и если $f \notin \Gamma$, то $f \notin \mathrm{T}(A)$. Пусть $f \notin \Gamma$, тогда $f \in \mathrm{T}(A)$. Рассмотрим класс алгебр из $\mathfrak{F}$, хорошо отделяющий f от Γ. Если доказать равномерную ограниченность размерностей отделителей по всем $f \notin \Gamma$, то локальная представимость относительно свободных алгебр будет получена. Для этого достаточно показать следующее:

- ограниченность размерностей полупростых частей,
- ограниченность индексов нильпотентности радикалов.

Тогда стандартное рассуждение с выбором общих элементов в прямой сумме даст конструкцию универсального отделителя по всем $f \notin \Gamma$, который и будет порождать этот T-идеал.

Замечание. А. Р. Кемер излагал свою схему несколько по-другому. Он строил T-идеал $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$, являющийся нетеровым модулем над следами, такой что каждая компонента A'_i фактора $\widehat{A}/\Gamma^0$, не содержащая идеалов с нулевым пересечением, либо имеет меньший сложностной тип (b,d), либо проекция Γ нулевая.

Для доказательства ограниченности мы будем улучшать алгебру A, хорошо отделяющую f от Γ. Введем несколько обозначений и определений. Алгебра A представляется в виде $A = \bar{A} + \mathrm{R}(A)$, где $\bar{A}$ – ее полупростая часть, а $\mathrm{R}(A)$ – радикал. При этом полупростая часть разлагается в сумму простых компонент: $\bar{A} = \bigoplus_{\mu=1}^{s} A_\mu$. Пусть $A^{(\mu)}$ – фактор A по идеалу, порожденному A_μ; $c(A)$ – индекс нильпотентности радикала алгебры A, $b(a) = \dim(\bar{A})$.

Определение 3.4. Пусть A – конечномерная алгебра, ν_i – пирсовские компоненты единицы, $\nu_0 = E - \sum_{i>0}^{n} u_i$ есть радикальная компонента. *Элементом типа* (ν_i, ν_j) (или просто типа (i,j)) называется элемент вида $\nu_i x \nu_j$. Если $i \neq j$, то элемент *смешанный*, иначе он *несмешанный*. Набор элементов называется *полным*, если для каждого ν_i он содержит элемент типа (ν_i, ν_j) или типа (ν_j, ν_i).

Первичные компоненты всегда несмешанные, им соответствуют *клетки* – блоки в матричном представлении. Ограничение на такой блок отвечает морфизму в алгебру матриц соответствующего размера.

Отмеченными называются тройки (A, Γ, f) такие, что $\Gamma \supseteq \mathrm{T}(A)$ и $f \notin \Gamma$.

Имеет место следующая

Лемма 3.4 (Об ограничении отделителя). *Пусть A хорошо отделяет f от Γ.*

а) Тогда либо некоторое $A^{(\mu)}$ хорошо отделяет f, либо имеется следствие $g \in \mathrm{T}(f)$ и полный набор элементов $a_\mu \in A_\mu$, $\mu = 1, \ldots, s$; $b_j \in A$, $j = 1, \ldots, r$ такие, что $g(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \neq 0$.

б) Пусть d – произвольное натуральное, причем $d < c(A)$. Пусть имеется подстановка в f с ненулевым результатом, в которой участвуют $\deg(f) - d$ полупростых элементов A и d радикальных. Тогда алгебра $A(d+1)$ хорошо отделяет f. □

Данная лемма позволяет приходить к ситуации, когда все клетки взаимодействуют, а сложностной тип определяется полупрямым произведением соответствующих алгебр. А. Р. Кемер формулировал это утверждение несколько по-другому:

Лемма 3.5. *Если $f \in \bigcap_i \mathrm{T}(A^{(i)}) \setminus \mathrm{T}(A)$, то существует $g \in \mathrm{T}(f)$ и полный набор $\{a_\mu\}_{\mu=1}^s$, а также набор $\{b_j\}_{j=1}^r$ такие, что $g(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \neq 0$.*

б) Если $f \in \mathrm{T}(A(d)) \cap \bigcap_i \mathrm{T}(A^{(i)}) \setminus \mathrm{T}(A)$ и $d < c(A)-1$, то существует $g \in \mathrm{T}(f)$ полный набор $\{a_\mu\}_{\mu=1}^s$, содержащий менее d радикальных специализаций переменных, такой, что $g(\overrightarrow{a}) \neq 0$. □

Замечание о специализациях. Очень часто рассматриваемая алгебра вложена в алгебру, снабженную структурой, которую задают пирсовские компоненты единицы, а также разложение алгебры на полупростую часть и радикал. Рассматривая многочлены в исходной алгебре, мы прежде всего будем представлять переменные в виде сумм своих компонент либо изучать значения многочленов на однородных компонентах. В этом случае будет вестись речь о *специализациях* переменных.

Теперь дадим **внутренние определения** индукционных параметров на языке тождеств. Различие между внешним и внутренним параметром дает возможность применить редукционную лемму об ограничении отделителя. Пусть Λ – набор переменных. Тогда оператор S_Λ действует на множестве многочленов, полилинейных по множеству переменных из Λ, и осуществляет альтернирование по переменным из этой группы: $S_\Lambda(f) = \sum_{\sigma \in S_{|\Lambda|}} (-1)^\sigma f_\sigma$, где $S_{|\Lambda|}$ – группа перестановки элементов из Λ, f_σ есть результат действия перестановки $\sigma \in S_{|\Lambda|}$ на многочлене f.

$b_1(A)$ — максимальное число, такое что существуют ненулевые многочлены в алгебре A, кососимметричные по любому числу наборов из $b_1(A)$ переменных. $d(A)$ — минимальное k такое, что для любого g и любых наборов Λ_i из $b(A)+1$ переменной имеет место включение $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_k} g \in \mathrm{T}(A)$. Определим теперь относительные параметры:

$$b(A,\Gamma) = \max_k |\forall t \exists g \in \Gamma : \ S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_t} g \neq 0, \quad \text{где } \forall i |\Lambda_i| = k$$

$$d(A,\Gamma) = \min_t |\forall g \in \Gamma : \ S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_t} g = 0, \quad \text{где } \forall i |\Lambda_i| = b(A,\Gamma)+1.$$

И дважды относительные параметры:

$$b(A,\Gamma,f) = \max_k |\forall t \exists g \in \mathrm{T}(f) \ S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_t} g \notin \Gamma + \mathrm{T}(A), \quad \text{где } \forall i |\Lambda_i| = k$$

$$d(A,\Gamma,f) = \min_t |\forall g \in \mathrm{T}(f) \ S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_t} g \in \Gamma + \mathrm{T}(A), \quad \text{где } \forall i |\Lambda_i| = b(A,\Gamma,f)+1.$$

Ясно, что $b(A,\Gamma,f) \leq b(A,\Gamma) \leq b_1(A) \leq b(A)$, $d(A) \leq c(A)$ и если $b(A,\Gamma) = b(A)$, то $d(A,\Gamma) \leq d(A)$, а если $b(A,\Gamma,f) = b(A)$, то $d(A,\Gamma,f) \leq d(A)$ (в общем случае неравенства на d могут не выполняться).

Сформулируем редукционные леммы. Они отражают связь между языком носителей и языком тождеств. Первая лемма означает, что для алгебры A со “связной” полупростой частью размерности $b(A)$ можно создать ненулевые многочлены с любым количеством антикоммутирующих групп переменных, $b(A)$ переменных в каждой группе:

Лемма 3.6. *а) Пусть $A \in \mathrm{supp}(f)$, $b(A,f) < b(A)$. Тогда при некотором μ имеется включение $A^{(\mu)} \in \mathrm{supp}(f)$. И наоборот, если $A^{(\mu)} \in \mathrm{supp}(f)$ при некотором i, то $b(A,f) < b(A)$.*

б) Пусть $b(A,\Gamma,f) < b(A)$. Тогда если A хорошо отделяет f от Γ, то это же верно для некоторого $A^{(\mu)}$. $\square$

Первая лемма сводит ситуацию к случаю, когда все полупростые компоненты входят одновременно в ненулевые слова (посредством радикальных прокладок). Вторая лемма относится к оценке индекса нильпотентности радикала:

Лемма 3.7. *а) Пусть $A \in \mathrm{supp}(f)$, $b(A,f) = b(A)$. Тогда $A(d) \in \mathrm{supp}(f)$. б) Пусть $b(A,\Gamma,f) = b(A)$. Тогда если A хорошо отделяет f от Γ, то это же верно для $A^{d(A,\Gamma,f)}$.* $\square$

Данные леммы допускают обобщения на класс структурируемых алгебр произвольной сигнатуры (см. раздел А.2.1). Как и лемма 3.4, они изначально формулировались не на языке отделителей, а как условие не обращения в ноль соответствующих специализаций полилинейных следствий из $\mathrm{T}(f)$ (см. лемму 3.5):

Если $b(A,f) < b(A)$ или $b(A,f) = b(A); d(A,\Gamma,f) < c(A) - 1$, то имеется естественный эпиморфизм на множество значений полиномов из Γ на алгебре A из множества значений Γ на алгебре $\bigoplus_i A^{(i)} \oplus A(d(A)-1)$.

Соответствующие утверждения можно сформулировать на языке алгебр:

Лемма 3.8. *а) Либо $\mathrm{T}(A) = \bigcap_i \mathrm{T}(A^{(i)})$, либо $b(A)$ есть размерность полупростой части алгебры A.*

б) $\bigcap_i \mathrm{T}(A^{(i)}) \cap \mathrm{T}(A(d(A))) \subseteq \mathrm{T}(A)$.

Или отмеченных троек:

Предложение 3.5. *а) Если (A,Γ,f) есть отмеченная тройка и $b(A,\Gamma,f) < b(A)$, то при некотором i тройка $(A^{(i)},\Gamma + \mathrm{T}(A^{(i)}), f)$ также является отмеченной.*

б) Если (A,Γ,f) есть отмеченная тройка и $b(A,\Gamma,f) = b(A)$, $d(A,\Gamma,f) < d(A)$, то $(A_d,\Gamma + \mathrm{T}(A_d), f)$ также является отмеченной тройкой. $\square$

Доказательствам лемм 3.6 и 3.7 посвящен раздел 3.3.1.

Если $d(A,f) < c(A)$ ($d(A,\Gamma,f) < c(A)$), то алгебра $A(d)$ "меньше" и лемма дает спуск. Таким образом, можно считать, что A хорошо отделяет также g от Γ, где $g \in \mathrm{T}(f)$ – многочлен Кемера, т.е. некоторое следствие f вида

$$g = S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_{d-1}} S_{\Lambda_0} h, \tag{3}$$

где $|\Lambda_i| = b(A)+1$ при $i > 0$ и $|\Lambda_0| = b(A)$.

Множество элементов вида (3) образует *экстремальный идеал Кемера.*

Тогда при любой однородной специализации с ненулевым результатом каждый "большой" альтернатор $\Lambda_i; 0 < i < d-1$ содержит радикальную специализацию, а поскольку $c(A)-1$ есть максимально возможное число радикальных специализаций, то "большие альтернаторы поглощают весь радикал". Поэтому если $\Lambda_0 = \{x_1, \dots, x_{b(A)}\}$, то путем суммирования соотношений (2) (см. теорему) для первичных компонент, легко получаются равенства

$$\left(\sum_j n_j \,\mathrm{Tr}_j(Z)\right) g = \sum_{i=1}^{b(A)} g|_{x_i = Zx_i}$$

$$\left(\sum_j \mathrm{Tr}_j(Z_1)\,\mathrm{Tr}_j(Z_2)\right) g = \sum_{i=1}^{b(A)} g|_{x_i = Z_1 x_i Z_2}$$

(Индекс j пробегает множество первичных компонент.)

Последнее равенство удобно тем, что в него не входят кратности.

Таким образом, с помощью набора Λ_0 достигнуто умножение на следы!

Идеал $\mathrm{T}(g)$ устойчив относительно умножения на следы операторов из A. Но в силу следствия 0.1 алгебра $\breve{A} = A[\mathrm{Tr}(x)]|_{x\in A}$ является алгеброй нетерового типа, имеет те же параметры b и d, что и алгебра A, и идеалы $\mathrm{T}(g)$ у этих алгебр совпадают. Таким образом, алгебра $\breve{A}$ служит хорошим отделителем g, а значит, и f, от Γ и при этом

$$(b(\breve{A},\Gamma), d(\breve{A},\Gamma)) < (b(A,\Gamma), d(A,\Gamma)).$$

Завершим доказательство рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр. Суммируем полученные результаты:

Предложение 3.6. *Пусть A – представимая алгебра, не содержащая идеалов с нулевым пересечением.*

а) Тогда A содержит ненулевой T-идеал I, замкнутый относительно умножений на следы (формы), который порождается элементами вида

$$g = S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_{d-1}} S_{\Lambda_0} h, \tag{4}$$

где $|\Lambda_i| = b(A)+1$ при $i>0$ и $|\Lambda_0| = b(A)$.

При этом I совпадает с T-идеалом расширения $A[R]$ алгебры A значениями оператора следа (операторов форм) и обладает структурой нетерового модуля над кольцом R, порожденным этими значениями.

б) Более того, для любого T-идеала $\Gamma|_A \neq 0$ найдется ненулевой T-идеал $\Gamma' \subseteq \Gamma$, порожденный многочленами вида (4), где $h \in \Gamma$. Этот T-идеал устойчив относительно умножения на следы.

в) Пусть $A' = A/\Gamma'$. Тогда

$$(b(A',\Gamma), d(A',\Gamma)) < (b(A,\Gamma), d(A,\Gamma)).$$

□

Тем самым мы нашли искомый экстремальный T-идеал с рациональным рядом Гильберта $H_{\mathrm{T}(g)}$, что завершает доказательство рациональности.

Несколько слов о том, как получается локальная конечная базируемость и локальная представимость относительно свободных алгебр над полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики (она вытекает из п.в) предыдущего предложения).

Пусть конечномерная алгебра A не имеет идеалов с нулевым пересечением, $\Gamma|_A \neq 0$. Построим алгебру $\widehat{A}$ общих элементов из A. Образующие этой алгебры получаются путем суммирования базисных элементов из A с коэффициентами, являющимися независимыми переменными. Пусть $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$ есть максимальный T-идеал, замкнутый относительно умножения на следы, содержащийся в Γ. Он очевидным образом представим. Рассмотрим фактор $A' = \widehat{A}/\Gamma^0$. Алгебра A' представима и в силу бесконечности основного поля ее расширение $\tilde{A}$ есть алгебра нетерова типа, порождающая то же многообразие.

Алгебра $\tilde{A}$ есть подпрямое произведение конечного числа своих факторов $\tilde{A}^i$, не содержащих идеалов с нулевым пересечением. Это разложение индуцирует соответствующее разложение алгебры A. В силу предыдущего предложения, для каждой алгебры A_i либо $\Gamma|_{A_i} = 0$, либо $(b(A^i), d(A^i)) < (b(A), d(A))$.

В первом случае рассматриваемый T-идеал полностью приближен к носителю, во втором — сложностные характеристики промежуточного носителя понизились.

Алгебру $\widehat{A}$ можно рассматривать как пучок конечномерных алгебр на спектре кольца следов. Обращению в ноль Γ^0 соответствует замкнутая подсхема, ограничение на которую ведет к уменьшению сложностных характеристик.

Замечания. 1. Таким образом, А. Р. Кемер сделал несколько больше, чем доказательство представимости. Он *явно указал*, как "поглотить" радикал и что поведение радикала описывается с помощью многочленов Капелли. Было бы интересно окончательно прояснить влияние радикала в положительной характеристике, а не ограничиваться доказательством представимости. Менее конструктивные рассуждения связаны с ограничением радикала. Они, вероятно, лучше обобщаются на неассоциативный случай.

2. Свойства структурируемости (отщепление радикала, разложение по Пирсовским компонентам) делает естественным рассмотрение разносортных тождеств. Впервые переход к разносортным тождествам при исследовании ассоциативных алгебр был сделан С. В. Пихтильковым при исследовании многообразий, порожденных алгебрами данной размерности [95], [96].

3.3.1. Доказательство лемм Кемера

В данном разделе мы докажем леммы 3.6 и 3.7. Их доказательство есть в работах [53] и [52]. Мы его приводим для полноты картины, чтобы увидеть, как свойства носителя отражаются на языке тождеств.

Начнем с доказательства леммы 3.6. Основное соображение такое. Рассмотрим позицию между "прокладками" E_{ij} и E_{pq}, отмеченную знаком $*$: $E_{ij} * E_{pq}$. Из "матричных единиц" (т.е. операторов вида $E_{\alpha,\beta}$) вместо $*$ можно подставлять только оператор E_{jp}. (Иначе результат будет нулевым.) Пусть произведение P содержит фрагменты $E_{i'_\alpha,j_\alpha} x_\alpha E_{p_\alpha,q'_\alpha}$, где $x_\alpha = E_{j_\alpha,p_\alpha}$, причем все пары индексов (j_α, p_α) различны. Тогда для любой нетождественной перестановки σ результат P_σ замены величин x_α на $x_{\sigma(\alpha)}$ равен нулю и $P = \sum(-1)^\sigma P_\sigma$. Таким образом, альтернирование по множеству $X = \{x_i\}$ не меняет результата.

То же верно, если множество пар (j_α, p_α) пробегает множество всех матричных единиц, относящихся ко всем простым компонентам алгебры A. Мощность такого множества равна $b(A)$ – размерности полупростой части. Запишем это в виде равенства:

$$P = \prod E^\mu_{i'_\alpha,j_\alpha} x_{\mu,\alpha} E^\mu_{p_\alpha,p'_\alpha} d_{\mu,\alpha} = \sum_{\sigma\in S_{b(a)}} (-1)^\sigma \prod E^\mu_{i'_\alpha,j_\alpha} x_{\sigma(\mu,\alpha)} E^\mu_{p_\alpha,p'_\alpha} d_{\mu,\alpha}.$$

Индекс μ означает номер "клетки" – простой компоненты алгебры A, индекс α – нумерует матричные единицы в клетках. Таким образом, если Λ – набор $\{x_{\mu,\alpha}\}$, то $S_\Lambda(P) = P \neq 0$, если $P \neq 0$.

Аналогичным образом, если произведение P содержит k наборов позиций типа $E^{s;\mu}_{i'_\alpha,j_\alpha} x^{(s)}_{\mu,\alpha} E^{s;\mu}_{p_\alpha,p'_\alpha}$; где $s = 1,\dots,k$; $x^{(s)}_{\mu,\alpha} = E^\mu_{j_\alpha,p_\alpha}$, то $S_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k}(P) = P$, если Λ_i есть набор соответствующих переменных $\{x^{(i)}_{\mu,\alpha}\}$. Тогда $S_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k}(P) \neq 0$, если $P \neq 0$.

Ясно, что P с тем же успехом может иметь вид

$$P = \sum \tau_m \prod E^\mu_{i'_\alpha,j_\alpha} x_{\mu,\alpha} E^\mu_{p_\alpha,p'_\alpha} d^{(s)} d_{\mu,\alpha,m},$$

где $\tau_m \in \mathbb{F}$.

И все равно $S_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k}(P) = P$ (индекс s нумерует наборы альтернируемых переменных Λ_s).

Следующее соображение такое. Алгебра матриц проста. Поэтому каждый элемент, в том числе единичная матрица E, представим в виде линейной комбинации элементов типа

$$P = \sum \tau_m \prod_{\alpha, s \in \{1\dots,k\}} E_{i'_\alpha, j_\alpha} x_\alpha E_{p_\alpha, p'_\alpha} d^{(s)}_{\alpha,m},$$

причем k (число наборов Λ_s) может быть выбрано любым.

Кроме того, можно добиться, чтобы множество пар индексов (j_α, p_α) состояло из n_α^2 различных элементов и, таким образом, все возможные позиции для матричных единиц были бы задействованы.

Соответственно, каждый пирсовская компонента единицы ν_μ $(\mu \neq 0)$ для любого k представима в виде

$$\nu_\mu = \sum \tau_m \prod_\alpha E^\mu_{i'_\alpha, j_\alpha} x_{\mu,\alpha} E^\mu_{p_\alpha, p'_\alpha} d^{(s)} d_{\alpha,m};\ \text{где } x_{\mu,\alpha} = E^\mu_{j_\alpha, p_\alpha}.$$

И, следовательно, если полилинейный многочлен f принимает ненулевое значение ϕ на полном наборе элементов $\{\nu'_{r,\mu'} y_r \nu''_{r,\mu''}\}$ (в силу леммы 3.4 такой многочлен существует), то, воспользовавшись полученным представлением пирсовских компонент, можно создать любое число наборов "гнезд" для альтернирований. Таким образом, получается многочлен $f' \in \mathrm{T}(f)$, принимающий то же значение ϕ, причем $S_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k}(f') = f'$ при соответствующем наборе специализаций. Таким образом можно создать *любое* число наборов из $b(A)$ позиций, устойчивых относительно альтернаций.

Определим слово $W^\mu(\overrightarrow{x})$ с помощью равенства:

$$W^\mu(\overrightarrow{x}) = E^\mu_{11} x_{11} E^\mu_{11} x_2 E^\mu_{21} \dots E^\mu_{n,n-1} x_{n^2-1} E^\mu_{nn} x_{n^2} E^\mu_{nn},$$

где E^μ_{ij} – матричные единицы, отвечающие пирсовской компоненте с номером μ и все возможные пары индексов (i_α, j_α) (в количестве n_α^2 штук) представлены по разу. Если все x_i специализированы в матричные единицы, то $W^\mu(\overrightarrow{x}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда каждое x_i, стоящее между E^μ_{ij} и E^μ_{pq}, специализировано в E^μ_{jp}.

Определение 3.5. Пусть f – полилинейный многочлен, не обращающийся в нуль на некотором полном наборе элементов $\{y_i\}$. Система подстановок вида

$$y_i \to B_1 y_i;\ y_i \to y_i B_2;\ y_i \to B_1 y_i B_2,$$

где множители B_j имеют вид

$$\prod_{s=1}^k W^\mu_s d_s,$$

называется *правильной подстановкой порядка k, связанной со специализацией* $\{y_i\}$, если индекс μ пробегает все множество индексов первичных компонент, взятых по одному разу. Индекс s связан с сомножителями в произведении.

Правильной специализацией, связанной с S, называется специализация переменных $x_i^{(s)}$ в матричные единицы с ненулевым результатом, при этом переменные y_i специализируются так же, как и до подстановки. *Наборами переменных, связанных с S*, называются наборы $\Lambda_s = \{x_\alpha^{(s)}\}$. Каждый из них содержит $b(A)$ переменных.

Теперь можно предъявить лемму, из которой непосредственно следует **лемма 3.6**:

Лемма 3.9. *Пусть f – полилинейный многочлен, не обращающийся в нуль на некотором полном наборе элементов $\{y_i\}$. Тогда существует многочлен $f' \in \mathrm{T}(f)$, получающийся из f системой S правильных подстановок, связанных с подходящей специализацией и некоторой системой наборов переменных Λ_s.*

Тогда линейная оболочка множества значений многочлена f' содержит $f(\overrightarrow{y})$ и, следовательно, $f'|_A \neq 0$. Кроме того, $S_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k}(f') = f'$ при данных специализациях и $S_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k}(f')|_A \neq 0$. □

При **доказательстве леммы 3.7** нужно рассмотреть два случая:

1) В алгебре A есть смешанные элементы. Тогда специализация переменных (при разложении их по пирсовским компонентам единицы) в любом полилинейном многочлене f с ненулевым результатом содержит *полный набор* смешанных компоненты $\nu_i x \nu_j$.

2) В алгебре A смешанных элементов нет. Тогда пирсовская компонента одна и все обкладки одинаковы.

Начнем с вспомогательной леммы, которая вытекает из леммы 3.7:

Лемма 3.10. *а) Пусть $f \in \mathrm{T}(A[c(A)-1])$. Тогда результат подстановки вместо любой переменной в f элемента из квадрата радикала равен нулю.*

б) Кроме того, равен нулю результат замены любой радикальной специализации на полупростую. □

Пусть $f \in \mathrm{T}(A[c(A)-1])$ и, кроме того, если имеет место первый случай, то $\forall i f \in \mathrm{T}(A^{(i)})$ и $f \notin \mathrm{T}(A)$. Покажем, что если $d(a) < c(A)$, то можно так специализировать переменные, чтобы результат был ненулевым, а радикальных специализаций будет меньше, чем $c(a)-1$. Тогда, в силу противоречия с леммой 3.4, лемма 3.7 будет доказана.

Правильная подстановка S, связанная с данным набором специализаций называется *удобной*, если

- Полный набор $\{y_i\}$ содержит смешанные элементы, все подстановки осуществляются внутрь y_i, имеющих смешанную специализацию.

- Полный набор $\{y_i\}$ не содержит смешанных элементов, удобная подстановка осуществляется в полилинейный многочлен $f' = fh$ внутрь переменных $\{y_i'\}$, входящих в h, причем множества переменных, входящих в f и в h, не пересекаются, а значение h при данных специализациях равно единице.

Теперь можно сформулировать основное утверждение, из которого непосредственно следует лемма 3.7:

Лемма 3.11. *Пусть f – полилинейный многочлен, не обращающийся в нуль на некотором полном наборе элементов $\{y_i\}$. Тогда существует многочлен $f' \in \mathrm{T}(f)$, $f'|_A \neq 0$, получающийся из f удобной системой S подстановок, Λ_s – система наборов переменных, связанных с S.*

Пусть $k > c(A)$. Пополним наборы Λ_s при $s = 1, \dots, c(A)-1$ радикальной переменной, входящей в f, своей для каждого пополненного набора до наборов Λ_s'.

Тогда многочлен f' принимает значение, равное $f(\overrightarrow{y})$, и поэтому $f'|_A \neq 0$. Кроме того, $S_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_{c(A)-1}',\Lambda_{c(A)},\dots,\Lambda_k}(f') = f'$ при данных специализациях и $S_{\Lambda_1',\dots,\Lambda_{c(A)-1}',\Lambda_{c(A)},\dots,\Lambda_k}(f')|_A \neq 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что каждая нетождественная перестановка переменных из произведения групп перестановок переменных из Λ_s, Λ'_s приводит к нулевому результату. Доказательство будем осуществлять отдельно для первого и отдельно для второго случая.

Случай, когда смешанные элементы присутствуют. Достаточно рассмотреть перестановки следующих видов:

- Перестановки, двигающие один из смешанных радикальных элементов.

  Соответствующий результат, как мы убедились выше, равен нулю.

- Перестановки, неподвижные на смешанных радикальных элементах, но двигающие несмешанные радикальные элементы.

  При таких подстановках происходит "засасывание" переменных в радикал. Их результат линейно представим значениями многочленов из $\mathrm{T}(f)$, использующих меньшее чем $d(A)$ число радикальных специализаций. В силу п.а) леммы 3.10 эти значения равны нулю.

- Перестановки, неподвижные на радикальных переменных и нетождественные. Равенство нулю результатов следует из конструкции множеств Λ_s.

Случай, когда смешанные элементы отсутствуют. В этом случае пирсовская компонента одна, полупростая часть A изоморфна алгебре матриц порядка n и $b(A) = n^2$, смешанных элементов нет, все обкладки одинаковы. Поэтому полином f можно домножить на произведение, равное 1 и содержащее $k > c(A)-1$ наборов Λ_s переменных x_α, специализированных в матричные единицы E_{ij}. Поэтому ненулевая удобная подстановка существует.

Достаточно рассмотреть перестановки следующих видов:

- Перестановки, двигающие один из радикальных элементов.

  Они подставляют вместо радикальной специализации переменной в f полупростую специализацию из h и потому обращаются в ноль (в силу п.б) леммы 3.10).

- Перестановки, неподвижные на радикальных переменных и нетождественные. Равенство нулю результатов следует из конструкции множеств Λ_s.

$\square$

Замечание. Два случая — когда смешанные компоненты есть и когда их нет, являются принципиально различными. С этим явлением мы будем встречаться при доказательствах конечной базируемости. Отметим, что примеры бесконечно базируемых T-пространств (в положительной характеристике) впервые были построены в ситуации, когда смешанные элементы отсутствуют.

Замечание. А. Р. Кемер рассматривал также величину $a(A)$ – сумму размеров матричных клеток, отвечающих первичным компонентам, и величину $a_1(A)$, определенную таким же образом, как и $b_1(A)$, с той только разницей, что в переменные из каждого набора Λ_i подставляются различные степени одного и того же элемента. Лемма в работе [52], аналогичная лемме 3.6, показывает, что в несводимой алгебре величина $a_1(A)$ совпадает со сложностью Латышева. Доказательство основано на следующих соображениях.

Пусть $x = \sum_k \alpha_k E_{kk}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $x^m = \sum_k \alpha_k^m E_{kk}$. И если

$$W = f_0 E_{11} E_{11} f_1 E_{22} E_{22} f_2 \dots f_{a-1} E_{aa} E_{aa} f_a$$

то

$$\sum_{\sigma \in S_a} (-1)^\sigma f_0 E_{11} x^{\sigma(m_1)} E_{11} f_1 E_{22} x^{\sigma(m_2)} E_{22} f_2 \dots f_{a-1} E_{aa} x^{\sigma(m_a)} E_{aa} f_a = \det(\alpha_i^{m_j}) W.$$

Когда основное поле бесконечно, коэффициенты $\{\alpha_i\} \in \mathbb{F}$ можно выбрать таким образом, чтобы определитель $\det(\alpha_i^{m_j})$ не обратился в ноль. Со вторым соображением мы уже имели дело. Любой элемент отвечающий матричной единице $E_{ij}^{(\mu)}$ представим в виде слова

$$U^\mu = E_{ij}^{(\mu)} f_0 E_{11} * E_{11} f_1 E_{22} * E_{22} f_2 \dots f_{n_\mu - 1} E_{n_\mu, n_\mu} * E_{n_\mu, n_\mu} f_{n_\mu}.$$

В места, отмеченные звездочкой $*$ можно вставлять степени элемента x и альтернировать. Рассуждения такие же, как и в доказательстве леммы 3.6.

3.4. Метод А. Р. Кемера для положительной характеристики

Этот параграф посвящен непосредственному переносу техники, изложенной в предыдущем разделе, на положительную характеристику, а также вопросам, связанным с редукцией по простому модулю.

3.4.1. Рациональность рядов Гильберта в случае положительной характеристики

Мы доказали рациональность рядов Гильберта в нулевой характеристике. В положительной характеристике импликация: **"локальная представимость"** $\Rightarrow$ **"рациональность рядов Гильберта"** (в любом понимании) осуществляется значительно проще, но разбирается отдельно. Этим мы сейчас и займемся. Дело в том, что во внутренние следы входили радикальные части операторов. И действительно, в нулевой характеристике полупростые части "следов" не выделяются. Иное дело характеристика p. Если a и b коммутируют, то $(a+b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}$. Если при этом a – полупростая, b – радикальная части оператора M, а p^k больше размерности представления, то $b^{p^k} = 0$ и оператор M^{p^k} полупрост. Точно также при возведении в подходящую степень уничтожаются радикальные части форм. Сформулируем это в виде леммы:

Лемма 3.12. *Пусть R – коммутативное кольцо характеристики $p = \mathrm{ch}(R)$, $c = c(R)$ – индекс нильпотентности радикала кольца R, $q = p^k \geq c$. Тогда отображение $\varphi : x \to x^q$ есть эндоморфизм R. $\varphi(R)$ есть первичное кольцо, а если R нетерово, то R есть также нетеров $\varphi(R)$-модуль.* □

В качестве R можно брать кольцо форм. И в силу данной леммы построенных таким образом полупростых элементов будет достаточно.

Перейдем к доказательству нашей импликации. Определим внутренние величины b и d для полилинейных тождеств. Назовем набор элементов $\{a_1, \dots, a_n\}$ *полным*, если для каждого i в нем есть элемент из идеала, порожденного A^i. Если смешанных элементов нет, то алгебра является подпрямым произведением своих факторов, каждый из которых состоит из однотипных элементов. Экстремальный идеал достаточно искать для каждого такого фактора, т.е. для алгебры с тривиальным пирсовским разложением единицы. В этом случае все элементы однотипны и, следовательно, $b = b(A)$.

Пусть Γ — ненулевой T-идеал, порожденный полилинейными полиномами, все полилинейные следствия которых обращаются в нуль на любом полном наборе. Тогда все полиномы из Γ таковы и пересечение Γ с идеалом, порожденным всеми A^i, нулевое. В этом случае, поскольку любой T-идеал мы считаем представимым, в алгебре есть представимые идеалы с нулевым пересечением и дело за спуском. Поэтому можно считать, что $b = b(A)$.

Теперь возьмем минимальное d, такое что алгебра $A(d)$ имеет тот же набор полилинейных тождеств, что и алгебра A. В этом случае на записях некоторого вида можно определить внутренние следы:

$$g = S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_{d-1}} S_{\Lambda_1^0} \dots S_{\Lambda^0_{c(A)}} h,$$

где $|\Lambda_i| = b+1$ при $i > 0$ и $|\Lambda_j^0| = b$ при $j = 1, \dots, c(A)$.

Эти следы коммутируют, и для полупростого элемента его внутренний след совпадает с внешним. В самом деле. В алгебре $A(d)$, а значит, и в A, внутренний след, определенный с помощью одной группы переменных Λ_j^0, равен внутреннему следу, определенному с помощью любой другой группы переменных Λ_i^0. С другой стороны, одна из этих групп переменных при любой специализации свободна от вхождения радикала.

Итак, внутренний след полупростого элемента не зависит от записи. Но тогда корректно определены q-е степени внутренних следов (не зависят от записи элементов), где $q = p^k > c(A)$. Таким образом, искомая структура нетерова модуля над экстремальным идеалом построена.

Еще одно утверждение, относящееся к свойствам форм:

Лемма 3.13. *Пусть B – алгебра, порожденная множеством q-ых степеней матриц размера n. Тогда $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{Var}(\mathbb{M}_n)$. Форма, отвечающая q-й степени матрицы C, равна q-й степени соответствующей формы для C.* □

Замечания. 1. По всей видимости, можно брать не $c(A)$ наборов из $b(A)$ антикоммутирующих переменных, а только один. Было бы интересно получить доказательство этого факта.

2. Можно пойти другим путем — построить полином

$$g = S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_r} S_{\Lambda_0} \dots S_{\Lambda_0'} h$$

с экстремальными b и r. Здесь $|\Lambda_i| = b+1$ при $i > 0$ и $|\Lambda_0| = |\Lambda_0'| = b$.

Тогда, в силу теоремы Зубрилина, внутренние следы будут коммутировать, а стало быть, если $q = p^k > c(A)$, то их q-е степени не содержат радикальной части и совпадают с q-ми степенями внешних следов. Можно действовать и не через теорему Зубрилина: создать много альтернаторов с $S_{\Lambda_0^{(k)}}$ и заметить, что при создании коммутанта внутренних следов используется радикальный элемент, а их не больше чем $c(A)$. Поэтому внутренние следы начнут коммутировать.

3. Пусть $q = p^k > c(A)$, тем не менее элемент x^q может не лежать в полупростой части $\widehat{A}$. Простейший пример — оператор $E_{11} + tE_{12}$, $t \in R(A)$. При этом элемент x может и не содержать смешанных компонент.

Обсудим теперь ряды Гильберта в неоднородном случае. Если рассмотреть многообразие $\bar{\mathfrak{M}}$, порожденное старшими однородными компонентами тождеств (см. раздел 6.5.1), то ряды Гильберта, понимаемые как производящие функции

$\sum V_A(n)t^n$, для относительно свободных алгебр из многообразий $\mathfrak{M}$ и $\bar{\mathfrak{M}}$ совпадут (см. раздел 6.5.1, предложение 6.35). С другой стороны, кольцо S, построенное в разделе 5.3.1, для многообразия $\mathfrak{M}$ является однородным по совокупности переменных. Поэтому ряды Гильберта нетеровых S-модулей рациональны и техника главы 5 дает доказательство рациональности рядов Гильберта для общего поля в таком их понимании.

Но можно рассматривать производящие функции, связанные с компонентами, типа $(n_1,\dots,n_s)$. Эти компоненты порождены мономами, имеющими ровно n_i вхождений образующей a_i (для всех i). Пусть $V_{\mathfrak{M}}(n_1,\dots,n_s)$ – размерность пространства соответствующих мономов, а $\bar{V}_{\mathfrak{M}}(n_1,\dots,n_s)$ – размерность фактора пересечения этого пространства с суммой пространств, порожденных мономами, с не большим числом вхождений каждой образующей и со строго ме́ньшим числом вхождений в совокупности. Положим

$$H_{\mathfrak{M},s}(t_1,\dots,t_s)=\sum_{n_1,\dots,n_s} V_{\mathfrak{M}}(n_1,\dots,n_s)t_1^{n_1}\dots t_s^{n_s}$$

и

$$\bar{H}_{\mathfrak{M},s}(t_1,\dots,t_s)=\sum_{n_1,\dots,n_s} \bar{V}_{\mathfrak{M}}(n_1,\dots,n_s)t_1^{n_1}\dots t_s^{n_s}.$$

Рациональность рядов второго типа, по-видимому, можно показать, переходя к алгебре, отвечающей старшим (по всем переменным), компонентам тождеств (см. раздел 6.5.1, определение 6.14). Конечным клеткам будет отвечать радикальные специализации, а если вдоль пути есть клетки разной кратности — то клетку наименьшей кратности можно считать нильпотентной (перебросив переменные в большую кратность, можно сэкономить на составе).

Что касается рядов Гильберта первого типа, то это представляется значительно более содержательной и сложной задачей.

3.4.2. О редукциях по простому модулю

Цель данного раздела — изучить взаимосвязь свойств алгебры и ее редукции по модулю p. Мы покажем, что при p достаточно большом ряды Гильберта относительно свободной ассоциативной алгебры и ее редукции, а также нормальные базисы, состоящие из слов, совпадают. Отметим, что данное утверждение не имеет места ни для алгебр Ли, ни для класса представимых ассоциативных алгебр.

Пример 1. Рассмотрим алгебру Витта W_1. Это алгебра Ли векторных полей на прямой. Ее рост — промежуточный (больше любого полинома, меньше любой экспоненты). Алгебра $L[W_1]$, порожденная операторами левых умножений, не является *PI*-алгеброй, но для любого p алгебра $\mathbb{Z}_p\otimes W_1$ является SPI, следовательно, имеет полиномиальный рост, и соответствующая ей алгебра левых умножений $L[\mathbb{Z}_p\otimes W_1]$ есть *PI*-алгебра. Таким образом, при редукции алгебры W_1 по любому простому модулю возникает много дополнительных соотношений (так возникают новые серии конечномерных простых алгебр Ли в положительной характеристике).

Следующий пример относится к ассоциативной ситуации:

Пример 2. Рассмотрим представимую мономиальную алгебру D над $\mathbb{Z}$ с трансцендентным рядом Гильберта, множество ненулевых слов которой есть подмножество подслов слов из следующего множества: $\{ba^xca^yd|x^2-2y^2\neq 1\}$. Для любого простого p алгебра $\mathbb{Z}_p \otimes D$ не представима. Мы покажем, что в таком случае для любого точного представления D будет существовать элемент $x \notin D$ такой, что $p \cdot x \in D$.

Отметим, что редукция представимой алгебры и алгебра, порожденная редукцией операторов, ее представляющих, вообще говоря, не изоморфны. Например, редукция алгебры общих матриц по модулю p и общие матрицы над кольцом полиномов $\mathbb{Z}_p[\overrightarrow{x}]$ – не одно и тоже. Поэтому наивные рассуждения с выбором элементов общего положения (либо структурных констант) не проходят. (При малом p есть элемент z алгебры общих матриц $\mathbb{M}_n$, такой что z/p не принадлежит алгебре общих матриц над $\mathbb{Z}$, а все его коэффициенты лежат в $\mathbb{Z}[x]$.)

Нам понадобится несколько вспомогательных утверждений из коммутативной алгебры.

Лемма 3.14. *Ряды Гильберта $\mathbb{Q} \otimes M$ и $\mathbb{Z}_p \otimes M$ совпадают в том и только в том случае, когда в аддитивной группе градуированного R-модуля M нет p-кручения.*

Доказательство. Оба эти условия равносильны тому, что соответствующие размерности однородных компонент одни и те же. □

Предложение 3.7. *а) Пусть M – нетеров R-модуль. Тогда при достаточно больших простых p в модуле M нет p-кручения.*

б) При достаточно больших p справедливо равенство $H_{M \otimes \mathbb{Q}} = H_{M \otimes \mathbb{Z}_p}$.

Доказательство. П.б) следует из п.а) и предыдущей леммы. Докажем п.а). Пусть $\{p_i\}$ – бесконечная возрастающая последовательность простых чисел таких, что M имеет p_i-кручение, M_i – соответствующий ненулевой модуль кручения. Тогда $M_i \cap M_j = 0$ при $i \neq j$ и $\bigoplus\limits_{i<k} M_i$ – бесконечная возрастающая цепочка подмодулей, что противоречит нетеровости M. □

Замечание. Можно было бы строить доказательство через лемму о змее: если подмодуль и фактор-модуль не имеют p-кручения, то сам модуль тоже не имеет p-кручения.

Следствие 3.3. *Пусть A – алгебра нетерового типа. Тогда минимальные размерности представлений $A \otimes \mathbb{Q}$ и $A \otimes \mathbb{Z}_p$ при достаточно больших p совпадают.*

□

Следующая лемма описывает препятствие к совпадению размерностей в редукциях:

Лемма 3.15 (Об извлекаемости дробей). *Пусть N — подмодуль M, $0 \to N \to M$. Тогда $N \otimes \mathbb{Z}_p$ вложено в $M \otimes \mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если $N \ni y = pz; z \in M$, то $y = pt$ при некотором $t \in N$.* □

Утверждение леммы означает, что подмодуль, соответствующий N при редукции модуля M, и редукция по p самого N совпадают тогда и только тогда, когда p-кручение фактор-модуля M/N отсутствует.

Из полученных утверждений вытекает

Следствие 3.4. *Пусть A – представимая к.п. алгебра с оператором следа. Тогда p-кручение при всех достаточно больших p отсутствует и $H_{A\otimes\mathbb{Q}} = H_{A\otimes\mathbb{Z}_p}$.*

Доказательство. Алгебра A есть конечномерная алгебра над нетеровым кольцом, порожденным следами. □

Наша цель — доказать следующие утверждения:

Теорема 3.6. *Пусть A – относительно свободная конечно-порожденная $\mathbb{Z}$-алгебра. Тогда при всех достаточно больших p алгебра $A \otimes \mathbb{Z}_p$ представима матрицами ограниченного (по p) размера, и A не имеет p-кручения.*

Теорема 3.7. *Пусть A удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда $H_{A\otimes\mathbb{Z}_p} = H_{A\otimes\mathbb{Q}}$ при всех достаточно больших p и алгебры $A \otimes \mathbb{Z}_p$ и $A \otimes \mathbb{Q}$ имеют одинаковое множество базисов, состоящих из слов от образующих. В частности, у них совпадают нормальные базисы.*

Вывод теоремы 3.7 из теоремы 3.6. Пусть A не имеет p-кручения в аддитивной группе. Тогда ряды Гильберта у алгебры $A \otimes \mathbb{Q}$ и ее “редукции” $A \otimes \mathbb{Z}_p$ равны. Это означает совпадение размерностей соответствующих однородных компонент. Покажем совпадение базисов, состоящих из слов, у алгебр $A \otimes \mathbb{Z}_p$ и $A \otimes \mathbb{Q}$. Для этого достаточно убедиться, что в этих алгебрах линейно зависимы одни и те же наборы слов. Пусть слова v_i линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, т.е. $\sum \alpha_i v_i = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. В силу отсутствия p-кручения можно считать, что p не делит все α_i. Но тогда v_i будут линейно зависимы и в алгебре $A \otimes \mathbb{Z}_p$.

Теперь осталось доказать обратное — т.е., что зависимые слова в $A\otimes\mathbb{Z}_p$ будут зависимы в $A \otimes \mathbb{Q}$. Но в силу равенства рядов Гильберта алгебр $A \otimes \mathbb{Z}_p$ и $A \otimes \mathbb{Q}$ размерности пространств, порожденных словами данной длины r в этих алгебрах, совпадают. Возьмем произвольный базис $\mathfrak{B}$ в пространстве слов длины r в алгебре $A \otimes \mathbb{Q}$. Добавление к $\mathfrak{B}$ любого слова v длины r приводит к появлению линейно зависимого набора слов в алгебре $A \otimes \mathbb{Q}$, а, значит, и в алгебре $A \otimes \mathbb{Z}_p$. В силу совпадения размерностей $\mathfrak{B}$ будет базисом и в этой алгебре. □

Предложение 3.8. *Пусть A – представимая алгебра порядка m и все ее редукции по простому модулю $A \otimes \mathbb{Z}_p$ представимы ограниченного порядка. Тогда при всех достаточно больших p ряды Гильберта алгебр A и $A \otimes \mathbb{Z}_p$ совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать отсутствие p-кручения при всех достаточно больших p. Рассмотрим каноническое алгебраическое представление порядка m. Мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & p_i \cdot A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A_{p_i} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & p_i \cdot A^{(n)} & \longrightarrow & A^{(n)} & \longrightarrow & A_{p_i}^{(n)} & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Если m больше размера представлений всех редукций, то в силу леммы 0.3 вертикальные стрелки означают вложение. Тем самым доказательство отсутствия p-кручения свелось к случаю расширенной алгебры $A^{(m)}$. Но эта алгебра (по лемме 0.3) является нетеровой алгеброй над коммутативным кольцом, порожденным следами. Остается воспользоваться следствием 3.4. □

Замечание. Отметим, что данное предложение непосредственно переносится и на неассоциативный случай. Предложение 3.8 можно использовать для доказательства рациональности ряда Гильберта некоторого класса неассоциативных колец. Требуется представимость (ограниченного порядка) редукций по достаточно большому простому модулю и структурируемость — отщепимость полупростой части в конечномерном случае. Тогда доказательство сводится к алгебрам над $\mathbb{Z}_p$, а этот случай удобен тем, что при возведении в p^k-ю степень при больших k радикальные части следов уничтожаются. И p^k-е степени внутренних следов и форм (определяемых через многочлены Капелли) совпадут с p^k-ми степенями внешних следов и форм (определяемых через представление) (см. также замечание в конце раздела 4.6.2).

В этой связи хочется прояснить следующий

Вопрос. *Пусть B – относительно свободная к.п. $\mathbb{Z}$-алгебра из хорошего многообразия. Верно ли, что при достаточно больших p имеет место равенство $H_{B\otimes\mathbb{Q}} = H_{B\otimes\mathbb{Z}_p}$?*

По всей видимости, ответ отрицательный. Тем не менее ответ положителен, если $\mathrm{Var}(B)$ курошево многообразие и, кроме того, при всех достаточно больших p алгебра B не имеет p-кручения. Это устанавливается теми же рассуждениями, что и предложение 3.8.

Завершим **доказательство теоремы 3.6**. Начнем с доказательства отсутствия p-кручения при всех достаточно больших p у конечно порожденной относительно свободной $\mathbb{Z}$-алгебры A. Можно воспользоваться результатом раздела 6.1.3. Однако мы это сделаем более простыми средствами.

Достаточно построить такой ненулевой T-идеал I, что при всех p достаточно больших $H_{I\otimes\mathbb{Q}} = H_{I\otimes\mathbb{Z}_p}$ и кроме того $pI = I \cap pA$. Ибо тогда $H_A = H_I + H_{A/I}$. Такой идеал легко строится методом Кемера. Если в алгебре имеются T-идеалы с нулевым пересечением, то дело завершает спуск. Иначе имеется представление ρ и T-идеал I, порожденный элементами вида

$$S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_{c(A)-1}} S_{\Lambda_0} h,$$

где $|\Lambda_i| = b(A) + 1$ при $i > 0$ и $|\Lambda_0| = b(A)$.

Этот идеал I устойчив относительно умножения на следы, задается полилинейными полиномами, конечно базируем и образует нетеров модуль относительно нетерового кольца R, порожденного значениями операторов взятия следа (формы). И, кроме того, он совпадает с аналогичным T-идеалом алгебры $A[R]$, которая является нетеровым R-модулем. Пусть g_i — образующие I как R-модуля и $p > \max(\deg(g_i))$. Тогда J_p – редукция по модулю p T-идеала J, порожденного множеством $\{g_i\}$, – также порождается редукциями g_i. А тогда в силу тождеств (2) она также является нетеровым модулем над кольцом следов, которое при больших p совпадает с $R \otimes \mathbb{Z}_p$. И, кроме того, J_p совпадает с T-идеалом алгебры $A[R] \otimes \mathbb{Z}_p$, порожденным образами элементов g_i. В силу предложения 3.7 при достаточно больших p фактор-алгебра $A[R]/J$, а стало быть и A/J, не имеют p-кручения в аддитивной группе. Кроме того, в силу того же предложения, и сам J не будет иметь p-кручения и $H_{J\otimes\mathbb{Q}} = H_{J\otimes\mathbb{Z}_p}$, а в силу следствия 3.3 размерности представления у соответствующих алгебр совпадают. Тем самым мы можем перейти к фактор-алгебре A/J и дело завершает спуск.

Теперь докажем ограниченность минимальных размеров представления. Хотя это следует из результатов раздела 6.2, мы это здесь доказываем более элементарно. Мы показали, что при больших p в относительно свободной к.п. $\mathbb{Z}$-алгебре A нет p-кручения. Алгебра $\mathbb{Q} \otimes A$ представима и, следовательно, представим ее фактор $A' = A/N$ по модулю кручения N (который является T-идеалом в силу предложения 6.5). Рассмотрим пару $(A, \tilde{A})$, где $\tilde{A} = A'[R]$ – алгебра нетерового типа, а R – кольцо, порожденное следами. В алгебре A' имеется R-замкнутый T-идеал $I = I[R]$, который одновременно является идеалом в $A[R]$.

Тогда при всех достаточно больших p (в силу предложения 3.7) имеет место равенство $pI = I \cap p\tilde{A}$ и, следовательно, равенство $pI = I \cap pA$. Поэтому $I \otimes \mathbb{Z}_p$ вкладывается в $\tilde{A}/p\tilde{A}$ и в A/pA. Таким образом, имеется морфизм $\pi_1 : A \to \tilde{A} \otimes \mathbb{Z}_p$, причем $\ker(\pi_1) \cap I = pI$. Ясно также, что $\ker \pi_1 \supset pA$.

Кроме того, поскольку убывающая цепочка подмногообразий $\mathbb{Q}$-алгебр стабилизируется, можно вести индукцию по многообразию и считать основное утверждение установленным для всех факторов по T-идеалам. Поэтому можно считать, что имеется морфизм π_2' фактора A/I в алгебру нетерового типа B и соответствующий морфизм $\pi_2: \ A \to B$, ядро которого $\ker(\pi_2)$ есть $I + pA$.

Теперь рассмотрим морфизм $\pi_1 \oplus \pi_2: \ A \to \tilde{A} \otimes \mathbb{Z}_p \oplus B$. Тогда $\ker(\pi_1 \oplus \pi_2) = \ker(\pi_1) \cap \ker(\pi_2) = \ker(\pi_1) \cap (I + pA) = pA + \ker(\pi_1) \cap I$ (ибо $\ker(\pi_1) \supset pA) = pA + pI = pA$. Итак, мы убедились в представимости редукции $\mathbb{Z}_p \otimes A$. Ограниченность размеров представлений (по p) вытекает из ограниченности алгебр B (т.е. их размерностей) (индукционное предположение) и очевидной ограниченности алгебр $\mathbb{Z}_p \otimes \tilde{A}$. $\square$

Итак, по достаточно большому простому модулю редукции хорошо согласуются.

И в заключение изучим следующую ситуацию. Возьмем конечномерную ассоциативную $\mathbb{Z}$-алгебру B и построим по ней алгебру $\hat{B}$ общих элементов, просуммировав базис B с коэффициентами, равными свободным переменным — своим для каждой образующей $\hat{B}$ и для каждого базисного элемента. Получится относительно свободная алгебра $\hat{B}$, причем, в силу результата А. Р. Кемера о порождаемости многообразия над бесконечным полем конечномерной алгеброй, любая относительно свободная к.п. алгебра над бесконечным полем, в частности полем характеристики нуль, таким образом получается. Теперь рассмотрим алгебру $B_p^1 = \mathbb{Z}_p \otimes \hat{B}$ и алгебру B_p^2, которая получается путем выбора общих элементов в алгебре $\mathbb{Z}_p \otimes B$. Это не одно и то же, поскольку дробь x/p может извлекаться в алгебре $B \otimes \mathbb{Z}[\overrightarrow{x}]$, порожденной B и коэффициентами, и не извлекаться в алгебре B_p^1. При достаточно больших p в алгебре B нет p-кручения и ряд Гильберта $H_{B_p^1}$ совпадает с $H_{\hat{B}}$. В любом случае, все коэффициенты $H_{B_p^1}$ не меньше соответствующих коэффициентов $H_{B_p^2}$. Совпадение коэффициентов при больших p можно вывести из полученных ранее результатов. Прежде всего нам понадобится

Лемма 3.16. *Пусть R – нетерово коммутативное кольцо, S – его нетерово подкольцо, M – нетеров R – модуль, $N \subseteq M$ – его S-подмодуль. Тогда для всех достаточно больших p образ S в $\mathbb{Z}_p \otimes R$ изоморфен $\mathbb{Z}_p \otimes S$, а образ N в $\mathbb{Z}_p \otimes M$ изоморфен $\mathbb{Z}_p \otimes N$.*

Доказательство. Степени определяющих соотношений в N и S определяются числом образующих, соответствующими степенями соотношений в M и R, а также длинами слов от образующих, через которые выражаются образующие из N и S. Оценки не зависят от основного поля. А в конечномерном пространстве при осуществлении вывода соотношений будет использовано деление ограниченное число раз. $\square$

Поскольку размерности редукций по простому модулю представлений ограничены, каноническое алгебраическое представление некоторого порядка алгебры B_p^1 осуществляет вложение для всех достаточно больших p и это представление будет совпадать с редукцией канонического алгебраического представления $\hat{B}$. (А ограниченность доказывается методом экстремального идеала вместе с рациональностью рядов Гильберта. Здесь запрятана наша техника.) Теперь погрузим каноническое алгебраическое представление $\hat{B}$ в расширение алгебры общих элементов и применим лемму 3.16. Мы имеем следующее

Предложение 3.9. *Пусть B – конечномерная алгебра. Тогда при всех достаточно больших p редукция алгебры $\hat{B}$ общих элементов из B и алгебра общих элементов над $\mathbb{Z}_p \otimes B$ совпадают.* $\square$

Это означает: извлекаемость дробей в алгебре $\hat{B}$ равносильна извлекаемости в ее расширении координатными компонентами в B.

Замечание. Отметим, что фактор по идеалу I имеет меньший набор значений индукционных параметров (b, c). Таким образом, мы фактически доказали, что редукция относительно свободной $\mathbb{Z}$-алгебры по любому достаточно большому простому модулю представима.

В заключение хотелось бы поговорить о проблемах, связанных с редукциями. Прежде всего отметим проблему Прочези о совпадении редукции по модулю p алгебры, порожденной общими матрицами, и алгебры общих матриц над $\mathbb{Z}_p$. При p, достаточно больших по сравнению с размером матриц и с числом образующих, гипотеза Прочези верна. С другой стороны, имеются контрпримеры. Когда справедлива гипотеза Прочези? Хорошо бы получить оценки. Прежде всего возникает

Вопрос. *Верно ли, что при больших p гипотеза Прочези верна для матриц фиксированного размера (алгебры, представимой матрицами фиксированного размера)* **при любом числе образующих?**

А. Р. Кемер [148] построил базис алгебры общих матриц со следом, который описывается в терминах слов, не являющихся n-разбиваемыми. Этот базис не зависит от характеристики основного поля. Тем самым был получен положительный ответ на гипотезу Прочези для многообразия (с унарной операцией следа) алгебры матриц со следом $\mathbb{M}_n(\mathrm{Tr})$. С другой стороны, им же было установлено существование элемента $x \in \mathbb{M}_p$ такого, что

- $\pi(x) \neq 0$, где $\pi : \mathbb{M}_p(\mathbb{Z}) \to \mathbb{M}_p(\mathbb{Z}_p$ – естественная проекция $\mathbb{M}_p(\mathrm{Tr})$. Это значит, что для любого $y \in \mathbb{M}_p(\mathbb{Z})$ имеет место неравенство $py \neq x$.
- Для некоторого $y \in \mathbb{M}_p(\mathbb{Z})(\mathrm{Tr})$ выполняется равенство $py = x$.

Таким образом, гипотеза Прочези в общем случае опровергается. Наличие такого рода "деления на p в характеристике p" позволяет строить разного рода T-первичные многообразия, не имеющие аналогов в нулевой характеристике, включая примеры, построенные Ю. П. Размысловым [108]. Последние были построены методом 2-слов, т.е. как суммы базисных векторов с нильпотентными коэффициентами.

В этой связи могут быть интересны T-первичные многообразия, порожденные алгебрами с наибольшим запасом неполилинейных тождеств, т.е. факторами свободных алгебр по словам, содержащим два вхождения образующей.

Интересно также исследовать неассоциативные обобщения гипотезы Прочези. Редукции интересны тем, что в положительной характеристике обладает преимуществами. Во-первых, можно выделять полупростые части, возводя в степень, а во-вторых — диофантовы проблемы в положительной характеристике легче решаются. В частности, это дает возможность доказывать рациональность рядов Гильберта. Мы видели, что вопросы об отсутствии кручения и т.п. сводятся к ограниченности размерностей представлений при редукциях по достаточно большому модулю. Относительно свободная алгебра выделяется своей инвариантностью и симметричностью из-за подстановок. Это дает возможность организовать модульную структуру.

И, наконец, **вопрос И. В. Львова [33]:**

Верно ли, что всякое PI-кольцо является гомоморфным образом PI-кольца без кручения в аддитивной группе?

Кручению в относительно свободных кольцах посвящен также раздел 6.1.3.

Кроме того, особого внимания заслуживают полилинейные и квазилинейные многочлены.

3.5. Бесконечно порожденный случай, супералгебры и T-пространства

В случае нулевой характеристики конечная базируемость многообразий ассоциативных алгебр вытекает из локальной конечной базируемости для супермногообразий (соответствующие понятия T_2-идеалов и T_2-пространств введены в разделе 0.2.4). Доказательство локальной конечной базируемости для супер-случая мало отличается от обычного случая. Вместо величин $b1(A)$, $b1(A,\Gamma)$, $d(A)$, $d(A,\Gamma)$ вводятся индукционные параметры $b1_i(A)$, $b1_i(A,\Gamma)$, $d_i(A)$, $d_i(A,\Gamma)$, индекс $i=0,1$ указывает на четность.

Определение величины с индексом i строится так же, только требуется соответствующая четность переменных, входящих в альтернируемые наборы $\Lambda_j^{(i)}$. При этом $b_i(A)$ есть размерность полупростой части алгебры A четности i, $c_i(A)$ – индекс нильпотентности компоненты радикала соответствующей четности. Величина $d(A)$ определяется так:

$d(A)$ есть минимальное k такое, что для любого g и любых наборов Λ_j из $b_{i_j}(A)+1$ переменной четности i_j имеет место включение $S_{\Lambda_1}S_{\Lambda_2}\cdots S_{\Lambda_k}g\in \mathrm{T}_2(A)$.

Относительные величины и дважды относительные определяются аналогично. Мы ограничимся определением относительных величин.

$$b_i(A,\Gamma)=\max_k|\forall t\exists g\in\Gamma:\ S_{\Lambda_1}\cdots S_{\Lambda_t}g\neq 0,$$
$$\text{где } \forall j|\Lambda_j|=k \text{ и четность переменных из } \Lambda \text{ есть } j$$

$$d(A,\Gamma)=\min_t|\forall g\in\Gamma:\ S_{\Lambda_1}\cdots S_{\Lambda_t}g=0,\quad \text{где } \forall j|\Lambda_j|=b_{i(j)}(A,\Gamma)+1.$$

При этом переменные из Λ_j имеют четность $i(j)$.

Можно рассмотреть множество пар параметров (b_0,b_1), таких что при любом n есть ненулевые многочлены, кососимметричные по n наборов из b_0 четных и n наборов из b_1 нечетных переменных. Если есть несколько максимальных пар, то нетрудно убедиться (рассуждения, как в доказательстве леммы 3.6, см. также лемму 3.5), что в алгебре A есть идеалы с нулевым пересечением и дело завершает спуск. Поэтому величины $b_i(A)$ определены корректно. Аналогичная ситуация с относительными и дважды относительными величинами.

Сформулируем теперь утверждение, являющееся прямым аналогом лемм 3.6 и 3.7:

Лемма 3.17. *а) Пусть $A\in\mathrm{supp}(f)$, $(b_0(A,f),b_1(A,f))<(b_0(A),b_1(A))$. Тогда при некотором μ имеется включение $A^{(\mu)}\in\mathrm{supp}(f)$. И наоборот, если $A^{(\mu)}\in\mathrm{supp}(f)$ при некотором i, то $(b_0(A,f),b_1(A,f))<(b_0(A),b_1(A))$.*

б) Пусть $(b_0(A,\Gamma,f),b_1(A,\Gamma,f))<(b_0(A),b_1(A))$. Тогда если A хорошо отделяет f от Γ, то это же верно для некоторого $A^{(\mu)}$.

в) Пусть $A\in\mathrm{supp}(f)$, $(b_0(A,f),b_1(A,f))=(b_0(A),b_1(A))$. Тогда $A(d)\in\mathrm{supp}(f)$.

г) Пусть $(b_0(A,\Gamma,f),b_1(A,\Gamma,f))=(b_0(A),b_1(A))$. $b(A,\Gamma,f)=b(A)$. Тогда если A хорошо отделяет f от Γ, то это же верно для $A^{d(A,\Gamma,f)}$. □

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству лемм 3.6, 3.7 и мы его опускаем. Построенный T_2 идеал будет устойчив относительно умножений на суперследы. Подробности — см. [54].

Замечания о T-пространствах. Как уже говорилось ранее, локальная конечная базируемость T-пространств не имеет места. Тем не менее, в случае нулевой характеристики, как показал В. В. Щиголев, имеет место глобальная конечная базируемость. Доказательство основано на следующей теореме:

Теорема 3.8 (В. В. Щиголев). *Пусть S есть T-пространство в абсолютно свободной алгебре A над полем характеристики нуль. Тогда:*

а) Если $S\backslash[A,A]\neq\emptyset$, то S содержит ненулевой T-идеал.

б) Если $S\subseteq[A,A]$, то существует T-идеал Γ такой, что $[\Gamma,A]\subseteq S$. □

Из этой теоремы выводится следующее

Предложение 3.10. *Пусть $S\subseteq[A,A]$. Тогда в A существует T-идеал Δ такой, что $\Delta\cap[A,A]\subseteq S$.*

Доказательство. Пусть g – полилинейный многочлен степени m. Он порождает $F[S_n]$-модуль, неприводимым компонентам которого соответствуют диаграммы Юнга D_i. Этим компонентам соответствуют многочлены, лежащие в $\mathrm{T}(f)$ и порождающие его. Диаграммы D_i будем называть *диаграммами Юнга, связанными с* f. Прежде всего нас интересует случай, когда с многочленом f связана одна диаграмма. $\mathcal{I}_m$ обозначает T-идеал, порожденный многочленами, с которыми связаны диаграммы Юнга, содержащие квадрат размера $m\times m$.

Лемма 3.18. *а) Пусть диаграмма D, связанная с многочленом f, содержит квадрат $(m+1)\times(m+1)$. Пусть $f=\sum f_i$, где многочлен f_i есть линейная комбинация слов, содержащих переменную x_0 на i-ой позиции. Тогда все диаграммы Юнга, связанные с f_i, содержат квадрат размера $m\times m$.*

б) Осуществим с каждым мономом операцию циклического сопряжения так, чтобы переменная x_0 попала на первую позицию. Получится многочлен f_i'. Тогда диаграммы Юнга, связанные с f_i, также содержат квадрат размера $m\times m$.

в) Многочлен f_i-f_i' лежит в $[A,\mathcal{I}_{n-1}]$.

г) Если $f\in[A,A]$, то $\sum f_i'=0$.

(Слова u и v *циклически сопряжены*, если для некоторых слов s,t $u=st, v=ts$, операция *циклического сопряжения* состоит в переходе от слова к его циклически сопряженному.)

Доказательство. П.а) непосредственно следует из леммы о ветвлении (см. лемму 0.6). П.б) непосредственно следует из п.а) (ибо если во всех словах осуществить одинаковую перестановку позиций, то диаграмма Юнга соответствующих модулей не изменится. Перестановка множителей индуцирует естественный автоморфизм тензорного произведения.) П.в) следует из п.а), леммы о ветвлении и следующего наблюдения: операцию циклического сопряжения, после которого переменная стоящая на i-м месте попадает на первое, можно осуществить за $i-1$ шаг. На каждом шагу только одна начальная буква переносится в конец и эта процедура не может “портить” действие групповой алгебры симметрической группы на остальных переменных.

П.г) следует из того факта, что в свободной алгебре со следом из равенства $\mathrm{Tr}(xh)=0$, где полином h не содержит переменной x, вытекает равенство $h=0$. □

Следствие 3.5. *Пусть $f\in\mathcal{I}_{m+1}$, f – полилинейный полином. Полином $\bar f$ получается из f так: каждый моном, входящий в f, подвергается такому циклическому сопряжению, чтобы переменная x_0 попала на первую позицию. Тогда $f-\bar f\in\mathcal{I}_{n-1}$.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда полином f получается из полинома g с диаграммой Юнга, содержащей квадрат $m \times m$, путем подстановки слов вместо переменных. Пусть $v_0 = v'x_0v''$ – одно из таких слов, содержащих переменную x_0, g_i и g_i' соответствуют многочленам g_i и f_i'. Можно считать, что v_0 подставляется в переменную t_0. В силу предыдущей леммы $\sum(g_i - g_i') \in [A, \mathcal{I}_{m-1}]$ и $g_i' \in \mathcal{I}_m$. Тогда $g_i' = t_0h_i$ и $h_i \in \mathcal{I}_m$. Пусть $\hat{h}$ – результат подстановки слов v_i вместо t_i в многочлен $h = \sum h_i$, а $\hat{g}$ – результат той же подстановки в многочлен $\sum g_i$. Положим $\bar{f} = x_0v''\hat{h}v'$. Тогда $\bar{f} - \hat{g} = \bar{f} - v'x_0v''\hat{h} = [x_0v''\hat{h}, v'] \in [A, \mathcal{I}_{n-1}]$. Следствие доказано. □

Перейдем к доказательству предложения 3.10. Пусть T-идеал Γ содержит $\mathcal{I}_m$. Покажем, что в качестве Δ можно взять $\mathcal{I}_{m+2}$. В силу предыдущего следствия, достаточно доказать, что если $f \in [A, A]$, то $\bar{f} = 0$. Но $f - \bar{f} \in [A, A]$, поэтому тогда и $\bar{f} \in [A, A]$. Но по предыдущей лемме (п.г) линейная комбинация членов, начинающихся с буквы x_0, которая нигде больше не встречается, не может лежать в коммутаторе. В самом деле. Пусть x_0g – такой элемент. Пусть g не есть тождество алгебры матриц порядка k, сопоставим элементам A общие матрицы порядка k. Тогда след x_0g не обратится в ноль, а след элементов из $[A, A]$ – обратится. Предложение 3.10 доказано. □

Таким образом, вопрос о конечной базируемости T пространств сводится к случаю относительно свободной алгебры. Все рассуждения при осуществлении “супер–трюка” проходят без изменений и для решетки T-пространств (решетка T-пространств в относительно свободной алгебре изоморфна решетке T-пространств в алгебре, порожденной некоторым конечным набором абсолютно коммутирующих и абсолютно антикоммутирующих переменных, оператор $*$ осуществляет инволюцию решеток T-пространств и T-идеалов в супералгебре). Поэтому доказательство конечной базируемости для T-пространств сводится к локальному относительно свободному супер–случаю. А для этого случая непосредственно переносятся все рассуждения из раздела 5.1 (такой путь более удобен, из-за наличия случая, когда смешанные компоненты отсутствуют).

3.5.1. Ряды Гильберта для T-пространств

Теорема A.15 (раздел A.2.2) в своем частном случае для ассоциативных алгебр утверждает, что в относительно свободной ассоциативной алгебре над полем характеристики нуль ряд Гильберта любого T-пространства рационален. (Вопросы рациональности рядов Гильберта для T-пространств обсуждаются также в разделе 5.1.4.)

Рассмотрим случай s-порожденной абсолютно свободной алгебры A над полем нулевой характеристики. Через $H_A(S)$ обозначим ряд Гильберта T-пространства S в алгебре A.

Результат В. В. Щиголева проливает свет на рациональность рядов Гильберта для T-пространств. В силу теоремы В. В. Щиголева имеет место альтернатива:

- T-пространство S содержит некоторый T-идеал I. Тогда

$$H_A(S) = H_I + H_{A/I}(S) = H_A - H_{A/I} + H_{A/I}(S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k s^k - H_{A/I} + H_{A/I}(S)$$

  и ряд Гильберта H_S есть рациональная функция.

- $S \subseteq [A, A]$.

  В этом случае в силу предложения 3.10 в A существует T-идеал Δ такой, что $\Delta \cap [A, A] \subseteq S$. Тогда

$$H_A(S) = H_{A/\Delta}(S) + H_{\Delta\cap S} = H_{A/\Delta}(S) + H_{\Delta\cap[A,A]} =$$
$$= H_{A/\Delta}(S) + H_{[A,A]} - H_{A/\Delta}([A, A]).$$

Таким образом, в этом случае ряды Гильберта для T-пространств отличаются от ряда Гильберта коммутатора $[A, A]$ на рациональную функцию. Но сам этот ряд $H_{[A,A]}$ трансцендентен.

Алгебра A по модулю $[A, A]$ имеет базис, состоящий из правильных слов (т.е. слов, лексикографически меньших всех своих циклически сопряженных). Каждому слову, не являющемуся степенью, однозначно соответствует циклически сопряженное правильное слово, а степени слова — степень циклически сопряженного правильного слова. Поэтому $H_{[A,A]} = H_A - R$, где $R = \sum_n t^n h_n$ есть производящая функция для степеней правильных слов. Отметим только, что количество правильных слов длины n есть размерность L_n пространства мономов степени n в свободной алгебре Ли, и $h_n = \sum_{d|n} L_d$.

Величина L_N вычисляется по формуле

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{r|n} \mu(r)s^{n/r}.$$

Здесь $\mu(n)$ есть *функция Мёбиуса*: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого, и если число n есть произведение k различных простых чисел, то $\mu(n) = (-1)^k$.

Окончательно имеем выражение для размерности g_n n-ой однородной компоненты пространства $[A, A]$:

$$g_n = s^n - \sum_{d|n} \frac{1}{d}\sum_{r|d} \mu(r)s^{d/r}.$$

Что касается T-пространства S в относительно свободной конечно порожденной алгебре при $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = p > 0$, то в этом случае из результатов раздела 5.4.1 вытекает, что если в алгебре имеются смешанные элементы, то осуществляется одна из двух ситуаций:

- Имеется T-идеал J такой, что фактор A/J имеет меньшие сложностные характеристики, и T-пространство $S\cap J$ конечно базируемо и имеет рациональный ряд Гильберта (обсуждение проблем, связанных с рядами Гильберта в неоднородном случае – см. раздел 3.4.1).

- Имеется T-идеал $I \neq 0$ такой, что $S \cap I = 0$.

Тем самым ситуация сводится к изучению T-пространств в случае, когда нет существенных смешанных элементов и нет идеалов с нулевым пересечением. Именно в такой ситуации и были построены бесконечно базируемые T-пространства.

Такая алгебра порождается тензорным произведением алгебры матриц на энгелеву алгебру, и если она бесконечна как кольцо, то идеал ее тождеств состоит из многочленов, однородных по каждой переменной.

4. Представления относительно свободных алгебр.

4.1. Замыкание по Зарисскому.

Техника работы с замыканием по Зарисскому будет использоваться двояко. Во-первых, при проверке того, что многочлен, задающий экстремальный идеал, не есть тождественный нуль. Во-вторых, мы имеем дело с представлениями относительно свободных алгебр. Само такое представление может быть устроено достаточно сложно и обладать довольно тонкими свойствами. Поэтому надо работать с более грубым описанием — с точностью до замыкания по Зарисскому. А именно. Мы считаем, что A вложена в алгебру, являющуюся свободным R-модулем для некоторого ассоциативно коммутативного кольца $R \supseteq \mathbb{F}$. Тем самым A является подмножеством R^s. Таким образом, определено замыкание по Зарисскому образа алгебры при правильном представлении. Выберем в нем "общие элементы" (для бесконечного поля это означает суммирование базисных элементов со взаимно трансцендентными коэффициентами, а для клеток конечного типа — суммирование с коэффициентами из $F_q[\overrightarrow{x}]$, где q – число элементов центра). Они порождают алгебру, изоморфную исходной.

4.2. Построение улучшенных представлений. Алгебры A, A^{cl} и $\widehat{A}$

Начнем с рассмотрения 1-порожденных алгебр. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Предложение 4.1. *Замыкание по Зарисскому подалгебры порождает то же многообразие, что и сама подалгебра.*

Доказательство. Тождество суть многочлен от нескольких переменных, т.е. функция на декартовой степени. □

Предложение 4.2. *а) Пусть $\{\gamma_i\}$ таковы, что $\prod_{i=1}^s \gamma_i^{n_i} \notin \{0,1\}$ для любых целых $\{n_i\}$. Тогда замыкание по Зарисскому множества векторов вида $(\gamma_1^n, \dots, \gamma_s^n)$ есть все пространство F^s.*

б) В общем случае это есть многообразие, заданное системами уравнений:

$$\prod_{i=1}^s \gamma_i^{n_i} = 0; \quad \prod_{i=1}^s \gamma_i^{n_i} = 1$$

для некоторых целых $\{n_i\}$.

Неприводимая компонента соответствующего алгебраического многообразия задается уравнениями:

$$\gamma_j^{k_j} = \prod_{i \in I} \gamma_i^{n_i}; \text{ и } \quad \gamma_j = 0,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$, а I – множество индексов, причем $I \subset \{1, \dots, s\}$ и $j \notin I$.

□

Назовем алгебраическое многообразие M *квазилинейным*, если вместе с точками x и y оно содержит их сумму $x + y$.

Предложение 4.3. *а) Многообразие из п.б) предложения 4.2 является квазилинейным тогда и только тогда, когда оно состоит из одной компоненты и уравнения имеют вид:*

$$\gamma_j^{q_j} = \gamma_i^{q_{ij}} \ (i \in I; j \notin I) \quad \text{и} \quad \gamma_j = 0,$$

где все q_j и q_{ij} – степени p, а p – характеристика основного поля.

б) Оно выдерживает умножения на элементы из F тогда и только тогда, когда для всех q_j и q_{ij} выполняется тождество в кольце F: $x^{q_j} = x$ и $x^{q_{ij}} = x$ для всех $x \in F$. □

Если же $\{\gamma_i\}$ не связаны соотношениями вида $\gamma_i^{q'_{ij}} = \gamma_j^{q''_{ij}}$, то замыкание по Зарисскому множества сумм векторов вида $(\gamma_1^n, \ldots, \gamma_s^n)$ есть все пространство F^s.

Лемма 4.1 (О замыкании 1-порожденной алгебры). *а) Пусть оператор A не содержит собственных чисел, удовлетворяющих соотношениям из п.б) предыдущего предложения. Тогда замыкание $\mathbb{K}[A]^{cl}$ есть в точности множество операторов, которые диагонализируются одновременно с A.*

б) Пусть оператор A диагонализируем и собственные числа не удовлетворяют соотношениям п.б) предложения 4.3. Тогда замыкание $\mathbb{K}[A]^{cl}$ есть в точности множество операторов, удовлетворяющих следующему свойству: каждый собственный вектор A является собственным вектором такого оператора.

в) Если собственные числа диагонализуемого оператора удовлетворяют указанным соотношениям, то замыкание $\mathbb{K}[A]^{cl}$ есть множество операторов, собственные числа которых удовлетворяют системе

$$\gamma_j^{q_j} = \gamma_i^{q_{ij}} \quad (i \in I; j \notin I),$$

а на позициях, отвечающих соотношениям

$$\gamma_j = 0$$

стоят равные числа из F. Никаких других соотношений на собственные числа замыкания нет.

г) Замыкание по Зарисскому алгебры $\mathbb{K}[A]^{cl}$, порожденной оператором A, содержит его полупростую A^S и его радикальную A^R части. И кроме того, оно содержит радикальные части каждого оператора, соответствующего группе жордановых клеток для данного собственного числа, а также степени этих операторов, и порождается элементами такого вида, как векторное пространство. □

Ясно, что $\mathbb{K}[A]^{cl}$ есть коммутативная алгебра (это утверждение — частный случай предложения 4.1.)

Отметим, что полупростая часть может меняться при добавлении радикального оператора. Простейший пример — операторы E_{11} и $E_{11} + E_{12}$ в алгебре матриц. Более содержательный пример — операторы E_{11} и $E_{11} + pE_{12}$ в алгебре матриц над $\mathbb{Z}_{p^2}$. При этом никакая степень оператора $E_{11} + pE_{12}$ не совпадает со степенью E_{11}. При добавлении pE_{12} происходит "бесконечно малый поворот собственного вектора".

Подобным образом замыкание по Зарисскому алгебры, порожденной матрицей вида $\begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, вообще говоря, не содержит диагональных матриц, не пропорциональных единичной.

Для полноты картины приведем утверждение, которое хотя нам и не понадобится, но может оказаться полезным при изучении представлений полугрупп и групп:

Лемма 4.2 (О замыкании степеней оператора). *а) Пусть оператор A не содержит собственных чисел, удовлетворяющих соотношениям п.б) предложения 4.3. Тогда замыкание множества его степеней $(\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}})^{cl}$ совпадает с $\mathbb{K}[A]^{cl}$.*

В общем случае:

б) Замыкание $(\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}})^{cl}$ является полугруппой, содержит полупростую часть A^S оператора A и если среди собственных чисел нет корней из единицы, то и радикальную его часть A^R.

в) Пусть оператор A диагонализируем. Тогда множество $(\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}})^{cl}\backslash\{0\}$ изоморфно прямой сумме множеств операторов, отвечающих классам мультипликативной эквивалентности собственных чисел по модулю корней из единицы, связанных соотношениями из предложения 4.3.

г) Это же верно и для общего случая. Множества операторов, отвечающие неединичному классу мультипликативной эквивалентности собственных чисел, содержат и полупростую и радикальную часть каждого оператора, входящего в это множество. (А также всю алгебру, порожденную радикальными частями.)

д) Пусть $\lambda_1 = \xi\lambda_2$, ξ — корень n-й степени из единицы, λ_1 — не корень из единицы. Тогда замыкание множества пар $\{(\lambda_1^n;\lambda_2^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть множество пар $\{(x;y)|\exists k : x = \xi^k y\}$. $\square$

Замечание. Интересно провести более подробное исследование.

Примеры. 1. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) \neq 2$ и матрица оператора a имеет вид: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. Тогда, если λ не есть корень из единицы, то замыкание по Зарисскому степеней a есть множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$, а также вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$. Замыкание алгебры $\mathbb{K}[a]^{cl}$ есть множество всех диагональных матриц.

2. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) = 2$ и матрица оператора P с полиномиальными коэффициентами имеет вид: $P = \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$. Тогда в базисе $(\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2)$ где

$$\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_1 + \frac{t}{x - x^2}\overrightarrow{e}_2;\ e'_2 = e_2$$

оператор P будет иметь вид $P = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$, и замыкание множества его степеней будет множеством матриц вида $P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$. Если поле $\mathbb{F}$ есть $\mathbb{Z}_2$, то указанное множество есть $\mathbb{F}$-алгебра. Иначе в поле $\mathbb{F}$ есть элемент $f \neq f^2$ и замыкание степеней $P + fE$ (E – единичная матрица) совпадает с множеством всех диагональных матриц (в базисе $(\overrightarrow{e}'_1; \overrightarrow{e}'_2)$). Если $P' = \begin{pmatrix} x & t' \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$, причем $t \neq t'$, то в случае $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ замыкание алгебры, порожденной P и P', есть множество операторов вида: $\begin{pmatrix} x & * \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$.

Если же $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ то это есть множество операторов вида: $\begin{pmatrix} x & * \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

3. Рассмотрим множество матриц вида $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$. Замыкание этого множества есть все множество диагональных матриц. Аналогичный факт верен, если $\mathbb{C}$ заменить на любое поле, а оператор сопряжения — на любой эндоморфизм, отличный от эндоморфизма типа Фробениуса.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть ρ — точное представление алгебры A эндоморфизмами некоторого модуля M над коммутативным нетеровым кольцом. Мы отождествляем A с ее образом $\rho(A)$. Отметим, что конечномерная алгебра разлагается в сумму радикала и полупростой части.

Из леммы 4.1 вытекает следующее

Предложение 4.4. *Замыкание по Зарисскому A^{cl} алгебры A содержит полупростую и радикальную части всех операторов из A. И кроме того, оно содержит радикальные части каждого оператора, соответствующего группе жордановых клеток для данного собственного числа и собственных чисел, связанных с ним соотношениями из предложения 4.3, а также степени этих операторов.*

б) Алгебра A^{cl} расщепляется в прямую сумму радикала A^R и полупростой части A^S. □

Предложение 4.5. *Пусть $\rho : B \to C$ — точное представление полупервичной алгебры B, R – кольцо представления. Тогда существует конечное расширение $R' \supseteq R$ такое, что образы элементы из B в представлении $\rho' : B \to R' \otimes_R C$ представляются блочно диагональными матрицами вида:*

$$\begin{pmatrix} M_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{i_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & M_{i_k} \end{pmatrix}$$

Каждой первичной компоненте B_α соответствует набор клеток $N_\alpha = \{M_{i_\alpha}\}$. Гомоморфизм ограничения h_{i_α} на каждую клетку из N_α является вложением на B_α и как R'-модуль порождает всю матричную алгебру M_α, соответствующую этой клетке. При этом ограничения B_α на остальные клетки – нулевые. Кроме того, множества клеток B_α при разных α не пересекаются.

Если первичная компонента B_α конечна, то ее образ при каждом h_{i_α} есть в точности алгебра матриц над конечном полем.

Доказательство. Любая полупервичная ассоциативная алгебра есть прямая сумма своих первичных компонент, и представление тоже разлагается в прямую сумму. Поэтому можно ограничиться первичным случаем.

Рассмотрим представление центра алгебры B. Расширим основное кольцо так, чтобы оно разложилось в прямую сумму λ-пространств, соответствующих спектральному разложению представления центра. Далее можно выбрать базис, согласованный с этим разложением.

Остается заметить, что некоторое конечное центральное расширение первичной алгебры конечного порядка является алгеброй матриц над некоторым коммутативным кольцом. Поэтому можно подобрать такое R', что образ B_α при каждом h_{i_α} порождает всю клетку. Если же первичная алгебра конечна, то она сама является алгеброй матриц и ее представление приводится к блочно диагональному виду (это легко следует из теоремы Ван–Дер–Бёрна о том, что конечное тело является полем). □

Изучим теперь замыкание по Зарисскому представления полупростой части.

Замыкание по Зарисскому первичной алгебры B содержит ее центральное расширение $A[R']$, если основное кольцо R, относительно которого производится это замыкание, содержит кольцо R', причём центр B (а тогда и кольцо R) бесконечен. Поэтому можно считать, что замыкание A^S есть прямая сумма матричных алгебр.

Теперь рассмотрим представление центра первичной компоненты и его замыкание по Зарисскому. Легко видеть, что оно устроено как в лемме 4.1. Тем самым мы имеем классификацию клеток на независимые и связанные по Фробениусу.

Теперь выберем согласованные базисы в клетках. Возьмем оператор P из A^S общего положения, причем полупростой (чего легко добиться, возводя его в p^k-ю степень). Его спектральное разложение удовлетворяет условию леммы 4.1. Рассмотрим базис, составленный из собственных векторов P, отвечающих ненулевым собственным числам. Каждый базисный вектор соответствует некоторой клетке, а числа, соответствующие разным клеткам, либо независимы, либо связаны автоморфизмами Фробениуса, причем характер связей отвечает представлению центра и одинаков.

Имеем следующее утверждение:

Предложение 4.6. *Пусть A — представимая алгебра. Тогда существует ее представление матрицами над коммутативным кольцом, обладающее следующими свойствами:*

- *Каждый элемент из A представляется матрицей, вдоль главной диагонали которой идут блоки, а под диагональю — нули. Элементы из $R(A)$ изображаются верхне-треугольными матрицами, ограничения которых на блоки — нулевые.*
- *Каждому такому блоку соответствует гомоморфизм ограничения алгебры A, образ которого первичен.*
- *Проекция A на ее полупростую часть A^S получается, если каждому элементу из A сопоставить элемент A^S с теми же ограничениями на блоки, компоненты которого вне блоков равны нулю.*
- *Блоки разбиваются на группы, отвечающие спектру центра A^S. В каждой такой группе блоков в соответствующих позициях (получающихся параллельным переносом блоков) стоят одинаковые элементы либо*
- *Соответствующие элементы у этих блоков удовлетворяют соотношениям: $(x_{ij}^{(\alpha)})^{q^\alpha} = (x_{ij}^{(\beta)})^{q^\beta}$ (греческие буквы нумеруют клетки). Пара индексов (ij) задает позицию в матрице, в которой смотрится коэффициент. Причем $x^{q^\alpha} = x$ для всех $x \in F$.*

Элементы замыкания по Зарисскому алгебры A удовлетворяют приведенным выше условиям. □

В этом случае мы будем говорить, что представление приведено *к правильному виду*.

Результат данного предложения имеет ключевое значение. Он позволяет путем выбора элементов общего положения преодолеть диофантовы трудности. Между объектами разных типов соотношений нет, а между однотипными — простые и контролируемые. Они легко описываются на языке тождеств.

4.3. Структура улучшенных представлений

Мы будем рассматривать только матричные представления, описанные в предыдущем предложении. Блоки будут называться *клетками*. *Нулевой клеткой* называется позиция на главной диагонали, на которой стоит ноль для каждого элемента из A. Две клетки называются *похожими*, если проекции любого элемента алгебры на эти клетки совпадают, *однотипными*, если связаны указанными выше соотношениями (тогда мы говорим о *кратностях* клеток) и *независимыми* в противном случае. Клетки разных размеров всегда независимы. В случае, когда основное поле бесконечно, все однотипные клетки похожи.

Радикал осуществляет связь между клетками. Радикальная часть алгебры A^{cl} тоже разлагается в сумму частей. Эти связи обеспечиваются компонентами вида E_{ij}, где индекс i отвечает одному блоку, j – другому, или один из индексов никакому блоку не соответствует. Радикальные компоненты $\lambda_{ij}E_{ij}$ бывают следующих типов:

1) Отвечающие входам в клетку (i – не индекс внутри клетки, j – индекс внутри клетки).

2) Выходам из клеток.

3) Переходам из одной клетки в клетку другого типа.

4) Переходам из одной клетки в клетку того же типа, но не похожую. В этом случае есть характеристика — отношение логарифмов q_α и q_β.

5) Переходам из одной клетки в клетку того же типа.

Определение 4.1. Компоненты типа 1, 2, 3 называются *граничными операторами.*

Ситуация частично описывается на языке Пирсовского разложения единицы. При этом система однотипных клеток отвечает Пирсовской компоненте единицы, а независимые клетки — разным компонентам. Радикальные компоненты типа 1, 2, 3 отвечают смешанным элементам пирсовского разложения (ν_i — ортогональные идемпотенты, отвечающие единицам в первичных компонентах. “Внеклеточным” индексам соответствует пирсовский элемент $\nu_0 = 1-\sum_{i=1}^k \nu_i$. *Смешанным* (в терминологии А. Р. Кемера) называется элемент вида $\nu_i x \nu_j$, где $i \neq j$.) Элементы типа 1 можно представить в виде $\nu_0 x \nu_i, i > 0$, а типа 2 — в виде $\nu_i x \nu_0, i > 0$. Элемент из A есть сумма своих компонент (которые лежат в расширенной алгебре A^{cl}).

Замыкание по Зарисскому A^{cl} содержит компоненты операторов каждого типа по отдельности. Во-первых, она содержит “первичные части” — полупростые части, отвечающие системе клеток данного типа, в частности, соответствующие пирсовские компоненты единицы. Во-вторых, пирсовское разложение единицы приводит к разложению радикальных частей на компоненты типа (ν_i, ν_j). Кроме того, радикальные компоненты типа $(\nu_i; \nu_i)$ тоже разделяются на операторы перехода между клетками данного типа с одним и тем же отношением логарифмов кратностей. (Оператор подкрученной энгелевости $z^{q_i}x - xz^{q_j}$, где z – центральный элемент для соответствующей системы клеток, уничтожает только операторы перехода между клетками при соответствующем соотношении кратностей. Композиция таких операторов, уничтожающих возможные переходы с другим соотношением кратностей, только данное соотношение кратностей и оставляет.)

4.3.1. Выбор общих элементов. Алгебра компонент $\widehat{A}$. Градуировки

Теперь наша цель — в выборе общих элементов алгебры A^{cl}. С соображениями, связанными с возникновением независимых (“взаимно трансцендентных”) коэффициентов, лучше всего работать на языке градуировок, поскольку сокращаться могут члены только из одной компоненты (см. раздел 4.4.1). Матричные клетки имеют следующие характеристики: размер и количество элементов центра (число или символ ∞). ν_0, как обычно, означает $1 - \sum_{i>0} \nu_i$ или "внутрирадикальную" пирсовскую компоненту единицы.

Процедура выбора элементов общего положения в центральном расширении алгебры A^{cl} такова: выбираем свободные переменные — из кольца $F[\overrightarrow{x}]$ или $F_{q_i}[\overrightarrow{x}]$. Элементы из соответствующей компоненты алгебры A^{cl} будут суммироваться с коэффициентами, равными этим свободным переменным. При этом свободные переменные, относящиеся к разным образующим и/или к компонентам разного типа, различны. Опишем выбор типа переменной для каждой из компонент. Пусть $q = p^k$ – порядок поля $\mathbb{F}$.

- Клетке с бесконечным центром сопоставляются переменные из $\mathbb{F}[\overrightarrow{x}]$.
- Клетке с центром из q_i элементов сопоставляются переменные из $\mathbb{F}_{q_i}[\overrightarrow{x}]$.
- Компоненте типа $\nu_0 x \nu_0$ сопоставляются переменные из $\mathbb{F}_q[\overrightarrow{x}]$.
- Если хотя бы одна из клеток с номерами i или j имеет бесконечный тип (т.е. бесконечный центр), то компоненте типа $\nu_i x \nu_j$ сопоставляются переменные из $\mathbb{F}_[\overrightarrow{x}]$.
- Пусть клеткам с номерами i и j сопоставлены числа q_i и q_j соответственно, q_{ij} – число элементов в минимальном поле, содержащем подполя из q_i и q_j элементов. Тогда компоненте типа $\nu_i x \nu_j$ сопоставляются переменные из $F_{q_{ij}}[\overrightarrow{x}]$.
- Пусть клетка с номером i имеет центр размера q_i. Тогда компоненте типа $\nu_0 x \nu_i$, а также компоненте типа $\nu_0 x \nu_i$, сопоставляются переменные из $F_{q_i}[\overrightarrow{x}]$.

Теперь займемся выбором элементов общего положения. Мы будем пользоваться свободными параметрами, совпадающими в группах похожих клеток и независимыми на разных компонентах, разных клетках и разных радикальных типах и суммировать.

Начнем с полупростой части. Рассмотрим группу однотипных клеток. Возьмем матричную единицу E_{ij} и соответствующие операторы в этих клетках, которые ей отвечают. Напоминаем, что базисные вектора в клетках согласованы согласно предложению 4.6. Теперь умножаем каждое такое E_{ij} на степень свободной переменной, причем переменные согласованы (по Фробениусу), чтобы выполнялись соотношения из предложения 4.6. Систему степеней будем выбирать минимально возможной. Тип переменной описан выше. Эквивалентная более инвариантная конструкция: выбираем центральные элементы для системы однотипных клеток общего положения, свои для каждой матричной единички, домножаем и суммируем. Получаем оператор $\hat{E}_{ij}^{\lambda}$.

Займемся радикалом. Для элемента x типа (μ, ν) получаем набор компонент, получающихся с помощью разложения $\hat{E}_{ij}^{\lambda} x \hat{E}_{kl}^{\delta}$, где операторы $\hat{E}_{ij}$, $\hat{E}_{kl}$, а также переменные λ и δ относятся к соответствующим типам клеток. Получили, таким образом, системы матричных единиц типа il при операторе межклеточного перехода с общими коэффициентами.

Отметим, что соответствующие коэффициенты при компонентах одного типа, но разной похожести связаны соотношениями типа $x^{q_\alpha} = y^{q_\beta}$. Для этого взяты соответствующие степени переменных, а именно — в клетке с номером α берется степень $q^{(\alpha)} = q^{s/\alpha}$, $s = \text{НОК}(\alpha_i)$. Эти величины $q^{(\alpha)}$ называются *кратностями клеток*. Кратность всегда есть степень p.

Кроме того, выделяются члены при переходах между клетками данного типа с одним и тем же отношением логарифмов кратностей. Степень переменной при суммировании равна минимальной кратности.

Рассмотрим произведения радикальных (уже неразложимых в произведение) и первичных элементов из A^{cl}. У каждой части есть свой "Пирсовский тип". Каждому типу соответствует своя степень однородности (градуировка описана ниже). Подправляя представление с помощью независимого суммирования, мы выделим и компоненты каждой градуировки.

Определение 4.2. *Существенным элементом* называется смешанный элемент, одна из обкладок которого соответствует клеткам бесконечного типа. Существенная компонента называется *составной*, если ей отвечает произведение существенных элементов, и *простой* в противном случае. Количество существенных элементов в этом произведении называется *порядком компоненты*. Если количество существенных типов клеток, участвующих в формировании этой компоненты, максимально, то эта компонента имеет *полный состав*. Если при этом ей отвечает произведение максимально возможного числа существенных элементов, то она имеет *максимальный состав*. Элемент называется *чистым*, если он принадлежит одной компоненте.

Теперь для каждого способа осуществить умножение смешанных компонент мы берем соответствующие свободные смешанные компоненты в алгебре A^{cl} и перемножаем. Далее с помощью операторов типа $\hat{E}_{ij}^{\lambda}$ выделяем компоненты, отвечающие входной и выходной единице. Все компоненты всякий раз берутся заново, со своими переменными, сорт которых был ранее описан.

Таким образом, межклеточные переходы умножаются на произведения переменных в степенях соответственно проходимым типам клеток и их кратностям. Каждый следующий множитель берется с переменными–коэффициентами, независимыми от предыдущего.

После такого выбора свободных компонент и суммирования с независимыми коэффициентами для разных образующих и разного рода компонент, мы получаем улучшенное представление относительно свободной алгебры, с которым и будем работать.

В дальнейшем будет предполагаться, что представление алгебры A таково, что ее образующие суть "элементы общего положения", выбранные указанным выше способом. Подалгебру A^{cl}, порожденную компонентами элементов из A, мы обозначаем $\widehat{A}$, а алгебра, порожденная компонентами, отвечающими всевозможным парам клеток, а не только целым системам, обозначается $\check{A}$. Ясно, что $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(A^{cl}) = \mathrm{Var}(\widehat{A})$ и что $\mathrm{Var}(A) \subset \mathrm{Var}(\check{A})$. И если $\mathrm{Var}(A)$ не порождается алгеброй, конечномерной над центром, то включение строгое (см. раздел 6.5.1).

Замечание. Можно строить свободный объект так. Данную переменную надо всеми возможными способами специализировать и брать подмножество прямой суммы. Это позволяет обходиться без переменных из $F_r[\overrightarrow{x}]$, но усложняет изложение.

Следующее предложение описывает некоторые эндоморфизмы A^{cl} и их действие на алгебре компонент $\widehat{A}$ и на A.

Предложение 4.7. *Пусть каждый элемент x_i имеет тип (ν_i, ν_i). Тогда левое (правое) умножение смешанных радикальных компонент на x_i индуцирует эндоморфизм алгебры A^{cl}. Если при этом x_i не лежат в радикале, а их ограничения на соответствующие клетки не являются правыми (левыми) делителями нуля, то естественно определенный образ пары $(A, \widehat{A})$ изоморфен исходной паре.* $\square$

Теперь рассмотрим естественную градуировку на копроизведении в категории коммутативных колец $F[\overrightarrow{x}]$ и всех $F_{q_i}[\overrightarrow{x}]$, $F_{q_{ij}}[\overrightarrow{x}]$.

Предложение 4.8. *Алгебра $\breve{A}$ однородна по всем компонентам всех образующих A в этой градуировке.*

По компонентам, связанным с типом $\nu_i x \nu_j$, если i и/или j относятся к клетке бесконечного типа, эта градуировка однородна в обычном смысле. В противном случае имеет значение присутствие или отсутствие соответствующей компоненты у данной образующей, а также число ее вхождений по модулю $q_{ij}-1$. □

С градуировкой связана одна особенность. Образующая алгебры A (в улучшенном представлении) может иметь "особые" компоненты, отвечающие произведению нескольких радикальных операторов (так мы организуем независимое суммирование). Эти компоненты берутся со своими переменными и градуировка их учитывает. С другой стороны, в произведениях возникают "особые" компоненты при соответствующих матричных единицах, во-первых, из-за "особых" компонент сомножителей, во-вторых — составляются из произведений "обычных" компонент. Таким образом, возникают коэффициенты при матричных единицах, являющиеся суммой членов разной степени однородности. Иногда мы вводим отношение эквивалентности, а иногда — нет, когда работаем со случаем "нескольких радикальных специализаций в одной букве".

В любом случае, множество различных компонент от различных путей (с участием существенных клеток), причем для всех образующих, будет просуммировано со взаимно трансцендентными коэффициентами, чем мы будем пользоваться.

С точки зрения полилинейных тождеств имеют значения только размеры клеток, а не их типы (размер центра), а однотипные клетки разной кратности ведут себя как независимые. Для обычной однородности ($\mathbb{N}$-градуированности) по данной компоненте достаточно хотя бы одной обкладки бесконечного типа и этим мы будем активно пользоваться в дальнейшем. Что касается кручения в градуировке, то мы ее рассмотрели для полноты картины.

Введем *частичный порядок на градуировках* так: сначала сравниваются степени переменных из $F[\overrightarrow{x}]$, а затем — какие переменные кручения из какого-то $F_r[\overrightarrow{x}]$ присутствуют, а какие — нет. Множества присутствующих переменных кручения сравниваются по включению.

Определение 4.3. Компонента называется *существенной*, если она отвечает идеалу, соответствует смешанному элементу, хотя бы одна из обкладок которого относится к клеткам бесконечного типа. *Существенной частью* градуировки называется соответствующая степень вхождения существенных компонент (не важно, от какой образующей), а степень в градуировке называется *существенной*, если ее степень по существенным компонентам ненулевая. Идеал называется *однородным по существу*, если он однороден в существенной градуировке, и *T-идеал алгебры A однороден по существу*, если все его значения есть элементы, однородные по существу.

Если склеить все образующие, а помнить только вхождения соответствующих радикальных компонент, то получится существенная часть градуировки. Градуировка удобна возможностью осуществлять согласованную факторизацию алгебр $\widehat{A}$ и $\breve{A}$ по множеству компонент, соответствующему конгруэнции в градуировке.

4.3.2. Связи между клетками. Граф Г.

Нам надо изучить структуру связей между клетками. Начнем с простейшего случая — когда клеток всего две. Для полноты картины мы приведем два утверждения. Они непосредственно следуют из теории представлений ассоциативных алгебр, которая была развита выше. Поскольку они нигде не используется, их доказательство опускается.

Лемма 4.3. *Пусть A — подалгебра алгебры матриц порядка $m+n$, имеющая две клетки размеров m и n соответственно и состоящая из матриц вида:*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_m & * \\ 0 & \mathbb{M}_n \end{pmatrix}.$$

Пусть A эпиморфно проецируется на алгебры $m \times m$ и $n \times n$ матриц, проекции соответствуют ограничению матрицы на клетку. Тогда имеют место две возможности:

- *Эти две клетки похожи. Тогда $m = n, m+n = 2n$ и A изоморфна либо $\mathbb{M}_n$, либо $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{K}[T]/T^2$.*
- *Эти две клетки не похожи, но однотипны. Тогда $m = n, m+n = 2n$ и A изоморфна либо $\mathbb{M}_n$ (и тогда над блоком на месте $*$ стоят нули) либо расширению $\mathbb{M}_n$ радикальным оператором T, с индексом нильпотентности радикала 2 и соотношениями $\phi_{q_1}(x)T = T\phi_{q_2}(x)$, где ϕ_q – автоморфизм Фробениуса, действующий на компонентах матриц как $x_{ij} \to x_{ij}^q$. При этом q есть степень p.*
- *Эти две клетки независимы. Тогда A есть либо полупрямое, либо прямое произведение матричных алгебр.*

□

Замечание. Мы видим, что для случая двух подряд идущих похожих клеток получается многообразие, порожденное алгеброй общих матриц. Однако когда клеток три, это уже не так. Например, может получиться алгебра, изоморфная $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{K}{<}T_1, T_2{>} \,/\, \mathrm{id}(T_i^2, T_2T_1, \{[T_i, B]\}_{B\in\mathbb{M}_n})$.

Лемма 4.4. *Пусть A — подалгебра алгебры матриц порядка $m+n$, состоящая из матриц вида:*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_m & * \\ * & \mathbb{M}_n \end{pmatrix}.$$

Пусть A эпиморфно проецируется на алгебры $m\times m$ и $n\times n$ матриц, проекции соответствуют ограничению матрицы на клетку и пусть имеются матрицы из A с ненулевым элементом в левой верхней и правой нижней части. Тогда эти две клетки независимы и $A \simeq \mathbb{M}_{n+m}$ либо $A \simeq \mathbb{M}_n \oplus \mathbb{M}_m$. □

4.4. Графы и представления ассоциативных алгебр

При работе с ассоциативными алгебрами используется техника графов и их представлений. Стоит упомянуть хотя бы понятие автоматной мономиальной алгебры и представления, которые строятся по ее графу. Наша цель состоит в том, чтобы применить графовую технику к исследованию многообразий ассоциативных алгебр. На этом языке мы будем изучать структуру связей между клетками.

Замечание. По сути дела (в терминах центральных расширений), техника замыкания по Зарисскому, примененной к каноническому представлению мономиальной алгебры, использовалась в доказательстве того, что многообразие мономиальных алгебр задается алгеброй кусочно–замечательного графа (см. раздел 1.3.2, а также [164]). Это доказательство послужило отправной точкой для автора в применении данной техники к исследованию структур многообразий, разработке более тонкой теории радикала, а тем самым — и при исследовании проблем Шпехтового типа, включая контрпримеры (см. главу 7, раздел 7.2).

При конструировании представлений используется понятие *обобщенного графа* (см. раздел 1.3.3). Мы будем работать с похожей конструкцией. Рассмотрим ориентированный граф Γ, вершины которого символизируют клетки, а также вектора (элементы главной диагонали), не вошедшие в клетки. Их мы будем называть "клетками нулевого размера". Две клетки соединены, если имеется оператор с ненулевой компонентой E_{ij}, где i — индекс, соответствующий первой клетке, j — второй. Поскольку радикальные элементы соответствуют верхнетреугольным матрицам, Γ не содержит циклов. Γ можно определить как фактор-граф по сильно связным компонентам в графе, образованном базисными векторами e_i.

Еще несколько определений. Две стрелки графа называются *параллельными*, если не существует пути, проходящего через обе эти стрелки, и *сильно параллельными*, если нет двух путей с общими началом и концом, содержащих эти стрелки. Клетки, не соединенные стрелкой, мы называем *несравнимыми*, и *совсем несравнимыми*, если нет двух путей с общим началом и общим концом, проходящих через эти две клетки.

На первый взгляд может показаться, что наличие несравнимых клеток приводит к идеалам с нулевым пересечением и к спуску по размеру графа Γ. Однако это не так. Дело в том, что пути могут "гасить" друг друга. Именно благодаря таким эффектам и строится представимая алгебра с трансцендентным рядом Гильберта (см. раздел 1.3.3). Нулевой коэффициент при операторе перехода из одной вершины в другую может возникнуть за счет суммирования по разным путям. С этим связаны (разносортные) тождества в компонентах $\widehat{A}$ вида:

$$u_1 \cdots u_s|_{v_i,v_j} = u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(s)}|_{v_i,v_j},$$

где u_i – слова от компонент алгебры $\widehat{A}$, пометка $|_{v_i,v_j}$ означает рассмотрение коэффициента при матричной единице, отвечающей переходу от вершины v_i к вершине v_j графа Γ. Этим тождествам в компонентах соответствуют системы обычных тождеств, которые получаются путем организации системы расталкивающих замен, которые вынуждают соответствующие специализации в группах переменных (см. леммы 5.13 и 5.14, см. также пример 5 на стр. 218).

4.4.1. Пути в графах. "Гашение" путей

Нам надо проконтролировать процесс "гашения" и сделать редукционные переходы, упрощающие ситуацию. Отчасти для этого понадобилось замыкание по Зарисскому и процедура "улучшения" представлений свободных алгебр.

Занумеруем базисные векторы, соответствующие матричному представлению, сверху вниз. Будем называть *позицией* внеклеточный базисный вектор или символ клетки. На множестве позиций можно ввести отношение предпорядка. Одну позицию будем считать *больше* другой, если соответствующие строки стоят выше, а также имеется элемент алгебры A с ненулевым коэффициентом при E_{ij} – матричной единице, отвечающей переходу между этими позициями. Это только отношение предпорядка, ибо по причине "гашения путей" из $a \succ b$ и $b \succ c$ еще не следует, что $a \succ c$. Транзитивное замыкание дает отношение порядка.

Предложение 4.9. *Все матричные элементы, отвечающие переходу через i-ю позицию вниз, можно умножить на параметр λ, а переходу вверх — на λ^{-1}. При этом новые алгебры A и A^{cl} получатся изоморфны старым и многообразие* $\mathrm{Var}(A^{cl})$ *не изменится.*

Доказательство. Новое представление получается из исходного сопряжением с помощью диагональной матрицы, у которой на i-м месте главной диагонали стоит λ, а на остальных — единицы. Соответствующая замена базиса состоит в умножению базисных векторов с номером, большим i на λ. □

Если переходов через i-ю позицию вверх нет, то остается только умножение переходов вниз, что позволяет упрощать матрицы.

Определение 4.4. Два пути C_1 и C_2 считаются *однотипными*, если:

- Они проходят через те же ненулевые типы клеток в том же порядке.
- Этот порядок включает в себя и порядок прохождения смешанных радикальных компонент.
- Количества несмешанных радикальных компонент с обкладками, отличными от ν_0, совпадают.

Два однотипных пути называются *сильно похожими*, если совпадающие порядки учитывают еще прохождения несмешанных радикальных компонент с обкладками, отличными от ν_0. Два сильно похожих пути называются *почти одинаковыми*, если совпадают последовательности прохождения всех радикальных компонент.

Типом пути мы будем называть последовательность типов клеток и радикальных элементов, отвечающих его прохождению, а *составом пути* мы назовем набор количеств элементов каждого типа из этой последовательности (с учетом кратностей). Назовем тип элемента *существенным*, если хотя бы одна из обкладок отвечает клеткам конечного типа. *Существенным составом* называется набор количеств проходимых существенных элементов. (Можно также учитывать в этом понятии фактор наличия (но не количество) клеток каждого конечного типа и операторов входа, выхода и перехода. Но это нам не так важно.) Выбирая элементы общего положения в алгебре A^{cl} и составляя из них алгебру A, можно считать, что матричные единицы E_{ij}, отвечающие прохождению этих путей, стоят с независимыми коэффициентами. $\widehat{A}$ обозначает алгебру, порожденную компонентами каждого типа элементов из A. Ясно, что $\mathrm{Var}(A^{cl}) \supset \mathrm{Var}(\widehat{A}) \supset \mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(A^{cl})$, так что все эти многообразия совпадают.

Упорядочим пути. Для сравнения типов путей мы будем пользоваться набором характеристик, описанных ниже. Сначала сравнивается первая характеристика, при совпадении — вторая и т.д. Дадим список характеристик:

1) Количества существенных типов самых больших клеток, имеющихся в наличии.

2) Количества анфилад самого большого типа (количество операторов входа, выхода и перехода).

3) Количество типов переходов между однотипными и непохожим клетками (разделяются клетки с разными кратностями). (Переходы характеризуются перепадами кратностей.)

4) Количество переходов между однотипными и непохожим клетками (разделяются клетки с разными кратностями).

5) Параметры 1, 2, 3 и 4 для клеток, следующих по величине, затем — следующих и т.д.

6) Количество клеток самого большого типа.

7) Следующего по величине и т.д.

8) Количество проходимых радикальных элементов.

Замечание. Для нас важнее сам факт наличия анфилад данного типа ("булева градуировка"), а затем — их количество. В результате применения "расталкивающих подстановок"(см. раздел 5.4.1) возникают неоднородные T-идеалы (количество проходимых клеток данного типа в разных слагаемых может быть связано автоморфизмом Фробениуса), однако они однородны в этом "булевом" смысле.

Каждому типу элемента соответствуют свои свободные переменные. Существенному элементу отвечают трансцендентные константы. Каждому пути отвечают градуированные компоненты алгебры $\breve{A}$. Компоненты, соответствующие одному типу, отличаются, во-первых, тем, от каких образующих A какие радикальные компоненты взяты и, во-вторых, степенями компонент, отвечающих проходимым клеткам, с учетом кратностей. Но количества существенных радикальных компонент каждого типа совпадают. С порядком на типах путей естественно связывается порядок на однородных компонентах в алгебре свободных параметров, так что пути бо́льшего типа соответствует не меньшая градуировка: сравниваются количества вхождений свободных переменных, относящихся к соответствующим радикальным компонентам, количества которых и определяют наборы проходимых клеток. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот порядок. Отметим, что пути разного существенного состава не могут друг друга гасить. Кроме того, произведение $c(A)$ элементов не содержит компонент с нулевой градуировкой, относящейся к полупростой части. Все компоненты типа (ν_0, ν_0) этого произведения отвечают операторам E_{ij} таким, что между i и j есть клеточный индекс, а граф, отвечающий алгебре, порожденной такими произведениями, не содержит путей, содержащих двух внеклеточных вершин, идущих подряд.

На градуированных компонентах введем следующие отношения эквивалентности. Во-первых, забудем, от какой образующей какая компонента происходит. Получится *слабая эквивалентность*. Если, кроме того, учитывать компоненты, в которые входят произведения, относящиеся к бесконечным клеткам, то получится просто *эквивалентность*, а *сильная эквивалентность* получится, если компонентам образующих, отвечающих произведению нескольких смешанных элементов, приписать соответствующую градуировку. *Существенная часть* градуировки отвечает существенным радикальным компонентам (при сильной эквивалентности); она же отвечает составу пути.

Из предложения 4.8 непосредственно следует

Предложение 4.10. *При факторизации $\bar{A}$ по компонентам, отвечающих путям данного или бо́льшего существенного состава, возникает представимая* *алгебра. При этом имеется естественное соответствие между клетками и связями между ними в новой и старой алгебре. Соответствующий граф Γ' не содержит путей такого существенного состава.* □

Это предложение очень полезно при осуществлении редукции. Оно, в частности, позволяет "победить" эффекты сильного гашения (определение см. ниже).

Замечание. Неоднородность возникает из-за клеток конечного типа. Тем не менее, хотя по ним нет однородности, элементы с соответствующими обкладками отделяются. Из-за эффектов кратности клеток возникает "другая однородность", которая их учитывает. Градуировка связана с инвариантностью при умножении компонент на согласованные константы.

Определение 4.5. а) Два пути C_1 и C_2 с общим началом и концом называются *пропорциональными*, если для любого слова u произведение компонент элементов этого слова, отвечающее прохождению этих путей с той же последовательностью полупростых и радикальных специализаций, даёт пропорциональные компоненты при матричных единицах, соответствующих прохождению этих путей.

б) Два пути C_1 и C_2 с общим началом и концом называются *слабо пропорциональными*, если есть сколь угодно длинные слова u и v и их специализации, отвечающие прохождению C_1 и C_2, которые дают пропорциональные компоненты при матричных единицах, соответствующих переходу из начала в конец этих путей. Коэффициент пропорциональности лежит в основном кольце.

в) Семейство (слабо) пропорциональных путей называется (слабо) *гасящимся*, если сумма соответствующих компонент оказывается нулевой.

г) Семейство (слабо) гасящихся путей называется *средне гасящимся*, если клетки данных типов и смешанные типы их концов расположены в том же порядке.

Эффекты слабого гашения довольно просто описываются на языке тождеств, от сильного гашения на путях максимального состава можно избавиться. Хуже всего контролируется среднее гашение. Так, представление алгебры Грассмана и грассмановых оболочек (см. пример) строится с помощью этого эффекта. Поэтому мы экстремальный идеал не предъявляем, а ограничиваемся доказательством существования. Мы вводим внутренние следы (как операторы на записях) и внешние (с помощью матричных единиц в полупростой части) и доказываем существование идеала, на котором эти операторы действуют одинаково. Отметим, что результат Кемера (о поглощении радикала) означает также, что все эти эффекты можно выразить на языке альтернирований "по Капелли" (по крайней мере в нулевой характеристике).

Хотелось бы иметь полное описание среднего гашения на адекватном языке.

Имеется интересный эффект: гаситься могут пути, проходящие через разное число несущественных клеток (и, соответственно, граничных операторов). Однако при этом (в силу градуировки) эти количества должны быть сравнимы по модулю $q-1$, где q – размер центра клетки.

Пути слабо пропорциональны, если они имеют общие начало и конец и градуировки, соответствующие этим путям, эквивалентны. В этом случае существует специализация переменных их A^{cl}, при которой этим путям соответствуют пропорциональные элементы с точностью до множителя из F. Две градуировки считаются *эквивалентными*, если они совпадают после склейки однотипных свободных переменных, относящихся к радикалу.

Если рассмотреть произвольное слово и просуммировать его специализации, отвечающие набору гасящихся путей, то такая сумма будет нулевой.

Следующее предложение описывает ситуацию, когда имеет место (слабая) пропорциональность:

Предложение 4.11. *а) Два пути пропорциональны, если они сильно однотипны и произведения коэффициентов при* (ν_0, ν_0)*-компонентах пропорциональны.*

б) Два пути слабо пропорциональны, если они имеют одинаковый состав и произведения коэффициентов при (ν_0, ν_0)*-компонентах пропорциональны.*

Из предложения 4.10 непосредственно следует редукционная

Лемма 4.5. *Если все пути данного или бóльшего состава сильно гасятся, то* A *имеет точное представление, граф которого не имеет таких путей и состоит из конечного объединения связных компонент, каждая из которых меньше исходного графа* Γ. □

Эта лемма позволяет считать, что сильного гашения всех путей данного или бóльшего состава нет. Ввиду этого обстоятельства можно принять, что произведение некоторых компонент, отвечающих прохождению этого пути, ненулевое, и показать, что существуют многочлены, вынуждающие прохождение максимальных путей и не являющиеся тождествами A. Существенный сложностной тип алгебры определяется количеством различных существенных типов клеток на пути полного состава (см. раздел 3.1.1).

Замечания. 1. Можно не проводить редукцию, а работать в алгебре $\breve{A}$ и следить за максимальными по однородности несокращающимися компонентами. Поскольку однородные компоненты, отвечающие путям такого состава (или большие), всегда сокращаются, то их можно игнорировать.

2. См. примеры в разделе 4.5.2.

Для наших целей вполне достаточно леммы 4.5, однако, по-видимому, можно осуществлять более сильный спуск. Назовем *отрезком* такое множество вершин $\mathcal{V}$, что любая вершина не из $\mathcal{V}$ соединена с вершинами из $\mathcal{V}$ только входящими или только выходящими стрелками; $[v_1; v_2]$ обозначает множество вершин графа Γ, лежащих на каком-нибудь пути, ведущем из v_1 в v_2. Рассматривая компоненты матриц, отвечающих данному отрезку, мы получаем гомоморфизм ограничения.

Граф Γ можно урезать, стирая часть ребер. Например, если есть несколько начальных или финальных вершин, то в $\widehat{A}$ есть идеалы с нулевым пересечением. Следующее редукционное предложение развивает эту идею и позволяет получить более удобный вид представления:

Предложение 4.12. *а) Ограничение* Γ *на любой отрезок дает представление соответствующей фактор-алгебры.*

б) Алгебра A^{cl} *вкладывается в прямую сумму фактор-алгебр, отвечающих отрезкам вида* $[v_i; v_j]$ *для всевозможных пар вершин* (v_i, v_j).

в) Если Γ *содержит независимые вершины (т.е. не включающиеся в два пути с общим началом и концом), то* A^{cl} *вкладывается в прямую сумму фактор-алгебр с меньшими графами. (В частности, это имеет место, когда* Γ *содержит две начальные или две финальные вершины.)* □

Мы свели ситуацию к случаю, когда Γ есть отрезок вида $[v_1; v_2]$, каждая стрелка включается в путь максимального существенного состава, сильно параллельных стрелок нет, и нас интересуют максимальные по составу пути. Для "отрезочных" алгебр введем понятие эквивалентности. Назовем многочлен (T-идеал) *интересным для* A, если в любой фактор-алгебре, отвечающей собственному отрезку Γ (отличному от $[v_1; v_2]$), этот идеал обращается в нуль и лежит в T-идеале, отвечающем путям максимального состава. Две отрезочные алгебры будем считать *эквивалентными*, если множества ненулевых интересных многочленов (T-идеалов) у них совпадают. Наша цель — построить T-идеал, устойчивый относительно умножения на следы.

Напоминаем, что алгебра A^{cl} разлагается в сумму компонент $E_\alpha A^{cl} E_\beta$, отвечающих пирсовскому разложению единицы; пара (α, β) называется *типом элемента*. Индекс 0, как всегда, соответствует "клеткам нулевого размера", и соответствующий Пирс есть $1 - \sum \nu_i$.

С компонентой (ν_0, ν_0) структурная теория работает плохо. Однако пути по клеткам нулевого размера можно ограничить. Пусть $A^{(k)}$ есть k-я степень алгебры A. Пусть n – максимальное число клеток, которые может содержать ненулевой путь, m – максимальная длина пути, состоящего из клеток нулевого размера. Поскольку путь длины m должен проходить через клетку, имеет место следующее предложение:

Предложение 4.13. *а) Пусть* $k \geq m$. *Тогда* $A^{(m)cl} = A^{(k)cl}$ *и, следовательно,* $\mathrm{Var}(A^{(m)}) = \mathrm{Var}(A^{(k)})$.

б) Граф алгебры $A^{(m)}$ *не содержит путей длины больше* n, *не проходящих через клетки положительного размера, и индекс нильпотентности* (ν_0, ν_0)*-компоненты не превосходит* $n + 1$. *Максимальный путь не проходит через две внеклеточные вершины подряд.*

В графе соответствующей отрезочной алгебры каждая внеклеточная вершина окружена вершинами, соответствующими клеткам. □

Отметим, что компонента типа (ν_0, ν_0) алгебры $A^{(m)}$ может иметь индекс нильпотентности, в точности равный $n + 1$.

Возникает вопрос о том, всегда ли можно построить эквивалентный граф без сильного гашения (и без сильной пропорциональности путей). В этой связи заслуживает внимания следующая конструкция, которая, правда, пока к доказательству этой гипотезы не привела (мешает эффект гашения на промежуточных вершинах).

Конструкция. Пусть в графе Γ имеется набор гасящихся путей, соединяющих вершины v_1 и v_2. Рассмотрим алгебру A' с графом Γ', который получается из Γ следующим образом:

- Вершины v_1 и v_2 соединены системой параллельных путей.
- Каждый путь соответствует пути в Γ, и коэффициенты — те же.
- При этом набор гасящихся путей убран.

Пусть в графе Γ есть семейство сильно пропорциональных путей. Тогда можно применить предыдущую конструкцию ко всем путям, только в одной вершине первого типа оставить стрелку в v_2, заменив соответствующий коэффициент на стрелке.

Определение 4.6. Графы называются *эквивалентными*, если идеалы, отвечающие прохождению максимальных путей, естественным образом изоморфны.

Воспользуемся нашей конструкцией:

Предложение 4.14. *а) Пусть в графе Γ имеется набор гасящихся путей, соединяющих вершины v_1 и v_2. Рассмотрим алгебру A' с графом Γ', который получается из Γ следующим образом:*

- *Все вершины, не лежащие на этих путях в графах Γ и Γ', совпадают.*
- *Вместо каждой вершины, лежащей на одном из этих путей в графе Γ, в графе Γ' имеется три.*
- *Вершины первого типа соединены, как в Γ, между собой и с выходящими из них вершинами (кроме v_2) и не соединены с входящими вершинами (кроме v_1). (Они обслуживают пути, идущие через v_1.)*
- *Вершины второго типа соединены, как в Γ между собой и с входящими в них вершинами (кроме v_1), и не соединены с выходящими вершинами (кроме v_2). (Они обслуживают пути, идущие через v_2.)*
- *Вершины третьего типа соединены, как в Γ между собой и с входящими в них вершинами (кроме v_1), и выходящими из вершинами (кроме v_2). (Они обслуживают пути, идущие через промежуточный участок пути.)*
- *Вершины разных типов друг с другом не соединены.*

Тогда каждому отрезку $[\alpha, \beta]$ (кроме $[v_1, v_2]$) в графе Γ соответствует один или несколько отрезков в Γ' и наоборот. Системе путей, ведущих из v_1 в v_2, в графе Γ соответствует такая же система путей, но с удаленной подсистемой сильно гасящихся путей. Граф Γ' задает алгебру, эквивалентную A.

б) Пусть в графе Γ есть семейство сильно пропорциональных путей. Тогда от них можно избавиться, применив предыдущую конструкцию ко всем путям, только в одной вершине первого типа оставить стрелку в v_2, заменив соответствующий коэффициент на стрелке. □

Замечание. Можно рассмотреть присоединенное действие алгебры $\widehat{A}$ самой на себя правыми умножениями. Далее взять специализацию в общей точке, получить представление $\widehat{A}$ эндоморфизмами полученного модуля и снова повторить процедуру выбора общих элементов. Получится новая алгебра $\widehat{A}'$. На первый взгляд кажется, что для нового графа Γ' нет сильно пропорциональных (а, следовательно, и сильно гасящихся) путей. Однако это не так. В силу свойства структурируемости (отщепимости радикала) ситуация ничем не отличается от нильпотентного случая. А в этом случае построение Γ зависит от выбора базиса (вершины отвечают базисным векторам, а стрелки — компонентам операторов). И ситуация ничем не отличается от изучения канонического вида представления нильпотентной алгебры верхнетреугольными матрицами. А задачи такого рода являются дикими, и наличие сильно пропорциональных компонент в присоединенном действии представляется возможным.

Воспользовавшись понятием эквивалентности, конструкциями предложений 4.12 и 4.14, сведем ситуацию к случаю, когда сильного гашения нет (и нет сильной пропорциональности), а сам граф Γ изоморфен отрезку $[v_1, v_2]$, где v_1 — его единственная начальная, а v_2 — финальная вершина. Эти две вершины соединены путем максимального состава.

Чтобы доказать рациональность H_A, нужно построить T-идеал, на котором определено действие нетерового кольца. Отметим, что если взять T-идеал, отвечающий пути максимального состава, и ввести действие следов через подстановки, то внутренние следы, определенные таким образом, будут зависеть от записей элементов. Причина состоит в том, что группа клеток может порождать то же многообразие, что и одна клетка, и радикальные специализации войдут в следы. Тип же радикальной специализации может зависеть от того, в каком именно месте произведения была осуществлена "вставка" внутреннего следа. Поэтому мы определим действие нетерового кольца "внешним" образом. Оно будет осуществляться на выходах из анфилад похожих клеток (точнее, на "хвостах анфилад"). Это действие не переводит алгебру A в себя, но переводит в себя некоторый T-идеал в A и задает на нем структуру нетерового модуля. Этот T-идеал строится почти как и для алгебры графа пути максимального состава (только если следы из одной анфилады не коммутируют, мы вставляем такой коммутатор и работаем с новым идеалом, и в силу нильпотентности радикала процесс перехода к новым коммутаторам закончится). Поскольку идеал ненулевой, доказательство рациональности рядов Гильберта на этом завершается. (Ряд Гильберта нетерового модуля над нетеровым кольцом рационален.)

Рассмотрим стрелку $\overrightarrow{v}$ графа Γ, отвечающую обкладке типа (ν_i, ν_j), причем $i \neq 0$. Рассмотрим максимальный отрезок, состоящий из вершин только типа (ν_i, ν_i), соединенных с ее концом. Назовем это множество *анфиладой*. Возьмем объединение отрезков, в нем содержащихся, ограничение на которые порождает то же многообразие, что и одна клетка. В силу предложения 4.12 оно есть максимальный отрезок, обладающий этим свойством. Такой отрезок будет называться *хвостом анфилады*. Хвост анфилады изоморфен расширению алгебры матриц центральными нильпотентами. *Выходом* из анфилады называется оператор, соединяющий хвост анфилады с компонентами другого класса.

4.4.2. Внешние и внутренние следы и формы

Внутри хвоста анфилады все следы коммутируют. Теперь мы определим операторы умножения на след в "хвостовой алгебре" внутренним образом. Им соответствуют операторы в замыкании по Зарисскому расширенной алгебры, и действие таких операторов и даст нужную нам структуру нетерового модуля. Но для начала изучим ограничение алгебры A на анфиладу.

Предложение 4.15. *а) Пусть в алгебре B нет смешанных элементов. Тогда $\widehat{B}$ разлагается в тензорное произведение $\widehat{B} = \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{K} < T_1, \dots, T_s > /J$, где идеал $\mathrm{id}(\{T_i\})$, порожденный переменными $\{T_i\}$, нильпотентен в фактор-алгебре $\mathbb{K} < T_1, \dots, T_s > /J$.*

б) Алгебра B порождает то же (однородное) многообразие, что и $\mathbb{M}_n$, тогда и только тогда, когда все T_i коммутируют.

в) Любой полином, обращающийся в нуль на $\mathbb{M}_n$, принимает в алгебре $\widehat{B}$ значения, лежащие в коммутаторном идеале. Кроме того, каждый коммутатор $[T_i, T_j]$ можно представить в виде значения такого полинома.

г) Пусть P и Q — такие операторы, что для всякого f, обращающегося в нуль на $\mathbb{M}_n$, имеет место равенство $Pf(B)Q = 0$. Тогда $PxQ = 0$ для любого элемента x алгебры $\widehat{B}$, лежащего в идеале, порожденном коммутаторами $[T_i, T_j]$. Верно и обратное.

Доказательство. п.а). Пусть t – радикальный оператор. Полупростая часть алгебры $\widehat{A}$ изоморфна матричной алгебре, и в ней есть операторы E_{ij}, соответствующие матричным единицам. Положим $t_{ij} = \sum_k E_{ki} t E_{jk}$. Тогда E_{ij} коммутируют с t_{rs} и $t = \sum_{ij} t_{ij}$. Мы получили искомое разложение. П.б) проверяется непосредственно. П.в) следует из б), г) следует из в). $\square$

Замечание. Различие многообразий, порожденных $\widehat{B}$ и $\mathbb{M}_n$, связано с квадратом радикала. Более того, из п.г) предыдущего предложения вытекает интересное следствие. А именно, что равенство нулю $Pf(B)Q$ надо проверять не для всех f, а только для того, значение которого на алгебре $\widehat{B}$ дает коммутатор $[T_i, T_j]$. Возможно, это соображение позволит продвинуться при построении базиса тождеств в матричной алгебре.

Итак, радикал влияет через члены второго порядка (это напоминает лиеву ситуацию). Например, если все клетки однотипны, имеют единичный размер, а алгебра приведена к верхнетреугольному виду, то некоммутативность проявляется на расстоянии 2 от главной диагонали. Что содержательного можно сказать про полугруппы нильпотентных элементов, образующих радикал (с точностью до тождеств)?

Иногда полезно представлять набор клеток как клетку, а часть радикала — как образование, связывающее такие "клетки". Например, так устроен граф для свободной алгебры с k образующими из многообразия, порожденного грассмановой оболочкой простой супералгебры $\mathbb{M}_{n,k}$ (пример такого графа см. на стр. 220). Радикал может "закручивать" группы клеток. Как такая закрутка взаимодействует с частью алгебры, отвечающей данному типу?

Следующее предложение относится к конструкции внутренних следов на алгебре B.

Предложение 4.16 (Инвариантность форм и деформация алгебр). *а) Пусть T_i коммутируют. Тогда внутренние следы (формы), определенные на идеале Капелли алгебры B, совпадают с внешними следами (формами), определенными формулой $\mathrm{Tr}(X) = \sum_i E_{ii} X E_{ii}$ (внешние формы определяются сразу после данного предложения).*

б) В общем случае коммутант операторов внутренних форм лежит в идеале, порожденном коммутаторами $[T_i, T_j]$.

в) Если P и Q удовлетворяют условию п.г) предыдущего предложения, то в произведениях $P \cdot B \cdot Q$ внешние и внутренние следы совпадают.

Вообще говоря, полупростая часть представления $\rho(B)$ не отделяется однозначно, тем не менее при деформации алгебры B, описанной в п.а), операторы взятия следа не меняются! И, таким образом, внутренние следы (и формы) на хвостах анфилад совпадают с внешними.

Определим *частичный внешний след* для данной системы однотипных клеток равенством $\mathrm{Tr}_\alpha^{ext}(X) = \sum_{ij} E_{ij} X E_{ji}$, где E_{ij} – система матричных единиц, отвечающая клеткам данной анфиладе. Рассмотрим набор матриц (x_s^{ij}); $s = 1, \ldots, k$, состоящих из операторов x_s^{ij}, равных $E_{ii} X_s E_{jj}$. Определим *частичные внешние формы* $\Phi_\alpha^{ext}(X_1, \ldots, X_k)$ как суммы главных "миноров", у которых первый столбец совпадает с первым столбцом x_1, второй — со вторым столбцом x_2 и т.д. "Миноры" определяются формально, как суммы произведений соответствующих элементов с учетом знаков. Когда радикальные операторы T_i, описанные выше, коммутируют, конструкция ничем не отличается от классической (а такое место в произведении организуется и в нем ведется работа). Далее, формы типа $\hat{\Phi}_k(a)$, которые нам нужны, определяются формально как соответствующие многочлены от $\Phi_k(a)$, описанные в разделе 0.2.3. Поскольку вид этих выражений не важен, мы их здесь не приводим.

Кольцо R_i^{ext} определяется как кольцо, порожденное элементами вида $\mathrm{Tr}_\alpha^{ext}(X)$ (в случае положительной характеристики — также значениями форм $\Phi_\alpha^{ext}(X_1, \ldots, X_k)$). Это кольцо "частичных внешних следов (форм)". Для каждого элемента из (α, α)-компоненты алгебры естественно определен его внешний след, а для набора таких элементов типа (α, α) – формы. Для алгебры $\widehat{A}$ кольцо внешних форм изоморфно расширению подкольца своего центра (внешних следов полупростых частей элементов) своей радикальной частью. Поэтому кольцо внешних следов нетерово. Кольцо R_i^{ext} действует на компонентах $\nu_i x \nu_j$ как левое умножение на элемент $\mathrm{Tr}_\alpha^{ext}(X)$ (соответственно $\Phi_\alpha^{ext}(X_1, \ldots, X_k)$) и на компонентах $\nu_j x \nu_i$ как правое умножение на элемент $\mathrm{Tr}_\alpha^{ext}(X)$ (соответственно $\Phi_\alpha^{ext}(X_1, \ldots, X_k)$). На ограничении алгебры на хвосты анфилад оно действует как коммутативное кольцо, и его действие определено на множестве значений полиномов Капелли.

Кроме того, по модулю коммутаторов $[T_i, T_j]$ внутренние формы (определенные через подстановки в полиномы Капелли) совпадают с внешними.

Замечания. 1. Если брать симметричные функции от таких "внешних следов", то в случае сложности 1 мы придем почти что к конструкции В. Дренского из работы [140]. Поскольку мы строим T-идеал, отвечающий прохождению ветки, определять следы, действующие сразу по всем вставкам, нам не нужно.

2. Можно брать не всю анфиладу, а только тот ее отрезок, который реализуется при прохождении пути максимального состава. (Для разных путей такие отрезки будут разными, и они при этом могут гаситься. Но, несмотря на гашение, подстановки, связанные с граничными операторами, зададут корректно определенную модульную структуру.)

3. Интересно, есть ли возможность применить развитую здесь структурную теорию к получению оценок на степень нильпотентности радикала. Наличие разложения анфиладной алгебры в тензорное произведение (см. предложение 4.15), а также наличие смешанных элементов как будто позволяет вводить "обкладки", осуществлять переход к разносортным тождествам и спуск. Трудность заключается в двух вещах. Во-первых, значительная часть алгебры может лежать в (ν_0, ν_0)-компоненте, а для такой компоненты структурная теория, связанная с клетками, непосредственно неприменима. Во-вторых, в случае единичной сложности и отсутствия смешанных элементов редукционные соображения неприменимы. Соответствующие многообразия порождены групповыми алгебрами с единицей, соответствующими нильпотентной полугруппе. Поэтому изучение таких многообразий а также полугрупп, с точностью до многообразий, порожденных их полугрупповыми алгебрами (расширенными единицей), представляется интересным. В частности, к.п. алгебра из многообразия, порожденного грассмановой алгеброй, принадлежит этому классу.

Наша цель — построить T-идеал, устойчивый относительно операторов умножений на внешние следы. Они действуют на хвостах анфилад. Полином, порождающий этот T-идеал, строится как произведение $\prod H_i$. Множители $H_i = H_i^{(1)} R_i C_{n_i^2} H_i^{(2)}$ устроены так, что при любой специализации переменных с ненулевым результатом все специализации внутрь множителей $C_{n_i^2}$ будут отвечать хвостам анфилад. Это позволяет работать с внутренними формами. Множители $H_i^{(1)}$ и $H_i^{(2)}$ вынуждают переходы между анфиладами (тем обеспечивается прохождение всех систем однотипных клеток).

Множители R_i поглощают некоммутативность во внутри-анфиладных радикалах (тем обеспечивается в силу предложения 4.16 совпадение внешних и внутренних форм). Они строятся поэтапно. Если где-то следы не коммутируют, то можно вставить множитель R, который эту некоммутативность ловит, и положить $R_i' = R_i R$. В конце концов, в силу нильпотентности радикала, место с коммутирующими внутренними следами будет организовано. (А некоторые симметрические функции от внутренних следов совпадут с симметрическими функциями от следов внешних.) Следы и формы будут вести себя как в алгебре матриц.

Мы рассмотрим еще одну пополненную алгебру $\bar{A}$, расширяющую $\widehat{A}$. Она получается, если для каждой клетки добавить операторы, обращающиеся в нуль вне нее и действующие произвольным образом внутри нее, а также все радикальные переходы по отдельности. Ясно, что $\mathrm{Var}(\bar{A}) \supset \mathrm{Var}(\widehat{A}) = \mathrm{Var}(A)$, причем включение, вообще говоря, является строгим.

4.5. Язык тождеств.

Данный параграф посвящен описанию свойств носителей алгебр на языке тождеств. Начнем с исследования ситуаций, которые для нас будут играть роль своего рода "кирпичей".

4.5.1. Граничные алгебры

Эти алгебры описывают взаимодействие соседних клеток. Нам понадобится несколько определений.

Определение 4.7. а) Пусть $\mathbb{D}$ — одномерная алгебра с нулевым умножением. *Алгеброй входа* B_n^l для матриц размера n называется полупрямое произведение $\mathbb{D} \rtimes \mathbb{M}_n$. *Алгебра выхода* B_n^r есть $\mathbb{M}_n \rtimes \mathbb{D}$.

б) *Алгебра перехода* $\mathbb{B}_{k_1,k_2}$ (соответствует переходу между клетками) есть полупрямое произведение $\mathbb{M}_{k_1} \rtimes \mathbb{M}_{k_2}$.

в) *Алгебра перехода* $\mathbb{P}^n_{q_1,q_2}$ соответствует переходу между однотипными клетками разной кратности. Она изоморфна расширению $\mathbb{M}_n$ радикальным оператором T, с индексом нильпотентности радикала 2 и соотношениями $xT = Tx^{q_1/q_2}$

Под *граничной алгеброй* понимается алгебра одного из этих типов. Соответствующие смешанные радикальные компоненты называются *граничными операторами.*

Алгебру входа в клетку можно изображать матрицами порядка $(n+1)\times(n+1)$ с нулевым последним столбцом, а алгебру выхода — матрицами порядка $(n+1)\times(n+1)$ с нулевой первой строкой. Алгебра перехода $\mathbb{B}_{k_1,k_2}$ изображается матрицами порядка $(k_1+k_2)\times(k_1+k_2)$. По главной диагонали идут блоки порядка k_1 и k_2, слева-снизу нули, сверху-справа — что угодно.

Нам потребуется предложение, описывающее множества значений некоторых полиномов. Напоминаем, что Z_k в нулевой характеристике обозначает Размысловский центральный полином для матриц порядка k, а в положительной характеристике для каждого размера матриц фиксируется центральный полином, устойчивый относительно умножений на формы. Он также будет обозначаться Z_k.

Граничным алгебрам соответствуют элементарные полиномы, "вынуждающие" радикал. Из них строятся более сложные полиномы, соответствующие путям. Перейдем к конструкциям.

Пусть $P_{k_1,k_2} = CZ_{k_1}\cdot(t\circ ad(Z_{k_1})\circ ad(Z_{k_1}))\cdot Z_{k_2}D$, $P_k^l=[t,Z_k]S$, $P_k^r=S[t,Z_k]$. Переменную t будем называть *ядром* соответствующего многочлена.

Лемма 4.6. *а) Пусть $t=\sum\alpha_iE_{0i}$ есть оператор входа в клетку размера k. Тогда в алгебре $\mathbb{B}_k^l$ выполняется равенство $[t,Z_k]=tZ_k$.*

б) Пусть $t=\sum\alpha_iE_{i0}$ есть оператор выхода из клетки размера k. Тогда в алгебре $\mathbb{B}_k^r$ выполняется равенство $[t,Z_k]=-Z_kt$.

в) Если $\max(k_1,k_2)\geq\max(k_1',k_2')$, $k_1+k_2\geq k_1'+k_2'$ и $(k_1;k_2)\neq(k_1',k_2')$, то P_{k_1,k_2} обращается в ноль на алгебре $\mathbb{B}_{k_1';k_2'}$.

□

(Если $k > \max(k_1, k_2)$, то в силу теоремы Левина 3.1, $\mathbb{M}_k \supset \mathrm{Var}(\mathbb{B}_{k_1,k_2})$.)

Замечание. Пп.а) и б) означают, что коммутаторное действие на граничных операторах совпадает с обычными умножениями. В случае единичной сложности такое действие использовалось В. Н. Латышевым при доказательстве конечной базируемости и позднее В. Дренским при доказательстве рациональности рядов Гильберта для нематричных многообразий (см. раздел 3.2.4)

Из данной леммы непосредственно вытекает

Предложение 4.17. *а) Множество значений полинома Капелли C_k порядка n^2 совпадает с пространством всех матриц $\mathbb{M}_n$. То же верно для произведения полиномов Капелли порядка n^2 в любом количестве.*

б) Для любого r множество значений полинома $ad(Z_k)^r \circ x$ в алгебре $\mathbb{B}_k^l$ совпадает с пространством, порожденным операторами вида E_{i0}, где $i > 0$, а в алгебре $\mathbb{B}_k^r$ — с пространством $\mathrm{Span}_{i>0}(E_{0i})$. То же верно для $C_{k^2}^s\, ad(Z_k)^r \circ x$ (соответственно для $ad(Z_k)^r \circ xC_{k^2}^s$.

в) Множество значений полинома P_{k_1,k_2} в алгебре $\mathbb{B}_{k_1,k_2}$ есть

$$\mathrm{Span}_{i \le k_1 < j \le (k_1+k_2)}(E_{ij})\,.$$

□

(Несколько проще убедиться в заключении этого предложения для полиномов P_k^l, P_k^r, помогают C и D, стоящие на концах.)

Напоминаем, что под *произведением* полиномов здесь понимается их произведение с подстановкой непересекающегося множества переменных.

Замечание. Рассмотрим алгебры общих элементов, отвечающих граничным алгебрам. Обозначим их $\widehat{\mathbb{B}}_k^l$, $\widehat{\mathbb{B}}_k^r$, $\widehat{\mathbb{B}}_{k_1';k_2'}$ соответственно. Соответствующие многочлены типа Q порождают пространства $\mathcal{Q}$, замкнутые относительно операторов (частичных) форм, относящихся к клеткам. Пусть R есть кольцо таких форм. Тогда каждую такую алгебру общих элементов можно рассматривать как пучок конечномерных алгебр на $\mathrm{Spec}(R)$, причем в точках максимального спектра, в которых Размысловские центральные многочлены не нулевые, $\mathcal{Q}$ покрывает весь радикал.

Из данного замечания следует

Предложение 4.18. *Множество значений Q_{k_1,k_2} при некотором m покрывает $\mathbb{M}_{k_1-1}^m \mathbb{M}_{k_1} \mathbb{M}_{k_2}^m$.* □

Приведенные рассуждения проливают дополнительный свет на алгебро–геометрическую природу теорем о нильпотентности радикала.

Перейдем к работе с первичными компонентами конечного типа. Следующая лемма позволяет уничтожать специализации, относящиеся к таким компонентам.

Лемма 4.7. *Тождество $Z_k^q - Z_k$ выполняется в алгебре $\mathbb{M}_k(\mathbb{F}_q)$ и не выполняется в алгебре $\mathbb{M}_k(\mathbb{F}_{q'})$ при $q' > q$. ($\mathbb{F}_q$ – поле Галуа из q элементов.)* □

Кроме того, нам нужно, чтобы многочлены обращались в нуль и на алгебрах типа $P^n(q_1, q_2)$. Поэтому нужно еще сделать композицию "подкрученных коммутаторов" $Z^{q_2}R - RZ^{q_1}$ по всем возможным парам (q_1, q_2), взятым в нужной степени. Аналог предложения 4.17 полностью сохраняется. Построим соответствующие полиномы. Они зависят от алгебры A, которая будет рассматриваться в дальнейшем. Величины, с ней связанные, в данном разделе следует рассматривать как параметры.

Введем обозначения: $ad^{(q_1,q_2)}(z) \circ t = z^{q_1}t - tz^{q_2}$ ("подкрученный adjoint"). В частности, $ad^{(1,1)}(z) \circ t = ad(z) \circ t$.

Зафиксируем представимую алгебру A. Определим для нее оператор "подкрученной энгелевости" Engel_n как произведение операторов типа ad:

$$\mathrm{Engel}_n(\overrightarrow{Z}) = \prod_{q_\alpha = p^k \in \mathcal{Q}} (ad^{(q_i,q_j)}(Z_{ij,n}))^{p^s},$$

где s – наименьшее целое такое, что $p^s > c$, $Z_{ij,n}$ – центральные многочлены для клетки размера n. $Z_{ij,n}^{p^s}$ означает степень значения центрального многочлена $Z_{ij,n}$, а не произведение значений на разных наборах переменных. $\mathcal{Q}$ есть множество пар (q_i, q_j) отвечающих соотношениям кратностей клеток.

Замечание. 1. Оператор подкрученной энгелевости строится так, чтобы он обращался в ноль на анфиладах размера n и вынуждал тем самым межклеточные переходы.

2. Мы пользуемся термином "энгелевость", поскольку для энгелевой относительно свободной алгебры нет смешанных элементов, а все клетки имеют размер не выше единицы. Верно и обратное. Если при этом c есть индекс нильпотентности радикала, то в алгебре выполняется тождество лиевой нильпотентности $[\dots[x_1, x_2], x_3]\dots x_{c-1}] = 0$. (В конечно порожденном случае лиева нильпотентность следует из энгелевости.) Многочлены типа энгелевости "выбивают" внутриклеточный радикал.

Еще обозначения: c обозначает $c(A)$, C_m – полином Капелли порядка m, C_m^c означает в данном случае не степень значения, а произведение многочлена Капелли от непересекающихся множеств переменных. $h = y^{s_1} - y^{s_2}$ – "вырезающий" полином, обращающийся в нуль вне существенных клеток (так подбираются s_i). $D_1 = D_{11} \cdots D_{1c}$; $D_2 = D_{21} \cdots D_{2c}$.

Выпишем искомые многочлены. Для алгебры перехода:

$$Q^{\mu}_{k_1,k_2} = D_1 h_1 C^c_{k_1^2} \left(t \circ (\mathrm{Engel}_{k_1}(\overrightarrow{Z}_1) \circ \mathrm{Engel}_{k_2}(\overrightarrow{Z}_2) \right) C^c_{k_2^2} h_2 D_2. \tag{1}$$

Для алгебры выхода:

$$Q^{r,\mu}_{k} = D_1 h_1 C^c_{k_1^2} \left(t \circ (\mathrm{Engel}_{k}(\overrightarrow{Z}) \right). \tag{2}$$

Для алгебры входа:

$$Q^{l,\mu}_{k} = \left(t \circ (\mathrm{Engel}_{k}(\overrightarrow{Z}) \right) C^c_{k_2^2} h_2 D_2. \tag{3}$$

Индекс μ характеризует параметры, связанные с алгеброй A, которые участвовали в конструировании многочленов $c(A)$ (показатели s_i в h_1 и h_2 и т.д.). Когда это не вызывает недоразумений, индекс μ будет опускаться. Кроме того, можно выписать соответствующий многочлен для алгебры перехода между клетками кратностей q' и q'':

$$P^{\mu}_{k;q',q''} = D_1 h_1 C^c_{k^2} \left(t \circ \mathrm{Engel}^{(q',q'')}_k (\overrightarrow{Z}_1) \right) C^c_{k^2_2} h_2 D_2, \tag{4}$$

где оператор $\mathrm{Engel}^{(q',q'')}$ строится по оператору Engel, только в соответствующем произведении опускаются множители $ad^{(q_i,q_j)}(Z^{p^s}_{ij,n})$ с тем же соотношением кратностей, которое задает пара (q_1, q_2). Это значит, что в произведении опускаются операторы, для которых $\log_p(q_i) - \log_p(q_j) = \log_p(q') - \log_p(q'')$. Однако этой алгеброй мы пользоваться не будем.

Определение 4.8. Участки многочленов, заключенные в больших скобках в равенствах (1), (2), (3), (4), мы называем *ядрами* соответствующих многочленов. Левая часть соответствующего многочлена до ядра называется *левым концом*, а правая часть, идущая после ядра, — *правым концом*. Естественно определяется понятие *клетки, соответствующей данному концу* многочлена типа Q. Множители Капелли вида $C^c_{k^2}$ называются *местами приема (частичных внутренних) форм* (соответствующих клеткам того или иного типа). Величины k_i, фигурирующие в определении соответствующих многочленов, называются *размерами клеток предназначения* для соответствующего многочлена.

Многочлены $P^{\mu}_{k;q',q''}$ и $Q^{\mu}_{k_1,k_2}$ имеют оба конца, многочлен $Q^{l,\mu}_k$ имеет правый конец, многочлен $Q^{r,\mu}_k$ — только левый.

Операторы типа Engel вынуждают межклеточные переходы, множители типа C_{k^2} позволяют умножать на формы, h_i вырезают попадания в клетки конечного типа. Когда существенная клетка граничит с несущественной, берется многочлен, отвечающий входу или выходу. Впрочем, и для этого случая можно написать многочлен перехода (он устроен так же, только без одного из h_i), но нам это не нужно.

Для полиномов $Q^{r,\mu}_k$, $Q^{l,\mu}_k$, $Q^{\mu}_{k_1,k_2}$, $P^{\mu}_{q',q''}$ справедливы утверждения, аналогичные п.б) и в) предложения 4.17, из которого непосредственно следует

Предложение 4.19. *а) Для любого μ множество значений полиномов $Q^{r,\mu}_k$, $Q^{l,\mu}_k$, $Q^{\mu}_{k_1,k_2}$, $P^{\mu}_{k;q',q''}$ в алгебрах $\mathbb{B}^r_k$, $\mathbb{B}^l_k$, $\mathbb{B}_{k_1,k_2}$, $\mathbb{B}_{k_1,k_2}$, $\mathbb{P}^n_{k;q_1,q_2}$ соответственно совпадает с пространством, порожденным радикалом. При этом радикальная специализация осуществляется внутри ядра соответствующего полинома. Что касается множества значений этих полиномов в алгебре A^{cl}, то оно содержит операторы, отвечающие соответствующим типам переходов, концам и началам анфилад, т.е. все соответствующие смешанные компоненты.*

б) Если $\max(k_1, k_2) \geq \max(k_1', k_2')$ и при этом $k_1 > k_1'$ либо $k_2 > k_2'$, то многочлен $Q^{\mu}_{k_1,k_2}$ обращается в нуль на алгебре $\mathbb{B}_{k_1',k_2'}$. Если $k > k'$, то многочлены $Q^{r,\mu}_k$, $Q^{l,\mu}_k$, $P^{\mu}_{k;q',q''}$ обращаются в нуль на алгебрах $\mathbb{B}^r_k$, $\mathbb{B}^l_k$, $\mathbb{P}^n_{k;q_1,q_2}$ соответственно (для любого μ).

в) Пусть набор параметров μ характеризует алгебру A. Тогда

- *Каждое ненулевое значение полинома $Q^{r,\mu}_k$ лежит в идеале, порожденном специализациями, относящимися к граничному оператору, связанному с существенной клеткой размера не меньше k, либо в идеале, порожденном компонентами, относящимися к существенным клеткам размера больше k.*

- *каждое ненулевое значение полиномов $Q_k^{l,\mu}$ лежит в идеале, порожденном специализациями, относящимися к выходу или переходу из существенной клетки размера не меньше k, либо в идеале, порожденном компонентами, относящимися к существенным клеткам размера больше k.*

- *Каждое ненулевое значение полинома $P^{\mu}_{k;q',q''}$ лежит в идеале, порожденном специализациями описанного выше типа, а также компонентами, относящимися к переходу между однотипными клетками размера k с соотношением кратностей таким же, как и между q' и q''.*

- *Каждое ненулевое значение полинома $Q^{\mu}_{k_1,k_2}$ лежит в идеале, порожденном специализациями, относящимися к переходу между существенными клетками размеров k_1' и k_2', причем $k_1' \geq k_1$, $k_2' \geq k_2$, либо в идеале, порожденном компонентами, относящимися к существенным клеткам размера больше* $\max k_1, k_2$.

□

4.5.2. Примеры графов и алгебр

Случай, когда Γ состоит из одного пути. Поскольку мы изучаем экстремальные идеалы, а граф Γ является отрезком $[v_1, v_2]$, нас будет интересовать расположение компонент произведений вдоль пути. Поэтому следующий случай, который надо рассмотреть, — когда Γ состоит из одной "ветки".

Если похожих клеток нет, то построение экстремального идеала осуществляется также, как и для многообразий мономиальных алгебр. Гашение может происходить по путям одинакового состава. Когда нет гашения, алгебра вкладывается в прямую сумму своих фактор-алгебр, отвечающих путям в графе Γ.

Рассмотрим путь C в графе Γ. *C-Анфиладой* называется последовательность похожих клеток, идущая вдоль этого пути, между которыми нет клеток другого типа или радикальных элементов с другой пирсовской обкладкой. *Хвостом C-анфилады* называется конец этой последовательности такой, что если элементы алгебры A^{cl} ограничить на эти клетки, то получится алгебра, порождающая то же многообразие, что и одна клетка анфилады. Алгебра, отвечающая хвосту анфилады, изоморфна расширению алгебры клетки центральными нильпотентами. Каждому пути соответствует набор анфилад.

Новые эффекты возникают, когда есть похожие клетки. Поясним, в чем они состоят и как отразить свойство "похожести" на языке тождеств.

Дело в том, что следы, относящиеся к похожим клеткам, можно перебрасывать от одной клетки к другой. Выпишем соответствующие равенства. Пусть

$$f = \prod_{i=1}^{s} x^{r_{i-1}-\delta_{i-1}-\varepsilon_i}[Z_{n_i^2}, y_i]^{\varepsilon_i} C^r_{n_i^2}[Z_{n_i^2}, y_i]^{\delta_i} \cdot x^{r_s-\delta_s}, \tag{5}$$

где s равно числу анфилад в пути C, r — индексу нильпотентности радикала, а величины δ_i и ε_i, соответствующие i-ой клетке, принимают значение 0 или 1 и определяются по правилу:

1) $\varepsilon_i = 0$, если длина перемычки, входящей в i-ю клетку, равна 1, и при этом слева стоит клетка не меньшего размера либо входящая перемычка отсутствует.

2) $\delta_i = 0$, если длина перемычки, выходящей из i-й клетки, равна 1, и при этом слева стоит клетка бóльшего размера либо выходящая перемычка отсутствует.

3) В остальных случаях величины δ_i и ε_i равны 1.

(Отсутствие входящей перемычки возможно, когда v_1 соответствует начальной клетке, а выходящей — когда v_2 соответствует последней. Под произведением многочленов понимается такое произведение, когда в них подставлены непересекающиеся множества переменных.)

Иными словами: если идет переход от бóльшей клетки к мéньшей или обратно, то оставляется множитель $(ad(Z_{n_i^2})^q \circ y_i)$, отвечающей бóльшей клетке, а если размеры равны — то левой клетки. Внеклеточные вершины считаются клетками нулевого размера.

Легко убедиться в том, что

- f не является тождеством алгебры A^{cl}, а, значит, и A.
- При подстановке матричных единиц из $\hat{A}$, результат которой ненулевой, в каждое $C_{n_i^r}$ должны подставляться элементы, отвечающие i-ой анфиладе.

Рассмотрим вначале случай бесконечного основного поля. Пусть клетки с номерами i и j — похожи. Тогда $\mathrm{AD}_{ij}(a)f = \mathrm{Tr}_i(a)f - \mathrm{Tr}_j(a)f = 0$, выражение $\mathrm{Tr}_i(a)f$ означает замену одного из $C_{n_i^2}$ в выражении для f на сумму $\sum_k \frac{1}{n_i} C_{n_i^2}(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})|_{x_k = x_k a}$; в случае положительной характеристики надо рассматривать операторы $\mathrm{AD}_{ij}(a_1;a_2)f = \mathrm{Tr}_i(a_1;a_2)f - \mathrm{Tr}_j(a_1;a_2)$, где $\mathrm{Tr}_i(a_1;a_2)f$ означает замену одного из $C_{n_i^2}$ в выражении для f на сумму $\sum_k C_{n_i^2}(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})|_{x_k = a_1 x_k a_2}$. (Если A есть алгебра матриц порядка n, то в силу равенства (2) из теоремы $\mathrm{Tr}(a_1;a_2)f = \mathrm{Tr}(a_1)\,\mathrm{Tr}(a_2)f$. Клетка одна и индекс i не указывается.)

Все эти операторы определяются как операторы на “записях” — алгебраических выражениях. (Вместо обозначения $\mathrm{AD}_{ij}(z)f$ нетрудно привести явную формулу для полинома, чего мы не делаем из-за её громоздкости.)

Наличие нескольких анфилад таких, что все клетки в этих анфиладах похожи, приводит к дополнительным эффектам при применении операторов AD_{ij}. Они “вынуждают” радикальные компоненты внутри анфилад. Пусть, например, имеется анфилада из двух клеток, связанных радикальным оператором T, и еще одна анфилада из одной клетки, похожей на них. Тогда применение соответствующего AD_{ij} к полиному f приводит к вставке радикальной части следа. Если же имеется пара анфилад из двух пар клеток в каждой, то применение $\mathrm{AD}_{ij}(x)$ ведет к разности простановок радикальных частей следа x относительно первой и второй анфилад. Радикальные части следов относительно разных анфилад могут быть по-разному связаны между собой, что приводит к появлению тождеств, зависящих от параметров. В частности, радикальные части у похожих анфилад могут быть похожими, а могут — и “независимыми”.

Отметим, что на каждое применение оператора AD_{ij} “тратится” радикальная компонента и возникают тождества $\mathrm{AD}_{ij}^q f = 0$, где q — количество подряд идущих похожих клеток. При последующем применении оператора на записях AD всякий раз добавляются новые переменные $z_1^{(k)}$ и $z_2^{(k)}$ (см. также наше определение произведения тождеств). Когда $n_i = n_j = 1$, то вместо следов осуществляется переброска переменных и возникают условия типа энгелевости на операторы коммутирования типа ad (см. пример). Эта ситуация подробно исследована в диссертации В. Н. Латышева [71], который впервые для нематричного случая ввел такие операторы.

Аналогичным образом определяются оператор $\mathrm{H}_i(\Phi)(f)$, отвечающий системе замен, обеспечивающих простановку в i-й сомножитель формы Φ, а также оператор $\mathrm{AD}_{ij}(\Phi)(f) = \mathrm{H}_i(\Phi)(f) - \mathrm{H}_j(\Phi)(f)$. Все сказанное об операторах, связанных со следами, справедливо и для операторов, связанных с формами.

Для веточного графа радикальные части выбиваются явно, после чего получается искомый экстремальный идеал со структурой модуля над полупростыми частями следов.

Теперь рассмотрим случай, когда основное поле конечно. Нам понадобятся некоторые другие операторы, действующие на записях. Пусть Z_{k_i} есть центральный полином, отвечающий i-й клетке размера k_i. Оператор $\mathrm{H}_i(Z_{k_i})$ вставляет в место i-й клетки дополнительный множитель Z_{k_i}, а оператор $\mathbf{P}\,(q)_i$ – множитель $Z_{k_i}^q - Z_{k_i}$ (q – степень характеристики основного кольца). В данном случае подразумевается обычная степень, а не произведение с подстановкой различных переменных. Однако переменные операторов вставки считаются непересекающимися с остальными. Если размер центра в алгебре матриц i-ой клетки конечен, равен q' и $q'-1$ делит $q-1$, то результат действия оператора $\mathbf{P}\,_i^{(q)}$ будет нулевым. Мы будем брать q таким, чтобы это условие выполнялось для всех клеток конечного типа. (Тем самым "вынуждается" бесконечность типа.)

В случае конечности основного поля имеется эффект кратности клеток. Его надо учесть при конструировании многочленов. Напомним, что $ad^{(q_1,q_2)}(z)$ обозначает "подкрученный adjoint": $ad^{(q_1,q_2)}(z)\circ t = z^{q_1}t - tz^{q_2}$. В частности, $ad^{(1,1)}(z)\circ t = ad(z)\circ t$. Соответственно, "подкрученные" операторы $\mathrm{Engel}_{ij}^{(q_1,q_2)}(z)f = \mathrm{Tr}_i(z)^{q_1}f - \mathrm{Tr}_j(z)^{q_2}f$.

Аналогичным образом оператор на записи Φ_i означает вставку формы Φ в i-й множитель. В случае единичного размера клетки это простановка дополнительной переменной, в общем случае — система подстановок, примененная к соответствующему Капелли–множителю C_i. Аналогично определяются операторы $\mathrm{AD}^{(q_1,q_2)}(\Phi)$ и $\mathrm{Engel}_{ij}^{(q_1,q_2)}(\Phi)$. Оператор $\mathbf{P}_{q,k}(\Phi)$ есть аналог оператора $\mathbf{P}\,(q)_i$.

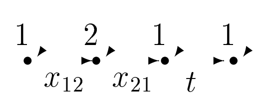
Похожесть клеток с номерами i и j означает равенство нулю произведения

$$\prod_{q_\alpha,q_\beta} (\mathrm{Engel}_{ij}^{(q_1,q_2)})^c \circ f,$$

где пары (q_α, q_β) из пробегают множество пар возможных кратностей клеток в алгебре (и включает пару $(1,1)$), $c = c(A)$ – индекс нильпотентности радикала.

Примеры. На всех рисунках маленькие буквы при стрелках означают функции, сопоставляющие элементам алгебры коэффициенты при соответствующих матричных единицах. Большая цифра указывает на номер типа, первый нижний индекс при цифре (когда это необходимо) — на номер анфилады, второй нижний — на номер клетки в анфиладе, верхний — на кратность соответствующей клетки (опускается, если кратность единица). q есть степень p, при этом $\forall x \in \mathbb{F}\ x^q = x$.

1. Рассмотрим случай, когда граф содержит одну клетку единичного размера, далее идет независимая клетка единичного размера, далее — анфилада из двух клеток, похожих с первой. (см. рис.)



Рассмотрим многочлен:

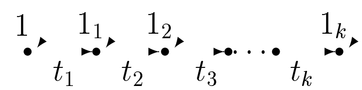
$$a_1[a_2,x]b_1[b_2,y]c-[a_2,x]b_1[b_2,y]ca_1=[a_1,[a_2,x]b_1[b_2,y]c];$$

он не обращается в нуль, переброска в другую клетку вынуждает радикальную компоненту оператора a_1. С другой стороны, многочлен

$$[a,[a_1,[a_2,x]b_1[b_2,y]c]]$$

обращается в нуль на этой алгебре, поскольку радикальные части уже истрачены.

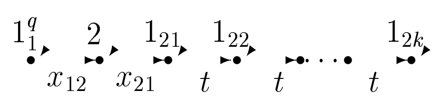
2. Пусть алгебра A отвечает следующему графу:



Если параметры t_i независимы, то получившаяся алгебра задает многообразие, определяемое тождеством лиевой нильпотентности порядка $k+1$: $[\dots[y,x_1]x_2]\dots x_{k+1}]\equiv 0$.

Если же $t_i=t$ при $i>1$, t_1 и t независимы, то получается многообразие, определяемое тождеством лиевой нильпотентности порядка $k+1$ и тождеством метабелевости $[[x,y],[z,t]]\equiv 0$. В этом случае алгебру можно представить матрицами втогого порядка над кольцом $\mathbb{F}[t]/\operatorname{id}(t^{k+1})$ и говорить, что "имеется две клетки, похожие с точностью до нильпотента порядка k."

3. Пусть алгебра A отвечает следующему графу:



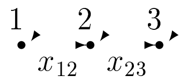
Рассмотрим многочлен:

$$ad_{q,1}(a_1)^s([a_2,x]b_1[b_2,y]c),$$

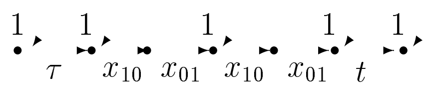
где $ad_{q,1}(x)(y)=xy-yx^q$.

Он не обращается в нуль тогда и только тогда, когда $s\leq[(k-1)/q]$. При $s=[(k-1)/q]$ он выбивает максимальную степень радикала. Кроме того, равенство $[(k_1-1)/q]=[(k_2-1)/q]$ равносильно изоморфизму соответствующих алгебр. Умножение слева должно сравниваться с "подкрученным" умножением справа.

Рассмотрим соответствующие обобщенные тождества. Пусть $a_i(k)$ есть количество вхождений компоненты свободной образующей a_i, отвечающей k-ой анфиладе. Тогда вместе с любым обобщенным тождеством выполняются все его однородные (в градуировке, связанной с Γ) компоненты. В каждой такой компоненте величины $a_i(1)+qa_i(3)$, а также $a_i(2)$, $x_{ij}(a)$ постоянны. Если при этом многочлен однороден и в обычной градуировке, то при этом постоянна сумма $\sum x_{ij}(a)+a_i(1)+a_i(2)+a_i(3)$, что при $q\neq 1$ влечет постоянство всех величин $x_{ij}(a)$, $a_i(1)$, $a_i(2)$ и $a_i(3)$ по отдельности. Отсюда легко получается совпадение (при $q\neq 1$) множеств однородных тождеств у рассматриваемой алгебры и алгебры, отвечающей графу



4. Теперь пусть имеется три анфилады похожих клеток, все клетки одного типа. Индекс 0 помечает “клетки нулевого размера”, обозначаемые жирными точками. Радикальные буквы двух крайних анфилад для каждого элемента пропорциональны с коэффициентом λ.



Рассмотрим многочлен:

$$f = [a, [d, x]b_1[b_2, y]]c_1[c_2, z]h[g, e] - \delta \cdot [d, x]b_1[b_2, y]c_1[[c_2, z]h[g, e], a].$$

Он обращается в нуль только при $\delta = \lambda$. И его равенство нулю означает пропорциональность радикальных букв, которые были “форсированы”.

5. Обозначим через $A_{k,(j)}^{(n),q}$ анфиладу из $k \geq 1$ похожих клеток размера $n \leq 1$ j-го типа кратности q. Если k, q или n обращаются в единицу, либо тип всего один, то соответствующие индексы опускаются. O обозначает путь из двух перемычек, отвечающий прохождению через “клетку нулевого размера”, приписывание отвечает последовательному прохождению. Графы из предыдущих примеров запишутся в виде $A_{(1)}A_{(2)}A_{2,(1)}$, $A_{1,(1)}A_{1,(2)}A_{k,(1)}^q$, $A_2OA_1OA_2$ соответственно.

Пусть граф G имеет следующий вид:

$$A_{k_1}^{q_1}OA_{k_2}^{q_2}OA_{k_3}^{q_3},$$

все клетки ненулевого (т.е. единичного) размера однотипны, и при этом $q_2 = \min(q_1, q_2, q_3)$ (остальные случаи аналогичны). Поскольку кратности клеток относительны, можно считать, что $q_2 = 1$.

Тогда вместо коммутатора $ad(a)([d, x]b_1[b_2, y])$ из первого члена предыдущей формулы мы бы записали

$$ad_{q_1,1}(a)^{k_2-1+[(k_1-1)/q_1]}([d, x]b_1[b_2, y]),$$

а вместо коммутатора $[[c_2, z]h[g, e], a]$ из второго члена —

$$ad_{1,q_2}(a)^{k_2-1+[(k_3-1)/q_3]}([c, z]h[g, e])$$

(k_2 добавляется в показатель степени, чтобы выбить радикальную компоненту из анфилады A_2).

В итоге получается многочлен

$$f = ad_{q_11}(a)^{k_2-1+[(k_1-1)/q_1]}([d, x]b_1[b_2, y])c_1[c_2, z]h[g, e] -$$

$$-\delta \cdot [d, x]b_1[b_2, y]c_1\ ad_{1q_2}(a)^{k_2-1+[(k_3-1)/q_3]}([c, z]h[g, e]).$$

Он обращается в ноль тогда и только тогда, когда $\tau(a)^{[(k_1-1)/q_1]} = \delta t(a)^{[(k_3-1)/q_3]}$. (Функции t и τ отвечают коэффициентам при соответствующих матричных единицах.) Если же целые части совпадают: $[(k_1-1)/q_1] = [(k_1'-1)/q_1']$, $[(k_3-1)/q_3] = [(k_3'-1)/q_3']$ и, кроме того, $q_1 = q_1', q_3 = q_3'; q_2 = q_2' = 1$, то алгебры, отвечающие графам Γ и Γ', оказываются изоморфными.

Рассмотрим теперь алгебру A', отвечающую графу

$$A_{(1)}OA_{(2)}OA_{(3)}.$$

Если алгебраически замкнуть основное поле, то данная алгебра окажется изоморфной только что рассмотренной, поэтому их полилинейные тождества совпадают. Однако, в отличие от ситуации примера 2, множества однородных тождеств вообще говоря, оказываются различными. Пусть t_1, t_2, t_3 – ненулевые целые числа такие, что

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ q_1 t_1 + q_2 t_2 + q_3 t_3 = 0 \end{cases}$$

и $Q(x_1, x_2, x_3, \overrightarrow{z})$ — некоторый многочлен, $P = Q(x^{h_1}, x^{h_2}, x^{h_3}, \overrightarrow{z})$ – запись многочлена P и пусть при этом $\min(h_i) + \min(t_i) > 0$. Определим оператор R, отвечающий данной записи:

$$R(P) = Q(x^{h_1}, x^{h_1}, x^{h_1}, \overrightarrow{z}) - Q(x^{h_1+t_1}, x^{h_2+t_2}, x^{h_3+t_3}, \overrightarrow{z}).$$

Если $\min(h_i) + n \cdot \min(t_i) > 0$, то определен многочлен $R^n(P)$. Положим

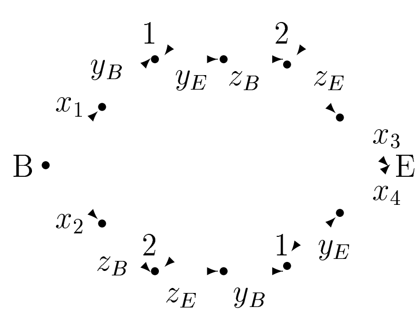
$$Q(x_1, x_2, x_3, \overrightarrow{z}) = x_1[z_1, z_2][z_3, z_4]x_2[z_5, z_6][z_7, z_8]x_3,$$

$$P(x, \overrightarrow{z}) = x^{h_1}[z_1, z_2][z_3, z_4]x^{h_2}[z_5, z_6][z_7, z_8]x^{h_3}.$$

Тогда $R^n(P)$ – однородный многочлен, обращающийся в нуль на A, если $n \geq k_1 + k_2 + k_3$, и не обращающийся в нуль на алгебре, отвечающей графу $A_{(1)}OA_{(2)}OA_{(3)}$.

Дело в том, что однородный многочлен, являясь тождеством исходной алгебры, является и тождеством алгебры, получающейся путем расширения основного поля до бесконечного поля, тогда и только тогда, когда все его частичные линеаризации являются тождествами исходной алгебры. Что, как мы только что убедились, не всегда имеет место.

6. Следующий пример относится к случаю слабо гасящихся путей. Пусть граф Γ имеет такой вид:



Здесь B – начальная вершина, E – финальная, на одной ветке сперва идет клетка типа 1, затем типа 2, на второй — наоборот. Точками отмечены клетки нулевого размера. Клетка типа 1 одномерна, клетка типа 2 – двумерна. Перемычки имеют длины 1, и для любого элемента алгебры произведение коэффициентов при стрелках, соединяющих клетки нулевого размера на одной ветке, отличается от такого же произведения на другой ветке в λ раз. При этом

$\forall a \in A\ x_1(a)x_2(a) \equiv \lambda x_3(a)x_4(a)$. Положим $Z_1^{(2)} = [u_1, u_2]^2$, $Z_2^{(2)} = [v_1, v_2]^2$. (В качестве $Z_i^{(2)}$ можно положить любые центральные полиномы для матриц второго порядка от непересекающихся наборов букв. Индекс $^{(2)}$ указывает на второй порядок.) Рассмотрим многочлен:

$$[z,t]a[b_1,c_1][b_2,Z_1^{(2)}][e_1,e_2][Z_2^{(2)},g] - \delta \cdot [g,Z_1^{(2)}][e_1,e_2][Z_2^{(2)},b_2][c_1,b_1]a[t,z].$$

Если оставить только верхнюю ветку, то слагаемое $[g,Z_1^{(2)}][e_1,e_2][Z_2^{(2)},b_2][c_1,b_1]a[t,z]$ обратится в ноль. Если же оставить только нижнюю ветку, то обратится в ноль слагаемое $[z,t]a[b_1,c_1][b_2,Z_1^{(2)}][e_1,e_2][Z_2^{(2)},g]$.

В то же время весь многочлен обращается в ноль из-за эффекта гашения, когда $\delta = \lambda$. Если бы рассматривались клетки иных размеров, то брались бы коммутаторы с центральными полиномами соответствующих порядков. (Различие размеров клеток типа 1 и 2 необходимо для создания выражений обращающихся в ноль при вырезании соответствующих веток.

Таким образом, эффект гашения связан с тождествами вида

$$\sum \lambda_k \prod_{j_k}^{i_k} (\Phi)(f) = 0.$$

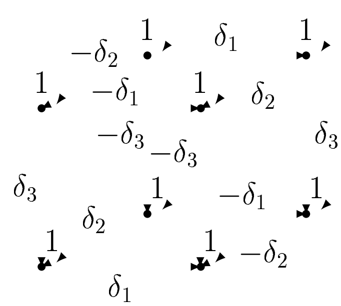
(И полином f отвечает прохождению максимального пути.)

А также с разносортными тождествами вида

$$\sum \lambda_k M_k(\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_n, \overrightarrow{z}) = 0,$$

где $\overrightarrow{x}_i$ означает набор переменных i-го сорта. Сорта соответствуют типам анфилад.

7. Наверное, первый вопрос, который возникает, таков — что соответствует многообразию, заданному алгеброй Грассмана (или тождеством $[[x,y],z] = 0$), а также грассмановой оболочке простой супералгебры $\mathbb{M}_{n,k}$. Для многообразия, заданного 3-порожденной алгеброй Грассмана (с присоединенной единицей), граф будет таким:



Все вершины графа суть похожие клетки единичного размера, каждой образующей a_i алгебры A соответствует полупростая часть (коэффициент при петле).

Для многообразия, заданного m-порожденной алгеброй Грассмана с присоединенной единицей, соответствующий граф будет выглядеть как каркас m-мерного единичного куба. Стрелки направлены в одну сторону, и знак на стрелке определяется четностью суммы координат начальной вершины. Каждой образующей отвечает константа при петлях и константа для каждого направления.

8. Для грассмановой оболочки супералгебры $\mathbb{M}_{n,k}$ граф многообразия, соответствующего m-порожденным подалгебрам, можно представлять себе так. Пары вершин, символизирующие клетки размера n и k соответственно, расположены вблизи вершин m-мерного куба. Все клетки размера n, а также все клетки размера k, похожи. Стрелки первого типа образуют петли, а второго типа — соединяют пары вершин “накрест” — клетку размера n с клеткой размера k и наоборот. Каждой образующей отвечает набор операторов: общих матриц, соответствующих петлям, матриц размера $n\times k$ и $k\times n$. Каждому направлению и типу стрелки соответствуют матрицы со своими параметрами, которые больше никуда не входят. А матрицы при совпадающих направлениях и типах отличаются знаком, который выбирается как и в предыдущем случае.

Мы видим, что сопряжение полиномами, центральными для клетки [1], служит аналогом многочленов типа Энгеля для высшей сложности. Гашение может возникать и внутри анфилад. Отметим, что техника частичных коммутаторов, перебрасывающих элемент из одной клетки в другую, была разработана В. Н. Латышевым [71]. Изложение велось на языке канонических форм (базиса Шпехта).

Отметим также, что многие явления объясняются на языке клеток и связей между ними. Когда все клетки имеют размер 1 и похожи, возникает тождество Энгеля. Левая нетеровость наблюдается, когда нет операторов входа в анфиладу, правая — когда нет операторов выхода. Соответствующие тождества, которые влекут за собой левую (правую) нетеровость, суть $x[y_1,[y_2,\dots,z]\dots]=0$ и соответственно $[y_1,[y_2,\dots,z]\dots]x=0$. Слабая нетеровость наблюдается тогда, когда не может быть анфилад, запертых с двух сторон. Это равносильно выполнимости одного из тождеств вида

$$[y_1,[y_2,\dots,z]\dots]x_1\dots x_s[t_1,[t_2,\dots,u]\dots]=0.$$

В. Н. Латышев поставил вопрос о локальной представимости произвольных алгебр из многообразий с таким тождеством. Положительный ответ на этот вопрос был получен А. З. Ананьиным [2] (см. также раздел 4.7.2).

4.6. Доказательство рациональности рядов Гильберта методами теории представлений

Данный параграф является в каком–то смысле кульминацией данной главы. Изначально техника теории представлений относительно свободных алгебр строилась под доказательство рациональности рядов Гильберта.

4.6.1. Построение экстремального идеала

Мы считаем, что граф Γ является отрезком $[v_1,v_2]$, где v_1 — начальная, а v_2 — финальная вершина. Они соединены путем C максимального состава, и абсолютно гасящихся путей нет (см. лемму 4.5). Поэтому существует ненулевое произведение чистых элементов алгебры A^{cl}, отвечающее прохождению пути C.

Но множество операторов перехода в элементарной алгебре является множеством значений соответствующего многочлена (см. предложения 4.17, 4.19). Таким образом, как и в случае полупрямых произведений матричных алгебр, строится следующий полином f, задающий экстремальный T-идеал:

$$f=\prod_{i=1}^{s} x^{r_{i-1}-\delta_{i-1}-\varepsilon_i}(ad(Z_{n_i^2})^q\circ y_i)^{\varepsilon_i}C^q_{n_i^2}t_iC_{n_i^2}(ad(Z_{n_i^2})^r\circ y_i)^{\delta_i}\cdot x^{r_s-\delta_s}, \tag{6}$$

[1]или взятие разности между операторами внутренних форм, когда внутри клеток есть многочлен Капелли, который позволяет это делать.

где s равно числу анфилад в пути C, r — индексу нильпотентности радикала, а величины δ_i и ε_i, соответствующие i-ой клетке, принимают значение 0 или 1 и определяются по правилу:

1) $\varepsilon_i = 0$, если длина перемычки, входящей в i-ю клетку, равна 1, и при этом слева стоит клетка не меньшего размера (либо входящая перемычка отсутствует).

2) $\delta_i = 0$, если длина перемычки, выходящей из i-й клетки, равна 1, и при этом слева стоит клетка строго бóльшего размера (либо выходящая перемычка отсутствует).

3) В остальных случаях величины δ_i и ε_i равны 1.

(Отсутствие входящей перемычки возможно, когда v_1 соответствует начальной клетке, а выходящей — когда v_2 соответствует последней. Под произведением многочленов понимается такое произведение, когда в них подставлены непересекающиеся множества переменных.)

Иными словами: если идет переход от бóльшей клетки к мéньшей или обратно, то оставляется множитель $(ad(Z_{n_i^2})^q \circ y_i)$, отвечающей бóльшей клетке, а если размеры равны — то левой клетки. Внеклеточные вершины считаются клетками нулевого размера.

Сформулируем теперь точное утверждение.

Предложение 4.20 (О вынуждающем путь полиноме). *а) f не является тождеством алгебры A^{cl}, а, значит, и A.*

б) При подстановке матричных единиц из $\hat{A}$, результат которой ненулевой, в каждое $C_{n_i^r}$ должны подставляться элементы, отвечающие i-ой анфиладе.

Доказательство. П.а) вытекает из предложения 4.17. Действительно, вместо соответствующих компонент из A^{cl} подставляем соответствующие многочлены, образ каждого из которых содержит пространство, порожденное соответствующей компонентой. Доказательство п.б) строится также, как и доказательство предложения 4.20. □

На записи полинома вида 6 можно определить операторы простановки внутренних форм $\mathrm{H}_i(\Phi)$. Для каждой формы Φ, которая действует в алгебре матриц порядка n_i с помощью подстановок в многочлен $C_{n_i^2}$ (см. раздел 0.2.3), определяется оператор $\mathrm{H}_i(\Phi)$). Он действует на i-й множитель

$$C^q_{n_i^2} t_i C_{n_i^2} (ad(Z_{n_i^2})^r \circ y_i)^{\delta_i}$$

с помощью подстановок в сомножитель $C_{n_i^2}$, стоящий после t_i. Определим оператор $\mathrm{R}_i(\Phi(\overrightarrow{x}))$ как $(\mathrm{H}_i(\Phi(\overrightarrow{x})))^q - \mathrm{H}_i(\Phi(\overrightarrow{x}))$. Естественным образом определяются также операторы $\mathrm{AD}_{ij}(\Phi)$ и “подкрученные adjoint’ы” — $\mathrm{AD}_{ij}^{(q_1,q_2)}(\Phi)$. При этом необходимо, чтобы $n_i = n_j$. Критерий похожести клеток, отвечающих i-му и j-му сомножителю, выражается равенством нулю операторных выражений

$$\prod_{r=1}^{c} \mathrm{AD}_{ij}(\Phi(\overrightarrow{x}_r)),$$

а конечность “i-ой клетки” — обращению в ноль произведений

$$\prod_{r=1}^{c} \mathbf{P}_i(\Phi(\overrightarrow{x_r})).$$

Однотипность клеток выражается в терминах "подкрученных adjoint'ов", т.е. равенством

$$\prod_{q_1,q_2}\prod_{r=1}^{c}\mathrm{AD}_{ij}^{(q_1,q_2)}(\Phi(\overrightarrow{x}_r))\circ f=0.$$

Замечания. 1. Вместо простановки полиномов $ad(Z_{n_i^2})^q\circ y_i$, вынуждающих межклеточный переход, и выбора, полином для какой клетки оставлять, можно использовать полиномы типа $P_{k_i,k_{i+1}}$:

$$P^{(n)}_{k_i,k_{i+1}}=Z^n_{k_i}F\,ad(Z^n_{k_i}\circ ad(Z_{k_{i+1}})^n)EZ^n_{k_{i+1}}.$$

2. Доказательство локальной представимости (см. раздел 5.4) основано на построении системы расталкивающих подстановок, вынуждающих попадание в сумму идеалов типа $\oplus\,\mathrm{T}(f_i)$, где полиномы f_i отвечают путям полного состава (в которых присутствуют все типы клеток). В однородном случае ($|F|=\infty$) можно обеспечить попадание в T-идеал, отвечающий пути максимального состава.

Вернемся к общему случаю. Сформулируем утверждение, относящееся к произвольной алгебре A. Γ считается отрезком $[v_1;v_2]$, представимые идеалы с нулевым пересечением в алгебре A^{cl} отсутствуют и имеется T-идеал, обращающийся в нуль при уничтожении путей максимального состава и при урезании степени нильпотентности радикала (в силу предложения 3.4). Поэтому $c(A)=c(A^{cl})$. Кроме того, мы рассматриваем только пути максимального состава после убирания системы гасящихся путей, поскольку нас интересует только класс эквивалентности алгебры. При этом мы можем считать, что все пути, ведущие из v_1 в v_2, имеют один и тот же максимальный состав. Область значений многочленов из I_{c-1} есть $\alpha E_{v_1v_2}$, α – константа. Назовем два пути *подобными*, если при их прохождении следуют анфилады из клеток того же размера и структура похожести клеток при расположении систем анфилад вдоль пути одна и та же.

Предложение 4.21 (Расположение T-идеала на ветке). *Пусть алгебра A удовлетворяет условиям, описанным выше, C – путь максимального состава из v_1 в v_2, $\{C_i\}$ – множество путей, подобных C. Многочлен f_C построен по пути C описанным выше способом,*

$$h_C=\prod(\mathrm{AD}_{ij})^c(\mathrm{H}_k)^c(\mathbf{P}^{(q)}_l)^cf_C. \tag{7}$$

Пары (i,j) пробегают множества пар анфилад, отвечающих похожим клеткам одинакового размера, индекс l – множество клеток конечного типа. c – индекс нильпотентности радикала (напоминаем соглашение насчет произведения операторов). Тогда

а) f не является тождеством алгебры A.

б) При подстановке матричных единиц из $\hat{A}$, результат которой ненулевой, в каждое $C_{n_i^r}$ должны подставляться элементы, отвечающие i-ой анфиладе, относящейся к пути C или пути C_i. При этом все компоненты относятся к одному и тому же пути.

в) При подстановке элементов из A, и представлении элементов из A в виде суммы компонент, ненулевыми окажутся только члены, отвечающие подстановке в $C_{n_i^r}$ соответствующих компонент.

г) Множество значений полинома h_C в алгебре A^{cl} совпадает с компонентой максимального состава, соответствующей прохождению пути C.

Доказательство данного предложения аналогично предыдущему.

Построенный полином h_C – это почти то, что нам нужно. Остается только обеспечить коммутативность внутренних форм, чему и посвящен следующий раздел.

4.6.2. Завершение доказательства рациональности

Построим полином g такой, чтобы $\mathrm{T}(g)$ обладал структурой нетерового модуля над некоторым подкольцом R кольца форм Φ (и, кроме того, Φ есть нетеров R-модуль). Тогда рациональность ряда Гильберта $H_{T(g)}$ будет обеспечена. При этом $g \in \mathrm{T}(f)$, где f определяется равенством 6. Каждый множитель в соответствующем произведении отвечает прохождению анфилады.

Мы хотим обеспечить структуру нетерового $S(R_1 \otimes \cdots \otimes R_s)$-модуля, где R_i — кольцо следов (форм), отвечающих i-ой клетке. Для этого в силу предложения 4.16 достаточно добиться коммутативности внутренних следов внутри анфилад. Для этого в каждый сомножитель произведения вставляется дополнительный многочлен K_i, который обращается в ноль на полупростой части анфилады (и так, чтобы все произведение не обратилось в ноль). Процесс “вставки” осуществляется так:

- Резервируются переменные t_i.
- Осуществляется подстановка $t_i \to t_i Q_i$, где полином $Q_1 \in \mathrm{T}(\mathbb{M}_{n_i})$ выбирается так, чтобы произведение (6) не обратилось в нуль тождественно.
- При этом на каждом шаге i выбирается минимальным, чтобы указанная подстановка могла осуществиться. (Подстановка с некоторыми t_i может осуществляться несколько раз.)
- В силу нильпотентности радикала процесс остановится (не позднее, чем после $c(A) - 1$ шага).

(В качестве многочленов Q_i можно подставлять только многочлены, описанные в пп.в) и г) предложения 4.15. Их обозначим через S_{ij}.)

Результатом процесса является построение искомого многочлена g.

Иными словами: мы идем вдоль пути и либо попадаем в то место, где можно работать как в алгебре матриц, либо проставляем множитель, поглощающий радикальную переменную. Тем самым вынуждаются радикальные специализации (точнее, множители типа $[T_i, T_j]$, связанные с радикальными элементами анфилад). Таким образом, возникает ситуация такая же, как и в “хвосте анфилады”. В силу предложения 4.16 внешние следы совпадут с внутренними и полученный идеал будет обладать нужной структурой нетерового модуля.

Выпишем итоговый полином g:

$$g = \prod_{i=1}^{s} x^{r_{i-1}-\delta_{i-1}-\varepsilon_i} (G_i^l)^{\varepsilon_i} C_{n_i^2}^q K_i C_{n_i^2} G_{ri} \cdot x^{r_s - \delta_s}, \tag{8}$$

где многочлены $G_i^l = ad(Z_{n_i^2})^q \circ y_i$ и $G_i^r = ad(Z_{n_i^2})^r \circ y_i$ вынуждают межклеточные переходы, множители $K_i = \prod_{j=1}^{h(i)} S_{ij}$ обеспечивают нужное поведение внутренних следов. Полиномы Капелли $C_{n_i^2}$ и их “степени” нужны для “приема” следов и форм, “степень” x обеспечивает прохождение перемычек. (Под “степенью” многочлена H^k, как обычно, понимается произведение его значений на k непересекающихся множествах переменных.)

По построению, полином g не обращается в нуль тождественно. Кроме того, осуществляя подходящие подстановки (определенные на записях элементов из $\mathrm{T}(g)$) в множители $C^q_{n_i^2}$, мы, в силу предложения 4.16, можем осуществляем умножение оператора выхода из i-й анфилады на частичный след (частичную форму) произвольного элемента относительно типа этой анфилады.

Теперь найдем структуру нетерового S-модуля. Для этого надо построить операторы, которые, с одной стороны, выражаются через действие внешних форм на граничных операторах и переводят алгебру $A^{cl}[R]$ в себя. Тогда они определены корректно вне зависимости от записи полинома из $\mathrm{T}(g)$, и запись нулевого полинома переходит в запись нулевого. С другой стороны, они должны выражаться через внутренние формы (тогда они переводят идеал $\mathrm{T}(g)$ в себя). В этом случае можно воспользоваться предложением 4.7.

В качестве искомого кольца S можно взять кольцо инвариантов в кольце форм $R_1\otimes\cdots\otimes R_s$ относительно группы перестановок, переставляющей клетки фиксированного размера (и естественно действующей на кольце форм, с ними связанных). В силу леммы 0.5 симметрические функции (относительно всевозможных перестановок концов анфилад) от операторов форм при применении к полиному из $\mathrm{T}(g)$ реализуются как действие кольца внешних умножений на соответствующие форы.

Внутренние следы не выводят за пределы алгебры A, но определены только на записях. Внешнее же действие кольца $R_1 \otimes \cdots \otimes R_s$ определено для самой алгебры A^{cl}, но выводит за пределы A. Мы построили элемент кольца $R_1\otimes\cdots\otimes R_s$, действие которого на $\mathrm{T}(g)$ выражается через внутренние следы. Тем самым он не выводит за пределы A, а соответствующее выражение от операторов внутренних следов не зависит от записи.

Доказательство рациональности рядов Гильберта (использующее локальную представимость) для случая бесконечного основного поля завершено.

Замечания. 1. Можно подействовать операторами умножения на элементы из R, к примеру, только на один оператор выхода из анфилады. Этому соответствует действие оператором внутреннего следа на каком-то одном участке записи многочлена g. Однако такое действие не переводит в себя замыкание A^{cl}, и в образе некоторые тождества из A могут уже не выполняться. Но для того, чтобы действие, определенное на записях, было определено корректно, надо, чтобы результат не зависел от представления g. Это равносильно тому, что запись нулевого многочлена оставалась нулевым. Поэтому и требуется инвариантность алгебры A^{cl}, для чего мы, пользуясь леммой 0.5, переходим к кольцу симметрических функций от частичных следов относительно перестановок анфилад, отвечающих системам однотипных клеток (можно брать и перестановки всех клеток фиксированного размера). Не случайно в работе В. Дренского [140] (см. раздел 3.2.4) также появились симметрические функции относительно операторов сопряжения!

2. То же самое действие на граничных операторах, которое описано в предложении 4.7 и только что использовалось в доказательстве рациональности рядов Гильберта, будет использовано ниже в доказательствах локальной представимости и локальной конечной базируемости. Автор считает своим долгом подчеркнуть, что точкой перелома в его исследованиях проблем шпехтового типа явилось только что изложенное доказательство рациональности рядов Гильберта. Другим переломным моментом было применение леммы Артина–Рисса к проблемам конечной базируемости.

3. Довольно просто строится экстремальный T-идеал, когда Γ состоит из одного пути. Следы и формы определяются на записях. Однако в общем случае действие этих операторов должно быть согласовано с гашением. (Гашение — это своего рода коммутативность диаграмм.) Отсюда — инвариантный подход, симметрические функции и т.д.

4. Для конструкции аналогичных многочленов f_Q и g_Q можно было бы также воспользоваться многочленами типа Q_i из раздела 4.5

$$g_Q = \prod_{i=1}^{s} x^{m_i} Q_i K_i Q_i'^{\varepsilon_i} \cdot x^m, \tag{9}$$

где множители K_i имеют тот же смысл. При этом множитель Q_i, Q_i', в зависимости от типа перехода, есть подходящий многочлен вида $Q_k^{r,\mu}$, $Q_k^{l,\mu}$, Q_{k_1,k_2}^{μ} из раздела 4.5, причем $\varepsilon_i = 0$, если длина выходящей перемычки равна 1 (тогда следующий множитель начинается с оператора перехода), иначе $\varepsilon_i = 1$ и полином Q_i' есть многочлен для алгебры выхода. Показатели "степени" при x соответствуют длинам перемычек. Если длина перемычки между клетками равна 1 или 2, то степень ноль. (В первом случае стоит оператор межклеточного перехода, во втором — оператор выхода из клетки Q_{i-1}', а затем — оператор входа). Если длина перемычки, входящей в начальную или выходящей из финальной клетки, равна 0 или 1, то показатель тоже ноль.

4. В случае положительной характеристики импликация "представимость $\Rightarrow$ рациональность рядов Гильберта" осуществляется проще (см. раздел 3.4.1). При этом вместо операторов внутреннего (соответственно, внешнего) следа надо рассматривать внутренние (соответственно, внешние) формы. Хочется найти непосредственные соображения для нулевой характеристики, связанные с редукцией по большому простому модулю (техника раздела 3.4.2 основана на уже построенной структуре нетерового модуля). Особенно это актуально для неассоциативного случая.

4.6.3. Замечания о доказательствах представимости и конечной базируемости

На первый взгляд может показаться, что подход автора к построению экстремальных идеалов, основанный на действии подстановок на смешанные элементы, и оригинальный подход, основанный на многочленах Кемера, имеют мало общего. В обоих подходах рассматриваются два случая: когда смешанные элементы есть и когда их нет. Родство этих случаев также не очевидно. Наша цель — изучить возникающие связи.

В доказательстве А. Р. Кемера в первом основном случае происходит "слипание" радикальных компонент. Значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ оказывается линейно представимо значениями $f(b_1, \ldots, b_n)$, где одно из b_i есть произведение смешанного элемента на радикальный (см. [53], [54], а также доказательство лемм 3.7 и 3.11 из раздела 3.3.1). В этом случае для организации модульной структуры и связанного с этим процесса редукции вполне достаточно подстановок, т.е. чисто T-пространственных действий.

Специфика T-идеалов (дополнительные умножения) проявляется только во втором случае. И это не случайно. В. В. Щиголев показал, что система полиномов

$$\{E_n\} = \{x^{p^n-1} y^{p^n-1} [x, y]\}$$

бесконечно–базируема как T-пространство по модулю T-идеала $[x, [y, z]]$ (см. [122]), т.е. в грассмановой алгебре. И при доказательства предложения, которое нами оформлено как предложение 3.6, А. Р. Кемер специально разбирал случай, когда смешанные элементы отсутствуют!

Попытаемся прояснить родство между обоими случаями, нашим подходом и подходом Кемера, а также доказательствами рациональности рядов Гильберта и локальной представимости. Действие внешних форм на граничных операторах, по сути дела, совпадает с действием кольца S из раздела 5.3.2.

Начнем с наиболее простой ситуации. Нас интересуют полилинейные тождества при отсутствии смешанных элементов. Напомним рассуждения из доказательства второй леммы Кемера, относящиеся ко второму основному случаю (см. раздел 3.3.1). Возьмем элемент $g \not\equiv 0$, все значения которого лежат в $R(A)^{c(A)-1}$. Любой набор специализаций переменных (всегда рассматриваются наборы с ненулевым результатом) требует $c(A)-1$ радикальную специализацию. Пусть $x_1, \ldots, x_{c(A)-1}$ – переменные с радикальными специализациями. Тогда замена радикальной специализации любого поднабора $\{x_i\}$ на полупростую приведет к нулевому результату. С другой стороны, все специализации переменных, входящих в h, в произведении gh должны быть полупростыми. Иначе внутри g может участвовать не более $c(A)-2$ радикальных специализаций и значение g обратится в ноль.

Пусть многочлен h содержит $c(A)-1$ набор переменных $(\{y_{ij}\}_{j=1}^{b(A)})_{i=1}^{c(A)-1}$ и кососимметричен по всем переменным каждого набора $\{y_{ij}\}_{j=1}^{b(A)}$ при любом фиксированном i. Дополним каждый набор $\{y_{ij}\}_{j=1}^{b(A)}$ переменной x_i и проальтернируем. Получится многочлен $(gh)'$, который на данном наборе специализаций совпадает с gh и, следовательно, не равен нулю. (Подстановка переменной y_{ij} на место x_i приводит к нулевому результату.) Данное рассуждение непосредственно переносится и на неассоциативную ситуацию. Подытожив сказанное, можно утверждать, что все “интересное” происходит “внутри”, “снаружи” остаются только полупростые специализации.

На действие подстановок на операторы перехода можно посмотреть похожим образом. Все события происходят вне операторов перехода, а подстановка — это умножение изнутри оператора. Поэтому из него “исходят” элементы только с полупростыми специализациями (когда рассматриваемый полином лежит в $R(A)^{c(A)-1}$). Тем самым задается некоторая полугруппа эндоморфизмов алгебры A^{cl} и обеспечивается инвариантность операторов внутренних форм (независимость от записей элементов). Это соответствует ситуации невозможности “слипания” радикала (см. леммы 3.4 и 3.5). С другой стороны, умножения в самой алгебре можно интерпретировать как действие подстановок на “несобственные смешанные элементы”, находящиеся в самом конце.

С этой точки зрения можно объяснить также совпадение внешних и внутренних форм. С помощью подстановки в граничный оператор можно создать множитель, имеющий вид экстремального многочлена Капелли для соответствующей клетки. Все специализации соответствующих переменных будут полупростыми, и внутренняя форма, определенная с его помощью, совпадет с внешней. С другой стороны, внешние формы с хвоста анфилады можно “перекидывать” на этот множитель, в силу результатов раздела 2.1. Соображения, связанные с перекидыванием, работают и в неассоциативной ситуации, при доказательстве инвариантности внутренних следов (см. раздел A.2.2).

Смешанные компоненты осуществляют связь между клетками, и возникающий порядок на клетках является сутью ассоциативного случая. Именно это и отражает работа Ж. Левина [151]. Возможно, здесь причина отсутствия аналогичного неассоциативного (хотя бы более слабого асимптотического) результата и причина трудностей переноса решения проблем шпехтового типа в неассоциативную ситуацию. Вероятно, понимание способа взаимодействия полупростых компонент в неассоциативном случае, в частности альтернативном и йордановом, позволило бы получить аналоги теоремы Левина и доказывать локальную представимость.

Замечание. Автор хочет упомянуть некоторые субъективные обстоятельства, иллюстрирующие идейные связи. Вначале автор, используя технику замыкания по Зарисскому и свойства локальной представимости, получил доказательство рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр, изложенное в данной главе (см. раздел 4.6.2). Затем автор смог понять доказательства А. Р. Кемера, связь которых с подходом автора была осознана значительно позже.

О "ловле" радикала. Приведенные выше соображения позволяют получать несколько более детальную информацию о многочленах из экстремального идеала $J_C \cap I_{c(A)-1}$.

Пусть f есть многочлен из $J_C \cap I_{c(A)-1}$ и $f|_A \neq 0$. Тогда, в силу предложения 4.21, множество его значений в алгебре A^{cl} есть линейная комбинация значений многочленов вида:

$$h_C = \prod (\mathrm{AD}_{ij})^c (\mathrm{H}_k)^c (\mathbf{P}_l^{(q)})^c f_C,$$

где

$$f_C = \prod_{i=1}^{s} x^{r_{i-1}-\delta_{i-1}-\varepsilon_i} (ad(Z_{n_i^2})^q \circ y_i)^{\varepsilon_i} C^q_{n_i^2} t_i C_{n_i^2} (ad(Z_{n_i^2})^r \circ y_i)^{\delta_i} \cdot x^{r_s-\delta_s}. \qquad (10)$$

Отсюда нетрудно получить (см. также доказательство леммы о расталкивающих подстановках), что некоторый многочлен $g \in \mathrm{T}(f) \setminus \mathrm{T}(A)$ есть линейная комбинация многочленов вида h_C.

Далее, рассмотрим подстановки вида $y_i \to ad(Z_{n_i^2}) \circ y_i C_{n_i^2}$ или $C_{n_i^2} y_i \to ad(Z_{n_i^2}) \circ y_i$. Множество значений одного из получившихся многочленов g' (при правильном выборе $C_{n_i^2}$ слева или справа от y_i) в алгебре A^{cl} совпадает с множеством значений g. И поскольку $g' \in J_C$ при любой специализации (см. замечание на стр. 170) с ненулевым результатом, переменные, входящие в эти $C_{n_i^2}$, будут специализироваться в полупростые компоненты $\widehat{A}$, отвечающие типу i-ой клетки. И кроме того, замена радикальной специализации любой переменной на полупростую приводит к нулевому результату.

Рассмотрим произвольную специализацию переменных из g с ненулевым результатом. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_s$ – набор переменных, для которых данная специализация оказалась несмешанной и радикальной. Сделаем указанные подстановки достаточное число раз (хватает $c(A)-1$ раз). Добавим каждое ξ_j к одному из возникших внутри этих $C_{n_i^2}$ наборов проальтернированных переменных $\Lambda(\xi_j)$ так, чтобы типы переменной ξ_j и переменных из набора $\Lambda(\xi_j)$ совпадали. Далее стандартным образом построим многочлен, кососимметричный по наборам $\{\xi_j\} \cup \Lambda(\xi_j)$.

А именно. Если h полилинеен и кососимметричен по переменным из $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и полилинеен по переменной ξ, то новый многочлен $h' = h - \sum_{i=1}^k h|_{\xi = x_i; x_i = \xi}$ полилинеен и кососимметричен по $\Lambda' = \Lambda \cup \{\xi\}$.

При наших специализациях результаты замен $\xi = x_i; x_i = \xi$ обращаются в ноль, и значение получившегося многочлена g' совпадет с соответствующим значением g; тем самым оно будет ненулевым. Отметим, что перенос переменной ξ_j внутрь $C_{n_j^2}$ и есть то "слипание" радикальных компонент, которое встречается у А.Р.Кемера. Оно описано в разделе 3.3.1 (см. доказательство лемм 3.7 и 3.11).

Рассмотрим слагаемые ненулевой суммы $0 \neq g = \sum h_C^k$, не обращающиеся в нуль при данной системе специализаций. Каждому такому слагаемому отвечает слагаемое вида h'^k_C, кососимметричное по наборам Λ'_j. При этом $g' = \sum h'^k_C \neq 0$ и потому $h'^k_C \neq 0$ при некотором k. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 4.9. *Пусть в A нет пар идеалов с нулевым пересечением, $\delta = c(A) - 1 - t - s$ есть максимально возможное число несмешанных радикальных специализаций (t есть число операторов перехода при прохождении пути C, s есть число внутренних вершин в перемычках). И кроме того, $f|_A \neq 0; f \in I_{c(A)-1} \cap J_C$.*

Тогда некоторый многочлен $g \in \mathrm{T}(f) \setminus \mathrm{T}(A)$ есть линейная комбинация многочленов вида ${h'}_C^k = P \circ h_C^k$, где P обозначает процедуру альтернирования по δ группам переменных, причем количество переменных в группе, тип которых совпадает с типом i-ой анфилады, равно $n_i^2 + 1$, и все переменные из одной группы входят в участки одного типа. □

(В сомножителях произведения 10, отвечающих прохождению анфилад, однозначно определена структура похожести. Поэтому данное в теореме описание процедуры P является корректным.)

Если к каждой переменной ξ_j добавить не один набор $\Lambda(\xi_j)$, а по набору для каждого типа клеток и путем дополнительного альтернирования построить многочлен, кососимметричный по построенному набору из $b(A) + 1$ переменной, и сделать это для всех ξ_i, то получится экстремальный идеал Кемера.

Следующий пример показывает, что не всегда можно добиться того, чтобы расположение переменных из набора $\Lambda(\xi_j)$ отвечало одной анфиладе.

Пример. Пусть C состоит из двух однотипных анфилад по две клетки размера 1 в каждой, соединенных путем длины 2. И пусть компоненты, отвечающие радикальным специализациям в этих анфиладах, будут независимы. Рассмотрим многочлен $h'_C \neq 0$, получающийся путем альтернирования многочлена $h_C = x_1[y_2, u_1[y_1, t_1]][[t_2, z_1]u_2, z_2]x_2$ по парам переменных (x_1, u_2) и (x_2, u_1). При этом результат альтернирования внутри одной анфилады — нулевой, ибо анфиладам соответствуют коммутативные алгебры. В данном случае внутриклеточный радикал проявляется через взаимодействие анфилад. Таким образом, брать в качестве идеала, поглощающего весь радикал, произведение многочленов Капелли и операторов, вынуждающих переходы, вообще говоря, нельзя.

В квазилинейном случае можно доказать аналогичное утверждение для многочленов из $I_{c(A)-1} \cap J_C$, которые линейны по переменным, специализации которых в $\widehat{A}$ покрывают смешанные радикальные компоненты и квазилинейны по остальным переменным. Такие многочлены удовлетворяют условиям леммы о расталкивающих заменах 5.13.

Если все специализации переменной z_i имеют тип (ν_α, ν_α), причем размеры соответствующих клеток равны n_i, то можно определить "подкрученный многочлен Капелли". А именно. Пусть $q_i = p^{k_i}$ – степень квазилинейности переменной z_i, $i = 1, \dots m$, в многочлене f (см. определение 0.8). Положим $Q^{(i)} = p^{k_1 \dots \widehat{k_i} \dots k_m}$, $Q = p^{k_1 \dots k_m}$. Тогда после системы подстановок $z_i \to z_i Z_{n_i}^{Q^{(i)}}$ возникают переменные одинаковой степени квазилинейности Q, которые и будут альтернироваться. Можно сформулировать аналог предыдущей теоремы, поскольку "подкручивание" достаточно проводить только для полупростых переменных, получающихся из подстановок, действующих на граничных операторах. При этом величина δ должна совпасть с суммой $\sum Q_j$, взятой по всем наборам.

Если отказаться от описанного выше условия линейности, то получить аналог теоремы 4.9 не удается, поскольку при "подкручивании" радикальная компонента может уничтожиться. Было бы интересно получить явные описания многочленов из $I_{c(A)-1} \cap J_C$ в общем случае.

4.7. Графы и свойства конечности

Данный раздел посвящен выражению различных свойств конечности: нетеровости, слабой нетеровости, конечной определенности на языке путей. При этом предполагается локальная представимость относительно свободных алгебр, которая доказана ниже в главе 5.

4.7.1. Свойства нетеровости

В данном пункте будет доказано следующее

Предложение 4.22. *Относительно свободная алгебра A нетерова справа, если в соответствующем графе Γ нет операторов выхода из существенных клеток, а также нет существенных клеток размера бо́льшего 1.*

Относительно свободная алгебра A нетерова слева, если в соответствующем графе Γ нет операторов входа в существенных клеток, а также нет существенных клеток размера бо́льшего 1.

Замечание. Операторы перехода между клетками одного типа вдоль путей могут быть в любом количестве.

Доказательство. В силу симметрии достаточно доказать только первую часть. Покажем, что если условие данного предложения выполняются, то алгебра A является право нетеровой. В силу теоремы Брауна о нильпотентности радикала, достаточно показать (для некоторого достаточно большого m) нетеровость идеала $I = A^m R(A)^{c(A)-1}$, рассматриваемого как правый A-модуль.

Алгебра A действует на идеал I умножениями на полупростые части элементов. Соответствующий идеал $\widehat{I}$ в алгебре $\widehat{A}$ разлагается в прямую сумму компонент, отвечающих Пирсовскому разложению единицы. Пересечение этих компонент нулевое. Поэтому можно считать, что есть ровно один тип существенных клеток, и тогда алгебры A и $\widehat{A}$ действуют на идеалах I и $\widehat{I}$ как умножения на элементы кольца многочленов, ибо тогда $A/R(A) + E \simeq \widehat{A}/R(\widehat{A}) + E \simeq \mathbb{F}[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s]$ (E – присоединенная единица, $\bar{a}_i$ – полупростые части образующих). Остается заметить, что подмодуль нетерового модуля нетеров.

Покажем, что если условие не выполняется, то алгебра A не нетерова. Рассмотрим мономиальную алгебру B_l, заданную образующими a и b и соотношениями $b^2 = ba = 0$. Все ненулевые слова этой алгебры суть подслова сверхслова $a^{\infty/2}b$.

Легко видеть, что алгебра B_l не является нетеровой справа (хотя она нетерова слева). Кроме того, алгебра B_l имеет точное представление ρ в алгебре матриц порядка 2 над кольцом многочленов $\mathbb{F}[\lambda]$, для которого $\rho(a) = \lambda E_{11}$, $\rho(b) = E_{12}$.

Поэтому, если в графе алгебры A есть существенная клетка и оператор выхода из нее, либо существенная клетка порядка больше единицы, то B^l вкладывается в подалгебру A^{cl}. Таким образом, $B^l \in \operatorname{Var} A$ и B^l изоморфна фактору относительно свободной алгебры A (у которой число образующих не меньше двух). И раз B^l не является право нетеровой, то A также не является право нетеровой. $\square$

4.7.2. Слабо нетеровые относительно свободные алгебры

Многообразия ассоциативных колец, для которых все конечно порожденные алгебры являются слабо нетеровыми, исследовались многими авторами. И. В. Львов [74] показал, что многообразие алгебр над полем характеристики ноль будет локально слабо нетеровым тогда и только тогда, когда в нем выполняется тождество вида

$$xy^n z = \sum_{n_i<n} \alpha_i u_i x y^{n_i} z v_i, \tag{11}$$

где u_i и v_i – некоторые слова, $\alpha_i \in \mathbb{F}$.

В 1976 г. он же [75] анонсировал аналогичное описание алгебр над нетеровым кольцом Джекобсона. Ю. Н. Мальцев [84] доказал, что многообразие алгебр над полем характеристики нуль будет локально слабо нетеровым тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразия, заданного тождеством $xyzt = xzyt$. В. Т. Марков установил локальную представимость многообразия алгебр, заданных тождеством Энгеля.

А. З. Ананьин [2] доказал, что для того, чтобы многообразие алгебр над бесконечным полем было локально представимо, необходимо и достаточно, чтобы в этом многообразии выполнялось тождество вида

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] y_1 \ldots y_n [z_1, z_2, \ldots, z_n] = 0.$$

Отметим, что в силу предложения 4.23 в случае конечного поля утверждение Ананьина не выполняется.

В максимальной общности результаты, связанные с локальной слабой нетеровостью и локальной представимостью алгебр из многообразия, позднее были получены С. И. Кублановским [64]. Справедлива следующая

Теорема 4.10 (С. И. Кублановский). *Следующие условия для многообразия $\mathfrak{M}$ ассоциативных колец над нетеровым кольцом Джекобсона Λ эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{M}$ локально финитно аппроксимируемо.*

2) *каждая конечно порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$ конечно определена (что равносильно локальной слабой нетеровости алгебр из $\mathfrak{M}$).*

3) *$\mathfrak{M}$ локально представимо. (Каждая к.п. алгебра из $\mathfrak{M}$ представима.)*

4) *$\mathfrak{M}$ локально хопфово.*

5) *$\mathfrak{M}$ наследственно хигманово.*

6) *В многообразии $\mathfrak{M}$ выполняется тождество вида (11).*

□

Мы дадим характеризацию таких многообразий на языке графов. В данном пункте будет доказано следующее

Предложение 4.23. *Относительно свободная алгебра A слабо нетерова, если в соответствующем графе Γ нет существенных анфилад вдоль путей одновременно с операторами выхода и операторами входа, а также нет существенных клеток размера бо́льшего 1.*

(Операторы перехода между клетками одного типа вдоль путей могут быть в любом количестве.)

Доказательство. Доказательство утверждения о том, что если условие предложения выполняется, то алгебра является слабо нетеровой, аналогично предыдущему случаю. Только в случае пути из двух анфилад вместо модулей надо рассматривать бимодули, и действие алгебры A на идеале I в двустороннем случае будет устроено как умножение на многочлены от $2s$ переменных $\bar{a}_1^l,\dots,\bar{a}_s^l;\bar{a}_1^r,\dots,\bar{a}_s^r$. Индексы l и r указывают на левые и правые умножения.

Покажем, что если условие не выполняется, то алгебра A не является слабо нетеровой. Рассмотрим мономиальную алгебру B, заданную образующими a и b и соотношениями $aba^kb=ba^kba=bba^kb=ba^kbb=0; k=0,\dots,\infty$. Все ненулевые слова этой алгебры суть подслова множества слов ba^kb.

Легко видеть, что алгебра B не является слабо нетеровой. Кроме того, алгебра B имеет точное представление ρ в алгебре матриц порядка 2 над фактором кольца кольца многочленов $\mathbb{F}[\lambda,\varepsilon]/\operatorname{id}(\varepsilon^2)$, для которого $\rho(a)=\lambda E_{11}$, $\rho(b)=\varepsilon(E_{12}+E_{21})$.

Поэтому, если в графе алгебры A есть существенная клетка и операторы входа и выхода из нее, либо существенная клетка порядка больше единицы, то B вкладывается в подалгебру A^{cl}. Таким образом, $B\in\operatorname{Var}A$ и B изоморфна фактору относительно свободной алгебры A (у которой число образующих не меньше двух). И раз B не является слабо нетеровой, то A также не является слабо нетеровой. $\square$

Замечание. Алгебра B не является конечно порожденной (а алгебра B^l является). Более того, для любого n алгебра B_n с теми же соотношениями степени не выше n, что и алгебра B, не является PI-алгеброй. Не является PI-алгеброй и алгебра B_n' с образующими a,b и соотношениями $ba^kb=0; k=1,\dots,n$. Вместе с тем, алгебра B' с образующими a,b и соотношениями $ba^kb=0; k=1,\dots,\infty$ является слабо нетеровой и имеет точное представление в любую алгебру вида $\widehat{A}$, если алгебра A содержит существенную клетку с оператором входа и существенную клетку с оператором выхода.

4.7.3. Конечно определенные PI-алгебры

Из замечания после доказательства предложения 4.23 и конечной определенности лево(право) нетеровых алгебр (см. раздел 2.4) вытекают следующие два утверждения:

Предложение 4.24. *Относительно свободная алгебра A конечно определена тогда и только тогда, когда она либо нетерова слева, либо нетерова справа.* $\square$

Предложение 4.25. *Пусть A – относительно свободная алгебра. Тогда для некоторого n алгебра A_n с теми же определяющими соотношениями степени не выше n является PI если и только если A вкладывается в прямую сумму двух своих факторов (являющихся относительно свободными алгебрами). Один нетеров слева, другой — нетеров справа.* $\square$

5. Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных алгебр

При изучении представлений относительно свободной алгебры возникают компоненты, относящиеся к разным клеткам, а также граничным операторам и другим частям радикала. До сих пор мы преимущественно работали с описанием через носитель и использовали язык графов представления. Нам понадобится также двойственный функциональный язык — язык разносортных тождеств. На нем описывается поведение компонент каждого сорта при подстановках. Наверное, впервые с такого рода образованиями работал С. А. Пихтильков при исследовании многообразий, порожденных всеми алгебрами данной размерности [95]. В дальнейшем соответствующий формализм (не учитывавший разносортность радикала) был глубоко развит в работах А. В. Гришина [26], [28].

5.0.1. Алгебро–геометрические соображения в доказательствах конечной базируемости

Ниже будет показано, что для любого многочлена $f|_A \neq 0$, лежащего в идеале, отвечающем пути максимального состава, можно применить такую систему подстановок G (явно указанную), что результат окажется в A не равным тождественно нулю и будет устойчив при умножении на некоторое нетерово кольцо R. (Для неоднородных многочленов строится несколько более сложная конструкция S-модулей.) Само это кольцо будет зависеть только от расположения существенных анфилад вдоль некоторого пути C максимального состава.

С алгебрами A и $\widehat{A}$ можно связать пучки конечномерных алгебр на нетеровой аффинной схеме — спектре кольца следов и форм. Можно показать, что T-идеал, полученный из f, не обращается в нуль вне алгебраического многообразия, отвечающего размеру клеток не больше некоторой фиксированной величины и обращению в ноль некоторых полиномов. Пусть I – соответствующий идеал в кольце многочленов, N – пучок R-модулей, соответствующий полиномам, обращающимся в ноль при факторизации по путям максимального состава.

Алгебро–геометрическая основа наших рассуждений такова. Пусть идеал $H \supset \mathrm{T}(A)$ и $H' \supset H$ – образ H при нашей системе подстановок G. Тогда H' можно рассматривать как пучок модулей на $\mathrm{Spec}(R)$. Пусть $\hat{H} \supset H$ – пучок R-модулей, порожденных H, $\widehat{A[R]}$ – соответственно, $A[R]$. Мы покажем, что общей точке $x \in \mathrm{Spec}((R)$ для локальных пучков имеет место равенство $H_x \cap N_x = H'_x$, (индекс x означает локализацию пучка).

В этом случае фактор-пучок $\hat{H} \cap N/H'$ будет сосредоточен на собственной замкнутой подсхеме. Это значит, что существует идеал $\hat{I} = \hat{I}(H)$ в кольце R такой, что $\hat{I}^k \cdot \left(\hat{H} \cap N/H'\right) = 0$ при некотором $k = k(H)$.

Но тогда, в силу леммы Артина–Рисса, имеет место включение $H' \supseteq \hat{I}^k N \cap \hat{H}$. При этом алгебра $\widehat{A}/I^k A$ имеет меньший сложностно́й тип, поэтому переход к фактору R/I^k приводит к индукционному спуску.

Мы разберем пример, важный для дальнейшего. Пусть S – T-идеал в алгебре общих матриц $\mathbb{M}_n$ порядка n. Если расширить $\mathbb{M}_n$ следами, то расширенная система $\hat{S}$ будет очевидным образом конечно базируемой, ибо вся алгебра окажется нетеровым модулем над центром. Пусть Z – кольцо, порожденное размысловскими центральными полиномами. Оно замкнуто относительно умножения на следы и является идеалом в центре алгебры, а также в кольце, порожденном следами. В силу тождества (2) из раздела 0.2.3 оно порождает один и тот же идеал в алгебре общих матриц и в алгебре матриц со следом. (В положительной характеристике нужны еще и формы, поэтому надо воспользоваться тождествами для форм из раздела 0.2.3). Следовательно, система $S' = ZS$ является модулем над кольцом следов и конечно базируема. Ясно, что $S' \subset S$ и что это не равносильная система. Однако, в силу леммы Артина–Рисса, она накрывает систему $Z^k\mathbb{M}_n \cap S$, (число k зависит от системы S!) что дает возможность осуществить спуск к алгебре $\mathbb{M}_n/Z^k\mathbb{M}_n$. Последняя алгебра имеет ме́ньшую сложность. Таким образом, потерю равносильности при промежуточных заменах все же удается проконтролировать. Подобные рассуждения переводятся на язык схем и пучков, сосредоточенных на замкнутой подсхеме, а также на язык максимального замкнутого T-идеала (см. разделы 5.4.3 и 5.4).

Сформулируем связанные с этим понятия. Пусть M – нетеров модуль над нетеровым кольцом R, C – подкольцо R. Вообще говоря, M не является нетеровым C-модулем, в том числе и когда C – идеал.

Определение 5.1. Модуль M называется *проективно нетеровым над* C, если для любого C-подмодуля $N \subset M$ можно указать $k \in \mathbb{N}$ и конечный набор элементов $\{n_1, \dots, n_s\}$ такие, что C-подмодуль, порожденный $n_1, \dots, n_s$, содержится в $N \cap C^k M$.

Мы доказали следующее утверждение:

Предложение 5.1. *Алгебра общих матриц (а также алгебра общих матриц со следом) проективно нетерова над своим Размысловским центром.* □

Замечание. Размысловский центр в алгебре общих матриц конечно порожден как модуль над пространством следов (форм), но не как алгебра.

Изучим проективную нетеровость:

Предложение 5.2. *Пусть M' и M'' проективно нетеровы над C и пусть имеет место точная последовательность*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

Тогда модуль M проективно нетеров над C. □

Приведем лемму Артина–Рисса (см. [14], стр. 244):

Лемма (Лемма Артина–Рисса). *Пусть M – нетеров модуль над нетеровым кольцом R, I – идеал в R. Тогда M проективно нетеров над I.*

Поскольку рассуждения, доказывающие эту лемму, достаточно важны для нас, приведем ее доказательство.

Доказательство. Следует показать, что для произвольного подмодуля $N \subset M$ и некоторого натурального k имеет место включение: $I \cdot N \supseteq I^{k+1}M \cap N$. Положим $N_k = \{x \in M | I^k x \in N\}$. Тогда $\{N_k\}$ образуют возрастающую цепочку R-подмодулей нетерова модуля M, которая стабилизируется. Поэтому при некотором k имеет место равенство $N_k = N_s$ для всех $s \geq k$. Тогда при всех $x \in M$ если $I^{k+1}x \in N$, то $I^k x \in N$ и, следовательно, $I^{k+1}x \in I \cdot N$. Поэтому $I \cdot N \supseteq I^{k+1}M \cap N$. (И более того, $I^s \cdot N \supseteq I^{k+s}M \cap N$.) Лемма доказана. □

Число k, фигурирующее в доказательстве леммы Артина–Рисса, называется *показателем Артина–Рисса*.

Дадим критерий проективной нетеровости.

Предложение 5.3. *Нетерово кольцо R проективно нетерово над своим подкольцом C тогда и только тогда, когда каждая первичная компонента R_i кольца R является нетеровым модулем над целым замыканием C_i' соответствующей компоненты C_i в R_i и при этом каждое C_i содержит некоторый идеал кольца C'.*

Доказательство. В силу предложения 5.2 достаточно ограничиться случаем, когда кольцо R, а значит, и C, первично. Из этого же предложения и леммы Артина-Рисса следует, что если подкольцо C удовлетворяет условиям доказываемого предложения, то R проективно нетерово над C. Поэтому осталось доказать необходимость.

Необходимость условия нетеровости R над C' следует из того, что поле частных кольца R должно быть конечномерно над полем частных кольца C.

Остается показать существование такого элемента x, что $xC' \subset C$. Отметим, что для любого конечного подмножества $D \subset C$ такой элемент существует. Далее, поскольку кольцо C' конечно порождено, то достаточно доказать существование элемента x такого, что $xY \subset C$ для любого множества $Y \subset C'$, состоящего из степеней одного элемента.

Рассмотрим множество $Y = \{y^m\}_{m=1}^{\infty}$ и C-модуль N, который оно порождает. При некоторых k и s конечное множество $Y_s = \{y^m\}_{m=1}^{s}$ порождает C-подмодуль, накрывающий C^kY. Пусть элемент x таков, что $xY_s \subset C'$. Тогда для любого $x' \in C^kx$ имеет место включение $x'N \subset C$. Таким образом, C^kx образует искомый идеал. $\square$

Следствие 5.1 (О тензорном произведении). *Пусть R_1-модуль M_1 проективно нетеров над C_1, а R_2-модуль проективно нетеров над C_2. Тогда $M_1 \otimes M_2$ проективно нетеров над $C_1 \otimes C_2$ как $R_1 \otimes R_2$-модуль.* $\square$

5.0.2. Вспомогательные утверждения

Будем говорить, что алгебра *хорошо представлена*, если она вложена в алгебру нетерового типа над ассоциативно-коммутативным полупервичным кольцом R, в которой нет кручения по переменным из R, трансцендентным над $\mathbb{Z}_p$, и действие на любом векторе R не содержит нильпотентных операторов. При этом имеется разложение пространства представления на полупростую и радикальную части.

Из соображений, связанных с зависимостью и независимостью клеток, вытекает такое

Предложение 5.4. *Пусть дан набор клеток, так что ограничение представления на каждую из них дает морфизм в алгебру матриц соответствующего порядка. x_i обозначает ограничение элемента $x \in A$ на клетку с номером i. $Z_i(\overrightarrow{x})$ $\overrightarrow{x} \in A$ обозначает центральный полином в алгебре матриц размера, равного размеру рассматриваемой клетки. Рассматривается идеал H в алгебре, порожденной коэффициентами при матричных единицах в этих клетках, инвариантный относительно действия подстановок в алгебре A. Тогда этот идеал содержит пересечение идеалов, порожденных множествами полиномов вида:*

- $\forall \overrightarrow{x}\ (Z_i(\overrightarrow{x}))^k$
- $\forall \overrightarrow{x}\ ((Z_i(\overrightarrow{x}))^q - Z_i(\overrightarrow{x}))^k$, *где $q = p^k$ причем при всех $x \in F \quad x^k = x$.*
- $\forall \overrightarrow{x}\ (Z_i(\overrightarrow{x}) - Z_j(\overrightarrow{x}))^k$
- $\forall \overrightarrow{x}\ (Z_i(\overrightarrow{x})^{q_1} - Z_j(\overrightarrow{x})^{q_2})^k$, *где $q_i = p^{k_i}$ причем при всех $x \in F \quad x^{k_i} = x$.*

$\square$

5.1. Разносортные подстановки и метод А. В. Гришина

Хотя результаты данного раздела и не используются в дальнейшем, изложенная здесь техника дает максимально элементарное доказательство конечной базируемости. Многие трудности в доказательствах конечной базируемости связаны с тем, что действие полугруппы подстановок более тесно связано с кольцом симметрических функций от следов (форм). И нормальные базисы сответствующих колец устроены не очень просто. И если “перекачка” есть комбинаторный аналог свойства алгебраичности, то метод А. В. Гришина дает возможность осуществлять прямые комбинаторные рассмотрения, работать с кольцом симметрических функций. По сравнению с работами А. В. Гришина, наше изложение несколько более функториально. В данном параграфе мы используем близкие обозначения.

Помимо доказательств и идей, в нем содержащихся, для понимания ситуации важна также и динамика идей. Поняв возникновение идеи и линию ее развития, мы лучше видим мотивировки и понимаем ситуацию, чем когда идея есть нечто чуждое и привнесенное извне.

То, что автор считает основой алгебро-геометрического подхода, было придумано им при следующих обстоятельствах. Автор разбирал работу, посвященную конечной базируемости, где ему встретилось непонятное место (впоследствии В. В. Щиголев там обнаружил ошибку). Чтобы закрыть его, автор придумал “проективную нетеровость”. Оказалось, что применение алгебро–геометрического подхода эффективно в методе А. Р. Кемера и этот подход ведет к доказательству локальной шпехтовости и локальной представимости для многообразий ассоциативных колец и алгебр. Этот подход, а также модификация метода А. В. Гришина, докладывались на семинаре МГУ по теории колец и, как отметил Е. С. Голод, основная лемма есть не что иное, как лемма Артина–Рисса. Как было отмечено А. В. Гришиным, “впервые лемму Артина–Рисса под названием проективной нетеровости применил А. Я. Белов в своих исследованиях по конечной базируемости” [32]. Данный раздел посвящен модификации метода А. В. Гришина. Она заключается, во-первых, в рассмотрении разносортного радикала, во-вторых, в более категорном подходе (лемма о морфизмах T-структур), и в-третьих — в несколько ином изложении рассуждений, связанных с “шириной”.

Отметим, что метод А. В. Гришина основан на изучении действия подстановок на первичных компонентах и не может быть перенесен на положительную характеристику. Для работы в этой ситуации необходимо иметь дело с граничными операторами.

5.1.1. θ-техника

θ-техника является развитием идей Ж. Левина. Для ее изложения нам потребуется несколько более “функториальный” и более детализированный язык, описывающий взаимодействие разносортных объектов. Ведь радикал должен быть разбит на части, отвечающие типам обкладок ν_i.

Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ – набор элементов алгебры A с сигнатурой Ω такой, что для любого набора $\{\xi_i\}_{i\in I} \subset A$ соответствие $x_i \to \xi_i$ продолжается до эндоморфизма алгебры. В этом случае говорим, что в алгебре A задана *T-структура*. Естественным образом определяется *градуированная T-структура* (соответствие $x_i \to \xi_i$ должно осуществляться между элементами той же градуированной компоненты). Понятие градуированной T-структуры включает в себя T-супер-структуру, а также ситуацию разносортных переменных.

(Другой подход состоит в фиксации набора образующих и группы эндоморфизмов A, сохраняющих нужную структуру.)

Начнем с неформального пояснения. Каждый элемент x представимой относительно свободной алгебры разлагается в сумму

$$x = \sum_i \bar{x}^i + \sum_{ij} \theta^{ij} + \sum_i \theta'^i + \sum_i \theta''^j + \bar{\theta},$$

где $\bar{x}^i$ означает компоненту из i-ой группы похожих клеток, θ^{ij} – оператор перехода из i-ой группы клеток в j-ю, θ'^i – вход в клетки i-й группы, θ''^j – выход. $\bar{\theta}$

отвечает радикальным компонентам типа (ν_0, ν_0), связанным с чисто радикальной пирсовской компонентой.

Через $\mathbb{K}_r$ обозначается алгебра матриц порядка r, $\mathbb{M}_r$ – соответствующий идеал тождеств, $GM(r, X)$ – алгебра общих матриц от образующих из X, при этом $\bar{x}_i = \sum x_i^{(\alpha,\beta)} E_{\alpha,\beta}$, где $E_{\alpha,\beta}$ – матричные единицы, $\bar{x}_i$ – образ переменной x_i, $TR(r, X)$ – алгебра, порожденная следами общих матриц, $TRGM(r, x)$ – алгебра общих матриц со следом.

Рассмотрим множество чисел r_i (среди которых могут быть совпадающие) и алгебру $\Phi(r_1, \dots, r_s)$ общих блочных матриц со следами, r_i – размеры блоков. $\Phi(r_1, \dots, r_s) = \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_s$. Эта алгебра естественно наделяется T-структурой. *Алгеброй $\bar{F}$-квазимногочленов* называется алгебра $Q(\bar{F}) = \bar{F} * \mathbb{K}{<}\theta_1, \dots, \theta_n{>}$.

Положим $x_i = \bar{x}_i + \theta_i$; x_i порождают свободную ассоциативную алгебру, являющуюся подалгеброй $Q(\bar{F})$. Введем действие полугруппы подстановок. Для многочлена $g(x)$ естественно определяется его *полупростая* $\bar{g} = g(\bar{x})$ и *радикальная* $\tilde{g}(x) = g(x) - \bar{g}(x)$ части. Пусть $\tau : x_i \to g_i$. Положим $\theta_i^\tau = x_i^\tau - \bar{x}_i^\tau$, где $\bar{x}_i^\tau$ – действие подстановок на полупростых частях (имеющих нулевую степень по θ). Таким образом, действие подстановок на $\bar{F}$ естественным образом продолжается до действия на $Q(\bar{F})$. Отметим, что в качестве $\bar{F}$ мы можем брать и прямые суммы алгебр, на которых определено действие полугруппы подстановок, например, относительно свободные алгебры. Следующее предложение относится к функториальным свойствам данных конструкций:

Предложение 5.5 (О расширении морфизма). *Пусть $\varphi : \bar{F}_1 \to \bar{F}_2$ – морфизм, сохраняющий T-структуры. Тогда имеется естественный морфизм T-структур $Q(\varphi) : Q(\bar{F}_1) \to Q(\bar{F}_2)$;* $\quad \theta_i \mapsto \theta_i'$. □

В качестве $\bar{F}$ мы будем брать прямые суммы алгебр общих матриц и относительно свободных алгебр произвольной природы и (поскольку нам это позволяет теорема Брауна о нильпотентности радикала) работать будем в пространствах $Q(\bar{F})/\theta^{n+1}$. Индукция будет вестись по θ-степени и по индексу нильпотентности радикала, и нас интересует экстремальное пространство $\theta^{(n)}/\theta^{(n+1)}$. Отметим также, что T-структура естественным образом определяется на пространствах со следом (и с формами). Мы будем пользоваться таким соображением: при наличии конечного набора идеалов с нулевым пересечением все вопросы, относящиеся к конечной базируемости и представимости, сводятся к аналогичным вопросам для фактор-алгебр.

Итак, рассмотрим алгебру обобщенных θ-многочленов

$$\hat{A}^n = (\bigoplus_i A_i) * \mathbb{K}{<}\theta{>}/\theta^{(n)},$$

где A_i – алгебра общих матриц. Алгебра $\hat{A}$ очевидным образом представима, а каждый ее элемент содержит полупростую и радикальную части. Радикальные компоненты играют роль прокладок, соединяющих полупростые части. Через $\overline{x}_r$ обозначим сумму полупростых компонент элемента x_r. $\theta_r = x_r - \overline{x}_r$ — его радикальная часть. Подстановке $P_r(x_1, \dots, x_n) \to x_r$ соответствует такая же подстановка на полупростых частях. Можно определить действие этой подстановки на радикальных частях

$$\theta_r' = P_r(x_1, \dots, x_n) - P_r(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n). \tag{1}$$

(Техника такого рода подстановок развита в работах [26], [28].)

Мы будем разлагать не только полупростую, но и радикальную часть элементов на разносортные слагаемые. Язык разносортных переменных является двойственным языку, связанному с разложением носителя на компоненты. При этом системам однотипных клеток отвечает компонента A_i, а граничным операторам, относящимся к анфиладам — переменные типа θ'^i, θ''^i, θ^{ij}. Переменным типа $\bar{\theta}$ отвечает (ν_0, ν_0)-компонента.

Рассмотрим алгебру $\hat{A}^n = (\bigoplus\limits_i A_i) * \mathbb{K} < \theta > /(\theta^{(n)} + J)$. При этом $A \subset \hat{A}$, A_i – алгебры общих матриц,

$$x_r = \sum_i \bar{x}_r^i + \sum_{ij} \theta_r^{ij} + \sum_i {\theta'_r}^i + \sum_i \theta''^j_r + \bar{\theta}_r,$$

J – идеал, порожденный элементами:

- $b\theta^{ij};\ b\theta'^i;\ b \in A_k,\ k \neq i.$
- $\theta^{ij}b;\ \theta''^j b; b \in A_k,\ k \neq j.$
- $b\theta''^j;\ \theta'^i b;\ \bar{\theta}b;\ b\bar{\theta},\ b \in A_k.$
- $\theta^{ij}\theta^{pq};\ \theta^{ij}\theta'^p;\ \theta''^j\theta^{pq};\ \theta''^j\theta'^p,\ p \neq j.$
- $\bar{\theta}\theta^{pq};\ \theta^{pq}\bar{\theta};\ \bar{\theta}\theta''^p;\ \theta'^q\bar{\theta};\ \theta'^p\theta'^q;\ \theta''^p\theta''^q;$

Знак $'$ помечает радикальные компоненты, отвечающие входам в клетки, $''$ – выходам, $\bar{}$ – сугубо "внутрирадикальным" компонентам, пара индексов означает непосредственный переход от одной клетки к другой. Переменная $\bar{\theta}$ соответствует пирсовской компоненте типа (ν_0, ν_0); θ'^i и θ''^j – компонентам типа (ν_0, ν_i) и (ν_j, ν_0) соответственно, переменная θ^{ij} – компоненте (ν_i, ν_j). Отметим также, что могут быть компоненты типа θ^{ii}. Если A_i – алгебра общих матриц, то A_i и θ^{ii} порождают алгебру, замыкание по Зарисскому которой изоморфно тензорному произведению алгебры матриц и результата присоединения единицы к полугрупповой алгебре нильпотентной полугруппы.

Кроме того, будет накладываться набор соотношений $\tilde{J}$, обнуляющих элементы, содержащие количества переменных типа θ^{ij}, θ'^i, θ''^j, $\bar{\theta}$ больше некоторых заданных критических величин (по которым ведется спуск).

Отметим очевидный, но полезный факт:

Предложение 5.6. *Если все A_i представимы, то алгебра $\hat{A}^n$ также представима.* □

На алгебре $\hat{A}$ естественным образом действует полугруппа подстановок, отвечающих подстановкам из A. Чтобы определить некоторую градуированную (относительно вхождений переменных типа θ разного сорта) компоненту многочлена g, надо представить переменные в виде суммы своих компонент, подставить в g и сгруппировать нужные члены. Особое значение имеют для нас компоненты единичной θ-степени, поскольку мы работаем с действием подстановок на граничных операторах. Заметим, что мономов θ-степени единица и общей степени большей единицы, содержащих $\bar{\theta}$, не существует, поскольку переменные такого типа можно умножать только на радикальные компоненты.

Отметим, что все конструкции, связанные с расширением T-структур можно проводить не только с прямой суммой алгебр общих матриц, но и с любыми другими объектами, снабженными структурой подстановок. Например, в качестве $\bar{F}$ мы будем брать прямые суммы алгебр общих матриц и относительно свободных алгебр произвольной природы и работать будем в экстремальных пространствах, отвечающих путям в графе Γ максимального состава. Индукция будет вестись по количеству разных типов θ (что соответствует составу пути) и по размеру "полупростой" части. Конечная базируемость будет доказываться в экстремальном пространстве, Отметим также, что T-структура естественным образом определяется на пространствах со следом (след оператора типа θ нулевой).

Следующее предложение относится к функториальным свойствам данных конструкций:

Предложение 5.7 (О морфизмах T-структур). *Пусть $\varphi_j : A_j \to A'_j$ – набор гомоморфизмов. Тогда имеется естественный морфизм*

$$\widehat{\varphi} : \hat{A} = (\bigoplus_i A_i) * \mathbb{K} < \theta > /(\theta^{(n)} + J) \to \hat{A}' = (\bigoplus_i A'_i) * \mathbb{K} < \theta > /(\theta^{(n)} + J),$$

где $A_i \to A'_i; \theta_i \mapsto \theta'_i$ (с соответствием прочих характеристик переменных типа θ.)

Если при этом сами A_j наделены T-структурами (в частности, являются относительно свободными алгебрами), то на $\hat{A}$ также возникает T-структура, согласованная с действием $\widehat{\varphi}$. □

Следствие 5.2. *Пусть T_j – собственные T-идеалы в A_j; пусть конечно базируемы все системы S*

1) для всех меньших сложностных типов (и типов с меньшим составом),

2) такие, что каждая A_i-компонента в обобщенных полиномах лежит в T_i.

Тогда в системе $\hat{A}$ все системы полиномов конечно базируемы.

Доказательство. Пусть

$$\varphi_j : A_j \to A'_j = A_j/T_j;\ \tilde{\varphi}_j = (\mathrm{id}, \dots, \varphi_j, \mathrm{id}, \dots, \mathrm{id}),\ \hat{\varphi} = \bigoplus_j \tilde{\varphi}_j.$$

Тогда ядро $\hat{\varphi}$ состоит в точности из полиномов типа 1, а образ каждого из $\tilde{\varphi}_j$ – из полиномов типа 2. Количество же отображений $\tilde{\varphi}_j$ – конечно. □

Определение 5.2. Мы присвоим сложностной тип каждой структуре как элементу частично упорядоченного множества следующим образом. *Структура $\hat{A}$ меньше или равна структуре $\hat{A}'$*, если при некотором соответствии индексов

- A_i меньше или равно A'_i (если кого-то нет, то пустое множество считается самым маленьким)
- Множество дополнительных соотношений $\tilde{J}$ в структуре $\hat{A}$ не больше, чем в дополнительном множестве $\hat{A}'$

При этом сложностной тип фактора по T-идеалу считается меньшим сложностного типа самой алгебры.

5.1.2. Основное комбинаторное соображение

Данный раздел посвящен разбору ключевых примеров, в которых основные комбинаторные соображения в методе Гришина видны в наиболее чистом виде. Если не оговорено обратное, характеристика основного поля $\mathbb{F}$ будет считаться равной нулю. Начнем с наиболее простого примера.

Пример 1. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$. Рассмотрим пространство, порожденное мономами вида $ca^n d$, и систему операторов допустимых подстановок $a \to P(a)$. Нам удобнее работать с подстановками $a \to a + P(a)$. Это пространство изоморфно T-пространству многочленов от одной переменной. Покажем конечную базируемость T-пространств относительно данной системы подстановок и линейных действий.

Осуществим "бесконечно малый сдвиг". Рассмотрим подстановки вида $a \to a + t \cdot a^r$, а затем выделим члены, линейные по t. Поскольку $|\mathbb{F}| = \infty$, данная операция не выводит за пределы T-пространства (см. раздел 0.2.2). При этом моном $ca^k d$ переходит в моном $k \cdot ca^{k+r} d$. Конечная базируемость доказывается точно так же, как и теорема Гильберта о базисе, путем анализа старших членов.

Аналогично разбирается ситуация, когда между c и d стоят элементы кольца коммутативных многочленов от нескольких неизвестных, в которые можно подставлять. Такое пространство изоморфно T-пространству многочленов от нескольких коммутирующих переменных.

В дальнейшем будут вводиться резервные переменные t_i и выделяться полилинейные члены. Затем будут производиться подстановки вида $t_i a \to t_i$, а в конце эти промежуточные переменные будут специализироваться в единицу или в другие переменные. Перейдем теперь к первому нетривиальному случаю.

Пример 2. $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$, "существенная высота" равна двум. Рассмотрим систему Q_2 многочленов вида $\sum_{kl} \alpha_{kl} c_0 a^k c_1 a^l c_2$ и множество допустимых подстановок S вида $a \to a + P(a)$. Данная система изоморфна пространству полиномов от двух переменных $Q[x, y]$, снабженному системой подстановок $S_P : P(x) \to x; P(y) \to y$. Здесь уже видны основные идеи данного раздела (кроме алгебро-геометрических рассмотрений). Дополнительные технические аспекты будут продемонстрированы ниже. Докажем конечную базируемость системы (Q_2, S).

Прежде всего отметим, что все T-пространства однородны по a.

1 Шаг. Вспомогательная переменная t. Осуществляется как и в первом примере. Рассмотрим линейную по t компоненту при подстановке $a \to a + t \cdot a$. При этом из члена $c_0 a^k c_1 a^l c_2$ получается сумма двух членов $k \cdot c_0 t a^k c_1 a^l c_2 + l \cdot c_0 a^k c_1 t a^l c_2$.

Данная операция приводит к равносильной системе, поскольку любое S-пространство задается однородными многочленами, а при специализации t в единицу возникает множитель $k + l$, равный степени по a. ("Унитарный трюк").

Но T-пространства однородны по a, поэтому из конечной базируемости новой системы многочленов следует конечная базируемость старой.

2 Шаг. Сортировка членов. Назовем члены вида $c_0 t a^k c_1 a^l c_2$ *членами первого типа*, а члены вида $c_0 a^k c_1 t a^l c_2$ – *членами второго типа*.

Первая основная идея состоит в том, что *достаточно доказать конечную базируемость для T-пространств, порожденных по отдельности членами первого типа и, соответственно, второго.* Ибо сумма нетеровых модулей нетерова.

В силу симметрии достаточно ограничиться системой, порожденной членами первого типа.

Итак, рассматривается система многочленов Q_2^1 вида

$$\sum_{kl} \alpha_{kl} c_0 t a^k c_1 a^l c_2$$

и система подстановок $S^1 : a \to a + P(a)$, а также $t \to t \cdot R(a)$. Покажем, как из конечной базируемости системы, отвечающей многочленам 1-го рода (а в силу симметрии — и системы, отвечающей многочленам 2-го рода), вытекает конечная базируемость всей системы, которая нам и нужна. В самом деле. Пусть члены первого типа у многочленов $f_1, \dots, f_s$ образуют базис. Тогда для каждого многочлена g найдется элемент h из T-пространства, порожденного многочленами $f_1, \dots, f_s$, такой, что $g - h$ не имеет членов первого типа. Остается воспользоваться конечной базируемостью компонент многочленов, составленных из членов второго типа.

Разумеется, первая основная идея без изменений переносится на многочлены вида $c_0 a^{k_1} c_1 \cdots a^{k_h} c_h$ при произвольной существенной высоте h.

3 Шаг. Понятие ширины. Там, где стоит t, можно умножать на многочлены от a. Основная трудность — в том, что линеаризация подстановок вида $P(a) \to a$ содержит компоненты, действующие только на тот участок, где стоит t. (А здесь организовывать умножения действиями через переменную a не нужно). В преодолении этой трудности и заключается суть метода.

Шириной монома $c_0 t a^k c_1 a^l c_2$ назовем степень l. Это число вхождений переменной a в месте, "недоступном" действию через t. Мономы будем сравнивать сперва по ширине, а потом — по степени.

Теперь —

Основное наблюдение: *Результат системы однородных подстановок $a \to aP(a)$ в многочлен $\sum_{kl} \alpha_{kl} c_0 t a^k c_1 a^l c_2$ есть сумма членов, получающихся при действии на участке от c_1 до c_2, и членов ме́ньшей ширины.*

В самом деле: только при действии подстановок на таком участке, который "недоступен для t", ширина увеличивается.

Замечание. Процедура сортировки, описанная на первом шаге, служит причиной того, что схема рассуждений работ [26], [28], [32] не проходит при доказательствах рациональности рядов Гильберта. Рассортированные члены после специализаций t_i могут взаимно уничтожаться. С другой стороны, эта "грубость" связана и с легкостью переноса в иную ситуацию. Например, можно рассматривать также и E_{ij}-компоненты резервных переменных t_α, компоненты, относящиеся к разным клеткам и т.п. Особенно это может быть полезно для случая произвольной сигнатуры.

5.1.3. Случай положительной характеристики

Начнем с простейшей ситуации: $s = 1$.

Пример. Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = p > 0$ и $\mathbb{F}$ – бесконечно. Рассмотрим пространство, порожденное мономами вида $ca^n d$, и систему операторов допустимых подстановок $a \to P(a)$.

В этом случае, если $k \equiv 0 \pmod{p}$, то преобразование $ca^k d \to k \cdot cta^k d \to k \cdot ca^{k+r} d$ бесполезно. Тогда надо рассматривать коэффициент при t^{p^s}, где $s \geq \mathrm{ord}_p(k)$. Этот коэффициент равен $\binom{k}{p^s} \not\equiv 0 \pmod{p}$. (При $y > x$ $\binom{x}{y} = 0$.)

Далее, с помощью подстановок, действующих через t, мы получаем структуру $\mathbb{F}[a^{p^s}]$-модуля. Отметим, что $\mathbb{F}[a]$ для любого k суть нетеров $\mathbb{F}[a^{p^k}]$-модуль.

Зададим каждый член $ca^k d$ парой параметров: $(k, \mathrm{ord}_p(k))$. Тогда если $n_2 \geq n_1$; $m_2 \geq m_1$, то из многочлена, старшему члену которого соответствует пара (n_1, m_1), получается многочлен, старшему члену которого соответствует пара (n_2, m_2) (если, конечно, такая пара существует, т.е. $m_2 = \mathrm{ord}_p(n_2)$).

Теперь конечная базируемость вытекает из анализа максимальных пар при членах с ненулевыми коэффициентами. Как и теорема Гильберта о базисе, искомое утверждение вытекает из такого комбинаторного факта:

Утверждение. *Прожектор освещает квадрант, являющийся сдвигом положительного координатного квадранта. Разрешается ставить новые прожекторы в целочисленные точки с неотрицательными координатами. При этом новый прожектор должен стоять в неосвещенной точке. Тогда процесс постановки прожекторов должен закончиться.*

Это утверждение имеет естественное многомерное обобщение.

Отметим, что поскольку в линейном по t члене при замене $a \to a + t \cdot a$, действующей на мономе $ca^k d$, возникает коэффициент k, то как нетрудно убедиться, операция выделения членов с данным остатком показателя степени k по модулю p есть T-пространственная операция. Далее можно убедиться, что то же верно для любого остатка по модулю p^s. В самом деле. Рассмотрим члены при t^{p^s} для всевозможных s. Показателю k отвечает множитель $\binom{k}{p^s}$. Можно выделить члены для каждого значения такого множителя. Остается заметить, что множество остатков по модулю p у биномиальных коэффициентов $\binom{x}{p^k}$ однозначно определяет число x. Для конечного поля $\mathbb{F}$ выделяются члены с показателями k, соответствующими остаткам при делении на $|\mathbb{F}|$.

Отметим, что конечная базируемость T-пространств в коммутативной алгебре впервые была установлена А. В. Гришиным [32].

Рассмотрим случай существенной высоты $s > 1$. Тогда конечная базируемость места не имеет.

Пример бесконечно базируемой системы многочленов от двух переменных относительно одновременных подстановок: $P(x) \to x; P(y) \to y$ в случае характеристики $p > 0$. Этот пример, соответствующий случаю существенной высоты 2, принадлежит В. В. Щиголеву:

$$Q_k = xy^{p^k - 1}.$$

Система многочленов $\{Q_k\}$ бесконечно базируема по модулю идеала, порожденного многочленом $(x-y)^2$. Соответствующая серия многочленов от a есть $\{c_0 a c_1 a^{p^k - 1} c_2\}$.

Тем не менее, некоторые операции, аналогичные тем, которые использовались в нулевой характеристике, осуществить можно.

Пусть $M = c_0 a^{k_1} c_1 \ldots, a^{k_s} c_s$, $q = p^k, k = \min_{\mathrm{ord}_p(k_i)}$. Тогда $S_{q,t}(M)$ – операция выделения членов минимальной степени по t после замены $a \to a(1+t)$ (это будет

q-ая степень) приводит к выражению:

$$S_{q,t}(M) = \sum_{i=1}^{s} \binom{k_i}{q} c_0 a^{k_1} c_1 \dots c_{i-1} t^q a^{k_i} c_i \dots c_s.$$

Таким образом, удается "вставить" t^q между c_{i-1} и c_i. А затем, создав структуру $\mathbb{F}[a^q]$-модуля, понизить существенную высоту. Все рассуждения проходят, кроме одного: возможности специализации $t \to 1$.

Если специализировать $t \to 1$, то перед M возникает коэффициент, равный $\sum_{i=1}^{s} \binom{k_i}{q}$, который обращается в нуль, если $\mathrm{ord}_p(\sum k_i) > k$. И новая система оказывается не равносильной исходной. Итак, в положительной характеристике после вербальных операторов возвращаться к исходной ситуации невозможно и "унитарный трюк" имеет принципиальное значение.

Замечание. Представляет интерес структура T-пространств в системах многочленов от нескольких переменных относительно структуры одновременных подстановок $P(x_i) \to x_i$. В частности, вопросы рациональности рядов Гильберта в нулевой характеристике.

5.1.4. Конечная базируемость T-пространств

Системы подстановок. Конструкции. Теперь надо упорядочить конструкции подстановок. Мы будем доказывать конечную базируемость под действием полугрупповой алгебры, порожденной вербальными операторами (см. раздел 0.2.2), в которых участвуют только однородные замены. Каждый такой оператор переводит однородные элементы в однородные. Под *градуированной конечной базируемостью* будет пониматься конечная базируемость градуированных T-пространств под действием операторов, сохраняющих градуировку. Мы доказываем градуированную конечную базируемость и слово "градуированная" в этом разделе опускается. *Повышающим* или *собственным* называется вербальный оператор, повышающий градуировку, для которого все участвующие в подстановках слова имеют длину строго бо́льшую единицы. Ясно, что произвольный вербальный оператор можно выразить через повышающие операторы и операторы, "вырезающие" фиксированные градуированные компоненты (операторы, которые многочлену ставят в соответствие его компоненту фиксированной степени однородности.) Упорядочив градуированные степени сперва по длине, а затем — по вхождению образующих, из анализа старших компонент получаем следующее утверждение:

Лемма 5.1 (О повышающих операторах). *Конечная базируемость пространств, замкнутых относительно повышающих операторов, равносильна конечной базируемости пространств, замкнутых относительно всех вербальных операторов.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Упорядочим градуированные компоненты, сначала по общей степени, потом — лексикографически, в соответствии с произвольно выбранным порядком на образующих. Пусть S – пространство, замкнутое относительно повышающих операторов. Тогда пространство, порожденное старшими компонентами элементов из S, замкнуто относительно всех вербальных операторов и потому конечно базируемо. Пусть $\{s_1, \dots, s_m\}$ – набор элементов из S, старшие компоненты которых образуют базис. Тогда, как легко видеть, этот набор также образует базис системы S. $\square$

Замечание. Нам необходимо ограничиться повышающими операторами, поскольку только для них проходят рассуждения, связанные с выбором компоненты вербального оператора, максимально повышающей ширину и не действующей на коэффициенты, возникающие из переменных.

Пусть $\bar{S}$ – компонента оператора подстановки S, отвечающая действию подстановок на участке от c_1 до c_2. Тогда достаточно доказать градуированную конечную базируемость T-пространств относительно систем подстановок $\bar{S}$.

В самом деле. Пусть многочлены $f_1, \ldots, f_s$ образуют базис T-пространства H относительно системы $\bar{S}$. Тогда каждый многочлен $g \in H$ представим в виде

$$g = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j} \beta_{ij} S'_{ij}(f_i),$$

и разность

$$g - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j} \beta_{ij} S_{ij}(f_i)$$

имеет меньшую максимальную ширину. (Напоминаем, что рассматривается градуированная конечная базируемость.)

Перейдем к случаю **произвольной существенной высоты** h. Докажем градуированную конечную базируемость для систем многочленов вида $\sum_i \alpha_i c_0 a^{k_1} c_1 \cdots a^{k_h} c_h$. Эта система изоморфна системе коммутативных многочленов от n переменных и одновременных подстановок $P(x_i) \to x_i$. Будем вести индукцию по h. Основание индукции ($h = 1, 2$) уже установлено.

Первый шаг и **второй шаг** проходят без изменений. Усовершенствуем рассуждения **третьего шага**. Рассмотрим системы многочленов вида:

$$\sum_i \alpha_i c_0 t a^{k_1} c_1 a_{k_2} \cdots a^{k_h} c_h.$$

Шириной монома

$$M = c_0 t a^{k_1} c_1 a_{k_2} \cdots a^{k_h} c_h$$

назовем сумму показателей степеней a в местах, где нет вхождений t_i, т.е. величину

$$\sum_{i=2}^{h} k_i = \deg_a(M) - k_1.$$

Все рассуждения с уменьшением ширины легко переносятся, но все же сделаем методическое усовершенствование. Будем интерпретировать набор степеней a, там где стоит t, как элемент коммутативного кольца (кольца $\mathbb{F}[\lambda_1]$ для первого шага и кольца $\mathbb{F}[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$ для s-го). Выражению $c_{m_1-1} t_1 a^{k_1} c m_1$, возникающему на первом шаге, соответствует элемент $\lambda_1^{k_1}$, а набору степеней переменной a в выражении

$$t_i \; t_{i_1} a^{j_{k_1}} c_{m_1} \ldots t_{i_s} a^{j_{k_s}} c_{m_s} \ldots,$$

которое возникает на s-ом шаге, отвечает моном $\lambda_{i_1}^{i_{k_1}} \cdots \lambda_{i_s}^{i_{k_s}}$.

Таким образом, система $S_n^{i_1,\ldots,i_s}$ интерпретируется как система многочленов ме́ньшей существенной высоты, но с коэффициентами из коммутативного кольца, на которые разрешено умножать. Умножение осуществляется с помощью операторов подстановок, действующих через t_i. Кроме того, подстановки действуют и на элементы этого кольца. Поэтому перейдем к исследованию этой более общей ситуации.

Каждой переменной t отвечает набор переменных $\{\tau_\mu\}$ из этого коммутативного кольца, которые возникают при действии вербальных операторов на коэффициенты. Однако на каждом этапе будет производиться редукция к случаю, когда подстановки на коэффициенты не действуют. А поскольку редукция к ме́ньшей существенной высоте связана с тем, что ровно один участок степеней a переходит в коэффициенты, реально мы будем иметь дело только с ситуацией, когда новой вспомогательной переменной t отвечает только одна переменная τ из кольца коэффициентов.

Градуировка учитывает степень коэффициента, а *ширина* есть степень градуировки без учета коэффициента.

Каждый вербальный (повышающий) оператор действует и на коэффициентах. Сопоставим каждому однородному оператору P оператор $\bar{P}$, который является суммой компонент оператора P, которые на коэффициентах не действуют. Естественным образом определяется понятие *$\bar{T}$-пространства* и *$\bar{T}$-конечной базируемости.* Имеет место следующая

Лемма 5.2 (О понижении ширины). *а) Оператор $\bar{P}$ однороден а также однороден по ширине.*

б) Ширина $(P-\bar{P})(f)$ строго меньше ширины $\bar{P}(f)$.

в) Если любое $\bar{T}$-пространство конечно базируемо относительно вербальных операторов $\bar{P}_i$, то любое T-пространство конечно базируемо относительно операторов P_i.

Доказательство. Пп.а) и б) очевидны. П.в) следует из них. В самом деле. Пусть многочлены $f_1,\ldots,f_s$ образуют базис T-пространства H относительно системы $\bar{P}$. Тогда каждый многочлен $g\in H$ представим в виде

$$g=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j}\beta_{ij}\bar{P}_{ij}(f_i)$$

и разность

$$g-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j}\beta_{ij}P_{ij}(f_i)$$

имеет меньшую ширину. □

Из данной леммы общее утверждение получается очевидной индукцией (с использованием рассуждений первого шага).

Из конечной базируемости системы коммутативных многочленов от $n=mk$ переменных и одновременных подстановок $P(x_{ij})\to x_{ij}; i=1,\ldots,m, j=1,dots,k$ в нулевой характеристике вытекает конечная базируемость указанной системы относительно набора подстановок $P_j(x_{ij})\to x_{ij}$. Таким образом, имеет место следующее утверждение:

Предложение 5.8. *Пусть $\mathrm{ch}(\mathbb{F})=0$. Тогда система коммутативных многочленов от $n=mk$ переменных $\mathbb{F}[\{x_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{k}$ относительно набора подстановок $P_j(x_{ij})\to x_{ij}$. конечно базируема.* □

Аналогичное утверждение было впервые доказано В. В. Щиголевым.

θ-техника. Радикал и полупростая часть. Нам надо отработать ситуацию, когда подстановки действуют также на радикальных компонентах. Известно, что конечномерная ассоциативная алгебра разлагается на свои радикальную и полупростую части. Пусть $a_i=\bar{a}_i+\theta_i$ – разложение образующих алгебры A на компоненты, отвечающие разложению A. Рассмотрим копроизведение

$(\bigoplus_{i=1}^{s}\mathbb{K}[\bar a_i])*\mathbb{K}<\theta_1,\dots,\theta_s>$ и его фактор $\hat A'$ по идеалу $\theta^{(n+1)}$, где $\theta=\mathrm{id}(\{\theta_i\})$. Тогда $n+1$ – индекс нильпотентности радикала алгебры A'. Из теоремы Ж. Левина следует, что при $n+1\geq c(A)$ ядро отображения свободной алгебры $\mathbb{K}<\overrightarrow{\hat a}>$ в алгебру A', при котором $\hat a_i\to\bar a_i+\theta_i$, содержится в $\mathrm{T}(A)$.

Мы будем действовать в алгебре A', рассматривая ее элементы как образы элементов из $\mathbb{K}<\overrightarrow{\hat a}>$. Подстановке $P_i(\overrightarrow{a})\to a_i$ отвечает подстановка $P_i(\overrightarrow{\bar a})\to\bar a_i$ и $\partial(P_i(\overrightarrow{a}))\to\theta_i$, где ∂ – оператор выделения радикальной компоненты. Например $\partial(1)=0$. Легко видеть, что $\partial P(\overrightarrow{x})=P(\overrightarrow{x})-P(\overrightarrow{\bar x})$. Через $\partial^k(x)$ обозначается компонента элемента x, однородная порядка k, относительно множества $\{\theta_i\}$. Имеет место тождество Лейбница: $\partial^1(ab)=\partial^1(a)\bar b+\bar a\partial^1(b)$. (Формулы для преобразования полупростых и радикальных компонент различных T-структур рассматривались в предыдущем разделе.)

Следуя концепции экстремального идеала, мы будем работать в пространстве θ^n/θ^{n+1}. Ясно, что достаточно доказать конечную базируемость для T-подпространств V_i в таких пространствах. Тогда при действии подстановок в переменные a_i операторы ∂ и ∂^1 совпадают. Поэтому можно считать, что $\theta'=\partial^1(\theta')$. В самом деле: поскольку V_i лежит в θ^n, то ненулевой вклад дают только члены, имеющие хотя бы n радикальных специализаций переменных. Поэтому при подстановке компонент θ-степени, бо́льшей 1, вместо любой переменной получается элемент из θ^{n+1}. (См. п.б) леммы 3.4 и доказательство свойства 5 из леммы 5.13.)

Начнем с рассмотрения случая **сложности 1**. Тогда $\mathrm{Var}(A')=\mathrm{Var}(\mathbb{T}_n)$, ($\mathbb{T}_n$ – алгебра верхнетреугольных матриц размера n). Нам надо рассмотреть новый эффект, связанный с действием подстановок на радикальных “прокладках”, соединяющих степени. Имеем действие подстановок на линейных комбинациях мономов вида

$$\bar a_1^{k_{11}}\cdots\bar a_s^{k_{1s}}\theta_{i_1}\cdots\bar a_1^{k_{n1}}\cdots\bar a_s^{k_{ns}}\theta_{i_n}\bar a_1^{k_{n+1,1}}\cdots\bar a_s^{k_{n+1,s}}.$$

При подстановке $P\to a_i$ величина θ_i преобразуется в $\partial^1(P)$.

Итак, возникли дополнительные радикальные действия. Способ борьбы с ними — такой же, как и при проведении шага 2. Вводим резервную переменную t и рассматриваем t-линейные члены при подстановке $a\to a+at$.

Те члены, в которые входит $\partial^k(t)$, при $k>1$ обращаются в нуль, ибо тогда подстановка $\partial^k(t)\to t$ ведет к попаданию в пространство θ^m, где $m>n$.

Члены, в которые входит $\partial^1(t)$, группируются отдельно, и доказывается конечная базируемость для пространства, порожденного ими. Назовем позицию при θ *неудобной* или *пассивной*. Конечно, при подстановках других резервных переменных могут возникнуть новые “неудобные” замены, но общее число радикальных позиций не более n, и если t стоит под знаком ∂, то число таких “неудобных” позиций для других переменных уменьшилось. Будем вести индукцию по числу k неудобных позиций для переменных a_i. Основание индукции — случай $k=0$ у нас уже есть.

Пусть $\{S_i^t\}$ – результат применения вербального оператора, линейного по t (при подстановках типа $a_i\to a_it$) , к системе $\{S_i\}$. Эта система равносильна системе $\{S_i\}$. Каждый элемент $s\in\{S_i^t\}$ представляется в виде: $s^t=\tau s+s_t+s_{\partial t}$. Здесь τ есть коммутативная переменная, соответствующая t и расширяющая R, s_t есть члены, отвечающие действию вербального оператора в “полупростые” позиции, $s_{\partial t}$ есть сумма членов, где t стоит под “дифференциалом”.

Относительно действия подстановок, члены $s_{\partial t}$ имеют на одну “неудобную” позицию меньше. Поэтому множество полиномов $\{s_{i,\partial t}\}$ конечно базируемо. Пусть $\{s_{0\partial t},\dots,s_{q\partial t}\}$ – базис этой системы. Рассмотрим систему полиномов $\{S_i'^t\}=\{S_i^t-\sum Q_{ij}(s_{\alpha\partial t})\}$, не содержащую членов с ∂t. Нас интересует конечная базируемость этой новой системы.

Иными словами, на первом шагу вводится вспомогательная переменная t, а затем можно избавиться от членов, содержащих $\partial(t)$.

Пусть $\{S_i\}$ – система полиномов с коэффициентами в градуированном нетеровом модуле M над градуированном коммутативном нетеровым кольцом R. При этом подстановки действуют на M, и вербальные операторы при действии на M являются эндоморфизмами M, повышающими градуировку. Иными словами, каждой образующей a_i соответствует набор переменных $r_{ij} \in R$ (см. предыдущий раздел). *Шириной* $\mathrm{Wide}(\mathcal{M})$ монома $\mathcal{M}$ называется степень его однородности (без коэффициента). Основная идея доказательства состоит в понижении ширины старшего члена.

Удобно доказывать не просто конечную базируемость, а *регулярную конечную базируемость* относительно однородных операторов. А именно, у каждого многочлена есть член с максимальной шириной, а у вербального оператора есть компонента, *максимально повышающая ширину*. Эта компонента имеет минимальную степень однородности относительно коэффициентов (вербальный оператор однороден и сумма повышения ширины и коэффициента из R постоянна). Таким образом, достаточно показать, что старшие члены (по ширине) многочленов системы $\{S_i'^t\}$ регулярно конечно базируемы относительно *старших компонент повышающих операторов* (см. лемму 5.1).

Конечную базируемость можно вывести из абстрактных соображений, с использованием леммы 5.1, однако мы проведем рассуждения на "микроуровне". В силу индукции по числу "закрытых мест" систему полиномов $\{s_t'\}$ можно считать регулярно конечно базируемой. Поэтому имеется такая конечная подсистема $\{s_1', \dots, s_m'\}$, что многочлены $S_{it}' - \sum P_{i\alpha}(s_\alpha)$ имеют меньшую ширину, причем члены старшей ширины у многочленов системы $\{S_i'^t\}$ компенсируются членами старшей ширины многочленов $P_{i\alpha}(s_\alpha)$. Рассмотрим многочлены $S_i'^t - \sum P_{i\alpha}(s_\alpha)$. Операторы $P_{i\alpha}(s_\alpha)$ делятся на две категории:

- Операторы, в которых участвует повышающая подстановка вида $t \to \chi_1 t \chi_2$. Действие таких операторов на компонентах из τs не ведет к максимально возможному повышению ширины.

  Поэтому добавление к многочленам $s_{t\alpha}$ компонент, в которых t входит как τ, и применение таких операторов не меняет члены максимальной ширины.

- Операторы, в которых повышающая подстановка вида $t \to \chi_1 t \chi_2$ не участвует.

  Тогда после специализации $t \to 1$ члены с τ и t оказываются пропорциональными и путем введения поправочного множителя для таких $P_{i\alpha}(s_\alpha)$ члены максимальной ширины можно скомпенсировать.

  Пусть k_1 – ширина многочлена S_i' относительно переменной a, через которую действует подстановка, "вставляющая" t; k_2 – степень старшего члена относительно коммутативных переменных, соответствующих a. В силу однородности старших членов относительно ширины, определены соответствующие величины для многочленов s_α, которые обозначаются $k_{1\alpha}^{(j)}$ и $k_{2\alpha}^{(j)}$ соответственно (индекс j обозначает номер переменной типа a, через которую действует подстановка).

  Заменим соответствующий член $P_{i\alpha}(s_\alpha)$ на

$$P_{i\alpha}'(s_\alpha) = \frac{k_1 + k_2}{k_1} \cdot \frac{k_{1\alpha}^{(j)}}{k_{1\alpha}^{(j)} + k_{2\alpha}^{(j)}} P_{i\alpha}(s_\alpha).$$

Тогда новые разности $S_i'^t - \sum P'_{i\alpha}(s_\alpha)$ имеют ме́ньшую ширину.

Мы привели рассуждение на "микроуровне". Однако проще рассуждать в терминах старших компонент (по ширине) многочленов и повышающих компонент вербальных операторов. Сформулируем редукционную лемму, аналогичную лемме 5.2:

Лемма 5.3. *а) Пусть $\bar{P}$ есть старшая компонента оператора P относительно повышения ширины. Тогда оператор $\bar{P}$ однороден, а также однороден по ширине. Кроме того,* $\mathrm{Wide}(P-\bar{P})(f)$ *строго меньше ширины* $\mathrm{Wide}(\bar{P}(f))$ *или* $\mathrm{Wide}(\bar{P}(\bar{f}))$.

б) Если любое $\bar{T}$-пространство, порождаемое многочленами, однородными по ширине, конечно базируемо относительно вербальных операторов $\bar{P}_i$, то любое T-пространство конечно базируемо относительно операторов P_i. □

Данная лемма позволяет избавиться от участия коэффициентов при действии операторов подстановок. Рассуждения с членами, содержащими ∂t, проводятся аналогично.

Случай произвольной сложности. Теперь рассмотрим случай, когда "первичная часть" устроена более сложно и представляет собой прямую сумму алгебр общих матриц. *Сложностным типом* такой суммы называется вектор, i-я координата которого есть количество компонент, изоморфных $\mathbb{M}_i$. Эти векторы сравниваются сперва по ненулевым координатам с максимальным номером, затем — вторым по величине и т.д. Тем самым на множестве сложностных типов введено отношение порядка, по которому ведется индукция.

Каждой переменной x_i отвечает ее образ x_{ij} в j-ой компоненте полупростой части, а также радикальная часть θ_i.

Рассмотрим алгебру $\hat{A} = (\bigoplus\limits_i \mathbb{M}_{n_i}) * \mathbb{K} < \theta > /\theta^{(n+1)}$, где $\mathbb{M}_k$ – алгебра общих матриц размера k.

Имеется естественный морфизм ϕ свободной алгебры $\mathbb{K} < \overrightarrow{\hat{x}} >$ на $\hat{A}$, при котором $\phi(\hat{x}_i) = \sum_j x_{ij} + \theta_i$. В алгебре $\hat{A}$ естественным образом определена T-структура (см. раздел 5.1.1).

В силу индукционных соображений (индукция по n) достаточно рассмотреть T-пространства, лежащие в n-ой степени радикала. Кроме того, можно осуществлять индукцию по сложностному типу. Итак, для доказательства конечной базируемости достаточно установить следующее:

Утверждение. *Для любого T-пространства $S \subset \mathrm{id}(\theta)^n$ существует конечный набор элементов $\{s_i\} \subset S$ из S, порождающих T-пространство, содержащее $S \cap \bigcap\limits_j Z(\mathbb{M}_{n_j})^n$, где $Z(\mathbb{M}_{n_j})$ есть T-идеал, порожденный Размысловскими полиномами в j-ой компоненте (n_j – размер соответствующей клетки).*

При его доказательстве рассуждения, связанные с шириной и с индукцией по числу "неудобных" θ-позиций, будут вестись аналогично. Однако устройство компонент будет более сложным. Случай одной компоненты (отсутствия переменных типа θ) изучен в разделе 5.0.1.

Несколько технических замечаний. В силу леммы 5.1, конечную базируемость достаточно доказать для повышающих вербальных операторов. Далее, к системе S можно применить композицию оператора взятия t-линейной части при подстановках $x_i \to x_i+t$. Легко убедиться, что конечная базируемость системы S следует из конечной базируемости системы S', поскольку любой повышающий оператор подстановки получается путем перехода к системе S' и последующего применения операторов подстановки и умножения на элементы из R (или C, в зависимости от ситуации). Для системы многочленов с коэффициентами из R-модуля M и подкольца $C \subset R$ естественным образом определяется *проективная конечная базируемость над* C.

Если m – элемент модуля коэффициентов, h – моном, то *шириной* $\mathrm{Wide}(mh)$ является степень h. Очевидна следующая

Лемма 5.4. *Пусть g – однородный элемент, P – композиция вербальных операторов, $\bar{P}$ – компонента P, не меняющая степень однородности коэффициентов, $\bar{g}$ – компонента g максимальной ширины. Тогда если $\bar{P}(\bar{g}) \neq 0$, то $\bar{P}(\bar{g})$ является членом старшей ширины для $P(g)$.* □

Сформулируем основное редукционное

Предложение 5.9. *Если для любого нетерового модуля M любое пространство, замкнутое относительно вербальных повышающих операторов и умножения элементов из R, не действующих на коэффициенты, конечно базируемо, и R проективно нетерово над подкольцом $C \subset R$, то любое T-пространство, замкнутое относительно умножения на элементы из C, проективно конечно базируемо над C.*

Доказательство. Предыдущая лемма позволяет считать, что подстановки не действуют на коэффициенты (из M), ибо конечная базируемость для R-замкнутых T-пространств сводится к конечной базируемости R-замкнутых пространств относительно операторов типа $\bar{P}$. Дальнейшие рассуждения копируют доказательство леммы Артина–Рисса. Пусть S есть C-замкнутое T-пространство, S' – R-замкнутое T-пространство, порожденное S, $\{s_1, \ldots, s_k\} \subset S$ – базис S', S^1 есть T-пространство, порожденное $\{s_1, \ldots, s_k\}$. Положим $S_k = \{H | C^k H \in S'\}$. Ясно, что $S \subset S_1$. Возрастающая последовательность R-замкнутых T-пространств S_k стабилизируется, и при некотором k имеет место равенство $S_k = S_m$ при всех $m \geq k$. Тогда если $C^{k+1}x \in S'$, то $C^k x \in S'$ и $c^{k+1}x \in S$, $c^{k+q+1}x \in C^q S$. Поэтому S^1 накрывает $C^{k+1}S'$. □

Теперь все готово для доказательства конечной базируемости T-пространств в пространствах обобщенных многочленов. Прежде всего, в силу леммы 5.1 можно ограничиться рассмотрением повышающих операторов и тогда в силу леммы 5.2 можно считать, что коэффициенты в подстановках не участвуют. Применим к системе S вербальный оператор, линейный относительно t. Конечную базируемость достаточно установить для каждой градуированной компоненты многочленов системы S^t, которые представляются виде линейной комбинации членов следующих типов:

1) Содержащие ∂t.

   Если рассматривать действие вербальных операторов относительно других переменных, то данные многочлены имеют на одно “неудобное” место меньше. Дело завершает индукция по числу “неудобных” мест.

2) Содержащие t на фиксированном месте между переменными типа θ. [1]

[1] В силу лемм 5.1 и 5.2 мы находимся в ситуации, когда подстановки действуют только на специализации, относящиеся к ширине и, кроме того, количество сортов таких членов равно *существенной высоте* – количеству промежутков между переменными типа θ.

Тогда подстановки типа $t \to tC$ определяют структуру $R \otimes Z_i$-модуля, где Z_i – пространство центральных полиномов, соответствующих "i-й клетке" (в месте, где стоит t). Определим *ширину* как сумму степеней сомножителей, не относящихся к этой клетке, и применим предложение 5.9. Таким образом, дело завершает индукция по сложностному типу.

Замечания. 1. Данная техника не проходит для положительной характеристики, ибо "унитарный трюк" не работает и, кроме того, возникает система R^{p^k}-модулей для бесконечного множества показателей k.

2. Для переноса на неассоциативный случай нужно, во-первых, иметь запас тождеств конечномерной алгебры и во-вторых — чтобы выполнялось свойство *структурируемости*, т.е. отщепления радикала от полупростой части для соответствующего многообразия. Без этого техника θ-многочленов не работает.

3. Метод А. В. Гришина самый элементарный, но вместе с тем он же самый грубый в том смысле, что характеристика экстремальности слишком груба — только количество радикальных компонент. Взаимодействие членов, у которых t входит в разные позиции, не рассматривается. А оно может приводить к появлению нуля. Поэтому доказательство рациональности рядов Гильберта этим методом не получается.

5.1.5. T-пространства и лемма Артина–Рисса

Рассуждения, связанные с применением леммы Артина–Рисса, можно проводить не только для первичных компонент (см. раздел 5.0.1), но и при изучении межклеточного взаимодействия. С точки зрения общей идеологии некоммутативной алгебраической геометрии роль умножений понижена, а нетеровость в основном обеспечивается специально выбранной подполугруппой полугруппы эндоморфизмов. Но тогда первичные компоненты и образование, их объединяющее, надо рассматривать с единых позиций.

Поэтому вместо техники понижения ширины мы будем работать с расталкивающими заменами, которые в дальнейшем также будут играть основную роль в доказательстве локальной представимости. Применительно к T-пространствам это дает доказательство рациональности рядов Гильберта. По умолчанию в данном разделе характеристика основного поля считается равной нулю (работа в полупростой части хорошо осуществляется только в нулевой характеристике).

Рассмотрим пример 2 из раздела 5.1.2. Покажем конечную базируемость T-пространства Q.

1 Шаг. Введение резервных переменных t_1, t_2. Рассмотрим линейную по t_1 и t_2 компоненту при подстановке $a \to a + t_1 \cdot a + t_2 \cdot a$.

2 Шаг. Расталкивание t_1 и t_2. Осуществим замену:

$$\mathrm{AD}_{t_1,t_2}(a)(f) = f|_{t_1 \to t_1 a} - f|_{t_2 \to t_2 a}.$$

При этом члены, имеющие вид $c_0 a^k t_1 t_2 c_1 a^l c_2$ или $c_0 a^k c_1 a^l t_1 t_2 c_2$, уничтожатся. Из члена вида $c_0 a^k c_1 a^l c_2$ возникает сумма $kl(x+y)(c_0 a^k t_1 c_1 a^l t_2 c_2 + c_0 a^k t_2 c_1 a^l t_1 c_2)$, где x есть оператор увеличения k на 1, а y – l. Итак, появится дополнительный коэффициент kl.

3 Шаг. Вырезание компонент. Рассмотрим линейную по t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22} компоненту при подстановке $a \to a + t_{11} \cdot a + t_{12} \cdot a t_{21} \cdot a + t_{22} \cdot a$. Применим к ней композицию операторов $\mathrm{AD}_{t_{11},t_{12}}(a)\cdot\mathrm{AD}_{t_{21},t_{22}}(a)$. Тогда t_{i1} и t_{i2} оказываются в разных участках, и перед выражениями вида

$$\xi(x+y)c_0a^kt_{1i}t_{2j}c_1a^lt_{1,1-i}t_{2,1-j}c_2,$$

которые возникают из члена $c_0a^kc_1a^lc_2$, появился дополнительный коэффициент

$$\xi=(k-1)(l-1)kl.$$

Если последовательно проводить операции, описанные в шаге 2 (всякий раз с новыми t_i), то возникает коэффициент вида $(kl)^n$, а если аналогичным образом последовательно проводить операции шага 3 — то коэффициент вида $((k-1)(l-1)kl)^n$.

Пусть x есть оператор вставки переменной a между c_0 и c_1; y есть оператор вставки переменной a между c_1 и c_2. Оператору $(\mathrm{AD}_{t_{i1},t_{i2}}(a))^2$ отвечает умножение на $(x-y)^2$ (возведение в квадрат удобно, поскольку есть два способа расположений t_{ij} в разных участках — когда t_{i1} слева и когда t_{i1} справа).

Заметим, что если $(k-1)(l-1)kl=(k'-1)(l'-1)k'l'$ и $kl=k'l'$, то либо $k=k',l=l'$, либо $k=l',l=k'$.

Рассмотрим компоненты многочлена f, отвечающие неупорядоченным парам (k,l). Для любого конечного набора таких пар, соответствующего f, существует многочлен от $\alpha=(k-1)(l-1)kl$ и $\beta=kl$, который обращается в ноль на всех парах (α,β), отвечающим всем компонентам f, кроме одной, заранее фиксированной. Причем зафиксировать таким образом можно любую компоненту.

Отсюда легко установить непосредственным вычислением, что указанные операторы (и взятие линейных комбинаций) позволяют получить из многочлена f любой многочлен вида $(x-y)^mHg$, где g есть сумма компонент f, отвечающих неупорядоченной паре степеней (k,l), $m\geq m_0$, $m_0\in\mathbb{N}$ – некоторое число, зависящее от f, $H\in S$ есть элемент кольца S симметрических функций относительно операторов вставки x и y.

4 Шаг. Установление взаимосвязи со старой системой. Пусть R – кольцо, порожденное операторами вставки x и y, T есть пространство всех многочленов, R — нетеров S-модуль. Рассмотрим нетеров S-модуль M, порожденный компонентами многочленов из Q, и S-модуль $N\subseteq Mxy$, порожденный многочленами из Q. Пусть $g_1,\dots,g_k$ – образующие M. Тогда Q для некоторого $m\in\mathbb{N}$ содержит S-модуль N', порожденный элементами $g_1(x-y)^m,\dots,g_k(x-y)^m$. В силу леммы Артина–Рисса, $N'\supseteq N\cap(x-y)^rxyT$ для некоторого $r\in\mathbb{N}$.

5 Шаг. Завершающий спуск. Таким образом, можно взять фактор по идеалу I, порожденному $xy(x-y)^r$, и перейти к ситуации, где конечная базируемость очевидна. (T/I вкладывается в сумму $T/\operatorname{id}(x)\oplus T/\operatorname{id}(y)\oplus T/\operatorname{id}((x-y)^r)$)

Замечание. Процедура вырезания необходима. Когда ее нельзя осуществить (в положительной характеристике), возникают бесконечно базируемые T-пространства. Кроме того, в положительной характеристике усложняется ситуация с замкнутостью — может возникнуть бесконечная система пространств Q_k, каждое из которых R^{p^k}-замкнуто (см. раздел 5.1.3).

В случае нулевой характеристики можно попытаться обойти эту процедуру, рассмотрев максимальное замкнутое T-подпространство S' T-пространства S и заметить, что если старший член многочлена $g \in S$ содержит каждую переменную в достаточной степени, то он является также старшим членом некоторого многочлена $g' \in S'$. Поэтому старший член разности $g - g'$ меньше. Но тогда на втором шаге (в случае произвольной существенной высоты) возникает необходимость осуществить расталкивающую процедуру с меньшим числом альтернируемых переменных. А тогда некоторые резервные переменные могут попасть не на те места, и возникнет элемент h со старшим членом, совпадающим со старшим членом некоторого $h' \in S'$, причем $h - h' \neq 0$. Возникает плохо контролируемая зависимость.

Процедура вырезания позволяет контролировать подстановки и возникающую модульную структуру.

Обсудим чуть более подробно ситуацию, возникающую на 5 шаге. Положим $\tau = x - y$ и возьмем Q_d – пересечение T-пространства Q с идеалом τ^d, порожденным τ в максимальной возможной степени d. Пусть ∂u есть компонента элемента u, содержащая τ в первой степени. Легко видеть, что имеет место тождество Лейбница:

$$\partial(uv) = \partial(u)v + u\partial(v),$$

которое влечет равенство

$$\partial(t_1)t_2|_{t_1 x \to t_1} - \partial(t_1)t_2|_{t_2 x \to t_2} = t_1 t_2 \partial(x). \tag{2}$$

Таким образом, альтернирование "выбивает" выражения из-под знака дифференциала.

Отсюда следует, что если к пространству Q_d применить операцию выделения части, линейной по t и по t_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, \ldots, d)$ после подстановки $a \to a + \sum a t_{ij}$, а затем — расталкивающие замены $f|_{t_{1i} \to t_{1i} a} - f|_{t_{2i} \to t_{2i} a}$ и, наконец, операцию вырезания, то получится система $Q^{d\prime} = x^d Q_d$. (При расталкивающих заменах остаются члены с ∂a, и затем переменные t_{ij} можно специализировать в единицу. Возникающий коэффициент равен степени однородности (по a) компоненты многочлена.) Эта система будет снабжена структурой нетерового $\mathbb{F}[x]$-модуля, где x есть оператор вставки переменной a. В силу леммы Артина–Рисса при некотором натуральном k имеет место включение $Q^{q\prime} \supseteq Q^d \cap \mathrm{id}(x)^k$.

Итак, расталкивающая процедура позволяет "поймать" радикал, подобно тому, как это осуществляется в разделе 3.3 с альтернируемыми "большими" наборами из $b(A) + 1$ элемента.

Замечание. Пусть $\tau^2 = 0$, $\tau a = a\tau$, $a' = a + \tau$ есть деформация элемента a. Тогда если добавить операцию взятия τ-компоненты, то такие компоненты в силу формулы (2) выделяются расталкивающими заменами. С другой стороны, $\mathbb{F}[a'] \simeq \mathbb{F}[a]$ и τ-компонента не выделяется. Расталкивающие замены приводят к нулевому результату. Этот эффект связан со взаимодействием компонент разных τ-степеней и не наблюдается в однородных по τ пространствах, каким является пространство Q_d. Итак, сама возможность выделения компонент означает, что ее можно реализовать либо с помощью расталкивающих замен, либо многочленов Кемера.

В случае произвольной существенной высоты $s > 2$ проходят почти те же конструкции. Начнем со случая, когда τ-компоненты отсутствуют. Рассматривается полилинейная относительно $t_1, \ldots, t_s$ компонента при подстановке $a \to a + \sum t_i \cdot a$. К ней применяется оператор

$$\prod_{1 \le i < j \le s} \mathrm{AD}_{t_i, t_j}(a).$$

Для процедуры вырезания рассматривается следующий набор T-пространственных операций. Рассматривается полилинейная по всем t_{ij} ($i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots k \leq s$) компонента при подстановке

$$a \to a + \sum_{i=1,j=1}^{s\,k} t_i \cdot a.$$

К ней применяется оператор

$$\prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{1 \leq p_\alpha < q_\alpha \leq s} \mathrm{AD}_{t_{p_\alpha,\alpha}, t_{q_\alpha,\alpha}}(a).$$

В результате перед выражением, возникающим из $c_0 a^{k_1} c_1 \ldots, c_{s-1} a^{k_s} c_s$, появляется дополнительный числовой множитель $\xi_{k,\{k_i\}}$:

$$\xi_{k,\{k_i\}} = \prod_{i=1}^{s} \binom{k_i}{k}.$$

Заметим, что если наборы чисел $\{k_i\}$ и $\{s_i\}$ таковы, что величины $\xi_{k,\{k_i\}}$ и $\xi_{k,\{s_i\}}$ для всех $k \leq s$ совпадают, то они отличаются перестановкой чисел внутри набора.

Каждому неупорядоченному набору степеней $\{k_i\}$ отвечает компонента многочлена. Рассмотрим такие компоненты f с ненулевыми коэффициентами и зафиксируем любую компоненту γ. Существует многочлен от величин $\xi_{k,\{k_i\}}$, который обращается в ноль для величин $\xi_{k,\{k_i\}}$, отвечающих всем компонентам, кроме γ, и не обращающийся в ноль для компоненты γ.

Следовательно, создавая многочлены от величин $\xi_{k,\{k_i\}}$, можно вырезать компоненты и получить, что система Q для каждого $f \in Q$ и каждой компоненты g многочлена f, у которой все $k_i > s-1$, содержит S-модуль, порожденный $\prod_{i<j}(x_i - x_j)^m g$. Здесь x_i есть оператор вставки a между c_{i-1} и c_i, а S – кольцо симметрических функций от этих операторов.

Обычными рассуждениями, с применением леммы Артина–Рисса, устанавливается, что для некоторого r имеет место включение

$$Q \supseteq N \cap \prod_{i<j}(x_i - x_j)^r \prod_{i=1}^{s} x_i^s T,$$

где N есть S-модуль, порожденный Q, T есть пространство всех многочленов.

Фактор по идеалу, порожденному произведением

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j)^r \prod_{i=1}^{s} x_i^s,$$

вкладывается в прямое произведение факторов по идеалам, порожденным x_i^s, $(x_i - x_j)^r$, отвечающим неприводимым компонентам соответствующего алгебраического многообразия. Таким образом, происходит спуск к ме́ньшей существенной высоте. Величины $\tau_{ij} = x_i - x_j$ измеряют взаимодействие между “клетками” и соответствуют “межклеточному” радикалу.

На следующих шагах спуска надо учесть эффекты, связанные с действием замен на нильпотентные операторы τ_{ij}. А именно. Сделав соответствующие замены, мы переходим к произведениям вида

$$c_0 a^{k_1} \tau_{1i_1}^{\alpha_1} \ldots \tau_{1i_q}^{\alpha_q} c_1 \ldots c_s.$$

Здесь s – число "независимых" участков ("типов похожести"), которые еще не склеены с точностью до нильпотента.

В подстановках возникают τ-компоненты, которые по-прежнему преобразуются по формулам Лейбница:

$$\tau_{ij}(uv) = \tau_{ij}(u)v + u\tau_{ij}(v).$$

Следовательно, τ_{ij} можно интерпретировать как своего рода дифференцирования с коэффициентами в кольце $\mathbb{F}[x_i]$.

Таким образом, работа идет в кольце $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_s; \tau_1, \ldots, \tau_r]/I$ и для любого i существует j, для которого $\tau_i^j \in I$. При этом подстановке $P(a) \to a$ отвечает система подстановок

$$P(x_i) \to x_i;\ i = 1, \ldots, s \text{ и } P(x_{i(r)} + \tau_r) - P(x_{i(r)}) \to \tau_r.$$

В пространстве Q_d подстановкам

$$P(x_{i(r)} + \tau_r) - P(x_{i(r)}) \to \tau_r$$

отвечают $x_{i(r)}$-значные дифференцирования многочлена P.

Расталкивающим подстановкам или операторам вида

$$\prod_{\alpha=1}^{c(T)-1} \prod_{1 \le p_\alpha < q_\alpha \le s+1} \mathrm{AD}_{t_{p_\alpha,\alpha}, t_{q_\alpha,\alpha}}(a) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{1 \le p_\alpha < q_\alpha \le s} \mathrm{AD}_{t^1_{p_\alpha,\alpha}, t^1_{q_\alpha,\alpha}}(a)$$

при последующей специализации переменных t_{ij}, t_i в единицу отвечает полиномиальный множитель

$$\prod_{j \ne i(r)} \tau_r^{k_r}(x_{r(i)} - x_j) \cdot \prod_{i<j} (x_i - x_j)^k,$$

а также числовой множитель

$$\xi_{k,\{k_i\},q} = \prod_{i=1}^{s} \binom{k_i}{k} \binom{k_i}{q(i)},$$

где $q(i)$ есть количество τ_j таких, что $r(j) = i$, с учетом кратности вхождения каждого τ_j в компоненту Q_d.

Пусть T есть изучаемое пространство, $c(T)$ – индекс нильпотентности радикала (количество переменных вида τ). Рассмотрим ненулевое подпространство T-пространства Q, лежащее в максимально возможной степени радикала.

Операторы вырезания для такого пространства строятся так же, только в процессе расталкивания используется конструкция типа многочлена Кемера (см. разделы 3.3, 3.3.1). Для этого берется d групп из резервных переменных t_{ij} и $s+1$ резервная переменная в каждой $(i = 1, \ldots, c(T)-1; j = 1, \ldots, s+1)$. Далее рассматривается полилинейная по всем t_{ij}, t^1_{pq} часть, возникающая после подстановки

$$a \to \sum_{i=1}^{c(T)-1} \sum_{j=1}^{s+1} t_{ij} a + \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} t^1_{ij} a.$$

К ней применяется оператор

$$\prod_{\alpha=1}^{c(T)-1} \prod_{1 \le p_\alpha < q_\alpha \le s+1} \mathrm{AD}_{t_{p_\alpha,\alpha}, t_{q_\alpha,\alpha}}(a) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{1 \le p_\alpha < q_\alpha \le s} \mathrm{AD}_{t^1_{p_\alpha,\alpha}, t^1_{q_\alpha,\alpha}}(a).$$

В результате возникает член, содержащий $\prod \tau_i(a)$. При нем возникает числовой множитель $\xi_{k,\{k_i\},q}$ и степень определителя Ван–Дер–Монда

$$\prod_{i<j} (x_i - x_j)^m.$$

С помощью числового множителя (и специализаций t_{ij} в единицу) можно выделять компоненты и осуществить индукционный спуск как в предыдущем случае.

Полученные результаты можно сформулировать так:

Предложение 5.10. *Пусть* $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$. *Тогда ряд Гильберта замкнутой системы коммутативных многочленов от* $n = mk$ *переменных* $\mathbb{F}[\{x_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{k}$ *относительно набора подстановок* $P_j(x_{ij}) \to x_{ij}$ *рационален.* $\square$

Подобным образом осуществляется работа и с общей θ-техникой. Рассуждения, связанные с вырезаниями и леммой Артина–Рисса, остаются без изменений. Приведем соответствующие конструкции.

θ обозначает радикальную специализацию. Обычно i есть индекс клетки, характеризующий специализацию в соответствующую алгебру общих матриц. Обычно мы имеем дело с произведениями вида $\prod \theta_i u_i w_i v_i$, где θ_i – радикальные переменные, u_i, v_i – произвольные элементы (в силу расположения они соответствуют i-й клетке размера n_i); $a(S) = \sum n_i$.

Пусть R есть кольцо, порожденное коэффициентами общих матриц, отвечающих "прокладкам" между θ_i. $\Phi_{n,k}$ – k-й коэффициент многочлена Гамильтона–Кэли, отвечающий матрицам порядка n. Определим замкнутые подсхемы $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_{ij}$ спектра кольца R следующим образом. Подсхемы $\mathcal{H}_i$ задаются многочленами вида

$$\Phi_{n_i,n_i}(\overrightarrow{a}_i).$$

Подсхемы $\mathcal{H}_{ij}$ задаются многочленами вида

$$\Phi_k(\overrightarrow{a}_i) - \Phi_k(\overrightarrow{a}_j).$$

При этом обязательно нужно, чтобы $n_i = n_j$. (Индексы i, j означают специализацию в соответствующую алгебру общих матриц.)

Замкнутая подсхема $\mathcal{H}$ в $\mathrm{Spec}(R)$ отвечает склейке клеток и уменьшению их размера, т.е. редукции. Она определяется так:

$$\mathcal{H} = \bigcup_i \mathcal{H}_i \cup \bigcup_{ij} \mathcal{H}_{ij}.$$

J есть идеал многочленов, обращающихся в ноль на $\mathcal{H}$. Схема $\mathcal{H}$, в отличие от схем $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_{ij}$ инвариантна относительно перестановок специализаций клеток, сохраняющих их размеры.

Далее, w_i есть слово от переменных t_{ij} и c_{ij} следующего вида:

$$w_i = c_{i0} t_{i1} c_{i1} t_{i2} \dots t_{i,n_i} c_{i,n_i+1}.$$

Их конструкция похожа на конструкцию слов W_i в разделе 3.3.1. Для "выбивания" радикала мы будем работать с несколькими наборами резервных переменных $t_{k,ij} = t_{kij}$ и, соответственно, с произведениями

$$W_i = \prod_{k=0}^{d} w_{ki}.$$

При этом w_{ki} есть слово от резервных переменных t_{ijk} и c_{ijk} следующего вида

$$w_{ki} = c_{ki0}t_{ki1}c_{ki1}t_{ki2}\dots t_{kin_i}c_{ki,n_i+1}.$$

Кроме того, будут рассматриваться слова

$$U_i = \prod_{k=1}^{d} u^0_{ki}u_{ki}u^1_{ki}.$$

Показатель d, как обычно, выбирается так, что $\mathrm{id}(\theta)^{d+1} = 0$, $\mathrm{id}(\theta)^d \neq 0$, т.е. $d = c(S) - 1$. Рассматривается T-пространство $S \subset \mathrm{id}(\theta)^d$.

Разобьем переменные t_{ijk} на $d+1$ группу. К нулевой группе Λ_0 из $a(S)$ переменных отнесем переменные t_{ij0}, входящие в слова w_{0i}. К k-ой группе (где $k = 1, \dots, d$) из $a(S) + 1$ переменных отнесем переменные t_{ijk}, входящие в слова w_{ki}, и одну произвольно выбранную переменную, отвечающую θ_i, либо переменную u_{ki} для некоторого i. (Выбор неоднозначен, пространства порождаются всеми способами выбора).

Далее перенумеруем переменные в каждом наборе Λ_k, $k = 0, \dots, d(S)$. Обозначим их за τ_{ks}.

С каждым набором Λ_k $(k = 0, \dots, d)$ свяжем расталкивающий оператор

$$P_{\Lambda_k}(a) = \prod_{s_1<s_2} (|_{\tau_{s_1}a\to\tau_{s_1}} - |_{\tau_{s_2}a\to\tau_{s_2}}),$$

а с семейством наборов — произведение

$$P(\overrightarrow{a}) = \prod_k P_{\Lambda_k}(a_k).$$

$\Delta(a)$ обозначает произведение

$$\Delta(a) = \prod_{1\le i<j\le a(S)} (a_i - a_j)$$

разностей собственных чисел оператора a, отвечающих всем его специализациям (для всех участков между θ_k). I есть идеал в кольце коэффициентов, порожденный элементами вида $\Delta(a)^2$ (это определение корректно, ибо $\Delta(a)^2$ есть инвариант — дискриминант характеристического многочлена).

Берется d групп из слов w_i, внутри которых создается d группа из расталкиваемых переменных t_i. С помощью пучковых рассуждений (см. раздел А.3) показывается, что идеал I порождается степенями форм и степенями разностей форм. Таким образом, факторизация по I приводит к сложностному спуску. Сформулируем техническое предложение (родственное утверждениям о расталкивающих подстановкам из раздела 5.4.1).

Предложение 5.11. *Пусть T-пространство S порождено произведениями вида $h_0\theta_0h_1\theta_1\dots h_s$. Элемент h_i принадлежит алгебре общих матриц размера n_i. Естественным образом определяются величины $a(S)$, $b(S)$ и $d(S)$ (см. раздел 3.3). Q есть T-подпространство S_d.*

а) Пусть пространство H порождено линейными комбинациями M элементов следующего вида:

$$u_0w_0v_0\theta_1u_1w_1v_1\theta_2\dots\theta_su_sw_sv_s,$$

где θ_i – радикальные переменные, u_i, v_i – произвольные элементы, (в силу расположения они соответствуют i-й клетке размера n_i);

M' есть результат применения к M расталкивающих подстановок $P(\{t_{ij}\})$ относительно системы $\{t_{ij}\}$; $T(H')$ (соответственно $T(H)$) есть T-пространство, порожденное H' (соответственно H). Тогда $T(H') \supset T(H) \cap I^r T(H)$ при некотором r.

б) Пусть пространство G порождено линейными комбинациями N элементов следующего вида:

$$u_0 U_0 W_0 v_0 a_1 \theta_1 b_1 u_1 W_1 v_1 U_1 a_2 \theta_2 b_2 \dots a_s \theta_s b_s u_s W_s v_s U_s,$$

где θ_i – радикальные компоненты некоторых переменных τ_i, а u_i, v_i – произвольные элементы (выбор неоднозначен, пространства порождаются всеми способами выбора).

Пусть N' есть результат применения к N произведения расталкивающих подстановок относительно всех систем Λ_i, а $T(H')$ (соответственно $T(H)$) есть T-пространство, порожденное H' (соответственно, H).

Тогда $T(H') \supset T(H) \cap I^r T(H)$ при некотором r.

в) Для любого T-пространства H существует T-пространство $H' \subseteq H$, которое порождается произведениями вида

$$P \cdot \prod_{\substack{1 \le i \le a(S)+1 \\ 1 \le j \le d(S)}} h_{ij} u_{ij} t_{ij} v_{ij}.$$

При этом $T(H') \supset T(H) \cap I^r T(H)$, где идеал I был определен в предыдущем пункте.

г) Аналогичное утверждение имеет место для случая расталкивания относительно k групп из $a(S)$ переменных и $d(S)$ групп по $a(S)+1$ переменной. (Это объединяет утверждения предыдущих пунктов.)

Доказательство. Достаточно проверить, что во всех точках максимального спектра кольца R, лежащих вне $\mathcal{H}$, образ пространства $S \cap (\theta)^n$ совпадает с исходным пространством.

Вне подсхемы $\mathcal{H}$ все элементы раскладываются на свои Пирсовские компоненты и ситуация ничем не отличается от случая клеток единичного размера.

Для доказательства п.а) достаточно, во-первых, заметить, что если специализировать элементы $t_{ij} = E^i_{jj}$, $c_{ij} = E^i_{j,j+1}$, $a = \sum \lambda_{ij} E^i_{jj}$ (верхний индекс указывает на принадлежность соответствующей клетке), то результат действия расталкивающего оператора состоит в умножении на определитель Ван–Дер–Монда $\Delta(a)$, который может быть выбран обратимым. Кроме того, любая специализация слов w_i есть линейная комбинация специализаций только что рассмотренного типа.

Во-вторых, если осуществить подстановки многочленов $C_{n_i^2}$ в переменные c_{0i}, то получается замкнутый идеал, которому отвечает пучок когерентных модулей. Тем самым п.а) доказан.

Доказательство п.б) аналогично. Допустим, мы указали набор переменных $\mathcal{T}$, входящих в многочлен $f \in S$, все радикальные специализации которых приводят к нулевому результату и, кроме того, для каждой клетки одна из переменных из $\mathcal{T}$ должна иметь соответствующую специализацию.

В этом случае можно рассмотреть систему подстановок $W_i \to t_i \in \mathcal{T}$. И действовать как в предыдущем случае. Более того, в данной ситуации радикальные специализации можно “выбить” явно. Разлагая элементы в сумму Пирсовских компонент и выбирая полупростые специализации как в предыдущем пункте, получим, что добавленные элементы перейдут в элементы вида $u_{ki}^0\partial(a)u_{ki}^1$ (либо в элементы вида $x\theta(a)$). Результат умножится на произведение определителей Ван–Дер–Монда описанного в предыдущем пункте вида. Их обратимость легко обеспечивается. (Большие расталкивающие операторы заменяют $\partial(u(a))$ на $u(\partial(a)\psi(a))$, где значение многочлена $\psi(a)$ легко может быть выбрано обратимым.)

Остается показать, что множество значений любого многочлена f содержится в множестве значений многочленов из T-пространства, им порожденного, содержащих указанную систему переменных. Это обеспечивается предложением А.10 о буквенных альтернаторах и леммы А.4 о буквенном утончении из раздела А.2.2.

Для доказательства оставшихся пунктов нам понадобится следующая техническая

Лемма 5.5. *Пусть $f = P(\overrightarrow{a})(g)$. Пусть далее $f = \sum f_i$, где $f_i = \sum f_{ij}$ есть сумма членов f_{ij}, однородных относительно специализации каждой переменной в каждую клетку, различные f_{ij} (i фиксировано) приобретают ту же степень однородности при перестановке специализаций, относящихся к клеткам одного размера (сразу по всем переменным).*

Тогда

а) вне наборов $\{a_k\}_{k=1}^d$ нет радикальных специализаций переменных. И для любого $k = 1, \dots, d$ переменная a_k имеет ровно одну радикальную специализацию (иначе результат нулевой).

б) существует оператор вырезания, выделяющий все f_i. А именно, для некоторого k имеет место включение $\mathrm{T}(f) \supseteq J^k \cap (\bigcup_i \mathrm{T}(f_i))$.

Доказательство. П.а) очевиден. П.б) следует из п.а) (радикальные специализации не мешаются) с помощью рассуждений, изложенных вначале данного параграфа и в доказательстве п.а) предложения 5.11, ибо в точке максимального спектра кольца R вне подсхемы $\mathcal{H}$ умножение на величины $\Delta(a)$ может быть выбрано обратимым. □

Для завершения доказательства достаточно осуществить подстановки многочленов $C_{n_i^2}$ в переменные c_{0i} и получить замкнутый идеал. □

Можно идти несколько другим путем. Чтобы t_i не попали на позиции, отвечающие клеткам размера, меньшего чем нужно, делаются замены $t_i \to t_i Z$, где Z – центральный полином. Вхождения в клетки бóльшего размера исключаются операторами расталкивания. Процесс организуется поэтапно, как в разделе 5.4.1. Кроме того, вместо расталкивания с помощью одного элемента можно работать с многочленами Капелли и многочленами Кемера.

Однако этот путь совершенствования конструкций приводит к технике Кемера. Работа с утверждениями типа леммы о буквенного утончения требуется для построении экстремального T-пространства в случае наличия клеток произвольного размера и фактически лежит в русле идей Кемера. Таким образом, более тонкие рассуждения, необходимые для доказательства рациональности рядов Гильберта, приводят к эволюции техники в соответствующую сторону. И в неассоциативном случае (когда случайные конструкции почти невозможны) усовершенствование расталкивающих замен, как только оно оказывается достаточным для доказательства рациональности рядов Гильберта для T-пространств, становится неотличимым от обычной работы с многочленами Кемера.

Сформулируем итоговое утверждение:

Предложение 5.12. *Ряды Гильберта T-пространств из данного пункта рациональны. В частности, рационален ряд Гильберта T-пространства в любой относительно свободной PI-алгебре над полем характеристики нуль.* □

5.1.6. Многообразия сложности 1

Рассмотрим теперь случай многообразия $\mathfrak{M}$ алгебр с ассоциативными степенями, все конечно-порожденные алгебры из которого имеют ограниченную высоту над образующими. Для ассоциативного или альтернативного случая это нематричные многообразия, в йордановом — это многообразие, не содержащее алгебру $\mathbb{M}_2^+$. Хорошее многообразие, все первичные подалгебры из которого ассоциативно-коммутативны — заведомо многообразие сложности 1.

Для конечной базируемости многообразий в общем случае нужны трудно проверяемые условия структурируемости и выполнимости всех тождеств некоторой конечномерной алгебры (см. раздел A.2). В данном случае это не требуется. С помощью предложения 5.8 получается следующая

Теорема 5.3 (А. Я. Белов [179]). *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие моноассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, любая конечно порожденная алгебра из которого имеет ограниченную высоту над образующими. Тогда $\mathfrak{M}$ – шпехтово (более того, все T-пространства в $\mathfrak{M}$ конечно базируемы) и ряд Гильберта любой относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ рационален, а сами относительно свободные алгебры локально представимы.*

Доказательство. Пусть относительно свободная алгебра $B \in \mathfrak{M}$ порождена образующими $b_1, \ldots, b_m$; s – ее высота над множеством $Y = \{b_i\}$. Для доказательства конечной базируемости T-пространств в B достаточно ограничиться подстановками вида $b_i \to b_i + P(b_i)$. В силу ограниченности высоты над образующими, базис алгебры B как векторного пространства образуют элементы вида

$$\sum_{I,j} \alpha_{Ij} M_j(\overrightarrow{b}_1^{I_1}, \ldots, \overrightarrow{b}_m^{I_m}),$$

где $\overrightarrow{b}_k^{I_k} = (b_k^{I_{k1}}, \ldots, b_k^{I_{ks}})$ есть вектор степеней, M_j – разновидности неассоциативных мономов (или схем расстановки скобок), объединяющие вместе степени, I, I_k – мультииндексы, $\alpha_{Ij} \in \mathbb{F}$. При этом число различных типов M_j конечно.

Остается применить предложения 5.8, 5.10 и рассуждения из начала раздела 5.1.5.

Замечания. 1. По всей видимости, в положительной характеристике утверждение теоремы 5.3 не выполняется.

2. Можно рассматривать подстановки вида $b_i \to b_i^k$, старшие члены выражений и линейные соотношения (либо неравенства) на векторы степеней для старших членов, к которым эти подстановки приводят. Следует отметить, однако, что в положительной характеристике утверждения предложений 5.8 и 5.10 не выполняются, поэтому осуществление этого пути вызывает некоторые трудности. Исследование возникающих инвариантных пространств представляется интересным.

5.2. Тождества в компонентах

Алгебра $\widehat{A}$ раскладывается в сумму градуированных компонент, и ее можно рассматривать как многоосновную систему (см. раздел 6.3.3). Тождествам в A отвечают тождества этой многоосновной алгебры, соответствующие всевозможным специализациям, или *разносортные тождества.* Можно использовать эквивалентный язык, связанный с операторами вырезания компонент или сортировкой членов.

Обычным подстановкам в алгебре A отвечают преобразования компонент, при этом полупростые компоненты преобразуются как и при обычной подстановке (см. раздел 5.1.1). Мы будем рассматривать специализации элементов, связанные с их представлением в виде суммы своих компонент, и действия подстановок $R_i \to t_i$ на членах, связанных с фиксированной специализацией резервных переменных t_i. При этом тип (суммарная существенная градуировка) переменных, входящих в R_i всякий раз отвечает указанной специализации для t_i. Многочлены R_i будут сконструированы таким образом, что после применения к ним т.н. "расталкивающих" операторов останутся только члены, отвечающие нужным специализациям t_i.

С формальной точки зрения происходит следующее. Подстановкам $R_i \to t_i$ отвечает набор преобразований компонент, которые подбираются таким образом, чтобы ненужные компоненты обратились в ноль.

Замечание. Можно пользоваться и таком языком. Каждой компоненте $\mathcal{K}$ отвечает *"оператор вырезания"* $\mathrm{Obstr}_{\mathcal{K}}$ который каждому элементу $x \in \widehat{A}$ сопоставляет его компоненту. Значения оператора вырезания естественным образом преобразуются при подстановках. При этом полупростые компоненты преобразуются также, как и исходные переменные, а суммы радикальных компонент — по формулам (1). Мы будем рассматривать *тождества с операторами вырезания*. Тождествам в A естественным образом соответствуют тождества с операторами вырезания в $\widehat{A}$. Многочлену соответствует многочлен с операторами вырезания. Вместо каждой переменной подставляется сумма ее компонент, изображаемых в виде действия соответствующих операторов. Рассуждения о специализациях и т.д. следует понимать как рассуждения о членах, в которых данная переменная стоит под оператором вырезания.

Отметим, что техника расталкивающих замен, описанная в леммах 5.13 и 5.14 есть не что иное, как имитация операторов вырезания средствами обычных полиномов и описание их действия на языке тождеств.

5.2.1. Преобразование компонент

Нам надо указать, как преобразуются компоненты каждого сорта. Далее будут предъявлены конструкции замен, позволяющие "отлавливать" граничные операторы. Для этого нам надо изучить, как отражаются межклеточные переходы, а также наличие граничных операторов, в языке тождеств.

Прежде всего отметим, что достаточно длинный (т.е. длина которого не меньше c – индекса нильпотентности радикала) путь в графе Γ обязательно проходит через клетку. Поэтому при рассмотрении путей максимального состава (проходящих через максимальный набор клеток) в алгебре A^c компоненты с $\bar{\theta}$ не возникают.

Нас интересуют элементарные переходы. Переведем теперь результаты раздела 4.5.1 о соответствующих операторах на θ-язык. Через ${\theta'}^i(v)$ обозначим $\nu_i x \nu_0$ – компоненту элемента v ("оператор выхода из i-й клетки из v"); аналогично определяются компоненты ${\theta''}^i(v)$, $\theta^{ij}(v)$, $\bar{\theta}(v)$. Отметим, что алгебра $\hat{A}$, как векторное пространство, разлагается в сумму таких образований. Рассмотрим теперь алгебры входа B_k^l, алгебры выхода B_k^r и перехода B_{k_1,k_2}. Верхняя клетка имеет индекс 1, нижняя — 2.

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы уметь осуществлять перевод с языка разносортных тождеств на язык обычных. Следующее предложение описывает поведение компонент единичной θ-степени у многочленов, отвечающих граничным алгебрам.

Предложение 5.13. *Имеют место равенства:*

а) для алгебры B_k^l:
$$\theta'([a, Z_k]Q) = \theta'([a, Z_k])Q;$$

б) для алгебры B_k^r:
$$\theta''(Q[a, Z_k]) = Q\theta'([a, Z_k]);$$

в) для алгебры B_{k_1,k_2}:
$$\theta^{12}(CZ_{k_1}[[x, Z_{k_1}], Z_{k_2}]Z_{k_2}D) = CZ_{k_1}\theta^{12}([[x, Z_{k_1}], Z_{k_2}])Z_{k_2}D;$$

г) если $\max(k_1, k_2) \geq \max(k_1', k_2')$ *и* $(k_1, k_2) \neq (k_1', k_2'); k_1 + k_2 \geq k_1 + k_2$, *то* θ^{ij}-*компонента значения* Q_{k_1,k_2}, *отвечающая паре клеток размера* (k_1', k_2'), *нулевая.* □

T-идеалы, порожденные полиномами $Z_{k_1} \cdot [[x, Z_{k_1}], Z_{k_2}] \cdot Z_{k_2}$, P_{k_1,k_2}, P_k в соответствующих алгебрах, являются идеалами "киллеров следов", т.е. умножение элементов этих идеалов на следы, относящиеся к клеткам, не выводит за их пределы и не выводит за пределы соответствующих алгебр. (Поскольку полиномы Z_k в алгебре $\mathbb{M}_k$ таковы.)

5.2.2. Связь между обычными тождествами и разносортными

Для того, чтобы развить технику работы с расталкивающими подстановками, нам понадобится несколько вспомогательных утверждений, относящихся к представлению значений многочлена в алгебре A в виде суммы его значений от компонент соответствующих элементов (лежащих в $\widehat{A}$). Для этого, в частности, надо прояснить связь между разносортными тождествами алгебры $\widehat{A}$ и обычными тождествами A, которая получается процессом независимого суммирования (соответствующие конструкции изложены в разделе 4.2). Идеал разносортных тождеств — система многочленов, переменные которых имеют сорта, причем задан закон, по которому определяется сорт произведения. Разрешается вместо переменной подставлять выражение того же сорта. В данном случае сортами являются типы элементов в существенной градуировке.

Напоминаем, что каждая образующая алгебры A содержит все градуированные компоненты, взятые с независимыми коэффициентами. Если компонента содержит множитель, относящийся к клетке бесконечного типа, то множитель при суммировании — свободная переменная, а иначе это переменная из кольца $\mathbb{F}_q[\overrightarrow{x}]$, где q — наименьшее целое такое, что центры всех проходимых клеток удовлетворяют тождеству $x^q - x = 0$. Из однородности алгебры $\widehat{A}$ и свойств A^{cl} получается

Предложение 5.14. *В точке общего положения, отвечающей максимальному идеалу кольца, порожденного параметрами суммирования, ограничения алгебр* A *и* $\widehat{A}$ *и* A^{cl} *совпадают. Общее положение означает различие непохожих клеток и независимость независимых, а также простоту ограничения алгебры на любую клетку.* □

Следующее предложение есть переформулировка свойства однородности идеала разносортных тождеств алгебры $\widehat{A}$:

Предложение 5.15. *а) Идеал разносортных тождеств однороден по компонентам, отвечающим произведениям, содержащим существенный элемент либо компоненту клетки бесконечного типа.*

б) Пусть $F(t, \overrightarrow{x}) \neq 0$ — *полином в* A. *Его значение в* A *есть линейная комбинация значений его квазилинеаризаций на однородных элементах из* $\widehat{A}$. *И* *обратно, каждое значение F на однородных элементах из $\widehat{A}$ получается как однородная компонента значения F в A.*

в) Пусть при некоторой специализации в $\widehat{A}$ множители, в которые одновременно входят какие-то две разные компоненты t, вносят ненулевой вклад. Тогда они получаются путем подстановки некоторых элементов из $\widehat{A}$ в (частичную) собственную квазилинеаризацию F по t. В точках спектра общего положения линейная комбинация таких членов лежит в пространстве, порожденном значениями квазилинеаризаций F (по t) в алгебре A. В частности, если F квазилинеен по t, то все члены при специализации в $\widehat{A}$ содержат одни и те же компоненты t. □

Пп. б) – в) означают, что, работая в $\widehat{A}$, мы можем считать, что каждая переменная целиком одного типа.

Лемма 5.6 (О деформации алгебр). *а) Если компоненты образующих алгебры A заменить на произвольные компоненты любых элементов из $\widehat{A}$, то получившаяся алгебра A' изоморфна гомоморфному образу алгебры A. (Можно компоновать разные компоненты от разных элементов в одну образующую.)*

б) Пусть Q_i – система полиномов от множества переменных, не содержащее образующих A. (Эти полиномы введены в разделе 4.5.1.) Тогда если компоненту (отвечающую предназначению Q_i) образующей a_i заменить на соответствующую компоненту Q_i, то алгебра A' будет изоморфна A. □

Следующая лемма позволяет контролировать специализации при осуществлении расталкивающих замен:

Лемма 5.7. *а) Пусть $P(t, \overrightarrow{x})$ – произвольный многочлен, не являющийся тождеством A. И пусть сумма членов, содержащих компоненту t, отвечающую граничному оператору некоторого существенного типа, не равна нулю в $\widehat{A}$. Пусть $Q = P_i^l, P_i^r, Q_{ij}$ – в зависимости от типа компоненты. Рассмотрим квазилинеаризацию P по t, отвечающую подстановке $t \to t_1 + t_2$ (возможно, совпадающую с P, но содержащую t_2), и подстановку $t_2 \to D_1QD_2$ такую, что множество переменных из Q не пересекается с множеством переменных не из Q, и таково также множество $\{D_1, D_2\}$.*

Тогда сумма компонент, у которых специализация перехода осуществляется внутрь каждого Q, причем ровно по разу, не равна нулю. В точке максимального спектра общего положения значения указанной подстановки в A содержат эту сумму компонент. (Дополнительные специализации, если они есть, принимаются внутрь некоторых D. Возможны и “неправильные” компоненты с “лишними” специализациями внутрь Q_i.)

б) Если же в условиях предыдущего пункта не равна нулю сумма членов, содержащих некоторую компоненту переменной t, причем градуировка этой компоненты не меньше, чем произведение двух существенных типов, то сумма компонент таких, что:

- *существенная смешанная специализация (т.е. связанная с переходом между типами) осуществляется внутрь каждого Q, причем ровно по разу,*
- *специализации, связанные со степенью радикала, не осуществляются внутрь одной переменной,*
- *остальные соответствующие существенные специализации осуществляются только внутрь D_i (или не осуществляются вовсе),*

также не равна нулю.

В точке максимального спектра общего положения значения указанной подстановки в A содержат эту сумму компонент.

Доказательство. Данная лемма непосредственно следует из замечания об однородности и леммы о множестве значений многочленов $Q = P_i^l, P_i^r, Q_{ij}$ на соответствующей граничной алгебре, которое содержит весь радикал. Поэтому если соответствующую компоненту t заменить на компоненту Q, то новая "продеформированная" подалгебра в $\widehat{A}$ будет изоморфна A (см. лемму 5.6). П.б) доказывается точно также, а можно воспользоваться заменой $t_2 = t_3t_4t_5$ и вывести его из п.а). □

Следующая лемма аналогична предыдущей. Ее формулировка приспособлена для доказательства леммы 5.14:

Лемма 5.8. *Пусть многочлен H' получается из H путем подстановки вместо некоторых переменных многочленов типа Q_i от непересекающихся множеств переменных. Пусть $H' \not\equiv 0$, причем специализации в $\widehat{A}$, при которых в ядрах Q_i присутствуют специализации переменных, соответствующих клеткам размера предназначения (см. определение 4.8), дают ненулевой вклад.*

Тогда ненулевой вклад дают специализации, для которых в ядре каждого Q_i присутствует ровно одна смешанная специализация, связанная с клетками размера предназначения.

Соответственно, если такие специализации дают нулевой вклад, то нулевой вклад дают все специализации в $\widehat{A}$ при которых в ядрах Q_i присутствуют специализации переменных, соответствующих клеткам размера предназначения.
□

Следующая лемма позволяет избегать существенных радикальных специализаций там, где не надо. Она означает, что если границы анфилад уже заняты, то оставшиеся специализации идут либо целиком внутрь, либо целиком вне анфилад:

Лемма 5.9. *Пусть*

$$Q = Q_{k_1,k_2}^{(\overrightarrow{q})} = CZ_{k_1}^q(t \circ ad(Z_{k_1})^{q_1} \circ ad(Z_{k_1})^{q_2} \circ Z_{k_2}^{q_3})D,$$

или

$$Q = Q_k^{l(\overrightarrow{q})} = CZ_k^{q_1}(t \circ ad(Z_k)^{q_2})D$$

, или

$$Q = Q_k^{r(\overrightarrow{q})} = C(t \circ ad(Z_k)^{q_1})Z_k^{q_2}$$

в зависимости от рассматриваемой компоненты. Пусть $k = \max(k_1, k_2)$ и $\forall i\, q_i > c(A)$; Y – результат специализации,

- *не содержащей компонент, отвечающих типам с клеткой размера больше k*
- *и с не более чем одной компонентой, отвечающей типам с клеткой размера больше k.*

Тогда:

а) Есть ровно одна компонента, отвечающей типам с клеткой размера больше k. Эта компонента специализации осуществляется внутрь ядра $t \circ ad(Z_k)^{q_2}$ у соответствующего Q.

б) Все специализации, осуществляющиеся внутрь остальных множителей Z_k^q, несмешаны и отвечают клетке размера k. Причем в каждом таком члене в одном из этих Z_k все специализации полупросты.

Доказательство. Полином Z_k обращается в нуль на любой клетке размера строго меньше k. Поскольку все $q_i > c(A)$, то соответствующие Q_i обращаются в ноль в факторе по смешанным элементам, содержащим обкладку, соответствующую системам клеток размера $\geq k$. Поэтому хотя бы одна из смешанных специализаций при клетке размера k необходима. С другой стороны, у анфилады два конца и она должна кончиться (начаться) существенным элементом при клетке того же размера, чего по условию быть не может. Поэтому множители Z_k не содержат смешанных компонент в специализациях. Полупростота одной из специализаций Z_k в каждом члене вытекает из неравенства $q > c(A)$. □

Мы не учли переходы к клеткам конечного типа, но клетки конечного типа вырезаются множителями вида $(s^{q_1} - s^{q_2})^{C(A)}$, поэтому учет этих эффектов является чисто техническим и в формулировке и доказательстве для простоты опускается.

Мы будем работать с подстановками $x_i + t_i \to x_i$, $Q_i \to t_i$, где многочлены Q_i отвечают граничным алгебрам. Наша цель заключается в построении T-идеала, замкнутого относительно некоторого достаточно обширного кольца форм. Для этого мы добиваемся, чтобы Q_i были *правильными*, т.е. отвечали специализациям Q_i в алгебре перехода для соответствующего многочлена и, кроме того, покрыли все специализации, относящиеся к межклеточным переходам. Специализации, относящиеся к переходам между клетками меньшего размера, чем в исходной алгебре, обращаются в ноль. Трудности вызывают специализации, связанные с клетками бóльшего размера. Преодоление этих трудностей основано на следующей технических приемах:

1. Разбиение процедуры на этапы и заполнение всех концов клеток очередного размера для каждого этапа. Обработка размеров начинается с самых больших клеток и идет по убыванию.

2. Вырезание несмешанных специализаций с помощью расталкивающих операторов. Например, пусть многочлен F линеен по t и концевой переменной D_{ij} некоторого Q_i. Тогда в разности $F|_{D_{ij} Z_k \to D_{ij}} - F|_{t_i Z_k \to t_i}$ уничтожаются члены с однотипными полупростыми специализациями t_i и D_{ij}, относящимися к клеткам размера k.

5.3. Действие нетеровых колец

Данный раздел посвящен конструкции действия нетеровых колец на првильных членах, нужной для построения замкнутых T-идеалов.

5.3.1. Члены максимального состава

Пусть R – коммутативное нетерово кольцо, а $A[R]$ – нетеров R-модуль. Идеал $J \subset A$ назовем *R-замкнутым*, если идеал $J[R]$ в алгебре $A[R]$ совпадает с J. Иными словами, J выдерживает умножение на элементы из R. Цель данного пункта — показать R-замкнутость идеала, порожденного правильными полиномами (см. определение 5.5) при подходящем R.

Определение 5.4. T-идеал I называется *замкнутым*, если он замкнут относительно умножений на элементы кольца S, введенного в данном разделе.

Если $I \in J_C$, где C – путь максимального состава, то условия R и S замкнутости оказываются равносильными.

Мы рассматриваем максимальные пути (пути максимального состава) в графе Γ и соответствующие идеалы вида h_C. При этом рассматривается класс эквивалентности алгебр с точностью до поведения идеалов указанного вида. Граф Γ

считается равным отрезку $[v_1, v_2]$ и, поскольку пути разного существенного состава друг друга не гасят, все максимальные пути считаются путями одного и того же существенного состава.

Пусть полином f есть сумма правильных членов. *Типом* правильного члена при однородной специализации в $\widehat{A}$ назовем множество типов позиций, отвечающих каждому t_i. Отметим, что все вхождения каждого t_i однотипны. Для r-го типа клеток пусть n_r означает количество концов соответствующих анфилад. Для всех путей данного существенного состава эти количества совпадают и все позиции, отвечающие этим концам, заняты каким-нибудь t_α. Рассмотрим все клетки данного размера. Отметим также, что поскольку полином — правильный, то все его члены имеют одинаковое количество всех t_i, и другая специализация t_i связана с их расположением при анфиладах, состоящих из клеток того же размера. (А числа концов в новых соответствующих анфиладах могут различаться.)

Воспользуемся подстановкой, действующей через данное вхождение. Пусть t_i входит m_i раз в позиции при данной анфиладе. Подставим $C_{n_i} \to t_i$ и с помощью этого C_{n_i} организуем форму. Таким образом, действуя через полиномы Капелли, встроенные внутрь этого t_i, можно добиться умножения на m_i-е степени следов (форм), отвечающих данной клетке размера n_i. Если же действовать сразу по всем t_i, относящимся к клеткам данного размера, то это приведет к умножению на n_r-е степени, относящиеся к r-ой существенной анфиладе. И эта операция является инвариантом и не зависит от раскладки типов t_i при правильном члене. Пусть R_m – кольцо, порожденное указанными степенями для клеток размера m, а R – кольцо, порожденное всеми R_m. Тогда кольцо, порожденное всеми следами и формами, относящимися к данной клетке, является нетеровым R-модулем, а потому алгебра $A[R]$ также является нетеровым R-модулем. Мы доказали следующее

Предложение 5.16. *Идеал J, отвечающий правильному расположению $\{t_i\}$, является R-замкнутым идеалом. Тем самым идеал J представим.* □

5.3.2. Члены полного состава

Рассмотрим алгебру $\widehat{A}^{\Phi}$, которая получается присоединением к алгебре $\widehat{A}$ форм, относящихся к клеткам (с учетом кратностей). А именно, для каждой системы похожих клеток присоединяется оператор умножения на значение формы для каждой клетки, умноженное на соответствующую пирсовскую компоненту единицы. (Оператор умножения на форму определен на полиномах Капелли, но действует на них как умножение на многочлен и потому продолжается на всю алгебру.) Многочлены для клеток разных кратностей связаны теми же операторами Фробениуса, что и компоненты матриц ограничений элементов из A на эти клетки. Остальные компоненты этого оператора — нулевые. Заметим, что $\widehat{A}^{\Phi cl} = \widehat{A}^{cl}$.

Введем на этой алгебре структуру S-модуля для некоторого ассоциативно–коммутативного кольца S. Поскольку кольца, отвечающие несущественным клеткам, конечны, нас интересуют только существенные компоненты. Для каждого значения формы Φ определим операторы ϕ_i^l и ϕ_i^r, которые умножают существенную градуированную компоненту $\tilde{A}^{\Phi}$ на значение Φ в i-ой клетке с некоторой кратностью. Кратность эта для ϕ_i^l есть сумма кратностей левых существенных концов граничных операторов (существенный конец соответствует смешанному элементу отвечающему существеной клетке) у клеток i-го типа, а ϕ_i^r — правых. Кратность оператора перехода определяется из того, какова кратность клетки, соответствующей его концу. На несущественных элементах действие тождественно.

Предложение 5.17. *Только что определенное действие соответствует подстановкам на граничных операторах, отвечающих концам (левым для ϕ_i^l и правым для ϕ_i^r). Оно переводит в себя алгебру $\widehat{A}^\Phi$, осуществляет ее эндоморфизм с сохранением структур радикальных градуировок и потому переводит крайний элемент в крайний. В частности, каждое ϕ_i^l (или ϕ_i^r) осуществляет изоморфизм алгебры A с ее образом.* $\square$

Замечания. С данным действием (определенным только на экстремальном идеале) мы встречались в разделе 4.6.2 при доказательстве рациональности рядов Гильберта.

2. Указанное действие не согласовано с умножением в алгебре, ибо $\phi_i \cdot ab = \phi_i(ab) = \phi_i(a)\phi_i(b) \neq (\phi_i \cdot a)b)$. Однако равенство все же имеет место, когда на b оператор Φ_i действует тождественно. Более того, умножение на элемент, не содержащий существенных компонент, действие этих операторов не меняет. Тем самым проблем согласования с умножением для действия на крайних элементах это не вызывает.

Кольцо $\widehat{S}$ определяется как кольцо, порожденное этими операторами. Теперь рассмотрим группу G перестановок существенных типов, сохраняющую размер клеток. Это действие естественным образом индуцирует действие на операторах ϕ_i^l и ϕ_i^r для данного значения формы Φ. Искомое кольцо S связано с кольцом инвариантов $\mathcal{S}$. Поскольку группа G конечна, а само нетерово кольцо цело над кольцом инвариантов конечной группы и является его конечным расширением, имеем следующее утверждение:

Лемма 5.10. *Кольцо $\widehat{S}$, порожденное операторами вида ϕ_i^r, ϕ_i^l, является нетеровым кольцом и целым конечным расширением нетерова кольца $\mathcal{S}$.* $\square$

Замечание. Необходимость перехода к алгебре инвариантов вызвана тем, что может наблюдаться симметрия относительно существенных типов, а значит и соответствующих специализаций Q_i в лемме о расстановках. Иными словами, в A могут не выделяться члены со специализациями переменных из Q_i данной степени однородности, но выделяются выражения, симметричные относительно специализаций. При этом симметричными могут быть только типы клеток одного размера. С такого рода явлением мы сталкивались в разделе 4.6.2 при доказательстве рациональности рядов Гильберта. И там же мы фактически пользовались действием кольца S! Той же причиной объясняется, что при доказательстве рациональности рядов Гильберта для нематричных многообразий осуществлялся переход к симметрическим функциям от операторов типа ad (см.[140] а также раздел 3.2.4).

Определим теперь вспомогательное ассоциативно–коммутативное кольцо T.

Зафиксируем по клетке каждого существенного типа. Каждой клетке C отвечает гомоморфизм ограничения ϕ_C исходной алгебры. Каждой форме ψ в алгебре $\phi_C(A)$ отвечает многочлен $P_{C\psi}$ от коэффициентов при матричных единицах клетки C а значит — и исходной алгебры A. Кольцо T определим как кольцо, порожденное умножениями на полиномы вида $P_{C\psi}$.

Следующая лемма относится к действию колец $\mathcal{S}$ и $\widehat{S}$ на компонентах алгебр $\widehat{A}^\Phi$ и $\tilde{A}^\Phi$, которые рассматриваются просто как $\mathcal{S}$ (соответственно, $\widehat{S}$)-модули.

Лемма 5.11. *а) Каждая существенная однородная компонента является нетеровым $\mathcal{S}$-модулем и нетеровым $\widehat{S}$-модулем.*

б) Сумма существенных однородных компонент является нетеровым S-модулем и нетеровым $\widehat{S}$-модулем.

в) Кольцо T нетерово и цело над $\mathcal{S}$, и, наоборот, кольцо $\widehat{S}$ (а также S) цело над T.

(Напоминаем, что существенная компонента связана с наличием радикального граничного оператора.)

Доказательство. П.а) следует из предыдущей леммы, п.б) следует из а) в силу конечности числа существенных компонент, ибо сумма нетеровых модулей есть нетеров модуль. Для доказательства п.в) достаточно проверить, что оператор умножения на значение формы Φ в данной клетке цел над S. Но это следует из того, что операторы из T являются эндоморфизмами нетерового $\mathcal{S}$-модуля. Они коммутируют с $\mathcal{S}$. $\square$

Замечание. Эндоморфизмы ϕ_i^r и ϕ_i^l на несущественных компонентах действуют тождественно, на них T не цело над S. Поэтому мы и рассматриваем ограничения этих операторов на существенные компоненты.

Рассмотрим образующие $\tau_1, \dots, \tau_s$ кольца T. Все они целы над S, следовательно, выполняются равенства:

$$\tau_i^m = \tau_i^{m-1}\xi_{i1} + \cdots + \xi_{im}.$$

Пусть $\bar{\tau}_i$ – элемент кольца многочленов, соответствующий τ. Кольцо S порождено буквами x_{ij}, причем выполняются соотношения:

$$\bar{\tau}_i^m = \bar{\tau}_i^{m-1}x_{i1} + \cdots + x_{im}.$$

Рассмотрим алгебру $A' = A[S]/J$, где идеал J порожден элементами вида $y(x_{ij} - \xi_{ij})$, где y – крайний элемент полного существенного состава. Очевидно следующее

Предложение 5.18. *Структуры $\mathcal{S}$ и S-модулей, порожденные элементами полного существенного состава совпадают.*

Алгебра A вкладывается в алгебру A', которая является алгеброй нетерового типа. Любой S-замкнутый идеал, состоящий из элементов полного существенного типа, является нетеровым S-модулем. $\square$

Из этого предложения, предложения 5.37 о существовании T-идеала крайних элементах и леммы 5.14 о расталкивающих подстановках вытекает

Следствие 5.3. *Если ненулевой T-идеал Γ в алгебре $\widehat{A}$ принимает значение, являющегося суммой компонент полного существенного состава, то Γ содержит ненулевой представимый T-идеал, являющийся S-замкнутым.*

Он же является $\mathcal{S}$-замнкнутым в расширенной алгебре A'. $\square$

5.4. Построение замкнутых идеалов. Вырезающие подстановки

Наша задача состоит в построении T-идеалов, замкнутых относительно действия некоторого ассоциативно-коммутативного кольца. Для этого надо иметь подстановки, действие которых "изолировано" и "проконтролировано". Для этой цели мы хотим проконтролировать специализации в $\widehat{A}$, относящиеся к существенным радикальным типам, и через них осуществить нужные подстановки, обеспечивающие структуру нетерова модуля. Действие через граничный оператор, отвечающий смешанному элементу, аналогично использованию умножения для ситуации, когда смешанных элементов нет.

Мы будем использовать технику *вырезающих подстановок*, которая осуществляет вынуждение "прохождения путей максимального состава". Простейший пример того, как эта техника работает, изложен в разделе 2.7 при доказательстве наличия тождества алгебраичности в произвольной PI-алгебре. Данная процедура позволяет преодолеть трудности, связанные с конечностью основного поля, осуществляя своего рода линеаризацию с использованием алгебры форм для клетки бесконечного типа.

Вначале мы обсудим идейную сторону, затем формальную. Цель состоит в контроле над специализациями, связанными с граничными операторами, и в построении замкнутых T-идеалов. Соответствующая техника основана на следующих идеях. Во-первых, если Z_k есть центральный полином, отвечающий клетке размера k, то $[Z_k, x]$ вынуждает радикал либо специализацию, отвечающую клеткам бóльшего размера. На граничных операторах $ad(Z_k)$ действует просто как умножение. Во-вторых, несущественные компоненты вырезаются множителями вида $x^{q_1} - x^{q_2}$. И, в-третьих, процедура "расталкивания" позволяет добиваться того, чтобы специализации резервных образований t_α оказались различными, покрыли все типы и позволили бы организовать структуру нетерова R модуля.

Кольцо R определяется в разделе 5.3.1.

Пусть J – произвольный T-идеал, содержащийся в $\mathrm{T}(h_C) \cap I^{c(A)-1}$ и не равный нулю тождественно в A. Если значение в A произвольного многочлена g из этого T-идеала расписать, представив переменные в виде суммы своих компонент из $\widehat{A}$, то получится сумма членов, каждый из которых содержит максимально возможное число существенных радикальных компонент (и $c(A) - 1$ радикальную компоненту), т.е. все компоненты, отвечающие граничным операторам анфилад пути C.

Рассмотрим позиции, отвечающие концам анфилад. *Типом позиции* будем называть ее характер (вход, выход, переход), а также то, с клетками какого типа она связана. Нам надо организовать дополнительные подстановки, действующие на переменных типа D, которые оставят только члены с нужным расположением t_i, (а остальные члены обратят в ноль). Нам нужно, чтобы t_i "заняли" все входы в анфилады и все выходы из них и больше никуда не попали. (Это означает, что вне набора $\{t_i\}$ соответствующих специализаций нет и все специализации для каждой переменной t_i таковы.) И кроме того, при граничных операторах, относящихся к разным типам позиций, должны стоять разные t_i.

Определение 5.5. Члены с таким расположением t_i мы будем называть *правильными. Правильным* называется полином, пространство значений которого в $\widehat{A}$ лежит в пространстве, порожденном правильными членами.

Цель вырезающих подстановок — оставить только правильные члены. Тогда, действуя подстановками через переменные, входящие в $C_{k_i^2}$, мы создадим структуру модуля над нетеровым кольцом.

Теперь мы рассмотрим в качестве модельного примера ситуацию, когда основное поле имеет характеристику нуль и все клетки имеют одинаковый размер. Тогда все T-идеалы однородны и задаются полилинейными тождествами. Мы работаем с идеалом, имеющим ненулевую существенную компоненту максимального состава — т.е. присутствует максимально возможное число межклеточных переходов. Рассмотрим подстановки $x \to x + \sum t_\alpha$, где элементы t_α имеют вид $D_{ij1}Q_{ij}D_{ij2}$. Здесь Q_{ij} — многочлены, введенные в разделе 4.5, отвечающие алгебрам межклеточных переходов. Область значений каждого Q_{ij} в соответствующей алгебре перехода покрывает весь радикал. Кроме того, в факторе алгебры A по идеалу, порожденному существенными смешанными элементами, значения Q_{ij} обращаются в ноль. Поэтому каждая специализация t_α покрывает смешанный элемент.

Возьмем члены, которые полилинейны по входящим t_α и содержат максимально возможное их число. Все концы клеток, а также межклеточные переходы будут заняты такими специализациями, причем, в силу однородности, а также предложения 5.15 сумма таких членов даст ненулевой вклад. Далее, мы можем оставить члены, в которых элементы отвечают граничным операторам при клетках с одной и той же структурой похожести. Для этого можно использовать расталкивающие операторы вида:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AD}^1(t_\alpha, t_\beta, Z)(f) &= f|_{D_I=D_IZ} - f|_{D_J=D_JZ};\\
\mathrm{AD}^2(t_\alpha, t_\beta, Z)(f) &= f|_{D_I=D_IZ} - f|_{D_J=ZD_J};\\
\mathrm{AD}^3(t_\alpha, t_\beta, Z)(f) &= f|_{D_I=ZD_I} - f|_{D_J=ZD_J};\\
\mathrm{AD}^4(t_\alpha, t_\beta, Z)(f) &= f|_{D_I=ZD_I} - f|_{D_J=D_JZ}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(индексы α и β указывают на исходные переменные t_α и t_β)
и действовать как и при доказательстве выполнимости тождества алгебраичности.

Здесь $Z = Z_k$ – центральный полином для алгебры матриц порядка k, где k есть размер клетки, индекс I связан с t_α, индекс J – с t_β. Применив $c(A)$ раз каждый такой оператор, мы можем оставить члены с нужной структурой похожести клеток, отвечающих расположению t_i.

Пусть теперь клетки имеют разный размер. Возникает дополнительная трудность: полиномы, отвечающие переходам между клетками ме́ньшего размера, не обращаются в ноль на клетках бо́льшего размера. Поэтому многочлены Q_{ij} могут иметь и первичные специализации, связанные с такими клетками. Но при этом обработка специализаций, связанных с максимальным размером, происходит как раньше.

Пройдем этот этап и осуществим для него расталкивающие подстановки. Пусть $t_1, \dots, t_s$ – резервные образования, которые заняли все концы клеток максимального размера и больше нигде не находятся. Назовем такую систему *ведущей*.

Для остальных t_i многочлены Q_I отвечают переходам между меньшими клетками, и ситуация описывается леммой 5.12.

Таким образом, необходимо также осуществить "вырезание" попадания новых t внутрь уже "обработанных" анфилад, что делается с помощью *расталкивающих замен* — операторов $\mathrm{AD}^p_{\alpha,\beta}$ примененных к каждому новому t_i и ведущим $t_1, \dots, t_s$. При этом отметим, что если k есть максимальный размер клеток, то $Z_k^{c(A)}$ обращается в ноль, если входящие в него переменные не имеют полупростых специализаций, отвечающих клеткам размера k. Выбор оператора $R^j_{\alpha,\beta}$ осуществляется в зависимости от характера полинома Q_i, связанного с ведущей переменной t_α (вход, выход, переход).

Таким образом, строится система расталкивающих подстановок, исключающая попадание нового образования t_β внутрь анфилад размера k. Это позволяет занять концы анфилад следующего размера и, расширив ведущую систему, перейти к следующему этапу.

Работа с новой ведущей системой идет аналогично. Затем будут обрабатываться подстановки, связанные с операторами перехода для клеток следующего размера и т.д. Процесс идет поэтапно и завершается построением многочленов из лемм о расталкивающих подстановках 5.13, 5.14.

В квазилинейном случае процесс расталкивания аналогичен случаю полилинейному, поскольку все специализации каждой переменной в любом слагаемом можно считать одинаковыми. При подстановке типа $f|_{D_J=D_JZ^{q_2}}$ возникают множители

$(Z^{q_2})^k$. Поэтому вместо обычных подстановочных adjoint'ов (3) надо брать "подкрученную энгелевость" или произведение (по подходящему набору пар (q_k, q_l)) "(q_k, q_l)-подкрученных adjoint'ов " – операторов типа $\mathrm{AD}^r_{(q_k,q_l)}$ $(r = 1, \ldots, 4)$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AD}^1_{(q_k,q_l)}(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I = D_I Z^{q_1}} - f|_{D_J = D_J Z^{q_2}};\\
\mathrm{AD}^2_{(q_k,q_l)}(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I = D_I Z^{q_1}} - f|_{D_J = Z^{q_2} D_J};\\
\mathrm{AD}^3_{(q_k,q_l)}(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I = Z^{q_1} D_I} - f|_{D_J = Z^{q_2} D_J};\\
\mathrm{AD}^4_{(q_k,q_l)}(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I = Z^{q_1} D_I} - f|_{D_J = D_J Z^{q_2}}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Случай бесконечного поля проще. Вместо выбора членов, полилинейных по всем t_i, можно взять однородное слагаемое, обеспечивающее нужное количество вхождений каждого t_i. Если при этом "вырезать" слагаемые, связанные с неправильными специализациями, то все концы клеток обрабатываемого размера будут заняты и специализации образований следующего этапа будут либо "чисто внутренними" по отношению к клеткам обработанным размерам, либо — "чисто внешними".

Однако на каждом этапе надо также "вырезать" члены, где t_i входит в несколько клеток бо́льшего размера (см. предложения 5.19 и 5.20). Кроме того, надо позаботиться, чтобы внутри клеток одного размера каждое t_i имело бы одинаковые специализации. Это достигается соображениями однородности алгебры по компонентам: такие члены можно получить из собственной линеаризации исходного тождества, которую надо обрабатывать отдельно (см. раздел 5.4.1).

В случае конечного поля возникают следующие обстоятельства:

- Надо уничтожить вхождения, связанные с несущественными элементами. Это делается путем вставки полиномов вида $x^{p^{k_1}} - x^{p^{k_2}}$ (осуществляемой операторами $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}(q)_i$ из раздела 4.5.2).

- Возникают эффекты разных кратностей клеток и разного числа вхождений t_i в разные члены. Вместо линеаризаций работаем с квазилинеаризациями.

- При осуществлении вырезаний надо работать с членами, у которых одно t_i имеет несколько разнотипных специализаций, в том числе и относящихся к операторам перехода. Ограничиться операторами типа AD не удается.

- Главная трудность связана с принципиальной неоднородностью. С помощью расталкивающих операторов можно выделить члены, в которые входят специализации от всех типов клеток — и только. Выделить члены с максимальным количеством специализаций невозможно. Поэтому вместо кольца R используется более сложное действие кольца S.

- Как следствие, приходится рассматривать специализации, связанные с произведением нескольких операторов перехода.

5.4.1. Расталкивание резервных образований. Построение правильного идеала

Пусть J – произвольный T-идеал, содержащийся в $\mathrm{T}(h_C) \cap I^{c(A)-1}$ и не равный нулю тождественно в A. Если значение в A произвольного многочлена g из этого T-идеала расписать, представив переменные в виде суммы их компонент из $\widehat{A}$, то получится сумма членов, каждый из которых содержит максимально возможное число существенных радикальных компонент (и $c(A)-1$ радикальную компоненту), т.е. все компоненты, отвечающие граничным операторам анфилад пути C.

Мы будем рассматривать подстановки $x \to x+\sum t_\alpha$, где элементы t_α имеют вид многочленов Q_i, введенных в разделе 4.5. Выпишем соответствующие многочлены еще раз:

$$P^l_{k_i,(c)} S_{k_i} C_{k_i^2} D_\alpha, \ \ D_\alpha C_{k_i^2} S_{k_i} P^r_{k_i,(c)}, \ \ D_{\alpha 1} S_{k_i} C_{k_i^2} P^{(c)}_{k_i,k_{i+1}} S_{k_{i+1}} C_{k_i^2} D_{\alpha 2},$$

где $S_{k_i} = Z^q_{k_i} - Z_{k_i}$ – оператор, убивающий конечные клетки (и оставляющий бесконечные), $C_{k_i^2}$ – полином Капелли порядка k_i^2. Мы будем рассматривать суммы членов, в которые все t_i входят “в полном комплекте”. (Если основное поле бесконечно, то достаточно рассмотреть члены, линейные по каждому t_i.) В силу леммы 0.4 это — T-пространственная операция.

Рассмотрим позиции, отвечающие концам анфилад. *Типом позиции* будем называть ее характер (вход, выход, переход), а также то, с клетками какого типа она связана. Нам надо организовать дополнительные подстановки, действующие на переменных типа D, которые оставят только члены с нужным расположением t_i, (а остальные члены обратят в ноль). Нам нужно, чтобы остались только правильные члены (см. определение 5.5). Тогда, действуя подстановками через переменные, входящие в $C_{k_i^2}$, мы создадим структуру модуля над нетеровым кольцом.

Следующая лемма есть переформулировка п.б) предложения 4.19:

Лемма 5.12. *При ненулевом результате подстановки, каждое t_i может попасть либо на позицию граничного оператора для анфилады с клеткой размера k_i, либо внутрь анфилады бóльшего размера, либо на границу анфилады с клетками бóльшего размера.* □

(Последний случай будет невозможен, когда границы анфилад с бóльшими клетками будут уже заняты. Трудности будет составлять первый случай.)

В случае, когда основное кольцо конечно, возможности для линеаризации и, соответственно, выделения однородных компонент, ограничены. Однако, для этой цели удается использовать кольцо форм, относящихся к клеткам. В этом и состоит основная идея.

Введем операторы “инфинитезимального сдвига” R^{n,D_i}_k, действующие на записях через t_i:

$$\mathrm{R}^n_{k,D_i}(f) = f - f|_{D_i = D_i(1+Z_k)^n}.$$

Если t_i не входит в f, то результат действия такого оператора — нулевой. Для t_i, соответствующих позициям перехода,

$$t_i = D_{\alpha 1} S_{k_i} C_{k_i^2} P^{(c)}_{k_i,k_{i+1}} S_{k_{i+1}} C_{k_i^2} D_{\alpha 2}.$$

Введем обозначение: $\mathrm{R}^{n,D_i,1}_k$ и $\mathrm{R}^{n,D_i,2}_k$. Дополнительный индекс (1 или 2) указывает, через какое D осуществляется действие.

Наша цель — так подобрать операторы подстановки и скомбинировать результаты, чтобы остались только правильные члены (а результат не обратился бы в ноль). Нам нужно, чтобы t_i покрыли все смешанные элементы — т.е. заняли все выходы из анфилад (переходы) и больше никуда не попали, причем каждое t_i попало в места одного сорта.

Для этого мы будем последовательно обеспечивать это путем обработки сперва групп клеток максимального размера, затем — следующего по величине и т.д.

Все рассуждения будут проводиться в расширенной алгебре $\widehat{A}$ и мы будем осуществлять системы подстановок, чтобы то, что нужно, осталось бы для любого набора специализаций исходных переменных.

Пусть концы всех анфилад из клеток бóльшего размера заняты. Нам надо уничтожить член, у которого данное t_s входит m_j раз в позицию клеток с номером типа j, т.е. входит его $\nu_j x \nu_j$-компонента. И кроме того, t_s может входить в позиции клеток меньшего размера.

Последовательно уничтожая такие члены для всевозможных наборов $\{m_j\}$, и сохраняя при этом правильные члены, мы придем к тому, что нужно. Последнее техническое замечание. Может статься, что конец D, через который осуществляются подстановки, попадет на радикальную позицию (внутреннюю позицию s-й клетки). Тогда оператор вырезания не уничтожит члены, но выделит радикальный элемент в этом неправильном члене. Поэтому положим $D = D_1 \cdots D_{c(a)}$ и повторим $c(a)$ раз процедуру вырезания, используя всякий раз новые D_r. (Параметр r соответствует номеру процедуры. Для всех обрабатываемых многочленов на данном этапе этот номер одинаков.) Тогда в неправильном члене $c(A)$ раз будет вынуждена радикальная специализация, что приведет к его обращению в ноль.

Для начала изучим, как действуют подстановки через t_i:

Предложение 5.19. *а) Пусть буква D_i от t_i входит n раз в клетки k-го типа похожести и не входит в другие типы. Тогда замена $D_i \to D_i \cdot Z$, где Z – центральный полином, отвечающий матрицам соответствующего размера, приводит к умножению на $\mathrm{K}(Z(i)^n)$, где $Z(i)$ – значение этого полинома на компонентах, относящихся к i-й клетке, и, возможно, к появлению дополнительных членов с радикальной специализацией внутрь Z. Эти специализации несмешаны и отвечают клеткам указанных типов.*

б) В условиях п.а) пусть t_i входит k_i раз в клетки k-го типа и не входит в клетки другого размера. Тогда замена $D_i \to D_i \cdot Z$, Z – центральный полином, отвечающий матрицам соответствующего размера, приводит к умножению на

$$\mathrm{K}(\prod_i Z(i)^{k_i}),$$

где $Z(i)$ – значение этого полинома на компонентах, относящихся к i-й клетке и, возможно, к появлению дополнительных членов с радикальной специализацией внутрь Z. Эти специализации несмешаны и отвечают клеткам указанных типов.

в) Пусть также соответствующая буква t_j входит в клетки k-го типа m_k раз и, кроме того, может входить только в клетки меньшего размера. Тогда применение оператора R_k^{n,D_j} приводит к умножению на величину

$$\mathrm{K}(\prod_i (1 + Z(k))^{m_k}) \ - 1$$

и, возможно, к появлению дополнительных членов с радикальной специализацией внутрь Z. Эти специализации несмешаны и отвечают клеткам рассматриваемых типов. □

(В начале главы 5.2 обсуждается язык подстановок и специализаций.)

Замечание. Если Ξ есть многочлен от центральных полиномов, связанных с некоторой клеткой, то $\mathrm{K}(\Xi)$ есть соответствующий элемент из кольца коэффициентов.

Дополнительные члены, с учетом сделанных замечаний, не мешают производить "вырезания". Отметим также, что количества вхождений считаются с учетом кратности клеток.

Пусть z_i – значение центрального многочлена для клеток рассматриваемого размера (n, см. доказательство лемм 5.13, 5.14) в клетке с номером i (переменные, входящие в этот многочлен, фиксированы). Пусть

$$Z_i = z_i^t; \quad k = \prod k_i; \quad S = \prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1.$$

Далее, пусть есть набор $\{t_i\}$, каждое из которых находится в клетках одного своего типа и входит туда k_i раз. При этом все типы покрыты этими t_i по разу. Тогда, действуя через эти t_i, можно создать произведения мономов $z_i^{k_i}$, в силу предыдущего предложения.

Для полинома R вида $Q(z_1^{k_1}, \ldots, z_m^{k_m})$ положим

$$W_{\overrightarrow{k}}(R) = Q = R(z_1^{1/k_1}, \ldots, z_m^{1/k_m}).$$

Оператор $W_{\overrightarrow{k}} = W_{k_1,\ldots,k_s}$ действует на подкольце $\mathbb{F}[x_1^{k_1}, \ldots, x_s^{k_s}]$ кольца $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_s]$. Положим $W_k = W_{\overrightarrow{k}}$, где все $k_i = k$.

Для произвольного полинома $T \in \mathbb{F}[x]$ и подстановки $s : t \to zt$ положим $T_{(s)}(z)$ равным результату применения соответствующего многочлена от оператора s. Аналогично определяется многочлен от нескольких переменных от замен, действующих через разные t. Отметим, что многочлен от подстановки и подстановка от многочлена (от z) совпадают, вообще говоря, только в квазилинейном случае.

Пусть

$$Q = W_{\overrightarrow{k}}(\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1);$$

s_i означает оператор подстановки $t_i \to zt_i$. Определим теперь вырезающий оператор, действующий на многочленах, куда входят t и t_i:

$$E_{\overrightarrow{k},\overrightarrow{m}}(z)(P) = W_{\overrightarrow{k}}(Q)(P) - H_{tz}(P),$$

где $H_{tz}(P) = P|_{t\to(1+z)t} - P$ есть оператор инфинитезимального сдвига (замена $t \to t(1+z) = t + tz$ определена и при отсутствии единицы).

Предложение 5.20. *а) Оператор $E_{\overrightarrow{k},\overrightarrow{m}}(z)$ уничтожает члены, у которых каждое t_j входит в j-й тип m_j раз, а t — k_j раз (и не имеет "радикальных" вхождений). .*

б) Действие этого оператора на правильном слагаемом, у которого каждое t_j входит в j-й тип m_j раз, состоит в умножении на многочлен

$$\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1$$

и, тем самым, ненулевое.

в) Пусть некоторая специализация в $\widehat{A}$ многочлена h есть сумма S правильных членов. Тогда многочлен $E_{\overrightarrow{k},\overrightarrow{m}}(z)(h)$ в алгебре A^{cl} принимает значение S.

Кроме того, при ограничении пучка алгебр на общую точку $E_{\overrightarrow{k},\overrightarrow{m}}(z)(h)$ принимает значение, равное ограничениям S. Соответствующий фактор–пучок обращается в нуль при умножении на любой многочлен (от элементов кольца коэффициентов) вида

$$\prod_i (1 - \mathrm{K}(z_i)^k)^{m_i} - 1.$$

Доказательство. П.а) ясен из построения. Поскольку z обращается в нуль на клетках меньшего размера, то разность тождественного отображения и оператора замены $t \to (1+z)t$ нулевая. Отсюда следует п.б). П.в) есть переформулировка п.б). □

Замечание. Важно подчеркнуть, что переменные t_i могут входить также в типы размера, меньшего рассматриваемого (n). Наличие таких вхождений ни на что не влияет, ибо действие подстановок вида $t_i \to t_i Z^k$ через такие вхождения нулевое. Именно для того, чтобы исключить эффекты, связанные с вхождениями такого рода, и подбирался многочлен

$$\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1.$$

В силу замечания о $c(A)$-кратном применении оператора урезания, путем последовательного уничтожения неправильных членов мы получаем

Следствие 5.4. *а) Существует оператор вырезания, являющийся многочленом от операторов замен, уничтожающий все члены, удовлетворяющих условию пп.б) и в) предыдущего предложения.*

Пусть все концы анфилад размера бо́льшего чем n заняты вхождениями t_{α_i} и в других позициях эти вхождения не встречаются. Существует композиция K операторов замен, описанная в предыдущих пунктах, уничтожающая все члены, в которых t_s входит в клетки бо́льшего чем n размера, и не уничтожающая остальные члены.

Пусть некоторая специализация в $\widehat{A}$ многочлена h есть сумма S правильных членов. Тогда результат применения K к правильным членам, не содержащим вхождение t_s в клетки бо́льшего чем n размера, в алгебре A^{cl} принимает значение S.

Кроме того, при ограничении пучка алгебр на общую точку, $K(h)$ принимает значение, равное ограничениям S. Соответствующий фактор-пучок обращается в нуль при умножении на любой многочлен вида

$$\prod_i (1 - \mathrm{K}(z_i)^k)^{m_i} - 1.$$

б) Существует композиция K замен, описанная в предыдущих пунктах, уничтожающая все члены, не являющиеся правильными. Ее действие на правильных членах удовлетворяет свойствам композиции K, описанным в предыдущем пункте. □

Отметим, что тождественное обращение в нуль величины

$$\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1$$

означает наличие клетки конечного типа! Отметим также, что все величины ограничены функцией от степени обрабатываемого полинома и что вместо $k = \prod k_i$ можно взять $k = \text{НОК}(k_i)$.

Замечания. 1. Отметим, что значение Z на клетках меньшего размера лежит в радикале. Отметим также, что при несмешанной радикальной специализации t_i один из D_{ij} должен иметь первичную специализацию, отвечающей соответствующей клетке. Поэтому композиция расталкивающих операторов, связанных со всем D_{ij}, и в этом случае приводит к нужному результату.

2. В неоднородном случае система вырезающих замен (и, соответственно, степень результата) зависит от многочлена, к которому она применяется. В случае бесконечного основного поля можно сразу взять члены, имеющие нужное вхождение t_i, и работать с ними.

3. Чтобы многочлен, который появляется при уничтожении лишних специализаций t_j в клетки размера бо́льшего, чем нужно, не обратился в ноль, координатное кольцо клетки должно быть достаточно большим. Равенство

$$\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1 = 0$$

или соотношение $Z^q - Z = 0$ обеспечивает конечность размера клетки. Появление таких соотношений как условие "необщего положения" для точек схемы означает редукцию клеток бесконечного типа к конечному.

Применение данного предложения позволяет оставить только нужные нам правильные члены.

Отметим, что для осуществления процесса расталкивания t_i возникают многочлены ограниченной степени (степень которых оценивается через $\deg(f)$). С другой стороны, для получения нужного идеала $P(H)$ достаточно взять конечное число полиномов f_i. Поэтому степень идеала из предложения 5.19 (а, значит, и идеала, отвечающего схеме $\mathcal{H}$ из предложения 5.26) можно оценить. Конечность порождающего набора $\{f_i\}$ приводит к тому, что достаточно большой центр в матричной алгебре соответствующей клетки равносилен бесконечному. Сформулируем теперь первую вынуждающую лемму.

Лемма 5.13 (О расталкивающих подстановках. I). *Пусть $g \in J_C(A)$. Тогда существует многочлен h со следующими свойствами:*

h получается из некоторой квазилинеаризации g путем замен $x_i \to Q_i$, где Q_i – многочлены, описанные в разделе 4.5, отвечающие концам анфилад клеток максимального состава, и применению расталкивающих операторов из предложения 5.20 и следствия 5.4;

при любой специализации переменных в $\widehat{A}$ с ненулевым результатом, выполняются условия:

1) *в ядрах Q_i имеется ровно по одному смешанному радикальному элементу и он имеет существенный тип;*

2) *вне ядер Q_i таких специализаций нет;*

3) *тип каждой такой смешанной специализации соответствует типу многочлена Q_i;*

4) *при этом структура соответствий (одинаковости и независимости типов) у этих специализаций для концов Q_i во всех слагаемых одна и та же (см. определение 4.8);*

5) *составные специализации переменных отсутствуют (см. определение 4.2);*

6) *данный полином h порождает R-замкнутый T-идеал, являющийся нетеровым R-модулем.*

При этом множество значений g в алгебре A^{cl} покрывается множествами значений полиномов h указанного вида.

Доказательство. Свойство 6, в силу леммы 0.5, вытекает из предыдущих свойств (см. раздел 4.6.2). Свойство 5 справедливо для любой специализации полинома из $J_C(A)$. В самом деле. Будем действовать, как и при доказательстве леммы Кемера 3.4. Введем новую радикальную переменную, соответствующую элементу из произведения радикала, и занулим компоненты максимального состава для остальных образующих. Получится элемент из $\mathrm{T}(g)$, который не обращается в ноль в алгебре с путями меньшего существенного состава. Что касается последнего свойства, то оно автоматически следует из доказательства этой леммы, которое сейчас будет приведено, и предложения 5.15.

Займемся свойствами 1–4.

Осуществляем систему замен $a_i \to a_i + \sum_j Q_{ij}$, где многочлены Q_{ij} отвечают существенным граничным операторам (т.е. существенным смешанным компонентам a_j), связанным с существенными клетками максимального размера. При этом все переменные, входящие в разные Q_{ij}, различны. Эти замены строятся в зависимости от удачной специализации (представления элемента в виде суммы градуированных компонент). В силу существенной однородности и того факта, что множество значений Q_{ij} покрывает весь радикал соответствующей граничной алгебры (предложение 4.17), ненулевой специализации отвечает ненулевое действие замены вида $a_i \to a_i + \sum_j Q_{ij}$ с последующей квазилинеаризацию по Q_i — выбором членов, содержащих соответствующие Q_{ij}. Они, в свою очередь, соответствуют набору компонент, задающих полный комплект граничных операторов вдоль пути C.

Будем вести обработку поэтапно, начиная с Q_i, отвечающих клеткам максимального (необработанного) размера, и идти вниз по размеру. Система образований, занявших концы клеток уже обработанных размеров, будет называться *ведущей.* На каждом этапе обрабатывается свой размер. В каждое Q_i, соответствующее первому этапу, должна попасть существенная радикальная компонента, отвечающая клетке максимального размера. Это следует из того, что соответствующие Q_i в факторе, порожденном клетками максимального размера, обращаются в нуль. Далее расталкивающими операторами добиваемся нужной структуры похожести. Если после этого остается возможность для максимальных существенных специализаций у переменных, не входящих в Q_i, то в этом случае осуществляется еще одна квазилинеаризация. Продолжаем процесс дальше, пока возможности для "самых больших" Q_i не будут исчерпаны.

Итак, **первый этап:** Осуществляем систему замен $a_i \to a_i + \sum_j Q_{ij}$, где многочлены Q_{ij} отвечают граничным операторам, связанным с существенными клетками максимального размера. При этом все переменные, входящие в разные Q_{ij} различны и не совпадают с исходными переменными. Далее, в силу процедуры квазилинеаризации, можно выделить члены с ненулевой суммой, содержащие максимально возможное число вхождений различных многочленов Q_{ij} (для которых количество различных встречаемых пар индексов (ij), максимально). Получится многочлен $g_1 \in \mathrm{T}(g)$. Пусть s_1 – общее количество концов и переходов для клеток максимального размера вдоль пути C.

Переменные, входящие в Q_{ij} мы назовем *ведущими.* Заметим, что если провести подстановку вида $a_i \to a_i + \sum_j Q_{ij}$ с неведущей переменной (Q_{ij} связано с клетками максимального размера) и выбрать члены, содержащие Q_{ij}, то результат будет нулевым. (В силу леммы 5.7 возможность для ненулевой специализации равносильна возможности осуществить подстановку соответствующего Q_i в квазилинеаризацию.)

Поэтому, в силу существенной однородности, процедуры выбора общих элементов и построения алгебры $\widehat{A}$, неведущие переменные не могут иметь соответствующих специализаций (без нулевого результата).

С другой стороны, поскольку $g \in J_C(A)$, общее число таких специализаций должно в точности равняться s_1. Поэтому выбранные члены имеют в точности s_1 (с учетом кратностей) совокупных вхождений Q_{ij}.

Первый этап пройден и многочлен $g_1 \in \mathrm{T}(g)$ построен.

Опишем теперь r**-й шаг процедуры**. Пусть построен многочлен $g_{r-1} \in \mathrm{T}(g)$, а также ведущая система Q^r_{ij} такая, что все концы существенных клеток размера выше n_i уже заняты. Рассмотрим подстановку вида $a_i \to a_i + \sum_j Q^r_{ij}$, где Q^r_{ij} связаны с концами клеток размера n_i. Пусть s_i есть количество концов клеток размера n_i вдоль пути C.

При этом, поскольку концы существенных анфилад из самых крупных клеток уже заняты, в силу леммы 5.9, специализации остальных переменных из каждого данного вхождения Q^r_{ij} лежит либо целиком внутри таких анфилад, либо целиком вне.

При специализации могут возникнуть члены следующих трех типов:

1) Для которых переменные, входящие в некоторый Q^r_{ij} не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, бóльшего n_i либо с граничными операторами для клеток размера n_1.

   В силу конструкции полиномов Q^r_{ij} (см. предложение 4.19) сумма указанных членов обращается в ноль.

2) Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q^r_{ij}, имеют специализации, связанные с существенными клетками размера, бóльшего n_i.

   Такие члены уничтожаются применением расталкивающих операторов с использованием предложения 5.20 и следствия из него 5.4.

3) Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q^r_{ij}, не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, бóльшего n_r, но для каждого Q^r_{ij} одна из переменных, входящих в Q^r_{ij}, имеет специализацию, связанную с граничными операторами для клеток размера n_r.

   Операторы вырезания не уничтожают суммы членов третьего типа, ибо все они умножаются на одну и ту же величину.

Далее, воспользовавшись квазилинеаризацией, выберем ненулевую сумму с максимальным возможным числом вхождений типов многочленов Q^r_{ij} (максимальное число возможных пар индексов). (Получится многочлен, квазилинейный по переменным, входящим в Q^r_{ij}.) Рассуждая, как и в случае начального этапа, устанавливаем, что для неведущей переменной a_i подстановка $a_i \to a_i + \sum_j Q^r_{ij}$ вместе со взятием суммы членов, содержащих Q^r_{ij}, приводит к нулевому результату и, таким образом, построенный многочлен $g_r \in \mathrm{T}(g_{r-1})$ имеет s_r вхождений Q^r_{ij} (с кратностями), и в каждом из них ровно одна переменная из ядра имеет специализацию, связанную с оператором перехода для существенной клетки размера n_r.

Таким образом, путем последовательного расширения ведущих систем получается искомый полином g_μ, где μ — число различных размеров существенных клеток.

Остается отметить, что свойство 4 обеспечивается после того, как обеспечены остальные свойства. Для этого достаточно применить к g_μ композицию расталкивающих операторов вида $P|_{D_{ij} \to D_{ij} Z^{m_\alpha}} - P|_{D_{rs} \to D_{rs} Z^{m_\beta}}$ и получить требуемый полином h. Члены с нужным соответствием между типами умножатся на одну и ту же константу, а остальные члены — уничтожатся.

Утверждения о множестве значений многочленов в алгебре A^{cl} и о спектре доказываются индукцией по степени квазилинеаризации. (Берется фактор по квазилинеаризациям. По его модулю членов с дополнительными квазилинеаризациями не остается. В квазилинейном случае утверждение устанавливается так же, как и в лемме 5.9. Поэтому имеется совпадение в факторе и в пространстве, по которому факторизуют.) $\square$

Замечание. Из доказательства следует, что для любого конечного набора алгебр, у которых составы максимальных путей изоморфны, можно указать универсальную процедуру вырезания (она зависит от степени обрабатываемого многочлена, но не от алгебры).

Лемма 5.13 нужна для доказательства локальной шпехтовости. Для доказательства локальной представимости нужно утверждение, относящееся к более общей ситуации. Когда $g \notin J_C$, возможны следующие ситуации. Во-первых, появление при специализации членов, отвечающих специализации нескольких смешанных элементов (или элемента, из идеала, их содержащего) внутрь ядер Q_i. Во-вторых, может в разные слагаемые войти разное число существенных компонент, и нарушится существенная однородность. И в-третьих — могут присутствовать не все типы клеток.

Будем говорить, что однородный элемент из $\widehat{A}$ имеет *полный состав*, если его степень получается из произведения компонент, среди которых присутствуют относящиеся к каждой клетке, и *существенно полный состав*, если присутствуют компоненты, относящиеся к каждой существенной клетке. *Совсем полный (существенный) состав* означает присутствие компонент, связанных с существенными клетками. Мы будем говорить что T-идеал имеет *(совсем) полный (существенный) состав*, если таковы все его значения.

Определим для переменных типа D, формирующих полиномы Q_i, понятие *предназначенного размера*, обозначаемого $n(D)$. Это — размер клетки в граничной алгебре, соответствующей данному полиному, в которую должна попасть соответствующая переменная (т.е. в выражении для значения Q_i в указанной алгебре дает ненулевой вклад только такая специализация этой переменной). Для алгебр входа или выхода это размер единственной клетки, а для алгебры перехода это размер "левой" или "правой" клетки, в зависимости от того, где стоит эта переменная.

Принципиальное значение имеет то обстоятельство, что подстановки, вообще говоря, позволяют выделять члены полного состава, но не всегда позволяют выделять максимальный состав. Количество операторов перехода в разных членах может быть связано по Фробениусу. В этом причина появления неоднородных T-идеалов. Поэтому нам понадобится "вторая вынуждающая лемма":

Лемма 5.14 (О расталкивающих подстановках. *II*). *Пусть $f \not\equiv 0$ в A и принимает значение полного существенного состава, $q = p^k > c(\widehat{A})$. Тогда существует квазилинейный многочлен $g \in \mathrm{T}(f)$; $g|_A \neq 0$, который имеет вид $g = \phi(\overrightarrow{x}, Q_1, \dots, Q_s)$, где $\phi \in \mathrm{T}(f)$, причём при любой специализации переменных в $\widehat{A}$ с ненулевым результатом выполняются условия:*

1) *в ядрах Q_i имеется ровно по одному смешанному радикальному элементу. Он имеет существенный тип.*

2) *Вне ядер Q_i таких специализаций нет.*

3) *Тип каждой такой смешанной специализации соответствует типу многочлена Q_i и соответствующего граничного оператора.*

4) *Структура соответствий (одинаковости и независимости типов) у этих специализаций для D_{ij} – концов Q_i во всех слагаемых одна и та же (см. определение 4.8).*

5) *Составные специализации переменных элементов отсутствуют (см. определение 4.2).*

6) *Результат любой подстановки $D_* \to D_*\psi$ или $D_* \to \psi D_*$ равен нулю, если ψ есть тождество матриц размера $n(D_*)$.*

7) *Данный полином h порождает S^q-замкнутый T-идеал. являющийся нетеровым S-модулем.*

   (Кольцо S определено ниже в разделе 5.3.2.)

При этом переменные из ядер многочленов Q_{ij} не встречаются нигде больше и множество значений g в алгебре A^{cl} покрывается множествами значений полиномов h указанного вида.

Доказательство. Свойство 4 обеспечивается после того, как обеспечены остальные свойства, и делается это точно так же, как и в доказательстве леммы 5.13.

Свойство 7 вытекает из предыдущих свойств. С помощью подстановок внутрь многочленов Капелли, содержащихся в ядрах Q_i, мы приобретем возможность умножать на внутренние формы (умножение зависит от записи), причем в силу свойства 6 операторы форм будут коммутировать между собой (и допускать переброску на другие Капелли, см. леммы и предложения 2.7, 2.3, 2.4).

Разложению элементов на радикальные и полупростые части отвечает соответствующее разложение внутренних форм. Заметим следующее.

Во-первых, в силу свойства 6 внутренние формы можно перекидывать с одного "внутриядерного" "Капелли–множителя" на другой. Следовательно, все операторы внутренних форм будут между собой коммутировать, ибо их можно раскидать по разным $C_{n_i^2}$. В частности, радикальная компонента формы коммутирует с полупростой.

Во-вторых, $q > c(A)$ и, в силу только что сказанного, q-я степень формы не содержит радикальных компонент (см. также раздел 3.4.1).

И в-третьих, поскольку внутри Q_i содержится более $c(A)$ Капелли–множителей C_k, то при любой специализации все входящие в него переменные не имеют радикальных специализаций. Тогда для любой специализации в $\widehat{A}$ можно сделать следующее: систему подстановок, соответствующих умножению на форму, можно перекинуть туда, где нет радикальных специализаций у переменных, которые образуют соответствующий $C_{n_i^2}$. В этом случае q-я степень формы не будет иметь радикальной части.

Внутренняя форма Ψ от полупростого элемента, определенная с помощью многочлена Капелли, все переменные в котором имеют чисто полупростые специализации, есть просто оператор умножения на коэффициент из кольца, порожденного компонентами матричных единиц, — умножение на элемент Ψ_i.

Итак, полупростая компонента q-й степени внутренней формы будет как и у соответствующей "внешней", а радикальная компонента уничтожится. Таким образом, q-е степени внешних форм совпадут с q-ми степенями внутренних, действующих умножениями на коэффициенты.

Возможность умножать на q-е степени внутренних форм означает, что соответствующее действие кольца инвариантов S^q (симметрических функций от операторов внутренних форм для всех вхождений в Q_i, связанных с клетками данного размера) осуществляется с помощью одновременного действия для всех концов Q_i, связанных с данным размером, и применения леммы 0.5. Отметим, что можно было бы не переходить к симметрическим функциям, но тогда коммутативное кольцо, действующее на $\mathrm{T}(g)$, зависело бы от g, что неудобно. (С переходом к симметрическим функциям, связанных с группой перестановок типов, мы встречаемся неоднократно.)

Свойство 6 обеспечивается так: пусть оно не выполняется. Построим многочлен g', удовлетворяющий предыдущим свойствам, и сделаем описанную выше подстановку $D_* \to D_*\phi$. Получится многочлен $g_1|_A \neq 0$. При этом в многочлене g_1 внутри переменных, образующих ϕ, будет вынуждена (несмешанная) радикальная специализация. Теперь применим систему подстановок к переменным из g_1 и аналогичным образом построим g_2. В силу теоремы о нильпотентности радикала процесс остановится. (А можно действовать и так: осуществить подстановку $D_* \to D_*P$, где многочлен P выбран так, чтобы результат был ненулевым, а при этом P принадлежал максимально возможной степени идеала тождеств матриц порядка $n(D_*)$.)

Замечания. 1. Похожие рассуждения использовались в разделе 4.6.2 при построении экстремального идеала для доказательства рациональности рядов Гильберта.

2. Можно рассуждать и так. Для какого-то Q_i внутренние формы, определенные через разные Капелли–множители $C_{n_i^2}$, не совпадут. Тогда разность таких форм обязана иметь в группе переменных, образующих эти $C_{n_i^2}$, а также оператор формы, радикальные специализации. Причем по условию она не равна нулю. Рассматриваем следующую пару Капелли–множителей и продолжаем процесс. Он может продолжаться не более чем $c(\widehat{A})$ шагов. По окончании процесса мы придем к ситуации предыдущего пункта.

Свойство 4 обеспечивается после того, как обеспечены остальные свойства (см. доказательство леммы 5.13). Для этого используются операторы типа AD_{ij}, действующие через t_i, t_j.

В отличие от предыдущего случая (доказательства леммы 5.13), свойство 5 уже автоматически не обеспечивается, поскольку для исходного многочлена оно может не выполняться. Будем осуществлять процесс простановки Q_i как и раньше, начиная с обработки вхождений существенных компонент, связанных с клетками максимального размера, постепенно переходя к меньшим размерам. Работа ведется по этапам, на каждом этапе обрабатывается свой размер и строятся дополнительные ведущие образования, покрывающие концы существенных клеток следующего размера. Когда осуществляется очередной этап, то концы существенных анфилад бо́льшего размера уже заняты. Поэтому в силу леммы 5.9 возможны вхождения вспомогательных образований или целиком внутрь анфилад бо́льшего размера, или целиком наружу. Вхождения первого типа уничтожаются путем применения расталкивающих операторов из предложения 5.20. Вхождения второго типа создают новые Q_i, которые требуется построить в лемме, и мы их копим. Процесс ничем не отличается от предыдущего случая, пока не встретится вхождение более одной существенной компоненты внутрь очередного Q_i, либо компоненты переменной, связанной с произведением смешанных элементов. Мы сформулируем индукционную лемму, означающую возможность пройти каждый этап и построить новую систему ведущих переменных. Основное утверждение из нее очевидным образом следует. (В качестве базы индукции можно взять пустое множество специализаций, отвечающих клеткам размера бо́льшего чем $n_{\max}$.)

Лемма 5.15 (Индукционная). *Пусть $n_1 > \ldots > n_m$ – размеры существенных клеток в алгебре A. И кроме того, многочлен Φ в A не обращается тождественно в нуль, имея следующий вид:*

$$\Phi = F(H_1^{n_1}, \ldots, H_{p_1}^{n_1}, \ldots, H_1^{n_k}, \ldots, H_{p_k}^{n_k}, \overrightarrow{x}),$$

где $H_i^j = {D'}_i^j Q_i^j {D''}_i^j$; многочлены Q_i^j соответствуют концам существенных анфилад из клеток размера n_j; ${D'}_i^j$, ${D''}_i^j$ – вспомогательные переменные.

И пусть для любой специализации переменных в $\widehat{A}$ с ненулевым результатом имеет место следующее:

1) *В ядрах Q_i^j имеется ровно по одному смешанному радикальному элементу, существенный тип которого относится к клетке размера $n_j \geq n_k$.* [1]

2) *Вне ядер Q_i^j таких специализаций нет.*

3) *Тип каждой такой смешанной специализации соответствует типу многочлена Q_i^j.*

4) *Структура соответствий (зависимости и независимости) у специализаций концов Q_i, которым соответствуют клетки размера $\geq n_k$, во всех слагаемых одна и та же (см. определение 4.8).*

5) *Специализации переменных, отвечающих произведению смешанных элементов, связанных с клетками размера бо́льшего или равного n_k, отсутствуют.*

6) *Все специализации внутри "центрального" полинома Z_{ij}^d, относящегося к Q_i^j, являются внутренними по отношению к соответствующей анфиладе, причем в каждом слагаемом есть множитель Z из Z_{ij}^d, содержащий только полупростые специализации.*

Тогда существует многочлен $\Phi' \in \mathrm{T}(\Phi)$, причем $\Phi' \not\equiv 0$ в алгебре A, который имеет вид

$$\Phi' = F'(H_1^{n_1}, \ldots, H_{p_1}^{n_1}, \ldots, H_1^{n_{k+1}}, \ldots, H_{p_{k+1}}^{n_{k+1}}, \overrightarrow{x})$$

и удовлетворяет тем же условиям (но уже и для компонент при клетках размера n_{k+1}). Он получается из Φ путем квазилинеаризации по D и переменным из $\overrightarrow{x}$, подстановкам вида $D \to D^{(1)}D^{(2)}$, $t_\alpha = D'Q^{k+1}D''$, $t_\alpha = D_1'Q_1^{k+1}D_1''D_1' \cdots {Q'}_s^{k+1}D_s''$ и применению расталкивающих операторов (т.е. подстановок типа $D \to DZ$, где Z – значение подходящего центрального полинома, и взятия линейных комбинаций. При этом переменные, участвующие в таких расталкивающих заменах, нигде больше не фигурируют.)

Доказательство индукционной леммы. Если специализации, соответствующие клеткам размера n_{k+1}, уже невозможны, то ничего делать не надо и можно положить $\Phi' = \Phi$. Свойство 6 вытекает из предыдущих свойств в силу леммы 5.9. Оно же, будучи выполнено для Φ, дает возможность осуществлять "вырезания" — т.е. уничтожать попадания дополнительных Q_i внутрь уже "обработанных" анфилад размера $n_j \geq n_k$ (см. предложение 5.20 и следствие 5.4).

[1] Если конец Q_i^j связан с клетками размера строго меньшего n_k, то возможны дополнительные смешанные специализации, связанные с меньшими типами. От них избавляемся с помощью леммы 5.8.

Специализация есть вербальный оператор, действующий на многочленах, вставляющий элементы из $\widehat{A}$. Назовем специализацию части переменных *удачной*, если она продолжается до полной специализации. *Полная специализация* — это если суммарная градуировка всех участвующих вербальных операторов полна.

Будем вести обработку специализаций с использованием лемм 5.7 и 5.8, как и раньше.

Осуществляем систему замен $a_i \to a_i + \sum_j Q_{ij}$, где многочлены Q_{ij} отвечают граничным операторам, связанным с существенными клетками максимального размера. При этом все переменные, входящие в разные Q_{ij}, различны. Эти замены строятся в зависимости от удачной специализации (представлению элемента в виде суммы градуированных компонент). Воспользуемся "спектральным рассуждением ". В силу того, что множество значений многочлена типа Q_i, отвечающего своей граничной алгебре, покрывает весь радикал (предложение 4.17), ненулевой специализации отвечает ненулевое действие замены вида $a_i \to a_i + \sum_j Q_{ij}$ с выбором членов, содержащих соответствующее Q_{ij}.

Как и в доказательстве леммы 5.13, с помощью квазилинеаризации мы будем выбирать члены, содержащие максимально возможное число вхождений типов многочленов Q_{ij}^r (максимальное число возможных пар индексов), линейная комбинация которых дает удобную специализацию. (В доказательстве леммы 5.13 члены с бо́льшим числом вхождений типов давали нулевой вклад. В нашем случае они дают ненулевой вклад на данном шаге, но образуют неудобную специализацию, которая обратится в ноль по окончании всего процесса.) Тем самым специализации, связанные с граничными операторами для клеток размера n_r, вне Q_{ij}^r окажутся неудобными и по окончании процесса дадут нулевой вклад.

Неудачные специализации (линейные комбинации членов), связанные с операторами, отвечающими клеткам уже обработанных размеров, уничтожаются на последующих шагах. Поэтому добавочные суммы, отвечающие неудачным специализациям, не рассматриваются.

Поскольку концы анфилад из клеток размера $\geq n_k$ уже заняты (см. предложение 5.9), то все специализации новых Q_{ij}^r осуществляются либо целиком внутрь анфилад из клеток размера $\geq n_k$, либо целиком вне их. Таким образом, при специализации могут возникнуть члены четырех типов:

1) Для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, бо́льшего n_i либо с граничными операторами для клеток размера n_1.

   В силу конструкции полиномов Q_{ij}^r (см. предложение 4.19) сумма указанных членов обращается в ноль.

2) Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r, имеют специализации, связанные с существенными клетками размера, бо́льшего n_i.

   Такие члены уничтожаются применением расталкивающих операторов с использованием предложения 5.20 и следствия из него 5.4.

3) Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r, не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, бо́льшего n_r но для каждого Q_{ij}^r одна из переменных, входящих в Q_{ij}^r, имеет специализацию, связанную с граничными операторами для клеток размера n_r.

   Операторы вырезания не уничтожают суммы членов третьего типа, ибо все они умножаются на одну и ту же величину.

В отличие от случая из леммы 5.13) должны быть члены с ненулевой суммой, отвечающие составной специализации "обрабатываемой" переменной (см. определение 4.2). Это

4) Члены, для которых суммарная степень однородности некоторых многочленов Q_{ij}^r является составной. Эта специализация соответствует произведению, содержащим несколько существенных компонент, связанных с клетками размера n_{k+1}.

   Если возникают такого рода специализации, которые продолжаются до специализации всего многочлена полной степени однородности, то сводим этот случай к предыдущему.

   А именно. Каждому члену, связанному со смешанной специализацией переменной t порядка s, отвечают простые специализации переменных t_i после подстановки $t_1 \cdots t_s \to t$. Таким образом, осуществляется замена $t_\alpha = D_1' Q_1^{k+1} D_1'' D_1' \cdots Q_s'^{k+1} D_s''$ для максимально возможного s. Это обеспечивает невозможность дополнительных существенных специализаций, связанных с клетками размера n_{k+1}, внутрь многочленов вида DQD, ранее введенных на том же этапе.

5) Случай составной существенной специализации внутрь ядра некоторого Q_i^j, построенного на предыдущих шагах, или внутрь D_i.

   Первый случай сводится ко второму. В силу лемм 5.7 и 5.8 членам, имеющим составную специализацию внутрь ядра Q_i^j, отвечают члены с одной простой существенной специализацией внутрь ядра Q_i^j и дополнительными специализациями внутри D_i. И если есть члены с ненулевой суммой, отвечающие составной специализации в ядрах Q_i^j, то члены с дополнительными специализациями D_i также дают ненулевой вклад. И обратно. Если членов с дополнительными специализациями D_i нет, то и нет членов с лишними существенными специализациями в ядра Q_i. Таким образом, всегда существует удачная специализация с ровно одной существенной специализацией в ядре каждого Q_i (отвечающей моменту его появления).

   Когда существенная специализация осуществляется внутрь D, то делаем также замену $D \to D^{(1)} D^{(2)}$, чтобы не испортить окружение Q_i^j, а затем — замену вида $D^{(1)} \to D^{(1)} Q_{ij}^r$. Это можно сделать опять-таки в силу тех же соображений и получить удачную специализацию без составных (относительно операторов, связанных с клетками обрабатываемого размера) специализаций. Эта процедура будет проводиться до тех пор, пока возможности для удачных специализаций, разбираемых здесь, не будут исчерпаны (не позднее, чем за $c(A)$ шагов).

   В результате такой системы замен получается многочлен, в котором все специализации, отвечающие граничным операторам для клеток размера n_r, возможны только внутри ядер построенных Q_{ij}^r, а линейная комбинация членов, содержащих иные специализации, для таких операторов не является удачной (и уничтожится на последующих шагах процесса).

Редукционная лемма доказана, а вместе с ней и лемма о заменах. □

Замечания. 1. Отметим, что замены строятся в соответствии со специализациями. Легко видеть, что возникают позиции с вынужденной смешанной радикальной специализацией, а рассуждение с соответствием членов показывает, что получается ненулевой результат. Что касается членов, у которых смешанная специализация осуществляется в другие места, без соответствия процедуры организации замен (в частности, неудачные члены), то на них результат будет нулевым.

2. Структура расталкивающих операторов зависит не только от существенного состава (т.е. граничных операторов, относящихся к существенным клеткам), но и от других радикальных компонент, ибо может потребоваться разное число "вырезаний". Однако если многочлен имеет вид как в леммах о заменах, то для любой системы расталкивающих замен для любой алгебры с тем же существенным составом применение соответствующих операторов к многочлену h приведет к появлению многочлена h', принимающего *то же множество значений* в алгебре A^{cl}, что и многочлен h. Поэтому для нескольких алгебр можно брать универсальные вырезающие замены.

3. Данный раздел аналогичен разделу 3.3.1. Расталкивающие замены можно рассматривать как своего рода обобщение полиномов Капелли, а данное замечание — как утверждение, аналогичное лемме 3.11.

Следующее предложение уточняет утверждение леммы о заменах для полного состава:

Предложение 5.21. *В условии леммы о заменах пусть имеется ненулевое значение полинома g в алгебре $\widehat{A}$, градуированная компонента которого имеет полный существенный состав. Тогда он принимает значение, являющееся линейной комбинацией членов полного существенного состава, и кроме того*

а) Значение полинома g в алгебре A содержит ненулевой элемент, являющийся линейной комбинацией элементов полного существенного состава.

б) $\mathrm{T}(g)$ содержит ненулевой T-идеал вида, указанного в лемме о заменах, имеющий полный существенный состав.

Доказательство. Утверждение о значении, являющемся линейной комбинацией членов полного существенного состава, есть следствие существенной однородности T-идеалов в $\widehat{A}$ и возможности подставлять однородные элементы, п.б) есть непосредственное следствие п.а) и леммы о заменах. А вот доказательство п.а), по сравнению с доказательством указанной леммы, нуждается в модификации. Дело в том, что после того, как возможности для существенной радикальной специализации будут исчерпаны, может оказаться, что не все существенные типы клеток будут представлены. Процесс выбора компонент может ветвиться. Например, после получения компонент от всех самых больших клеток может остаться возможность для дальнейшего выбора таких компонент, и процесс пойдет путем, отличным от построения специализации, соответствующей g, которая гарантирует возможность полного состава. Отметим, что при обработке максимального состава такой ситуации не возникает: идем по отмеченным специализациям и это обеспечивает жесткость.

Таким образом, надо научиться осуществлять "вырезания" в тех ситуациях, когда обработаны все существенные типы размера выше данного, но еще есть возможность для специализаций в такие типы.

Будем говорить, что переменная *входит в клетки данного типа с кратностью k*, если k есть сумма количеств вхождений этой переменной в клетки этого типа с учетом кратностей клеток для каждого вхождения. Нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 5.16. *Пусть типы T_j и вхождения в них переменных из набора $\{D_i\}$ устроены следующим образом:*

- *Размеры клеток для всех $\mathcal{T}_j$ одинаковы.*
- *Каждая переменная D_i входит $\mathcal{T}_j$ с кратностью k_{ij}; $i, j = 1, \dots n$ и не имеет других вхождений.*
- *Система из n векторов $\overrightarrow{k}_i = (k_{i1} \dots, k_{in})$ линейно зависима.*

Тогда существуют два непересекающихся непустых подмножества I и J множества $\{1, \dots, n\}$ и две различные подстановки $D_i \to D_i Z^{n_i}$, $i \in I$, $\max n_i \neq 0$ и $D_i \to D_i Z^{n_i}$, $i \in J$, $\max n_i \neq 0$, такие, что соответствующие члены при специализациях D_i удовлетворяют вышеуказанным свойствам, а специализации переменных типа Z полупросты, одинаковы.

Доказательство. Пусть векторы $\{\overrightarrow{k}_i\}$ линейно зависимы. Тогда между числами k_{ij} при некоторых непересекающихся множествах индексов I и J неотрицательных целых n_j выполняется набор соотношений:

$$\sum_{j \in I} k_{ij} n_j = \sum_{j \in J} k_{ij} n_j.$$

Тогда пара подстановок $(D_i \to D_i Z^{n_i},\ i \in I;\ D_i \to D_i Z^{n_i},\ i \in J)$ будет искомой. $\square$

Данная лемма позволяет "осуществлять вырезания" линейно зависимых ситуаций. Разность результатов у этих пар подстановок приводит к умножению на

$$\tau \quad = \quad \prod_{j=1}^{n} Z_j^{\sum_{i \in I} k_{ji} n_i} - \prod_{j=1}^{n} Z_j^{\sum_{i \in J} k_{ji} n_i}$$

(Z_i – значение Z в i-м типе с кратностью 1).

И если все типы существенны, $\tau \not\equiv 0$.

Лемма 5.17. *Пусть типы $\mathcal{T}_j$ и вхождения переменной D, а также переменных из набора $\{D_i\}$ устроены следующим образом:*

- *Размеры клеток для всех $\mathcal{T}_j$ одинаковы и равны m.*
- *Набор $\{\mathcal{T}_j\}$ покрывает все существенные клетки размера m.*
- *Каждая переменная D_i входит $\mathcal{T}_j$ с кратностью k_{ij}; $i, j = 1, \dots n$, и не имеет других вхождений.*
- *Система из n векторов $\overrightarrow{k}_i = (k_{i1}, \dots, k_{in})$ линейно независима.*
- *Переменная D не входит в клетки размера, бóльшего m, в несущественные типы и не имеет радикальной специализации (но может входить в клетки меньшего размера).*

Тогда существует оператор расталкивания, уничтожающий все неправильные члены и умножающий правильные на один и тот же многочлен. При этом рассматриваются компоненты при подстановках, действующих через D и $\{D_i\}$ с теми же специализациями этих переменных и полупростыми специализациями других переменных, участвующих в заменах. (Обращать в ноль суммы прочих компонент не требуется.)

Член называется *правильным*, если D в типы из $\{\mathcal{T}_j\}$ не входит.

Доказательство. Достаточно уничтожить неправильные члены с фиксированным набором кратностей, сохраняя при этом правильные. Тогда путем последовательного применения этой процедуры для всех таких наборов мы получим то, что нужно.

Пусть Z – центральный многочлен для клеток размера m. Рассмотрим оператор $H_k(F) = F|_{D\to D(1+Z^k)} - F$. Он уничтожает правильные члены (ибо Z обращается в ноль на клетках меньшего размера). Пусть $\overrightarrow{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ – вектор кратностей вхождений D в типы $\{\mathcal{T}_j\}$. Члены же, в которых D входит в i-й тип с кратностями $\{n_i\}$, умножаются на полином

$$\prod_i (1 + Z_i^k)^{n_i} - 1.$$

Ясно, что при подходящем k вектор степеней $\overrightarrow{z} = \{z_i\}$ выражается через векторы кратностей D_i с целыми коэффициентами. Следовательно, он получается как разность двух таких комбинаций с целыми неотрицательными коэффициентами. При этом вычитаемое может быть сделано одним и тем же для всех этих векторов степеней.

Применим к $H_k(F)$ систему подстановок: $D_i \to D_i Z_i^n$, где n_i – коэффициенты при линейной комбинации вычитаемого. Обозначим результат $H'(F)$. С другой стороны, каждый член в многочлене

$$\prod_i (1 + Z_i^k)^{n_i} - 1,$$

умноженный на величину

$$\prod Z_j^{\sum_i n_i k_{ij}},$$

возникает в качестве множителя (в членах с полупростыми специализациями величин типа DZ, $D_i Z$ и со специализациями D и D_i, удовлетворяющими описанным выше условиям) при применении к F системы подстановок: $D_i \to D_i Z_i^m$, где m_i – коэффициенты при линейной комбинации уменьшаемого.

Разность $H'(F)$ и суммы результатов соответствующих подстановок даст то, что нужно. Лемма доказана. $\square$

Предложение 5.21 выводится из этих двух лемм с помощью тех же рассуждений, что и лемма о заменах. Единственное, что надо отметить, — возможность радикальных специализаций D_i и переменных, которые через них подставляются. (Если такие специализации полупросты, то то, что подставляется через D или D_i, принадлежит тому же типу в соответствующем вхождении.) Для этого вместо переменных D и D_α работаем с произведениями переменных $D_1 \cdots D_{c(A)}$ и $D_{\alpha,1} \cdots D_{\alpha,c(A)}$. При этом обрабатываем наборы $\mathcal{D}$ при каждом индексе (нумерующем позицию в произведении для D или D_α) отдельно и независимо. Делаем вид, что радикальных вхождений в эти D нет. Данная система оставляет только члены, где $\mathcal{D}$ покрывает все существенные специализации, а на сумму членов с правильным расположением D при подходящем процессе переводится не в ноль. (Каждый член суммы умножается на ненулевой полином от свободных трансцендентных переменных, который зависит только от кратностей вхождений D в типы. А члены с разными кратностями вхождений D_i независимы в $\widehat{A}$ по причине однородности. По той же причине радикальные специализации переменных, с которыми работали, не могут скомпенсировать нужные члены (для расталкивания всякий раз выбираются новые переменные). Предложение 5.21 доказано. $\square$

Определение 5.6. Пусть f есть произвольный многочлен. Обозначим через $P(f)$ T-идеал, порожденный элементами из $\mathrm{T}(f)$, удовлетворяющими условию предложения 5.21. Если f не принимает в алгебре $\widehat{A}$ значения полного существенного состава, то $P(f) = 0$. $P(I)$ есть сумма $\sum_{f\in I} P(f)$. Аналогичным образом, $\varphi(f)$ есть множество элементов из $\mathrm{T}(f)$, удовлетворяющих заключению леммы о расталкивающих заменах 5.14, и $\varphi(I) = \sum_{f\in I} P(f)$. Для T-идеала Γ аналогично определяется T-идеал $P(\Gamma)$.

Замечания. 1. Леммы 5.17 и 5.16 позволяют осуществлять "вырезания" в более общей ситуации и без использования процесса квазилинеаризации. Однако при этом могут возникнуть члены с меньшим, чем нужно, числом вхождений t_i и не все концы анфилад будут заняты. (Конечное поле дает возможность контроля над наличием вхождения, но не над их количествами). Поэтому возникающий T-идеал не обязан быть R (или S)-замкнутым. Для такой замкнутости нужно рассуждать с возможностями вхождений новых t_j на границы старых анфилад и их исчерпывания. Поэтому максимальный R (S)-замкнутый T-идеал $\Gamma^0 \subset \Gamma$ — это не совсем то, что получается путем применения расталкивающих операторов: надо несколько раз брать факторы по идеалам, образованным расталкивающими операторами, и рассматривать расталкивающие операторы в получившихся алгебрах (когда они содержат путь того же максимального существенного состава). Для этого нужно показать, что индекс нильпотентности радикала у такого фактора в некотором смысле не растет (см. следствие 5.10 из раздела 5.7.1).

2. Лемму о заменах можно усилить, вынудив не только позиции существенных радикальных компонент, но и существенных полупростых компонент (беря произведения множителей вида x^{p^k}, из которых составляются "внутрианфиладные" переменные) и вынуждая структуру непохожести с концами ранее построенных существенных радикальных элементов. Далее, можно вынудить смешанные радикальные вхождения в несущественных клетках, а также полупростые вхождения в несущественных клетках со структурой непохожести. Для любого несмешанного элемента вынуждается его тип по сравнению с типами других элементов, за исключением типа (ν_0, ν_0). Единственный известный автору способ вынуждать несмешанный радикал — сделать это "по остаточному принципу", вынудив все остальное. Но это делается только в идеале $J_C(A)$. По всей видимости, другого способа нет.

3. Результат предложения 5.21 непосредственно переносится на неполный состав (но наиболее полный для многочленов из рассматриваемого T-идеала Γ). Если многочлен g квазилинеен, то этот результат является следствием доказательства леммы о заменах (возиться с организацией процесса не нужно).

4. Аналог предложения 5.21 для максимального состава не имеет места, поскольку T-идеал может не быть однородным по существенным радикальным компонентам (хотя сама алгебра $\widehat{A}$ и ее тождества по ним однородны). Как и в случае с несущественной клеткой, с помощью тождеств "ловится" только факт наличия компоненты.

5.4.2. Случай, когда существенные смешанные элементы отсутствуют

Техника расталкивающих замен проходит, когда у каждой анфилады есть хотя бы один конец (что обеспечивается наличием конца у какой-нибудь анфилады). Иначе все элементы имеют один тип, смешанных элементов — граничных операторов нет, и организовать модульную структуру с помощью подстановок на них невозможно. В остальных случаях для редукции хватает только T-пространственными действий. Именно в том случае, когда анфилада одна и необходимы умножения (см. обсуждение в разделе 4.6.3). В этом случае мы умножаем на полином Капелли C_{n^2}, после чего приобретаем право умножать на следы. Кольцо R совпадает с кольцом, которое использовалось в разделе 4.6.2.

Действие колец, которое было построено выше, определялось с помощью подстановок на граничных операторах. Поэтому нужно специально рассмотреть случай, когда соответствующих операторов нет. Роль расталкивающих подстановок играет просто умножение (правое или левое — все равно).

Поскольку в существенную клетку нельзя войти и из нее нельзя выйти, алгебра A разлагается в прямую сумму алгебры без существенных клеток и алгебры, у которой все клетки существенны и имеют один и тот же тип. Можно считать, что в $\widehat{A}$ нет идеалов с нулевым пересечением.

Алгебра без существенных клеток конечна, все идеалы представимы и конечная базируемость очевидна. Поэтому достаточно рассмотреть случай однотипных бесконечных клеток.

Предложение 5.22. *а) Если $f|_{\mathbb{M}_n} \neq 0$, то f принимает значение, не являющееся делителем нуля.*

б) Пусть в алгебре A все элементы однотипны, $n = \mathrm{PIdeg}(A)$, $x \in R(A)^{c(A)-1}$, полином f не обращается в нуль на $\mathbb{M}_n$. Тогда для любого $x \in A$ найдется значение $f(t)$, такое что $xf(t) \neq 0$.

Доказательство. п.б) следует из п.а), п.а) следует из того, что алгебра общих матриц вкладывается в тело (которое получается при ее локализации по центру). □

Следствие 5.5. *Пусть $\Gamma \neq 0$ – T-идеал, лежащий в $R(A)^{c(A)-1}$, C_k – полином Капелли порядка k. Тогда T-идеал $\Gamma^0 = \Gamma C_{n^2}$ содержится в Γ, отличен от нуля и замкнут относительно умножения на формы.* □

Предложение 5.23. *Пусть Γ – T-идеал. Тогда существует T-идеал $\Gamma' \subset \Gamma$ такой, что $\forall f|_{\mathbb{M}_n} = 0$ выполняется равенство $\Gamma' f = f\Gamma' = 0$.*

Доказательство. Пусть $\Phi \in \Gamma$ и $\Phi_1 = \phi f(\text{или } f\phi) \neq 0$. Построим по элементу ϕ_1 элемент $\phi_2 = f'\phi_1$ (или $\phi_1 f'$), по элементу ϕ_2 – элемент Φ_3 и т.д., пока это возможно. Процесс оборвется на шаге с номером k, не превышающем $c(A) - 1$. Полученный элемент Φ_k будет удовлетворять условию данного предложения. □

С помощью тех же соображений, что и в начале доказательства леммы 5.14, доказывается

Лемма 5.18. *Пусть T-идеал Γ' удовлетворяет предыдущему предложению, $q = p^k \geq c(A)$. Тогда T-идеал $\Gamma^0 = \Gamma' C_{n^2}$ замкнут относительно умножения на q-е степени форм.* □

Из предложения 5.23 и предыдущей леммы следует утверждение, суммирующее результаты данного раздела:

Предложение 5.24. *а) Пусть существенные смешанные элементы в алгебре $\widehat{A}$ отсутствуют. Тогда A разлагается в подпрямое произведение конечных алгебр и алгебр с существенными однотипными клетками.*

б) Пусть A – алгебра с существенными однотипными клетками. Тогда для $q = p^k \geq c(A)$ любой ненулевой T-идеал Γ алгебры A содержит ненулевой T-идеал $\Gamma^0 \subset \Gamma$, замкнутый относительно q-ых степеней форм, определенных внешним образом (с помощью матричных единиц). Кроме того, любой T-идеал, лежащий в

$R(A)^{c(A)-1}$, замкнут относительно алгебры форм. Многочлены из этого T-идеала имеют вид

$$\phi = fC_{n^2}^t$$

(произведение многочленов означает произведение с подстановкой разных переменных в сомножители.) □

5.4.3. Проблема Шпехта и некоммутативная алгебраическая геометрия

Конструкции замкнутых T-идеалов возникли как результат эволюции рассуждений, связанных с леммой Артина–Рисса. Роль внутренних умножений играют подстановки, связанные с граничными операторами. В данном разделе полученные результаты будут сформулированы на более алгебро-геометрическом языке. Мы будем пользоваться результатами раздела 5.7.1, а также конструкцией структуры S-модуля из раздела 5.3.2.

Эффекты, связанные с кратностями клеток, различного рода типами и т.д., изложенные на геометрическом языке графов, можно описать на функциональном языке тождеств. Это потребовалось при организации процессов "расталкивания".

Сами алгебры $\widehat{A}$, A^{cl} можно интерпретировать как пучок алгебр на спектре кольца структурных констант (а также значений форм). При факторизации разнотипные клетки могут стать однотипными (и при этом одна клетка превратиться в анфиладу), клетки бесконечного типа стать анфиладой клеток конечного типа и т.д. Таким образом, интересно посмотреть на происходящее и с точки зрения языка структурных констант. Обозначим через $\bar{\Phi}_i(\overrightarrow{z})$ элемент кольца коэффициентов, отвечающий значению формы $\Phi(\overrightarrow{z})$ на алгебре общих матриц, соответствующей i-й анфиладе. В частности, $\bar{\mathrm{Tr}}(z)$ означает коэффициент, соответствующий полупростой части оператора следа. Редукции коэффициентов отвечают изменения клеток, новые связи между ними и соответствующие тождества.

Если Γ – T-идеал, многочлены из которого принимают значения полного состава, то $P(\Gamma)$ есть T-идеал, описанный в лемме о расталкивающих заменах 5.14.

В общей точке максимального спектра коммутативного кольца представления (т.е. вне некоторой замкнутой подсхемы $\mathcal{H}$) множество значений полинома g, удовлетворяющего условиям леммы 5.13 или леммы 5.14, покрывается значениями полиномов, вид которых указан в заключении соответствующих лемм. Наша цель — изучить $\mathcal{H}$ и сделать рассуждения более конструктивными. "Расталкивающие" замены приводят к появлению элементов A, у которых все коэффициенты матричного представления лежат в некотором идеале кольца следов. Этот идеал отражает появление новых связей между клетками. Он порождается произведениями, состоящими из множителей следующего вида:

- Вида $\mathrm{Tr}_i(z) - \mathrm{Tr}_j(z)$ или $\bar{\Phi}_i(\overrightarrow{z})$. Им отвечает склейка независимых клеток в похожие, и возникают они при "разбрасывании" t_i по клеткам. Условия похожести записываются в виде $(\mathrm{Tr}_i - \mathrm{Tr}_j)^s = 0$ или $(\bar{\Phi}_i(\overrightarrow{z}) - \bar{\Phi}_j(\overrightarrow{z}))^s = 0$, что означает совпадения частичных следов, соответствующих клеткам.

- В случае конечного основного поля возникают более общие выражения вида $\mathrm{Tr}_i^{q_i}(z) - \mathrm{Tr}_j^{q_j}(z)$ или $\Phi_i^{q_i} - \Phi_j^{q_j}$. Им отвечает склейка независимых клеток в однотипные. Они возникают аналогично. Условия однотипности записываются в виде $\mathrm{AD}_{ij}^{q_i,q_j\ s} = (\Phi_i^{q_i} - \Phi_j^{q_j})^s = 0$ (частным случаем является равенство $(\mathrm{Tr}_i^{q_i}(z) - \mathrm{Tr}_j^{q_j}(z))^s = 0$). Их смысл: "связь по Фробениусу" частичных следов, соответствующих клеткам.

Факторизация по степени идеала, порожденного $\mathrm{AD}_{ij}(\Phi) = \Phi_i - \Phi_j$ (в частности $\mathrm{Tr}_i^{q_i}(z) - \mathrm{Tr}_j^{q_j}$) ведет к склейке анфилад (и к возникновению анфилад данного типа, ограничение основной алгебры на которые изоморфно ограничению на одну клетку, а радикал проявляется при взаимодействии (см. пример на стр. 168). Соответствующие множители возникают при расталкивании t_i по типам данного размера. Если до высокой степени такого идеала ноль не образовался, алгебра на словах длины не выше некоторой ведет себя как алгебра с независимыми клетками.

- Полиномам вида $\mathrm{Tr}_i(z)^q - \mathrm{Tr}_i(z)$ отвечает переход клетки из бесконечного типа в конечный. Они появлялись при вставках, предохраняющих от попадания t_i в клетки конечного типа, а главное — при действии операторов, уничтожающих члены с вхождением t_i в большие клетки, на правильные члены, ибо тогда через переменные t_j, отвечающие концам больших клеток, идет подстановка $Z^q - Z$.

- Полиномы, обращающиеся в ноль на матрицах меньшего размера. Им отвечает уменьшение размера клеток (образование системы меньших клеток из-за отправки Размысловского центра в радикал). Они образуются, в частности, при "пропихивании" полиномов Капелли.

Все величины q_i ограничены степенями обрабатываемого многочлена. Рассмотрим общую точку x максимального спектра кольца, порожденного формами $\bar{\Phi}_i(\overrightarrow{z})$. Это означает, что при специализации алгебр $A_x = \widehat{A}_x$ получается алгебра, для которой

1) Различные типы клеток не склеиваются.

2) Поля, отвечающие центрам прежних клеток бесконечного типа, не удовлетворяют тождествам $y^{q_i} = y$.

В этом случае проходит процесс расталкивания и устанавливается предложение 5.25.

Если рассматривать θ-расширения и предельные переходы, связанные с такого рода аппроксимацией, то возможны обратные переходы (анфилад в разнотипные клетки, конечных типов в существенные и т.д.).

Для T-идеала $\Gamma \neq 0$, содержащего элемент полного (максимального) состава, с помощью операторов расталкивания строится S (R)-замкнутый T-идеал Γ', порожденный многочленами, вид которых указан в леммах 5.13 и 5.14. Однако он может довольно сильно отличаться от максимального S (R)-замкнутого T-идеала Γ^0, содержащегося в Γ. Причина состоит в том, что в случае конечности основного поля при работе с резервными образованиями t_i возникают члены с малым числом вхождений t_i. В них концы анфилад закрываются специализациями других переменных (значит, дополнительных специализаций исходных образующих a_j) и эти элементы принадлежат квазилинеаризации исходных многочленов. И если потеря равносильности при дополнительных подстановках контролируется применением леммы Артина–Рисса или аналогичными рассуждениями, то потеря равносильности при квазилинеаризациях, по всей видимости, никак не контролируется (см. раздел 5.1.3). Поэтому надо брать расталкивающие замены в факторе по Γ', там находить S (или R)-замкнутый T-идеал и так несколько раз. Построенный таким путем T-идеал (прообраз таких идеалов при естественных проекциях) обозначим через Γ^1. Ясно, что $\Gamma^1 \subset \Gamma^0$. В случае, когда Γ порожден квазилинейными многочленами, Γ^1 совпадает с $P(\Gamma)$ – результатом применения процесса из лемм 5.13, 5.14 к T-идеалу Γ (см. определение 5.6).

Рассмотрим алгебры A, $\widehat{A}$, $\tilde{A}$ как пучки алгебр на спектре кольца S (соответственно, R). Ограничение на точку из максимального спектра дает алгебру, конечномерную над полем.

Прежде всего отметим, что для осуществления нужных вырезаний при обработке многочлена f и оставления членов при специализациях, вырезать которые не нужно, достаточно, чтобы центры матричных алгебр, отвечающих клеткам бесконечного типа, имели порядок бо́льший чем $\deg(f)$, а также сохранялось свойство клеток иметь разные типы и, кроме того, не обращались бы в нуль Размысловские полиномы, отвечающие клеткам. Таким образом, имеет место следующее

Предложение 5.25. *а) Пусть H – T-идеал алгебры A. Тогда H^1 – нетеров S-модуль.*

б) Пусть все клетки в алгебре B суть матричные алгебры над полем, алгебра $\tilde{B}$ есть минимальная классическая конечномерная алгебра, расширяющая B, причем пара $(B, \tilde{B})$ принадлежит многообразию пар $(A, \tilde{A})$. Тогда если независимым клеткам в A отвечают независимые клетки в B, а существенным клеткам в A — клетки с достаточно большим центром, то для любого T-идеала Γ, все значения которого имеют максимальный существенный состав (в A), имеет место равенство $P(\Gamma_B) = \Gamma_B$.

в) Пусть T-идеал H состоит из элементов максимального состава, $\hat{H}$ – идеал, соответствующий идеалу H в алгебре $\widehat{A}[S]$. Тогда $H^1 \subset \hat{H}$ и в общей точке x максимального спектра имеет место совпадение $P(H)_x = \hat{H}_x$. □

(Отметим, что $\hat{H}$, из-за эффектов неоднородности, может уже не быть T-идеалом алгебры $\widehat{A}[S]$, даже в том случае, когда он совпадает с H как множество.)

Общая точка — это точка вне замкнутой подсхемы, отвечающей соотношениям из замечания на странице 273.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — элементы $H' = H \cap h_C \cap I_c$, порождающие $H'[S]$, $f_1, \ldots, f_s$ – образующие H^1 как R-модуля, $N_B(H)$ и $N_S(H)$ – пучки R-модулей, отвечающие H' и H^1 соответственно, Q-максимальная степень f_i. $N_B(H)$ и $N_S(H)$ – когерентные пучки на нетеровой аффинной схеме $\mathrm{Spec}(S)$.

Следующее предложение аналогично предложению A.23 из раздела A.3. Оно обобщает предложение 4.18 из раздела 4.5.1:

Предложение 5.26. *а) Пусть x – точка $\mathrm{Spec}(R)$, на которой не обращаются в ноль элементы из идеалов типа 1)-2)-3), указанных в замечании на странице 273 (причем показатели q ограничены степенями f_i). Тогда локальные пучки $N_B(H)_x$ и $N_S(H)_x$ совпадают.*

б) Фактор–пучок $\mathcal{T} = N_B(H)/N_S(H)$ сосредоточен на замкнутой подсхеме $\mathcal{H}$. Пусть I_H – идеал в R, соответствующий $\mathcal{H}$. Ограничение алгебр на эту подсхему уменьшает сложностной тип (т.е. если профакторизовать представляющую алгебру по идеалу, отвечающему идеалу I_H в коэффициентах, то возникнет структура с максимальным составом пути меньшим, чем состав C).

в) Тогда при некотором натуральных k и l имеет место равенство $I_H^k \mathcal{T} = 0$ и включение $N_B(H) \cdot I_H^l \subseteq N_S(H)$.

Условие п.а) означает, в частности, что центры существенных клеток при ограничении в точку x остаются достаточно большими и, кроме того, сохраняется структура разнотипности.

Доказательство. Поскольку множество многочленов φ_i конечно, соответствующие локальные пучки совпадают в точках вне замкнутой подсхемы, являющейся объединением подсхем, отвечающих φ_i. Поэтому п.а) вытекает из предыдущего предложения. П.б) а, следовательно, и равенство $I_H^k \mathcal{T} = 0$ непосредственно следует из п. а). Воспользовавшись этим равенством, устанавливаем включение $N_B(H)\cdot I_H^l \subseteq N_S(H)$. Теперь докажем п.в). Применим лемму Артина–Рисса: пусть M – когерентный пучок модулей на нетеровой схеме $\mathrm{Spec}(S)$, N – пучок его подмодулей, I – произвольный идеал в S. Тогда имеет место включение: $I\cdot M \supseteq I^{s(I,M)}\cap M$, $s(I,M)\in\mathbb{N}$. Откуда $I^k\cdot M \supseteq I^{s(I,M,k)}\cap M$. Итак, при некотором натуральном s имеют место включения:

$$N_S(H) \supseteq I^k\cdot N_B(H) \supseteq I^s\cap N_B(H)$$

что и требуется. □

Рассмотрим всевозможные пути полного состава. Рассмотрим для каждого такого пути C_i многочлен вида h_{C_i}, который обращается в ноль в факторе $\widehat{A}$ по градуированным компонентам полного состава (см. предложение 4.21). Пусть g_C есть T-идеал, порожденный всеми такими многочленами. Теперь мы можем сформулировать

Следствие 5.6. *Для любого T-идеала H существует T-идеал $P(H)$ и идеал J в кольце S такие, что:*

- $P(H)=\widetilde{P(H)}=P(H)[S]$.
- *Алгебры $A/P(H)$ и $A/(A\cap J\tilde{A})$ представимы.*
- $P(\tilde{H})=H\cap(J\tilde{A}\cap g_C[S])$.
- *Алгебра $A/(A\cap J\tilde{A}\cap g_C)$ имеет меньший сложностной тип. (Максимальный состав пути в соответствующем графе.)*
- *Имеют место следующие вложения:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[dd] & \Gamma \arrow[l] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ & & \Gamma_{SSM}=\widetilde{\Gamma}_{SSM} \\ \hat{\tilde{\mathrm{A}}} & \hat{\tilde{\Gamma}} \arrow[l] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

□

Из данного следствия вытекает, что препятствия к представимости H не лежат в $J\tilde{A}\cap g_C$. В силу предложения 0.3 мы можем перейти к фактору по $J\tilde{A}\cap g_C$, и доказательство представимости завершается спуском по сложностному типу.

Существует и несколько иной, изначальный подход автора к “расталкивающим заменам”. Этот подход связан с их последовательным применением и оказался эффективным при доказательстве локальной конечной базируемости, а также локальной представимости алгебр над произвольным нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом (см. разделы 6.2.2 и 6.2.3).

Следующее предложение описывает свойство стабилизации. Оно является аналогом предложения 6.9 о существовании проективно минимального идеала.

Предложение 5.27. *а) Пусть $\Gamma=\mathrm{T}(f_1,\dots,f_s)$ есть T-идеал, все значения которого состоят из элементов максимального состава, точка x взята как в п.а) предложения 5.26. Тогда $P(\Gamma_x)=\Gamma_x$.*

б) Пусть m есть размерность локализации алгебры $\tilde{A}$ относительно коммутативных полиномиальных коэффициентов. Тогда для произвольного T-идеала Γ существуют такие идеалы $J, J' \triangleleft S$, что выполняются включения $JP^m(\Gamma) \supseteq P^{m+1}(\Gamma)$ и $J'A[S] \cap P^m(\Gamma) \supseteq P^{m+1}(\Gamma)$.

Доказательство. П.а) есть переформулировка п.а) предложения 5.26. Пункт б) вытекает из очевидного включения $P(\Gamma) \supseteq \Gamma$ и того факта, что алгебре $\tilde{A}$ отвечает пучок модулей на $\operatorname{Spec} S$, размерность которых в каждой точке ограничена числом m. Утверждение про идеал J' вытекает из леммы Артина–Рисса. □

Данное предложение является аналогом леммы Артина–Рисса для некоммутативного случая. Эта лемма, правда, верна для произвольной алгебры нетерового типа, и в такой форме ей тоже можно пользоваться. При доказательстве локальной представимости относительно свободных колец используется идейно близкое понятие *проективно минимального T-идеала*. Идеал (T-идеал) *проективно минимален*, если при локализации относительно всех ненулевых элементов из S он порождается любым своим элементом. Проективно минимальный идеал одномерен в такой локализации.

Проективно минимальные идеалы используются в качестве экстремальных (см. раздел 6.2.2). Подход, связанный с построением максимального замкнутого T-идеала, содержащегося в данном, который был изложен в начале данного раздела, есть оформление идеи последовательного рассмотрения проективно минимальных идеалов и взятия прообразов. Остальные рассуждения в доказательствах локальной представимости и локальной конечной базируемости выросли из этого ядра.

Замечание. Схема Кемера идет "сверху". Хотелось бы (в том числе ради неассоциативных обобщений – ибо там нет теоремы Левина) осуществить путь "снизу", рассмотрев предел $\varinjlim_{d\to\infty} A_\Gamma(d)$ свободных расширениий первичной алгебры нильпотентами в многообразии, отвечающем T-идеалу Γ. В пределе могут возникать следующие эффекты: "расклейка" похожих клеток (они могут различаться нильпотентной добавкой, которая в пределе перестает быть нильпотентной), "расклейка" клеток, связанных по Фробениусу. Кроме того, анфилада может превратиться в лодну клетку бо́льшего размера. (Нильпотентные прокладки в пределе перестают быть нильпотентными.) Было бы важно, понимая эти эффекты, правильно провести предельный переход и получить другое дорказательство конечной базируемости. Это важно для понимания неассоциативной ситуации.

5.5. Размерность Гельфанда–Кириллова, ряды коразмерности и сложностные характеристики

Данный раздел посвящен росту алгебр и многообразий. Показатели роста определяются сложностными характеристиками алгебр. Это одна из причин, почему этот раздел помещен здесь. Кроме того, нам требуется изучить поведение индукционных параметров алгебр при факторизации. Уменьшение параметров, характеризующих первичную часть, очевидно. Сложнее обстоит дело с индексом $c(\widehat{A})$. Надо показать, что всякий раз промежуточный носитель расщепляется на компоненты либо с ме́ньшей полупростой частью, либо с меньшим индексом c. Для этого будут использованы оценки размерности Гельфанда–Кириллова.

Кроме того, вычисление размерности Гельфанда–Кириллова представляет самостоятельный интерес. Нашей целью также является доказательство следующей теоремы:

Теорема 5.7. *Пусть A – s-порожденная относительно свободная алгебра. Тогда* $\mathrm{GKdim}(A)$ *зависит только от ее сложностного типа. А именно, она равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова полупрямого произведения алгебр общих матриц из* $\mathrm{Var}(A)$. *Размерность Гельфанда–Кириллова такого полупрямого произведения равна сумме размерностей Гельфанда–Кириллова сомножителей. Сложностные типы у алгебры A и подалгебры, порожденной двумя ее образующими, совпадают.*

Размерность Гельфанда–Кириллова свободной s-порожденной алгебры A из $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_{n_1} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_{n_k})$ *равна*

$$k + (s-1)\sum_{i=1}^{k} n_i^2. \tag{5}$$

В частном случае, когда $k = 1$, получается, что размерность Гельфанда–Кириллова для s-порожденной алгебры общих матриц порядка n равна $1+(s-1)n^2$. Этот результат был впервые установлен К. Прочези [157]. А. В. Гришин [24], [25] дал несколько другое доказательство этого утверждения, установив равенство размерности Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц и ее идеала, порожденного центральными многочленами и, соответственно, с размерностью Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц со следом.

Результат К. Прочези о размерности Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц допускает иное обобщение:

Теорема 5.8. *Если L относительно свободная s-порожденная первичная алгебра сигнатуры Ω, то* $\mathrm{GKdim}(L) = sn - m$.

Здесь $n+1$ есть минимальный порядок системы тождеств Капелли, выполняющихся в L, G есть группа автоморфизмов $\widehat{L} \otimes C(L)^{alg.cl}$ над централизатором Мартиндейла $C(L)$, m есть размерность G как алгебраического многообразия.

В частности, размерность группы автоморфизмов алгебры матриц порядка n равна $\dim(SL(n) = n^2 - 1$ и мы имеем, что если L есть алгебра общих матриц порядка n, то $\mathrm{GKdim}(L) = sn^2 - (n-1) = (s-1)n^2 + 1$, в соответствии с результатом К. Прочези.

(То же верно для относительно свободной k-порожденной алгебры общих элементов в $\widehat{L}$, замыкание по Зарисскому которой совпадает с $\widehat{L}$. В частности, при $k \geq s$.)

Верхние оценки дает следующее

Предложение 5.28. *Пусть A – представимая алгебра с образующими $a_1, \dots, a_s$ сигнатуры Ω, $\{e_i\}$ – базис векторного пространства с операторами, куда она вложена. Пусть далее $a_j = \sum_i \lambda_{ij} e_i$, $j = 1, \dots, s$, коэффициенты λ_i порождают ассоциативно-коммутативное кольцо R, A вложена в R-алгебру, являющуюся нетеровым R-модулем.*

Тогда $\mathrm{GKdim}(A)$ *не превосходит степени трансцендентности кольца R.* □

В этой связи хотелось бы поставить такой

Вопрос. *Верно ли, что минимальная размерность кольца представления R для представимой ассоциативной алгебры A равна ее размерности Гельфанда–Кириллова?*

Неравенство $\dim(R) \geq \mathrm{GKdim}(A)$ очевидно. Попытки получить обратную оценку были связаны с диофантовыми проблемами, аналогичными тем, что наблюдаются при изучении рядов Гильберта представимых алгебр (см. [164] а также раздел 1.3.3). [1] Рассмотрим произведение матриц над кольцом многочленов CA^nD. Коэффициенты при матричных единицах имеют вид

$$\sum_{i=1}^{k} P_i(n)\lambda_i^n \tag{6}$$

где k – размер матриц, λ_i – собственные числа A (из некоторого конечного алгебраического расширения кольца представления), P_i – многочлены степени не выше k.

Чтобы показать, что для представимой алгебры размерности Гельфанда–Кириллова 1 можно обеспечить размерность кольца представления 1, надо показать, что если размерность основного кольца 2 или больше, то пространство, порожденное элементами вида (6) пересекается по нулю с некоторым нетривиальным идеалом. Пока автор этого делать не умеет. Аналогичным образом, если размерность Гельфанда–Кириллова равна s, то она совпадает с существенной высотой и надо рассматривать множество произведений вида

$$C_0U_1^{n_1}C_1\cdots C_{s-1}U_s^{n_s}C_s$$

А также пространства S_α, порожденные коэффициентами при матричных единицах:

$$\sum_I P_i(n_1,\dots,n_s)\lambda_{i_1}^{n_1}\cdots\lambda_{i_s}^{n_s} \tag{7}$$

I пробегает некоторое конечное множество.

И чтобы показать, что для представимой алгебры размерности Гельфанда–Кириллова s можно обеспечить размерность кольца представления s, надо показать, что если размерность основного кольца $s+1$, то пространство, порожденное элементами вида (6) пересекается по нулю с некоторым нетривиальным идеалом.

5.6. Первичные многообразия общей сигнатуры

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 5.8.

Верхние оценки. Пусть $A_1,\dots,A_s$ – общие матрицы, A – алгебра, ими порожденная, $s\geq 2$. Выбрав подходящий базис, матрицу A_1 можно считать диагональной. Далее, путем сопряжения диагональными матрицами можно добиться того, что непосредственно над главной диагональю матрицы A_2 (рядом с ней) будет стоять диагональ из $n-1$ единицы (в этом месте рассуждений требуется наличие второй матрицы, т.е. неравенство $s\geq 2$). В случае общего положения любое сопряжение, сохраняющее диагональный вид матрицы A_1, есть композиция сопряжения матрицей, диагонализуемой вместе с A_1, и матрицы, переставляющей ее собственные векторы. Сопрягать достаточно матрицей с единичным определителем. Тогда легко убедиться в том, что в случае общего положения имеется конечное число ($n!$) матриц, сохраняющих вид пары (A_1,A_2) (см. предложение 5.29).

Таким образом, набору из s матриц общего положения соответствуют $n+(n^2-(n-1))+n^2(s-2)=n^2(s-1)+1$ свободных параметров. Значит, вся наша алгебра вкладывается в алгебру матриц над кольцом многочленов от $n^2(s-1)+1$ переменных.

[1] Удалось установить только, что размерность Гельфанда–Кириллова представимой алгебры произвольной сигнатуры есть целое число и совпадает с существенной высотой (см. раздел 1.6.2).

Поскольку размерность Гельфанда–Кириллова коммутативного кольца равна его степени трансцендентности или его размерности, а функция роста матриц порядка n над кольцом не более чем в n^2 (т.е. в константу) раз превосходит функцию роста самого кольца, имеем верхнюю оценку: $\mathrm{GKdim}(A) \leq n^2(s-1)+1$.

Нижние оценки. Наше изложение по сравнению с книгой [157], несколько модифицировано. Начнем с алгебры общих матриц. Мы будем пользоваться алгебро-геометрическими соображениями, связанными с подъемом локальной информации. Алгебру можно рассмотреть как пучок алгебр над аффинной схемой, связанной с множеством наборов свободных параметров, описанных выше. Начнем с рассмотрения ситуации в точке:

Предложение 5.29. *а) Пусть A_1 – диагональная матрица с различными элементами вдоль главной диагонали. Тогда множество матриц, коммутирующих с A_1, есть в точности множество диагональных матриц.*

б) Множество матриц, коммутирующих с парой матриц общего положения, есть в точности множество скалярных матриц.

в) Если описанные выше параметры имеют общее положение, то алгебры матриц, ими задаваемые, разбиваются на $n!$ серий, отвечающих перестановкам из базисных векторов. Алгебры из разных серий не изоморфны как объекты категории алгебр с фиксированным набором образующих и образуют простые алгебры в точках общего положения.

Доказательство. П.а) есть известный факт из линейной алгебры, п.б) вытекает из того, что пара матриц общего положения (т.е. из плотного по Зарисскому множества) порождает всю алгебру. П.в) есть непосредственное следствия п.б). □

Перейдем к оценкам. Существует такой конечный набор Z центральных элементов, что $Z + ZA$ конечномерна над $F[Z]$. Поэтому $\mathrm{GKdim}(A) \geq \mathrm{GKdim}(Z) = \mathrm{Trdeg}(Z)$, где $\mathrm{Trdeg}(Z)$ – степень трансцендентности кольца Z. Остается оценить эту величину снизу числом $n^2(s-1)+1$.

Каждому значению элементов Z в геометрической точке отвечает конечномерный фактор A' алгебры A. Его полупростая часть состоит из конечного числа простых компонент. Им отвечают матричные алгебры с фиксированным набором образующих.

Тем самым имеется доминантный морфизм

$$\mathrm{Spec}(F[Z]) \to \text{наборы} \quad \text{параметров.}$$

Поэтому размерность кольца $F[Z]$ не превосходит размерности пространства параметров, откуда в силу конечномерности $A[Z]$ над $F[Z]$ и получается требуемое.

Сформулируем алгебро–геометрические рассуждения, с помощью которых вычисляется размерность Гельфанда–Кириллова в общем виде.

Предложение 5.30. *Пусть $\mathcal{M}$ есть пучок когерентных R-модулей на нетеровой аффинной схеме $\mathrm{Spec}(R)$; M есть модуль глобальных сечений, соответствующий $\mathcal{M}$; $\xi_1, \ldots, \xi_s$ – образующие M. И пусть для пары точек максимального спектра общего положения (x, y) модули M_x и M_y не изоморфны (т.е. отсутствует изоморфизм, согласованный с проекциями пары (M, R)).*

Тогда $\mathrm{GKdim}(M) = \dim(R)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай модулей ранга 1 над примарным кольцом R. Легко видеть, что тогда и условие, и заключение предложения равносильны отсутствию кручения, не лежащего в радикале Джекобсона $J(R)$. $\square$

Из данного предложения непосредственно следует

Предложение 5.31. *Пусть $\mathcal{L}$ есть когерентный пучок модулей и одновременно пучок алгебр нетерового типа произвольной сигнатуры Ω над аффинной схемой* $\mathrm{Spec}(R)$. *L есть алгебра глобальных сечений, соответствующая $\mathcal{L}$; $\xi_1, \ldots, \xi_s$ – образующие L. И пусть для пары точек общего положения (x, y) соответствующие алгебры L_x и L_y не изоморфны (как модули с фиксированным набором образующих над кольцами $R_x/\operatorname{Ann}(M_x)$ и $R_y/\operatorname{Ann}(M_y)$ с фиксированным набором образующих).*

Тогда $\mathrm{GKdim}(L) = \dim(R)$. $\square$

Пусть $\widehat{L}$ есть центральное расширение Мартиндейла первичной алгебры L сигнатуры Ω и пусть в L выполняется система разреженных тождеств, а стало быть, и система тождеств Капелли некоторого порядка n. Тогда в силу теоремы о ранге A.13 (см. раздел A.2.1) $\widehat{L}$ есть n-мерная алгебра над централизатором Мартиндейла $C(L)$. Поэтому алгебра L представима и допускает расширение формами $\tilde{L}$ и $\tilde{L}$ есть алгебра нетерового типа.

Предложение 5.32. *а) Пусть L – первичная алгебра произвольной сигнатуры. Тогда операторная алгебра $D(L)$ также является первичной. Если L конечно порождена и в ней выполняется система тождеств Капелли, то в $D(L)$ также выполняется система тождеств Капелли и $D(L)$ представима.* $\mathrm{Var}(D(L)) = \mathrm{Var}(\mathbb{M}_m)$, *и минимальный порядок тождества Капелли выполняющегося в $D(L)$ есть $m^2 + 1$.*

б) Пусть I есть идеал в $D(L)$, порожденный элементами из C_{m^2}, $Z \neq 0 \in I$ – центральный многочлен на $D(L)$. Пусть, далее, $\widehat{D(L)}$ есть расширение $D(L)$ значениями опреаторов форм $\Psi_j(u_i)$, $R = \mathbb{K}[\{\Psi_j(u_i)\}]$. Тогда оператор $xZ \to x$ не имеет нетривиального аннулятора и $\widehat{D(L)}$, $\tilde{L}$, $\widehat{D(L)}I = D(L)I$, $\widehat{L} \cdot I = L \cdot I$, $\widehat{D(L)}Z = D(L)Z$, $\widehat{L} \cdot Z = L \cdot Z$ суть точные нетеровы R-модули.

в) Размерность Гельфанда–Кириллова этих модулей совпадает с размерностью кольца R и с размерностью Гельфанда–Кириллова алгебры L.

Доказательство. п.а) очевиден, п.б) непострединственно вытекает из свойств первичных ассоциативных PI-алгебр и п.а), п.в) следует из п.б). $\square$

Мы построили многоосновную систему $(\tilde{L}, \Psi)$ состоящей из алгебы $\tilde{L}$, являющейся нетеровым модулем над центроидом Ψ, который является нетеровым кольцом. При этом $\mathrm{GKdim}(\tilde{L}) = \mathrm{GKdim}(\Psi) = \mathrm{GKdim}(L)$. В итоге имеем

Следствие 5.7. *Пусть L есть конечно порожденная первичная алгебра произвольной сигнатуры Ω, в которой выполняется система разреженных тождеств. Тогда L представима. Далее, пусть R есть кольцо представления, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ – образующие L. И пусть для пары точек общего положения (x, y) соответствующие алгебры L_x и L_y не изоморфны как алгебры с фиксированным набором образующих.*

Тогда $\mathrm{GKdim}(L) = \dim(R)$. $\square$

Пусть G есть группа автоморфизмов $\widehat{L} \otimes C(L)^{alg.cl}$, m есть размерность G как алгебраического многообразия. Теперь все готово для доказательства теоремы 5.8.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любой автоморфизм, стабильный на каждой из образующих, тождественен. Выберем подмногообразие представителей в кольце коэффициентов относительно действия группы G. Его размерность равна разности размерностей кольца параметров и группы G. Остается применить предыдущее следствие. $\square$

Замечания. 1. Данная теорема обобщает результат работ С. В. Поликарпова и И. П. Шестакова (см. [97], [98]), в которых вычислялась размерность Гельфанда–Кириллова свободных алгебр из многообразия $\mathrm{Var}(\mathbb{O})$, порожденного алгеброй Кэли–Диксона $\mathbb{O}$ а также простой исключительной йордановой алгебры HC_3 в случае, когда $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) \neq 2, 3$.

2. Рассуждения из предложения 5.32 с идеалом, порожденным центральным многочленом, нужны для перехода к расширенной алгебре $\tilde{L}$ имеющей нетеров тип. Они аналогичны рассуждениям в работе [24].

5.7. Относительно свободные ассоциативные алгебры

Верхние оценки для полупрямых произведений. Пусть $n_1, \ldots, n_k$ – натуральные числа, A есть алгебра общих элементов для полупрямого произведения $\mathbb{M}_{n_1} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_{n_k}$ с s образующими, причем $s \geq 2$ (см. определение 0.7). В этом случае путем суммирования чисел параметров, относящихся к клеткам, получается такая оценка:

$$\mathrm{GKdim}(A) \leq k + (s-1)\sum_{i=1}^{k} n_i^2.$$

Замечание. Величина $\sum n_i^2$ есть не что иное, как размерность полупростой части $b(a)$ в обозначениях А. Р. Кемера. Эта величина допускает выражение на языке многочленов Кемера (см. разделы 2, 3.3, A.2.

Теперь рассмотрим многообразие $\mathfrak{M}$, порожденное полупрямым произведением алгебр матриц над конечным полем и алгебр матриц с бесконечным центром.

Относительно свободная алгебра A из $\mathfrak{M}$ представима блочно диагональными матрицами, у которых в блоках, отвечающих множителям с бесконечным центром, стоят различные независимые переменные (своя переменная для каждой позиции и для каждой образующей) из кольца многочленов. Блокам, отвечающим множителям конечного типа тоже отвечают различные переменные, но только “свободные переменные для i-го блока” берутся из кольца $R_i = \mathbb{F}[\overrightarrow{x_i}]/K_i$, где K_i есть T-идеал, порожденный элементами вида $y^{q_i} - y$. При этом $q_i = p^{k_i}$ есть минимальное натуральное число, такое что в центре i-го множителя выполняется тождество $y^{q_i} - y \equiv 0$. Кольцо R_i конечно порождено (число образующих R_i равно $n_i^2\times$ число образующих A) и конечно. Поэтому множители конечного типа на верхнюю оценку влияния не оказывают.

С другой стороны, рассмотрим полупрямое произведение A' клеток бесконечного типа в том же порядке (пропустив клетки конечного типа). В силу теоремы 0.1 A' вкладывается в A и из результатов раздела 3.2.2 следует, что $\mathfrak{M}' = \mathrm{Var}(A') \subseteq \mathfrak{M}$ есть максимальное подмногообразие $\mathfrak{M}$, порожденное полупрямым произведением алгебр матриц алгебр матриц с бесконечным центром. Поэтому нижние оценки на размерность совпадают, совпадают и только что вычесленные верхние оценки (через подсчет параметров), причем верхние оценки совпадают с нижними (см. следующий пункт). Поэтому размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободной s-порожденной алгебры A равна максимальной размерности однородной s-порожденной алгебры из $\mathrm{Var}(A')$. Клетки конечного типа на размерность Гельфанда–Кириллова не влияют (как, кстати сказать, и на множество базисов Ширшова относительно свободных алгебр. см. 6.5.2)

Нижние оценки. Для этого достаточно построить экстремальный T-идеал, обладающий структурой точного модуля над следами или модуля над следами, относящимися к клеткам. Тем самым получается нижняя оценка на показатель роста идеала, которая совпадет с верхней оценкой на размерность Гельфанда–Кириллова всей алгебры. Эти T-идеалы построены в разделах 5.4 а также 3.3.

Из предложения 3.1 вытекает нижняя оценка для размерности Гельфанда–Кириллова для полупрямых произведений. Она совпадает с нижней оценкой, полученной в предыдущем разделе и, таким образом, теорема 5.7 для многообразий, порожденных полупрямыми произведениями доказана.

Завершение доказательства теоремы 5.7. Представимый случай. Пусть A – относительно свободная s-порожденная представимая алгебра, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(A)$, $A^{(i)}$ – ее первичные пирсовские компоненты, n_i – сложность $A^{(i)}$, $k_i = (s-1)\cdot n_i^2+1$ если $A^{(i)}$ бесконечна и $k_i = 0$ если $A^{(i)}$ конечна. Пусть $J(A)$ – радикал Джекобсона алгебры A (он совпадает с нильрадиткалом). Рассмотрим всевозможные ненулевые произведения $A(I) = A^{(i_1)}j_1A^{(i_2)}j_2\cdots j_{r_I-1}A^{(i_{r_I})} \neq 0$; $j_\alpha \in J(A)$, $i_{\mu_I} \neq i_{\nu_I}$ при $\mu \neq \nu$. Пусть $K(I) = \sum_{\alpha=1}^{r_I} k_i$.

Из предложения 5.28 и рассуждений из раздела 5.7 вытекает

Предложение 5.1. *Тогда* $\mathrm{GKdim}(A) \leq \max_I(K_I)$. □

Из теоремы 0.1 вытекает, что $\mathfrak{M}$ содержит все полупрямые произведения $\mathbb{M}_{n_{I,1}} \rtimes \mathbb{M}_{n_{I,2}} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_{n_{I,r_i}}$ и потому оценка снизу для A совпадает с максимальной нижней оценкой для таких многообразий. А для многообразий, порожденных полупрямыми произведениями, теорема 5.7 уже установлена. Поэтому из предложения 5.1 следует, что полученные верхняя и нижняя оценки совпадают. Таким образом, для многообразий, порожденных представимыми алгебрами теорема 5.7 также доказана.

Общий случай. Поскольку теорема 5.7 для представимого случая уже установлена, а нижние оценки для роста фактора являются нижними оценками для исходной алгебры, нас интересуют только **верхние оценки**, которые должны совпасть с нижними.

В разделе 2.3.2 для относительно свободной ассоциативной алгебры построен идеал, с той же верхней оценкой размерности Гельфанда–Кириллова что и s-порожденные подалгебры из подмногообразий $\mathrm{Var}(A)$, порожденных полупрямыми произведениями; фактор по этому идеалу имеет ме́ньшие сложностные характеристики. Отсюда получается, что размерность Гельфанда–Кириллова алгебры совпадает с указанной размерностью ее представимого фактора. Это завершает доказательство теоремы 5.7.

5.7.1. Размерность Гельфанда–Кириллова для T-идеалов

Вычисление размерности Гельфанда–Кириллова для T-идеалов нужны по двум причинам. Во-первых, для вычисления этой размерности для алгебр. Во-вторых — для доказательства отсутствия R-кручения. Пусть B – алгебра нетерового типа над кольцом R. Нам надо изучить поведение сложностных характеристик при факторизации. Проблему составляет поведение индекса нильпотентности (существенного) радикала, который может возрасти. *Существенным радикалом* называется радикал, порожденный чистыми элементами типа (ν_i, ν_j), где ν_i или ν_j отвечает существенной клетке.

В чем механизм роста? Мы имеем алгебру $\tilde{A}$ нетерового типа над кольцом представления R. В ней мы находим S-замкнутый T-идеал I. При этом S – подкольцо R, над которым кольцо R – цело. В факторе возникает S-кручение. И за его счет — рост индекса нильпотентности. Операторы умножения на элементы из S становятся нильпотентами. Поэтому если брать фактор по S-кручению, то индекс нильпотентности радикала расти не сможет (равно как и индекс нильпотентности существенного радикала). Ибо существенный элемент в алгебре $\widehat{A}$ порождает бесконечный модуль над частичными следами, и если он при факторизации перейдет в несущественный, то появится кручение. Кроме того, в отсутствие кручения все вкладывается в поле частных кольца S, а представления алгебр над полем можно считать правильными.

При доказательстве конечной базируемости мы имеем дело со случаем, когда $S = R$. Чтобы показать, что T-идеал J не обратится в ноль при факторизации по модулю кручения, достаточно убедиться, что его размерность Гельфанда–Кириллова как пространства совпадает с размерностью Гельфанда–Кириллова кольца R.

Из лемм о заменах 5.13 и 5.14, а также предложения 5.21 вытекает

Следствие 5.8. *а) Пусть все значения T-идеала I в алгебре $\widehat{A}$ имеют максимальный существенный состав. Тогда I содержит ненулевой R-замкнутый T-идеал.*

б) Пусть T-идеал I в алгебре A принимает значение полного существенного состава (т.е. все его значения таковы). Тогда I содержит ненулевой S^q-замкнутый T-идеал, где $q = p^k > c(A)$.

в) Если T-идеал I в алгебре $\widehat{A}$ принимает значение максимального существенного состава, то он содержит ненулевой S^q-замкнутый T-идеал.

Доказательство. П.а) есть непосредственное следствие леммы 5.13. П.в) есть переформулировка предложения 5.21. Для доказательства п.б) рассмотрим элемент $g \in I$, вид и свойства которого описаны в заключении предложения 5.21 и леммы 5.13. □

Лемма 5.19. *Пусть $q = p^k$. Кольцо S (R) является нетеровым S^q-модулем (соответственно, R^q-модулем). Размерности колец R, S, R^q, S^q, а также колец инвариантов, отвечающих группе перестановок существенных типов, совпадают.* □

Следствие 5.9. *а) Пусть значение T-идеала I в $\widehat{A}$ содержит элемент полного существенного состава. Тогда его размерность Гельфанда–Кириллова как пространства, проградуированного степенями компонент существенных клеток, равна размерности кольца S, или, что то же самое, сумме, по всем различным существенным типам клеток, размерностей Гельфанда–Кириллова для колец, порожденных частичными следами и формами.*

б) Если в графе алгебры имеется путь C с максимальным составом и $J_C \neq 0$, то размерность Гельфанда-Кириллова алгебры A равна сумме, по всем различным существенным типам клеток, размерностей Гельфанда–Кириллова для колец, порожденных частичными следами и формами.

в) Указанная размерность равна

$$\mathrm{GKdim}(I) = k + (s-1)\sum n_i^2,$$

где s – число образующих, k – число различных существенных типов клеток в пути. Суммирование ведется по всем таким типам. Для пути максимального существенного состава суммирование ведется по всем существенным типам вообще, а k есть общее число существенных типов.

Доказательство. П.б) есть непосредственное следствие п.а). П.а) вытекает из предыдущего предложения и конструкции кольца S и его свойств, доказанных в разделе 5.3.2. П.в) следует из формулы для размерности Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц от s образующих: $\mathrm{GKdim}(\mathbb{M}_n^{(s)}) = n^2(s-1)+1$. $\square$

Замечание. Данные утверждения будут использованы только для доказательства шпехтовости, причем достаточно ограничиться ситуацией максимального существенного состава. Полнота состава рассматривается для полноты изложения. Кольцо S и его действие определено в разделе 5.3.2.

Поскольку первичное кольцо R имеет размерность Гельфанда–Кириллова строго больше любого своего фактора, мы имеем следующее

Предложение 5.33. *Пусть A' – фактор A по R-замкнутому идеалу I. И пусть A' содержит путь C' максимального существенного состава, такого же, как и путь C в графе A. Пусть $J' \neq 0$ – произвольный T-идеал в A' максимального состава.* [1] *Тогда $\tilde{J}'$ – R-модуль в $\tilde{A}'$ без кручения.*

Аналогичное утверждение верно и для полного существенного состава.

Доказательство. Ясно, что J – точный R-модуль. И кроме того, в силу лемм 5.13 и 5.14 каждый элемент из J порождает точный R-модуль. Поэтому J порождает R-модуль без кручения. $\square$

Следствие 5.10. *Граф A' не содержит пути того же состава с бóльшим индексом нильпотентности существенного радикала.*

Доказательство. Пусть U – T-идеал в A', все значения которого имеют максимальный состав, а также максимальную существенную радикальную степень. Тогда в силу лемм 5.13 и 5.14 U вкладывается в фактор $\tilde{A}/(I+H)$, где идеал H порожден элементами $\tilde{A}$, с ненулевым аннулятором из R. Но в этом факторе нет элементов бóльшей существенной радикальной степени, чем у $A!$. В самом деле. Если локализовать по R, то из $\tilde{A}$ получится конечномерное векторное пространство над полем частных кольца R, и H будет ядром соответствующего морфизма. Локализации отвечает естественный морфизм расширения A на расширение алгебры A'/H. Остается заметить, что при факторизации конечномерных алгебр индекс нильпотентности подмножества радикала не растет и новых радикальных элементов не появляется. Получили противоречие. $\square$

[1] Это означает, что когда мы в представимой алгебре A' снова построим граф и т.д., то все значения J будут иметь максимальный существенный состав.

Лемма 5.20. *Индекс нильпотентности радикала в факторе алгебры над полем по идеалу, лежащему в радикале, имеет не больший индекс нильпотентности радикала. Если одно хорошее представление нетерового типа является фактором другого по идеалу, лежащему в радикале, причем кольца представлений R_i совпадают и R-кручение отсутствует, то степень нильпотентности кольца, порожденного радикальными компонентами фактора, у одного представления не выше, чем у другого.* □

Рассмотрим случай, когда основное поле бесконечно. Доказательство лемм 5.13 и 5.14 упрощается, поскольку можно сразу переходить к линейной комбинации членов с нужным числом вхождений t_i и Q_i. Такой переход становится T-пространственной операцией.

В этом случае, если множество значений f в $\widehat{A}$ содержит элемент максимального состава φ, то имеется многочлен $h \in \mathrm{T}(f)$, вид которого указан в лемме 5.13, принимающий значение φ, откуда $h|_A \neq 0$. Многочлен h есть линейная комбинация членов, с одним и тем же количеством переменных из ядер Q_i. Таким образом, имеет место следующая

Лемма 5.21. *Если основное поле бесконечно, то для любого T-идеала* Γ *существует T-идеал* Γ^0*, образованный конечным числом многочленов, вид которых описан в лемме 5.13. Они получаются путем применения операторов выделения однородных компонент и расталкивающих подстановок к некоторым многочленам из* Γ.

Этот идеал R-замкнут, и в факторе A/Γ^0 множество значений полиномов из Γ *не принимает значений, отвечающих максимальному составу в A. (Возможно, что в факторе такие значения невозможны.)* □

Данная лемма понадобится при доказательстве локальной конечной базируемости алгебр над произвольным ассоциативно–коммутативным кольцом Φ.

Замечания. 1. Подобного рода рассуждения, связанные с уменьшением структуры (у нас — не увеличение) в идеалах, порожденных максимальным числом различных первичных компонент (там они все существенны), встречается в работе А. Р. Кемера [55], посвященной доказательству локальной представимости для бесконечного поля.

2. Если I – T-идеал, то можно проводить рассуждение с выбором элемента общего положения, зависимостью или независимостью клеток. Можно показать, что результат правильно осуществленного (с учетом переменных разного сорта) независимого суммирования компонент A' в силу относительной свободы изоморфен A', а после такого суммирования компоненты, относящиеся к независимым клеткам, независимы. Можно вместо этого воспользоваться предложением 5.4 о структуре соотношений, которые вынуждают зависимость между клетками. Те же рассуждения можно провести на языке схем, ибо обращение в ноль факторпучков происходит вне замкнутой подсхемы, связанной с уравнениями из предложения 5.4.

5.7.2. Размерность Гельфанда–Кириллова и базисный ранг

Мы вычислили размерность Гельфанда–Кириллова для s-порожденной алгебры A в терминах количества типов клеток на путях. При этом представление может быть выбрано таким образом, чтобы эта размерность равнялась величине $k + (s-1)\sum n_i^2$, где k – число существенных типов. Однако может случится, что при меньшем числе порождающих подалгебра задает другое многообразие. Максимальный состав пути в нем может измениться (простейший пример — граф для грассмановой оболочки $\mathbb{M}_{n,k}$, см. раздел 4.4). Однако мы покажем, что количество типов в пути полного состава не изменится, если число образующих не меньше 2. Тем самым установленная формула для размерности Гельфанда–Кириллова будет верна для всех s-порожденных алгебр, где $s \geq 2$.

Лемма 5.22. *а) Две матрицы общего положения порождают всю матричную алгебру (для конечного поля таковые существуют).*

б) Замыкание по Зарисскому L 2-порожденной подалгебры в A, заданной элементами общего положения, содержит всю существенную полупростую часть. □

Следствие 5.11. *Алгебра L содержит все существенные (с двух сторон) радикальные компоненты своих элементов.* □

В алгебре A имеется ненулевое произведение смешанных элементов, проходящее по каждому типу клеток по разу. (Эти элементы могут дальше раскладываться в произведение, но для нас это не важно). Поскольку алгебра A строится путем независимого суммирования, соответствующее произведение компонент даже для одной образующей A – ненулевое.

В замыкании по Зарисскому 2-порожденной подалгебры они разделяются. Поэтому в силу лемм о расталкивающих заменах мы имеем следующий результат:

Теорема 5.9. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие ассоциативных алгебр, заданное представимой алгеброй, причем некоторому пути C полного состава отвечает ненулевой элемент.* [1]

Тогда для любого порядка, в котором существенные типы можно встретить вдоль пути C (не обязательно подряд), $\mathfrak{M}$ содержит соответствующее полупрямое произведение матричных алгебр.

Кроме того, размерность Гельфанда-Кириллова относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ с $s \geq 2$ образующими равна

$$\mathrm{GKdim}(I) = k + (s-1)\sum_{i=1}^{k} n_i^2,$$

где k – число различных существенных типов. □

5.7.3. Ряды коразмерности

При рассмотрении бесконечно порожденных алгебр в качестве сложностного типа играет роль набор полупрямых произведений алгебр из T-первичных многообразий, лежащие в $\mathfrak{M}$. Эта величина, как было показано М. Зайцевым и A. Giambruno [136], для случая нулевой характеристики определяется сложностным типом и есть максимальная (по сложностному типу) сумма показателей для сомножителей полупрямого произведения. T-первичные многообразия описаны. Для $\mathbb{M}_n$ этот показатель равен n^2, для $\mathbb{M}^0_{n,k}\otimes\mathbb{G}_0\oplus\mathbb{M}^1_{n,k}\otimes\mathbb{G}_1$ равен $(n+k)^2$, и $2n^2$ для $\mathbb{M}_n\otimes\mathbb{G}$ (в частности, для $\mathbb{G}$ показатель роста равен двум). (Мы указываем на многообразие, предъявляя носитель.)

Поясним природу этого явления и докажем верхнюю оценку. Элемент из $\mathbb{M}_n$ задается n^2 переменными, причем переменные при разных образующих относительно свободной алгебры различны. Показатель роста для $\mathbb{M}_n$ оценивается

[1] Иначе она вкладывается в прямую сумму своих факторов с меньшим числом типов.

сверху числом способов сопоставлять образующим полилинейного многочлена соответствующую переменную. Для k образующих эта величина равна k^{n^2}. Аналогично получаются показатели роста для остальных первичных многообразий из списка. Множитель 2 получается из-за того, что грассманова переменная имеет четную и нечетную составляющую.

Для полупрямых произведений количества переменных, стоящих в клетках, складываются. Складываются и показатели роста.

Полупрямые произведения алгебр матриц над конечным полем. Базисный ранг такой алгебры может быть сколь угодно большим. Дело в том, что если количество клеток достаточно велико, то наборы из k матриц — ограничений образующих на клетки совпадут при любой специализации. А тогда клетки в подалгебре будут похожими. Таким образом, показатель роста для ряда коразмерностей при любой специализации будет меньше, чем для полупрямого произведения, а таких специализаций конечное число. Поэтому показатель роста для многообразия, образованного k-порожденной подалгеброй, будет меньше, чем для исходного полупрямого произведения. В этой связи хочется поставить

Вопрос. *Каков базисный ранг полупрямого произведения алгебр матриц $\mathbb{M}_{n_1} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{M}_{n_k}$ над конечным полем?*

Равносильная формулировка:

Найти количество наборов из k матриц, порождающих всю матричную алгебру над конечным полем.

5.8. Локальная конечная базируемость

Вначале мы завершим доказательство локальной шпехтовости для многообразий ассоциативных алгебр, а локальная шпехтовость понадобится для доказательстве локальной представимости.

Пусть H – произвольный T-идеал. Через $P(H)$ мы будем обозначать результат применения к H указанной выше системы расталкивающих замен с произвольной последующей специализацией переменных.

Предложение 5.34. *Пусть $\widehat{J}_C$ – идеал в алгебре $\widehat{A}$, порожденный элементами максимального состава, $J_C = A \cap \widehat{J}_C$. Пусть I – существенно однородный (см. определение 4.3) T-идеал алгебры A такой, что $I \cap J_C = 0$. Тогда из представимости идеала I в алгебре A/J_C (т.е. представимости $I + J_C$) вытекает представимость идеала I в алгебре A.* [1]

Доказательство. Прежде всего отметим, что соответствующий T-идеал $\widehat{I}$ в алгебре $\widehat{A}$ имеет нулевое пересечение с $\widehat{J}_C$. В противном случае можно применить систему замен t_i и получить ненулевой многочлен. Этот многочлен не обращается в нуль в алгебрах $\widehat{A}$ и A^{cl} и т.к. A и $\widehat{A}$ имеют одинаковый запас тождеств, то он не обращается в ноль и в алгебре A. С другой стороны, этот многочлен с неизбежностью лежит в J_C. Рассмотрим алгебру $\tilde{A}$, расширяющую $\widehat{A}$, путем добавления в основное кольцо следов, относящихся к клеткам. Алгебра $\tilde{A}$ является алгеброй нетерового типа, Элементам из $\widehat{J}_C$ отвечают суммы членов полного состава, а элементам из $\widehat{I}$ – нет. Кроме того, следы не имеют градуировки, относящейся к радикальным переменным, а элементы из $\widehat{A} \cap \widehat{J}_C$ этой градуировкой и определяются. Поэтому в алгебре $\tilde{A}$ пересечение соответствующих идеалов по-прежнему

[1] см. определение 4.3.

нулевое. (Отметим, что $\tilde{I}$ уже может не быть T-идеалом, даже если он совпадает с I как множество.) Пусть $I' = \tilde{I} \cap \widehat{A}$. Тогда I' представим и $I' \supseteq \widehat{I}$. Ограничение точного представления $\widehat{A}/I'$ на $\widehat{J}_C$ есть вложение. Поэтому в $\widehat{J}_C$ (и, значит, и в J_C) нет препятствия к представимости I и мы можем перейти к фактор-алгебре A/J_C. □

Отметим, что если условие "однородности по существу" опустить, то рассуждения, связанные с переходом к алгебре $\tilde{A}$, не проходят: при расширении основного кольца старшие члены в линейных комбинациях могут выделиться. Тем не менее, расширение происходит формами от полупростых элементов, не имеющих существенной градуировки. Поэтому, рассуждая как в доказательстве предыдущего утверждения, и применив п.б) леммы 5.14 получаем

Предложение 5.35. *Пусть $\widehat{J}$ – идеал в алгебре $\widehat{A}$, порожденный элементами полного состава, $J = A \cap \widehat{J}$. Пусть I – произвольный T-идеал алгебры A такой, что $I \cap J = 0$. Тогда если $I + J$ – представим, то I представим.* □

Замечание. Основные утверждения еще не вытекают из данного предложения непосредственно, ибо нет информации об идеалах, содержащихся в J. Эти идеалы могут расширяться при морфизмах в алгебру нетерового типа.

Особо надо разобрать случай, когда существенные радикальные компоненты отсутствуют и анфилада одна (см. раздел 5.4.2) В этом случае мы умножаем на полином Капелли C_{n^2}, после чего "приобретаем право умножать на следы" и рассуждаем как выше, используя результат следствия 5.5.

Кроме того, мы имеем следующее утверждение:

Предложение 5.36. *а) Пусть* Γ *– T-идеал, I^0 – максимальный R-замкнутый T-идеал, содержащийся в* Γ. *Тогда если $H_I = I \cap J_C \neq 0$, то $I^0 \neq 0$.*

б) Пусть A – алгебра, удовлетворяющая описанным выше свойствам, C – максимальный путь, I – T-идеал этой алгебры, причем I не вкладывается в образ A при факторизации по элементам максимального состава. Тогда $H_I = I \cap h_C \neq 0$ и существует R-замкнутый T-идеал $I^0 \subseteq I \cap h_C$, что $I^0 \neq 0$.

Доказательство. Ясно, что $H_I \neq 0$. Поэтому п.б) следует из п.а). Ясно также, что идеал H_I однороден по существу. Остается применить лемму 5.13 о расталкивающих заменах к H_I. Ясно, что получится R-замкнутый T-идеал, состоящий из элементов максимального существенного состава. □

Из предложений 5.36, 5.35 и следствия 5.10 вытекает

Следствие 5.12. *Пусть I – произвольный T-идеал, $I^0 \subset I$ – максимальный R-замкнутый идеал, содержащийся в J_C. Тогда I^0 – представим и в фактор-алгебре $A' = A/I^0$ имеет место равенство: $I \cap J_C = 0$. (Предполагается, что C — путь максимального существенного состава, такого же, как и в A. Если такого пути в этом факторе A' нет, то идеал J_C полагается равным нулю в A'.)*

Доказательство. Представимость I^0 очевидна. Пусть $\pi(I) \cap J_C \neq 0$ в алгебре A'. Рассмотрим алгебру $A'' = A' / \operatorname{Tor}_R(A')$, где $\operatorname{Tor}_R(A')$ есть множество элементов A', аннулируемых ненулевым элементом из R. В силу следствия 5.10 идеалы, отвечающие путям полного существенного состава в алгебрах A' и A'', изоморфны. Поэтому в силу предыдущего предложения и в алгебре A'' имеется ненулевой R-замкнутый T-идеал $I'^0 \subseteq \pi(I) \cap J_C$. Но тогда $\pi^{-1}(I'^0) \supset \pi^{-1}(0) = I^0$. Кроме того, $\pi^{-1}(I'^0) \subseteq \pi^{-1}(\pi(I)) = I$ и является R-замкнутым, что противоречит максимальности I^0. □

Из этих предложений, а также из леммы 5.14 вытекает

Лемма 5.23. *Пусть T-идеал I в алгебре $\widehat{A}$ содержит элемент максимального (в частном случае полного) существенного состава. Тогда существует T-идеал $0 \neq I^0 \subseteq I$, все значения которого состоят из элементов максимального состава.* $\square$

5.8.1. Окончание доказательства локальной шпехтовости

В конечно порожденной PI-алгебре выполняются все тождества некоторой конечномерной алгебры. Рассмотрим промежуточный носитель $(\widehat{A}, \tilde{A})$ и покажем, что любая возрастающая цепочка значений T-идеалов $\{\Gamma_i\}$ в алгебре $\widehat{A}$ стабилизируется. При этом (разлагая алгебру $\widehat{A}$ в сумму идеалов с нулевым пересечением) можно считать что среди путей в соответствующем графе максимальный состав определен однозначно и нет несравнимых максимальных составов.

Предположим противное. Пусть $\{\Gamma_i\}$ – строго возрастающая цепочка таких T-идеалов. Пусть C_j – пути максимального состава (они могут различаться порядком прохождения клеток, их наличие может быть связано с эффектами гашения). Количество таких путей конечно, а состав их одинаков. Следовательно, одинаковы и кольца R_i, соответствующие этим путям.

Ясно, что соответствующая возрастающая цепочка максимальных R-замкнутых T-идеалов, содержащихся в Γ_i (значения которых отвечают пути максимального существенного состава и максимальной степени существенного радикала) стабилизируется на некотором идеале Γ_0^i. Этот идеал представим (ибо он также является идеалом в алгебре нетерового типа $A[R]$), так что можно перейти к фактору $A' = A/\Gamma_0^i$. В этой новой алгебре, в силу предыдущего предложения, для всех i значения полиномов из Γ_i не лежат в J_{C_i}.

Но тогда мы имеем строго возрастающую цепочку T-идеалов в факторе $A'/J_C(A')$. Эта алгебра имеет меньший максимальный состав пути (чем состав C). В силу индукционных соображений можно считать, что она (алгебра) представима, и завершить дело индукцией по максимальному составу пути.

Замечание. Пусть сумма и пересечение T-идеалов Γ и I представимы. Однако их расширения в алгебре $\tilde{A}$ могут иметь дополнительное пересечение. В случае конечного поля расталкивающие замены могут обеспечить только полноту состава. Редукционные рассуждения обеспечивают только локальную шпехтовость, а представимость надо доказывать особо. При этом мы будем пользоваться шпехтовостью.

Замечания. 1. Приведенное рассуждение локальную представимость не доказывает. Представимость идеала Γ в факторе A/J_C еще не влечет представимости Γ в A из-за эффектов неоднородности: при переходе к $\tilde{A}$ и появления новых коэффициентов старшие члены могут выделяться, хотя в алгебре A (и в $\widehat{A}$) они не выделялись. Было бы интересно привести контрпример к такому наивному доказательству представимости, т.е. пример T-идеала Γ в A такого, что $\Gamma \cap J_C = 0$ (в A), но $\tilde{\Gamma} \cap \tilde{J}_C \neq 0$ (в $\tilde{A}$). Конечно, если основное поле бесконечно, то такого рода эффектов нет и локальная представимость получается без специального рассуждения.

2. Таким путем, однако, можно доказать представимость существенно однородных T-идеалов в A (надо только проследить, что с существенной однородностью в факторе хорошо).

3. Путь, основанный на использовании только "полупростых" подстановок, не проходит. Во-первых, необходим "унитарный трюк" (см. раздел 5.1.3), а во-вторых — возникают только R^{p^k}-замкнутые T-идеалы, причем k неограничено.

5.9. Импликация: локальная шпехтовость $\Rightarrow$ локальная представимость

Для доказательства этой импликации достаточно для любого T-идеала $\Gamma \neq 0$ уметь находить представимый T-идеал $\Gamma^0 \neq 0$, содержащийся в Γ. Тогда дело завершает спуск, который, в силу уже установленной локальной шпехтовости, конечен. Кроме того, T-идеал Γ можно считать заданным квазилинейными тождествами.

Расталкивающие подстановки действуют через граничные операторы. И на каждой существенно однородной комноненте действие устроено по-своему и с умножением в алгебре эти действия согласованы не напрямую. Поэтому будет рассматриваться действие на T-идеале крайних элементов, который не выдерживает умножений на граничные операторы. Затем будет построено кольцо операторов, которые, с одной стороны, выражаются через подстановочное действие, а с другой стороны — через умножения на формы. Это и будет искомым кольцом S.

Конструкция представимого экстремального T-идеала Γ^0 осуществляется так. Алгебра $\widehat{A}$ расширяется с помощью ассоциативно-коммутативного кольца R до алгебры $\tilde{A} = \widehat{A}[R]$, при этом все частичные следы и формы будут целы над R. Тем самым $\tilde{A}$ будет нетеровым R-модулем. Алгебры A и $\widehat{A}$ будут в нее вложены и будет построен ненулевой R-замкнутый T-идеал $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$. Тогда его расширение до идеала в $A'' = A[R]$ совпадает с ним самим. Таким образом, идеал Γ^0 будет представим, а фактор–алгебра A/Γ^0 вкладывается в фактор $\tilde{A}/\Gamma^0$. Отметим, что идеал Γ^0 в алгебре A'', хотя и совпадает с T-идеалом Γ^0 алгебры A как множество, но T-идеалом в A'', вообще говоря, не является. (Подстановки вида $t \to \lambda t$ способны разделять слагаемые, которые в Γ^0 исходно не разделены.)

Нам понадобится одно понятие.

5.9.1. Крайние элементы

Определение 5.10. Назовем элемент $x \in \widehat{A}$ *крайним*, если результат его умножения на существенный элемент (с любой стороны) равен нулю. Аналогично определяется элемент *крайний слева* и *крайний справа*.

Равносильное определение: результат умножения на любой элемент из идеала, порожденного существенными (радикальными!) элементами — нулевой.

Примером крайнего элемента может служить элемент максимального существенного состава, но не только. В силу эффекта гашения путей могут быть элементы, отвечающие прохождению путей с разными концами, которые сами не являются крайними, но их некоторая линейная комбинация является крайней (при домножении на существенный элемент концы сливаются и пути гасятся).

Из теоремы о нильпотентности радикала следует, что для любого ненулевого идеала I множество крайних элементов из него тоже образуют ненулевой идеал, обозначаемый I^B. Отметим, что множество крайних элементов T-идеала, вообще говоря, T-идеалом не является. Более того. Если определить понятие "крайний элемент" через умножение на произвольный элемент из радикала, то такие "псевдо-крайние" элементы T-идеала в некоторой алгебре могут порождать исходный T-идеал (например, в расширении алгебр матриц центральными нильпотентами). Вероятно, подобное возможно и для таких "псевдо-крайних идеалов" в алгебре $\widehat{A}$ из-за эффектов неоднородности. Тем не менее имеет место следующее

Предложение 5.37 (О T-идеале крайних элементов). *Для любого T-идеала $I \neq 0$ алгебры A существует ненулевой T-идеал $J \subseteq I$, состоящий из крайних элементов.*

Доказательство. Мы можем действовать в алгебре $\widehat{A}$. Прежде всего отметим, что если I содержит не крайний элемент, то, умножив его на произведение существенных элементов, мы получим крайний элемент f, лежащий в сумме существенных градуированных компонент.

Упорядочим компоненты существенной градуировки и их линейные комбинации. *Порядковым типом* линейной комбинации будем считать порядковый тип младшего существенно однородного члена, входящего в нее с ненулевым коэффициентом, а *порядковым типом* T-идеала — минимальный порядковый тип его элемента. Степени существенных градуировок упорядочим так, как был упорядочен состав путей. Для этого мы будем пользоваться набором характеристик, описанных ниже. Сначала сравнивается первая характеристика, при совпадении — вторая и т.д. Вот список характеристик:

1) Количества входящих в существенные компоненты типов самых больших клеток.

2) Количества существенных компонент, связанных с клетками самого большого типа (количество граничных операторов — т.е. проходимых радикальных элементов).

3) Параметры 1 и 2 для клеток, следующих по величине, затем — следующих и т.д.

Предложение 5.37 вытекает из леммы о расталкивающих заменах 5.14, примененной к T-идеалу, порожденному элементом максимального типа из I. Для этого надо рассмотреть полином типа ϕ из этой леммы с максимально возможным числом переменных, образующих ядра Q_i. Если его умножение на существенный смешанный элемент даст ненулевой результат, то применив процесс расталкивания из леммы 5.14 к произведению ϕQ_i, можно построить многочлен с бóльшим числом образований Q_i и получить противоречие с исходной максимальностью.

Приведем более **явное доказательство**, без использования этой леммы, на котором лучше видна комбинаторика. Возьмем T-идеал J максимального типа, содержащийся в I. Пусть $q = p^k > c(A)$, $\phi \in J$ – ненулевой полином.

Ясно, что достаточно построить T-идеал из элементов, крайних с одной стороны. Тогда, построив T-идеал, состоящий из крайних слева элементов, а по нему — T-идеал крайних справа элементов, мы получим искомый T-идеал. В силу симметрии достаточно установить существование T-идеала, крайнего справа.

Будем работать в алгебре A^{cl}, являющейся замыканием по Зарисскому алгебр A и $\widehat{A}$. В ней коэффициенты при ненулевых существенных компонентах обратимы. Кроме того, множество значений центральных полиномов содержит пирсовские компоненты единицы, относящиеся к группе похожих клеток, а множество значений полиномов Q_i покрывает соответствующие операторы перехода. (Так мы здесь для краткости мы обозначаем полиномы $Q_k^{r,\mu}$, $Q_k^{l,\mu}$, Q_{k_1,k_2}^{μ}, $P_{q',q''}^{\mu}$, введенные в разделе 4.5.)

Пусть Z_{n_1} – центральный полином, отвечающий существенным клеткам максимального размера, причем вместо одной из переменных подставлен полином вида $y^{p^k} - y^{p^s}$, причем k и s выбраны так, чтобы на клетках конечного типа он обратился в ноль. Тогда значения полинома $[x, Z_{n_1}^q]$ лежат в идеале, порожденном максимальным смешанным элементом. Поэтому результат умножения ϕ на элемент типа $[x, Z^q_{n_1}]$ обращается в ноль. С другой стороны, множество его значений в A^{cl} содержит компоненты перехода данного типа, отвечающие минимальной степени однородности. Будем последовательно умножать ϕ справа на полиномы, не обращающиеся в нуль на клетках максимального существенного размера и обращающиеся в нуль на остальных клетках. Имеют место две возможности.

1) Процесс можно организовать так, что результат никогда не будет нулевым. В этом случае мы через некоторое число шагов получим линейную комбинацию членов из левого идеала, порожденного специализациями из существенных клеток максимального размера. Любое правое умножение такого элемента на элемент, у которого левая обкладка имеет другой тип, нулевое. С другой стороны, смешанный элемент с обкладкой такого типа в алгебре A^{cl}, согласно предложению 4.19, принадлежит множеству значений соответствующего Q_i. Но в результате умножений на такой полином получается идеал строго бóльшего порядкового типа. Поэтому результат такого умножения тоже нулевой. Мы получили элемент, крайний справа.

2) Получится многочлен ϕ', который при умножении справа на любой такой полином обращается в ноль. Тогда ϕ' порождает модуль M над фактором A^{cl} по идеалу J, порожденному старшими клетками. Этот модуль также является левым идеалом.

В этом случае перейдем к этому фактору A по таким компонентам и продолжим процесс по индукции, рассматривая M как A/J модуль. В итоге получится элемент T-идеала, крайнего справа, который нам и нужен. □

5.9.2. Локальная представимость алгебр

Мы будем пользоваться результатами раздела 5.3.2. Локальная представимость вытекает из следствия 5.3, а также предложений 5.35 и 5.24. В самом деле. Если алгебра $\widehat{A}$ не содержит существенных смешанных элементов, то для любого T-идеала Γ существование представимого идеала $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$, дающего индукционный спуск, следует из предложения 5.24. Таким образом, можно считать, что существенные смешанные элементы присутствуют.

Прежде всего, в силу следствия 5.3, для доказательства представимости T-идеала Γ достаточно ограничиться случаем, когда его область значений не содержит элемента полного существенного состава. Но тогда, в силу леммы о расталкивающих заменах 5.14, его значения в $\widehat{A}$ не содержат таких элементов, а стало быть, его значения в A (и в $\widehat{A}$) не содержат компонент полного существенного состава, а в алгебре $\tilde{A}$ соответствующий идеал тоже не содержит таких компонент. Но тогда в силу предложения 5.35 в идеале J, порожденном элементами полного существенного состава, нет препятствия к представимости Γ и можно перейти к фактору по J. Основное утверждение доказано!

Замечание. В однородном случае в качестве крайнего идеала берутся элементы максимального состава — из максимально возможной степени радикала. В неоднородном случае такие элементы не выделяются. Более того, может наблюдаться гашение путей с различной (несущественной) степенью радикальной компоненты. Поэтому для нас ту же роль играет понятие *полного существенного состава* — т.е. для каждого существенного типа клетки наличие смешанной радикальной компоненты с такой обкладкой. Это понятие можно сформулировать на языке тождеств, а именно — расталкивающих замен.

Заметим, что мы работали с такой группировкой сортов переменных: существенные, несущественные, смешанные, несмешанные. В заключение этой главы хочется сказать, что перенос развитой здесь техники на не- ассоциативный случай представляется весьма интересным.

6. Общие кольца и алгебры над коммутативным кольцом

Данный раздел посвящен переносу результатов для случая колец и алгебр над нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ. Поскольку n-кратное сложение любого элемента с самим собой определено, можно считать, что Φ содержит 1 и, следовательно, содержит $\mathbb{Z}_n$. Далее $J^{\cdot}(\Phi)$ обозначает аннулятор радикала Джекобсона $J(\Phi)$ кольца Φ, $c(\Phi)$ – индекс нильпотентности $J(\Phi)$.

Вначале будет установлена локальная шпехтовость, а затем с ее помощью — локальная представимость многообразий колец.

6.1. Локальная конечная базируемость многообразий

Вначале будет рассмотрен случай PI-колец, т.е. когда идеал K в кольце Φ, порожденный коэффициентами тождеств, содержит единицу, а затем — общий случай будет сведен к данному.

6.1.1. Случай PI-колец

Схема доказательства в общих чертах такова: для алгебр над полем локальная шпехтовость установлена. Можно считать также, что для всех факторов Φ локальная шпехтовость соответствующих алгебр установленной. (Нетеровость Φ позволяет вести индукцию по его факторам.) Промежуточный носитель будет представляться как подпрямая сумма своего фактора по модулю кручения и фактора, являющегося Φ/I-алгеброй для некоторого собственного идеала I кольца Φ. А фактор по модулю кручения является алгеброй над F – полем частных кольца Φ и хорошо устроен. В нем ищется экстремальный идеал и т.д. Различие между кольцом и его полем частных находится в Φ/I-алгебре — модуле кручения, и там цепочки T-идеалов стабилизируются.

Начнем с очевидного, но полезного замечания:

Лемма 6.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие Φ-алгебр, вообще говоря не ассоциативных, Φ – ассоциативно-коммутативное кольцо, $x \in \Phi$. Тогда*

а) Пространство xB изоморфно фактору алгебры B (а также алгебры $\Phi/\operatorname{Ann}(x) \otimes B$) по некоторому T-идеалу.

б) Если любое многообразие $\Phi/\operatorname{id}(x)$-алгебр из $\mathfrak{M}$ локально конечно базируемо и любое многообразие $\Phi/\operatorname{Ann}(x)$-алгебр из $\mathfrak{M}$ локально конечно базируемо, то многообразие Φ-алгебр из $\mathfrak{M}$ тоже локально конечно базируемо (т.е. локально шпехтово).

в) Для любого идеала $I \lhd \Phi$ множество $\{g|gI = 0\}$ образует T-идеал.

Доказательство. Начнем с п.а). Если $xf = 0$, то в силу относительной свободы B нулю равен и xg для любого образа g элемента f при эндоморфизме B, (т.е. при любой подстановке). Поэтому аннулятор x есть T-идеал, фактору по которому изоморфно пространство xB. П.а) доказан. Аналогично доказывается п.в).

Оператор умножения на x осуществляет отображение алгебры B на пространство xB, причем образы и прообразы T-идеалов снова являются T-идеалами. Это отображение можно также рассматривать как морфизм алгебры $B/\operatorname{Ann}(x)$. Поэтому любая возрастающая цепочка T-идеалов в пространстве xB стабилизируется. С другой стороны, любая возрастающая цепочка T-идеалов в факторе B/xB стабилизируется тоже. □

Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие 6.1. *а) Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие Φ-алгебр, вообще говоря не ассоциативных. Φ – ассоциативно–коммутативное кольцо, $\bar{\Phi} = \Phi/J(\Phi)$. Тогда если любое многообразие $\bar{\Phi}$-алгебр из $\mathfrak{M}$ локально конечно базируемо, то многообразие Φ-алгебр из $\mathfrak{M}$ тоже локально конечно базируемо (т.е. локально шпехтово).*

б) Локальная шпехтовость $\mathfrak{M}$ также следует из локальной шпехтовости $\mathfrak{M}$ для всех первичных факторов кольца Φ. □

Таким образом, доказательство конечной базируемости свелось к случаю алгебр над первичным кольцом. Поскольку конечное первичное кольцо $\bar{\Phi}$ является полем, то тем самым для алгебр над конечным кольцом локальная шпехтовость установлена.

Замечание. Аналогичные рассуждения для локальной представимости не проходят. Легко привести пример идеала, представимого в $B/J(\Phi)B$, но не представимого в B. При гомоморфизмах в алгебры нетерового типа могут появляться дополнительные компоненты ядер из xB. Хорошо бы привести соответствующий пример для T-идеалов. Можно ли на этом пути построить локально шпехтовое, но не локально представимое многообразие (неассоциативных алгебр)?

Отметим, что если идеал I представим в $A/J(\Phi)A$ и $x \in J^{\cdot}(\Phi)$, причем пространство xA изоморфно $A/J(\Phi)A$, то идеал xI также представим в A. Он изоморфен идеалу I как подмодуль в xA. Если же изоморфизм этих пространств $A/J(\Phi)A$ имеет место для всех $x \in J^{\cdot}(A)$, то идеал $J^{\cdot}I$ также представим в A.

Следовательно, его фактор $\bar{\Phi}$ по радикалу Джекобсона $J(\Phi)$ является первичным кольцом. Если Φ конечно, то это — поле. Коммутативные кольца с первичным фактором по радикалу называются *примарными.*

Предложение 6.1. *Локализация относительно свободной алгебры (не обязательно ассоциативной) по произвольному множеству S кольца Φ относительно свободна.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда множество S порождено одним элементом s. Отсюда будет следовать случай конечно порожденных мультипликативных систем, а поскольку многочлен имеет конечное число коэффициентов и переменных, то последует и общий случай. Кроме того, взяв фактор по модулю кручения (см. п.в) леммы 6.1), можно считать, что s не есть делитель нуля в Φ и в A.

Достаточно показать, что тогда множество тождеств в исходной алгебре и в локализованной совпадают. Для этого достаточно показать, что величина $P(s^{-k_1}x_1, \dots, s^{-k_l}x_l)$, где $k_i \in \mathbb{N}$, выражается как линейная комбинация с коэффициентами из $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ через полиномы вида $P(s^{r_1}x_1, \dots, s^{r_l}x_l)$ $(r_i \in \mathbb{N})$. Считая все переменные, кроме одной, константами, с помощью очевидной индукции мы приходим к случаю многочленов от одной переменной. Таким образом, предложение свелось к следующей чисто комбинаторной лемме:

Лемма 6.2. *Пусть* $\overrightarrow{e}_t;\ i = 1, \ldots, n$ *– набор векторов,* $\Psi = \mathbb{Z}[S, S^{-1}]$,

$$\overrightarrow{f}_k = \sum_{t=1}^{n} S^{kt} \overrightarrow{e}_t;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда вектор $\overrightarrow{f}_{-1}$ *лежит в* Ψ*-модуле* M^+*, порожденном набором* $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k\geq 0}$.

Доказательство. Кольцо Ψ нетерово, и векторы $\overrightarrow{f}_k$ лежат в нетеровом модуле N, порожденном $\{\overrightarrow{e}_i\}_{i=1}^n$, поэтому Ψ-модули M, M^+ и M^-, порожденные $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k\geq 0}$ и $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k\leq 0}$, соответственно, нетеровы. Поэтому для некоторого $m \in \mathbb{N}$ модуль M^+ порождается набором векторов $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k=0}^m$.

Пусть ρ – инволютивный автоморфизм Ψ такой, что $\rho(S) = S^{-1};\ \rho|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{id}$, $\tau_k : N \to N$ – такое отображение, что $\tau_k(S^{it}\overrightarrow{e}_i) = S^{(k-t)i}\overrightarrow{e}_i$ и $\forall \alpha \in \Psi\ \tau_k(\alpha\overrightarrow{u}) = \rho(\alpha)\tau_k(\overrightarrow{u})$.

Отображения τ_k корректно определены и являются полулинейными инволюциями $N \to N$. Кроме того $\tau_k(\overrightarrow{f}_i) = \overrightarrow{f}_{k-i}$ и, следовательно, $\tau_k(M) = M$. Кроме того, отображение τ_m переводит в себя множество векторов $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k=0}^m$, и потому $\tau_m(M^+) = M^+$.

С другой стороны, τ_m должно переводить M^+ в Ψ-модуль, порожденный $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k=-\infty}^m$, который содержит M^-, а также $\Psi[\{\overrightarrow{f}_k\}_{k=0}^m] = M^+$ и потому совпадает с M. Таким образом, $\tau_m(M^+) = M$, $M^+ = \tau_m^2(M^+) = \tau_m(M) = M$. Это означает, что через $\{\overrightarrow{f}_k\}_{k=0}^m$ выражаются все $\overrightarrow{f}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. утверждение леммы доказано. $\square$

Из предложения 6.1 получается такое

Следствие 6.2. *Пусть* Γ *–* T*-идеал* Φ*-алгебры* A*,* $\mathbb{F}$ *– поле частных кольца* Φ*,* Γ' *– соответствующий* T*-идеал в* $\mathbb{F}\otimes A$*,* $\Gamma'' = \Gamma'\cap A$*. Тогда* Γ'' *является* T*-идеалом и его образ в* A/Γ *лежит в модуле* Φ*-кручения.* $\square$

Назовем *модулем существенного кручения* подмодуль $\mathrm{Tor}_{Ess}(M) \subseteq M$, состоящий из элементов с аннулятором не из $J(R)$. $\mathrm{Tor}_\Phi(M)$ есть модуль кручения для кольца Φ (подмодуль M).

Следующее утверждение родственно лемме Артина–Рисса:

Предложение 6.2. *а) Пусть* M *– нетеров модуль над первичным нетеровым кольцом* R*,* $\mathrm{Tor}(M)$ *– подмодуль кручения. Тогда* M *вкладывается в прямую сумму своих факторов* $M/I\cdot M \oplus M/\mathrm{Tor}(M)$ *для некоторого собственного идеала* I *кольца* R*.*

б) Если при этом $R = \Phi\otimes R_0$ *есть тензорное произведение нетеровых первичных колец с единицей, то* M *вкладывается в прямую сумму своих факторов* $M/I\cdot M \oplus M/\mathrm{Tor}_\Phi(M)$ *для некоторого собственного идеала* I *кольца* Φ*.*

в) В условиях п.а) пусть R *– нетерово кольцо без идеалов с нулевым пересечением, так что его фактор по радикалу Джекобсона* $\bar{R} = R/J(R)$ *первичен. Тогда* M *вкладывается в прямую сумму своих факторов* $M/I\cdot M \oplus M/\mathrm{Tor}_{Ess}(M)$ *для некоторого собственного идеала* I *кольца* R*.*

г) В условиях п.а) пусть R *– произвольное нетерово кольцо,* $\bar{R}_i$ *– первичные кольца и* $R/J(R) = \oplus\bar{R}_i$*,* $R_i = \pi^{-1}(\bar{R}_i)$*. Тогда* M *вкладывается в прямую сумму своих факторов* $M/R_i^k M$ *для некоторого натурального* k*.*

д) Если все указанные в условии данного предложения нетеровы кольца эффективно заданы, то все конструкции из данного предложения также эффективно вычислимы. $\square$

Данная лемма при работе с промежуточным носителем позволяет сводить все к случаю алгебр над фактором Φ (для которых локальную шпехтовость и локальную конечную базируемость можно считать доказанной по индукционному предположению) и строить экстремальные идеалы в алгебрах над полем частных кольца Φ (а случай алгебр над полем уже разобран).

Из леммы 5.21 и предложений 6.2, 6.1 непосредственно следует

Лемма 6.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – бесконечное поле частных кольца Φ, A – Φ-алгебра без Φ-кручения, R – кольцо, порожденное следами, $\widehat{A} = A[R]$ – алгебра нетерового типа, Γ – T-идеал в A, $\Gamma_{\mathbb{F}} \equiv \mathbb{F} \otimes \Gamma$ – соответствующий T-идеал в $\mathbb{F} \otimes A$.*

Тогда существует R-замкнутый T-идеал Γ^0 в A такой, что T-идеал $\Gamma^0_{\mathbb{F}} \equiv \mathbb{F} \otimes \Gamma^0$ удовлетворяет условиям леммы 5.21. Кроме того, существует такая константа $\lambda \in \Phi \backslash \{0\}$, что при всех $x \in \Gamma^1 = \Gamma^0_{\mathbb{F}} \cap A$ имеет место включение $\lambda \cdot x \in \Gamma^0$.

Доказательство. Достаточно показать существование такого $\lambda \in \Phi \backslash \{0\}$, что при всех $x \in \Gamma^0_{\mathbb{F}} \cap A[R]$ имеет место включение $\lambda \cdot x \in \Gamma^0$. А существование такой константы вытекает из п.б) предложения 6.2. □

Завершим **доказательство локальной конечной базируемости** для многообразий ассоциативных алгебр над произвольным ассоциативно–коммутативным кольцом Φ. Кольцо Φ нетерово и в силу индуктивных соображений конечную базируемость для алгебр над всеми факторами кольца Φ можно считать установленной. Кроме того, локальная конечная базируемость над кольцом Φ сведена к локальной конечной базируемости над его первичными факторами, и потому Φ можно считать первичным. Пусть F – поле частных кольца Φ. Если Φ – поле, то конечная базируемость уже доказана, посему можно считать, что $F \neq \Phi$ и кольцо Φ бесконечно.

Мы работаем с парой (Γ, A), где $\Gamma \supseteq \mathrm{T}(A)$, алгебра A имеет нетеров тип над кольцом представления $\Phi \otimes R$. (Поскольку Φ бесконечно, мы работаем не с парами алгебр $(A, \tilde{A})$, а только с одной алгеброй A.) В силу предложения 6.2 можно считать (и считаем) что A точный Φ-модуль без кручения и тогда $\mathrm{Var}(F \otimes A) = \mathrm{Var}(A)$. Кроме того, можно считать, что в A нет R-замкнутых идеалов с нулевым пересечением.

Наша цель — найти такой представимый идеал $I^0 \triangleleft A$, что:

1) Пересечение $\Gamma^0 = \Gamma \cap I^0$ конечно базируемо.

2) $\mathrm{Var}(F \otimes A/I^0)$ есть собственное подмногообразие $\mathrm{Var}(F \otimes A)$.

Тогда происходит индукционный спуск к паре $(\Gamma/\Gamma^0, \bar{A})$ где $\bar{A} = A/I^0$. В силу предложения 6.2 найдется ненулевая константа $\lambda \in \Phi$, аннулирующая модуль Φ-кручения J_Φ алгебры и алгебра $\bar{A}$ вкладывается в прямую сумму своих факторов $\bar{A}/J_\Phi \oplus \bar{A}/\lambda\bar{A}$. Алгебра $A' = \bar{A}/J_\Phi$ не имеет Φ-кручения и потому $\mathrm{Var}(A') = \mathrm{Var}(F \otimes A')$. Алгебра $A" = \bar{A}/\lambda\bar{A}$ есть алгебра над ме́ньшим кольцом $\Phi/\lambda\Phi$. Конечную базируемость над всеми факторами основного кольца Φ считаем установленным, и потому произошел переход к паре $\tilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_0 + \mathrm{T}(A"), A')$. В силу предложения 6.1 $\tilde{\Gamma} \cong F \otimes \Gamma$ и $\lambda \cdot (\tilde{\Gamma} \cap A) \subseteq \Gamma$. При этом $\mathrm{Var}(A') \subsetneq \mathrm{Var}(A)$ и, кроме того, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(F \otimes A)$ и $\mathrm{Var}(A') = \mathrm{Var}(F \otimes A')$. Поскольку локальная конечная базируемость для полей уже установлена, цепочка последовательных переходов $A \to A'$ должна оборваться.

Итак, достаточно найти идеал I^0 в алгебре A, удовлетворяющий условиям (1) и (2). Будем действовать так, как будуто Φ – поле, а потом R-образующие идеала домножим на подходящую константу.

Рассмотрим два случая — когда в алгебре $F\otimes A$ есть существенные смешанные элементы и когда их нет.

В первом случае возьмем путь максимального состава в алгебре $F \otimes A$, соответствующую систему расталкивающих замен и T-идеал $\tilde{\Gamma}^1 \subseteq \tilde{\Gamma}$, порожденный полиномами, вид которых указан в лемме о заменах 5.13. Это конечно порожденный R-модуль, причем образующие можно выбрать из алгебры A и, следовательно, из Γ.

Во втором случае все клетки алгебры $F \otimes A$ можно считать однотипными и существенными, взять идеал Γ^0, построенный в разделе 5.4.2, и воспользоваться следствием 5.5.

Над соответствующим кольцом R частичные следы и формы целы, верно и обратное. (Во втором случае R просто совпадет с кольцом форм.) Кроме того, операторы из R, соответствующие действию подстановок элементов из A во вспомогательные образования Q_i, деления не используют. В силу теоремы Ширшова о высоте, $A[R]$ является нетеровым модулем над кольцом R, причем в силу леммы 6.3 T-идеал Γ содержит ненулевой R-замкнутый идеал Γ^0. Таким образом, в алгебре A существует конечно базируемый T-идеал Γ^1, связанный с T-идеалом Γ^0 равенством $\Gamma^0 = F \otimes \Gamma^1$.

Этот T-идеал Γ^1 можно считать конечно базируемым (ибо $F\otimes A$ есть алгебра) и кроме того — нетеровым R-модулем (ибо $F\otimes A$ есть алгебра нетерового типа). И он удовлетворяет условиям (1) и (2). □

Замечание. Поскольку F бесконечно, то вместо расталкивающих замен для построения экстремального идеала можно воспользоваться конструкцией А. Р. Кемера из работы [55]. Кроме того, можно вести индукцию по сложностному типу.

6.1.2. Несобственные тождества. Нильпотентность радикала и финитная апроксимируемость

Теперь рассмотрим несобственный случай — когда идеал K в кольце Φ, порожденный коэффициентами тождеств, не содержит единицы (тождество *собственное*, если один из его коэффициентов равен единице). В этом случае рост алгебры экспоненциальный, представимость места не имеет и ее не надо доказывать, а вот конечная базируемость для T-идеалов имеет место.

Чтобы доказать конечную базируемость, достаточно доказать следующее утверждение:

Предложение 6.3. *Для любого T-идеала Γ с идеалом коэффициентов K в конечно порожденной алгебре существует T-идеал W, содержащий собственное тождество, пересечение которого с множеством многочленов с коэффициентами из K содержится в идеале тождеств исходной алгебры.*

Тогда мы перейдем к ранее разобранному случаю. Отметим, что если идеал, порожденный коэффициентами тождества, содержит единицу, то из него следует собственное тождество.

Приведем еще два следствия из данного предложения (и результатов раздела 6.2). Рассмотрим убывающую систему T-идеалов $\{\Gamma_k = \Gamma + \mathrm{T}(C_k)\}_{k=1}^{\infty}$ в к.п. абсолютно свободной Φ-алгебре A. Из предложения 6.3 следует, что пересечение этой системы есть Γ. С другой стороны, из результатов раздела 6.2 вытекает представимость факторов A/Γ_k, а как показал А. И. Мальцев, каждая представимая алгебра финитно аппроксимируема. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 6.1 (Гипотеза Л. А. Бокутя и И. В. Львова [33]). *Относительно свободное ассоциативное PI-кольцо финитно аппроксимируемо.* □

В конечно порожденной *PI*-алгебре имеет место теорема Размыслова–Кемера–Брауна о нильпотентности радикала. Поэтому из предложения 6.3 следует, что многочлены с коэффициентами из K из $J(A)$ порождают нильпотентный идеал. С другой стороны, если A относительно свободна, то многочлены не из KA не могут лежать в радикале. Таким образом, имеет место следующий аналог теоремы Брауна о нильпотентности радикала:

Теорема 6.2. *Радикал конечно порожденной относительно свободной ассоциативной алгебры над нетеровым ассоциативно–коммутативным кольцом* Φ *нильпотентнен.* □

Перейдем к **доказательству** предложения 6.3.

Лемма 6.4. *Пусть* K *– идеал в кольце* Φ*, порожденный коэффициентами многочленов из* T*-идеала* H*. Тогда существует многочлен* f *с целыми коэффициентами, причём один из коэффициентов равен единице, такой что для любого* $x \in K$ *многочлен* xf *принадлежит* H*.*

При достаточно больших n *все тождества, выполняющиеся в алгебре* $M(n,\Phi) = M_n(\mathbb{Z}[x]) \otimes \Phi$ *удовлетворяют этому условию.*

Доказательство. Достаточно показать, что если тождество f Φ-алгебры A имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i,$$

где каждое u_i есть линейная комбинация мономов с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности, а x_i – свободные коммутативные переменные кольца $\Phi = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, то идеал $\mathrm{T}(f)$ для любого i содержит тождество вида $x_i g_i$, где коэффициенты x_i – целые числа и тождество g – собственное. Тогда, в силу конечной порожденности исходной алгебры A, из тождества g_i следуют все тождества алгебры матриц некоторого порядка n_i. И в условии леммы достаточно положить $n = \max_i n_i$.

Далее, пусть случай, когда x_i есть коэффициент при мономе u_i старшей степени, разобран. Тогда можно осуществить индукционный спуск по числу переменных $\{x_\alpha\}$, ибо если $x_i g_i \in \mathrm{T}(A)$, то многочлен вида $f g_i - x_i g_i h$ является тождеством A и в нем участвует меньший набор переменных $\{x_\alpha\}$.

Поскольку все свелось к указанному случаю, в силу процедуры квазилинеаризации тождество f можно считать полилинейным. Перенумеровав переменные, полагаем $i = 1$.

Пусть B – свободная счетно порожденная алгебра из $\operatorname{Var} A$ с образующими $\{y_1, y_2, \dots\}$, при этом $y_1 \prec y_2 \prec \dots$; M_h – пространство полилинейных слов степени h от $\{y_1, \dots, y_h\}$. Рассмотрим пространства $M^h = \sum x_i M_h$. Упорядочим мономы и рассмотрим элементы вида $x_k m_k$, не линейно представимые линейно членами вида $x_j m_j$, где $m_j \prec m_k$. Легко видеть, что такие m_k не являются q-разбиваемыми, где $q = \deg(f)$. Поэтому ранг $\mathbb{Z}$-модуля M^h не превосходит $nh^{2(q-1)}$. В пространстве M^h действует симметрическая группа S_h, переставляющая переменные. И если диаграмма Юнга D содержит квадрат размера $2nq^4 \times 2nq^4$, то любая компонента соответствующего ей модуля нулевая (см. раздел 0.2.4).

Пусть g – один из полилинейных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, соответствующих диаграмме D. Тогда для любого i в алгебре A выполняется тождество $x_i f = 0$, что и требовалось установить. □

Следствие 6.3 (Из доказательства). *Существует такая рекурсивная функция $H(n,s)$, что если в s-порожденной алгебре A выполняется набор тождеств $\{g_i\}$ степени не выше n, то для любого $f \in \mathrm{T}(\mathbb{M}_{H(n,s)}(\mathbb{Z})$ и любого x из идеала $K \trianglelefteq \Phi$, порожденного всеми коэффициентами многочленов $\{g_i\}$, выполняется включение*

$$xf \in \mathrm{T}(A).$$

$\square$

Отметим, что алгебра $M(n,\Phi)$ не является алгеброй общих матриц над Φ, поскольку, например из элемента алгебры, порожденной общими матрицами, может извлекаться дробь, которая является матрицей с целыми полиномиальными коэффициентами, но не выражается через исходные общие матрицы. Поэтому в ней не больше тождеств, чем в алгебре общих матриц.

Лемма 6.5. *а) В алгебре $M(n,\Phi)$ нет кручения, она является свободным Φ-модулем и образы элементов из $M_n(\mathbb{Z}[x]) \otimes 1$ образуют базис.*

б) Множества нормальных базисов и старших членов тождеств в алгебрах $M(n,\Phi)$ и $M_n(\mathbb{Z}[x])$ совпадают.

в) Все тождества этой алгебры имеют вид λg, где $g \in \mathrm{T}(M_n(\mathbb{Z}[x]))$, $\lambda \in \Phi$.

Доказательство. П.а) очевиден. П.б) следует из п.а), п.в) следует из п.б). $\square$

Из этих двух лемм следует, что существует такое n, что идеалы тождеств в A содержит все тождества из $M(n,\Phi)$, все коэффициенты которых лежат в K. Отсюда вытекает и предложение 6.3. Что и обеспечивает нужный результат: конечную базируемость в общем случае.

Из леммы 6.4 и локальной представимости *PI*-колец, обладающих собственным тождеством (которая будет доказана в разделе 6.2), следует утверждение, которое можно рассматривать как своего рода "локальную представимость" в несобственном случае.

Предложение 6.4. *Пусть A – относительно свободная конечно порожденная Φ-алгебра, K – идеал кольца Φ, порожденный коэффициентами тождеств, выполняющихся в A.*

Тогда существует морфизм ρ алгебры A в алгебру нетерового типа, ограничение которого на пространство KA является вложением. $\square$

Замечание. Лемма 6.4 аналогична предложению 3.10 из раздела 3.5. Оба этих утверждения используются для редукции к "представимой *PI*-ситуации".

6.1.3. Кручение в относительно свободных кольцах

В данном разделе изучается Φ-кручение, ибо многие его свойства вытекают из локальной конечной базируемости. Кроме того, результаты данного раздела нам понадобятся при доказательстве локальной представимости.

Пусть M – произвольный Φ-модуль. Идеалам в кольце Φ соответствуют их ануляторы в M, являющиеся его подмодулями. И наоборот, подмодулям в M соответствуют их аннуляторы в Φ, являющиеся идеалами. При этом сумме соответствует пересечение, а то, что соответствует пересечению (а также произведению), содержит сумму. Кроме того, данное соответствие является антигомоморфизмом структуры включения: если $X_1 \subset X_2$, то $Y_1 \supseteq Y_2$, где Y_i соответствует X_i. Это соответствие не является взаимно однозначным, но если Y соответствует X, а Z соответствует Y, то Y соответствует Z и наоборот. Иными словами, двойное применение соответствия приводит к замыканию, а соответствие замкнутых объектов уже взаимно однозначно. *Замкнутым* будет называться подмодуль (идеал) являющийся образом при этом соответствии.

Определение 6.3. Кручение называем *существенным для* данной *первичной компоненты* Ψ кольца Φ, если соответствующий идеал содержит Ψ-*существенный* элемент, т.е. элемент с ненулевой проекцией на Ψ. Если $\bar{\Phi}$ первично, то кручение называется просто *существенным*, если оно содержит элемент не из $J(\Phi)$.

Предложение 6.5. *Пусть B – относительно свободная Φ-алгебра (не обязательно ассоциативная). Тогда идеалам в кольце Φ соответствуют T-идеалы в алгебре B.*

Доказательство. T-идеалы — это в точности те идеалы, которые выдерживают эндоморфизмы алгебры B. Образ каждого эндоморфизма изоморфен фактору B, поэтому аннулятор I любого идеала $J \subset \Phi$ переходит в аннулятор идеала I при любом эндоморфизме. $\square$

Теперь нас будет интересовать соответствие между решеткой замкнутых идеалов кольца Φ и замкнутых T-идеалов относительно свободной алгебры A. Поскольку соответствие замкнутых объектов является антиизоморфизмом по отношению включения, а идеалы в Φ и T-идеалы в A удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей, то замкнутые объекты удовлетворяют условию обрыва как возрастающих, так и убывающих цепей.

Применим это соображение к $\mathbb{Z}$-алгебрам, т.е. просто кольцам. Пусть M – произвольный $\mathbb{Z}$-модуль, $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p$, $\pi : M \to M_p$ – каноническая проекция, и пусть

$$M_{p,k} = \ker \varphi_{p,k} : M \to M : x \mapsto p^k x,\ \ M^{p,k} = \operatorname{Im} \varphi_{p,k},\ \ M^p = \bigcap_k M^{p,k}.$$

Ясно, что $M_{p,k} \subset M_{p,k+1}$. Кроме того, если $M_{p,k} = M_{p,k+1}$, то $M_{p,q} = M_{p,q+1}$ для всех $q > k$.

Нам понадобится следующая техническая

Лемма 6.6. *Если M обладает дополнительной структурой R-модуля, тогда $M_{p,k}R^{p,k} = 0$, R^p анулирует все $M_{p,k}$.*

Пусть A – относительно свободное кольцо. Если положить $M = A$, $M_p = A \otimes \mathbb{Z}_p$, то соответствующие модули $\pi(M_{p,k})$ также будут T-идеалами. Отсюда непосредственно следует такое утверждение:

Предложение 6.6. *Пусть A есть относительно свободная к.п. ассоциативная Φ-алгебра. Тогда*

а) Множество таких p, что в A есть p-кручение, конечно.

б) Множество таких k, что $\ker(p^k) \neq \ker(p^{k+1})$, конечно.

в) Если M есть относительно свободная Φ-алгебра, рассматриваемая как Φ-модуль, и $M_{p,k} \neq M_{p,k+1}$, то $\pi(M_{p,k}) \neq \pi(M_{p,k+1})$.

Доказательство. Модули кручения, отвечающие множествам из пп.а) и б) данного предложения, суть T-идеалы. Пусть I_p есть T-идеал, порожденный элементами, имеющими p^k-кручение для некоторого k, $I_{p,k}$ есть T-идеал, порожденный элементами x такими, что $p^k x = 0$. Тогда $\bigoplus_{p<q} I_p$, а также $I_{p,k}$, образуют возрастающие цепочки T-идеалов, которые стабилизируются. П.в) есть непосредственное следствие п.б). $\square$

Замечание. Алгебра $A \otimes \mathbb{Q}$ относительно свободна и задается конечным набором тождеств из любой наперед заданной полной системы тождеств. В разделе 3.4.2 показано, что для любой к.п. относительно свободной $\mathbb{Z}$-алгебры имеется кручение по конечному числу простых модулей. Поэтому п.а) также следует из результатов раздела 3.4.2.

Таким образом, решетка замкнутых идеалов для колец (случай $\Phi = \mathbb{Z}$) конечна.

Замечание. В общем случае это не обязательно так. Пусть $\Phi = \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_1, \delta_1, \delta_2, \mu]$. При этом $\varepsilon_i\delta_j = \alpha_{ij}\mu$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$. И кроме того, $\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_i\delta_j = \varepsilon_i\mu = \delta_j\mu = \mu^2 = 0$. Таким образом, умножая выражение $\delta_1 f + \delta_2 g$ на подходящую сумму $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2$ ($a_i \in \mathbb{Q}$) можно получить любое выражение вида $\mu(b_1 f + b_2 g)$ для любой пары рациональных чисел (b_1, b_2). Семейство тождеств может зависеть от параметра λ. Воспользовавшись этим обстоятельством, легко получить бесконечное семейство аннуляторов вида $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2$ и соответствующее семейство замкнутых T-идеалов вида $\delta_1 f + \delta_2 g$.

Тем не менее, имеет место следующее

Предложение 6.7. *а) Для первичного кольца Φ существует элемент $\phi \in \Phi\backslash\{0\}$, аннулирующий все элементы относительно свободной конечно порожденной Φ-алгебры, имеющие нетривиальное кручение.*

б) Для примарного кольца Φ существует элемент $\phi \in \Phi\backslash\{0\}$, аннулирующий все элементы относительно свободной конечно порожденной Φ-алгебры, имеющие нетривиальное существенное кручение.

в) Для каждой первичной компоненты Ψ кольца Φ существует элемент $\phi \in \Phi\backslash\{0\}$ анулирующий все элементы относительно свободной конечно порожденной Φ-алгебры, имеющие нетривиальное существенное Ψ-кручение.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Ann}(xy) \supseteq \mathrm{Ann}(x) + \mathrm{Ann}(y)$, а произведение существенных элементов существенно, утверждения всех пунктов следуют из условия обрыва возрастающих цепей для T-идеалов. □

И в заключение этого раздела – несколько технических утверждений.

Лемма 6.7. *Пусть для некоторых элементов e_i Φ-модуля M и некоторых $\lambda_{ij} \in \Phi$ выполняется система уравнений*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i = 0 \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда при всех i $e_i\Delta = 0$, где $\Delta = \det((\lambda_{ij}))$.

Доказательство. Пусть M_{ij} – минор матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$, $M = (M_{ij})$. Тогда $\Lambda M = \Delta E$ или $\sum_j M_{ij}\lambda_{jk} = \Delta\delta_{ik}$ ($\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$.) Поэтому

$$0 = \sum_{jk} M_{ij}\lambda_{jk}e_k = \Delta e_i.$$

□

Предложение 6.8. *а) Однородная компонента тождества f по переменной x обращается в ноль при умножении на любое значение определителя Ван-Дер-Монда, составленного из любых элементов Φ, порядок которого равен степени f по x.*

б) Пусть кольцо $\bar{\Phi}$ бесконечно. Тогда однородные компоненты тождеств из A имеют существенное кручение.

в) Пусть кольцо Φ для любого n содержит обратный элемент к некоторому значению определителя Ван-Дер-Монда порядка n. Тогда любое тождество равносильно набору своих полиоднородных компонент и любое многообразие Φ-алгебр однородно.

Доказательство. Пп.б) и в) следуют из п.а). Докажем п.а).

Пусть $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, f_i – компонента f степени однородности i относительно переменной x. Результат подстановки $\lambda^k x \to x$ в f есть многочлен $\sum_{i=0}^{n} \lambda^{ki} f_i$, являющийся следствием тождества f. Поэтому п.а) следует из леммы 6.7. □

Еще одно техническое утверждение:

Лемма 6.8. *Пусть кольцо Φ содержит несколько идеалов $I_\alpha \ni E_\alpha$, E_α – семейство ортогональных идемпотентов, в сумме дающих единицу. Тогда любой Φ-модуль (любая Φ-алгебра) разлагается в прямую сумму Φ/I_α модулей (алгебр), являющихся его факторами.* □

Замечание. Аналогичное утверждение даже для двух идеалов с нулевым пересечением неверно. Например, пусть M – 2-порожденный модуль с образующими a, b и соотношениями $ai_1 = bi_2; i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$. При этом факторы Φ/I_1 и Φ/I_2 могут оказаться даже первичными кольцами. Тем не менее для конечного кольца подобное разложение имеет место. Отметим также, что любая алгебра есть подпрямое произведение своих факторов, имеющих примарное кручение в аддитивной группе либо не имеющих кручения. (Кручение *примарно*, если везде оно есть степень одного и того же простого числа.)

6.2. Локальная представимость многообразий

Данный раздел посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема. *Относительно свободная PI-алгебра над произвольным нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ локально представима.*

Пусть A – к.п. относительно свободная Φ-алгебра, $\bar{\Phi} = \Phi/J(\Phi)$, $\bar{A} = \bar{\Phi} \otimes A$. Будем считать, что для всех факторов Φ, а также всех локализаций Φ, с меньшим набором первичных компонент локальная представимость доказана. Тогда нетеровость Φ обеспечит корректность индукции.

6.2.1. Редукция к случаю, когда $\bar{\Phi}$ – поле

Отметим, что для конечных колец эта редукция получается непосредственно: конечное полупервичное кольцо является прямой суммой полей, так что достаточно воспользоваться леммой 6.8.

Рассмотрим произвольную первичную компоненту Ψ кольца Φ (т.е. первичную компоненту фактора $\Phi/J(\Phi)$). В силу предложения 6.7 в кольце Φ есть Ψ-существенный элемент ϕ, аннулирующий все элементы существенного Ψ-кручения (см. определение 6.3). Тогда A вкладывается в сумму своих факторов $A/\phi A \oplus$

$A/\operatorname{Tor}_{ess}(A)$. Алгебру $A/\phi A$ можно рассматривать как $\Phi/\operatorname{id}(\phi)$-алгебру, которая представима. Поэтому можно считать, что в алгебре A существенного Ψ-кручения нет. Но тогда A вкладывается в Φ^{Ψ}_{EssLoc}-алгебру $\Phi^{\Psi}_{EssLoc} \otimes A$, где Φ^{Ψ}_{EssLoc} – локализация Φ по множеству Ψ-существенных элементов. При этом алгебра $\Phi^{\Psi}_{EssLoc} \otimes A$ относительно свободна (в силу предложения 6.1), а кольцо $\bar{\Phi}^{\Psi}_{EssLoc}$ является полем. И представимость $\Phi^{\Psi}_{EssLoc} \otimes A$ вытекает из индукционного предположения.

6.2.2. Построение экстремальных идеалов

Мы покажем, что последовательное применение расталкивающих операторов стабилизируется "в проективном смысле". Нам потребуется одно

Определение 6.4. Пусть M – нетеров модуль без кручения над нетеровым первичным кольцом R. Назовем подмодуль $N \subseteq M$ *проективно минимальным*, если $N \neq 0$ и для любого его подмодуля N' существует элемент $r \in R$ такой, что $N' \supseteq rN$. R-замкнутый T-идеал $I \neq 0$ *проективно минимален*, если для любого R-замкнутого T-идеала $J \subseteq I$ существует $r \in R$ такой, что $J \supseteq rI$, и *сильно проективно минимален*, если для любого T-идеала $J \subseteq I$ существует указанное r. Понятие сильной проективной минимальности определено для всех T-идеалов, не обязательно R-замкнутых.

Предложение 6.9. *Любой нетеров R-модуль без кручения содержит проективно минимальный подмодуль. То же верно для R-замкнутых T-идеалов, являющихся нетеровыми R-модулями.*

Доказательство. При локализации все рассматриваемые модули превращаются в конечномерные векторные пространства над полем частных кольца R. Если двум нетеровым R-подмодулям N_1 и N_2 отвечают одинаковые подпространства, то умножение на некоторое $r \in R$ переводит некоторую систему образующих N_1 в N_2. Следовательно, $rN_1 \subset N_2$. Проективно минимальным модулям отвечают одномерные подпространства. (А проективно минимальным T-идеалам — не обязательно.) □

Из леммы о расталкивающих заменах 5.13 (основной случай) и предложения 5.22 (случай отсутствия существенных смешанных элементов) вытекает такое утверждение:

Лемма 6.9. *Проективно минимальный T-идеал, удовлетворяющий условию леммы 5.13, является сильно проективно минимальным, если R – кольцо из леммы 5.13. Любой T-идеал максимального состава содержит сильно проективно минимальный R-замкнутый T-идеал I. Все содержащиеся в нем T-идеалы будут сильно проективно минимальны.* □

Вернемся к относительно свободной к.п. Φ-алгебре A. Поскольку локальная конечная базируемость уже доказана, достаточно найти такой T-идеал $I \neq 0$ в A, в котором нет препятствия к представимости всей алгебры. Это значит построить гомоморфизм в представимую алгебру, в образе которого элементы из I тождественно в ноль не обращаются. Кольцо Φ можно считать примарным, а кольцо $\bar{\Phi}$ – полем.

Кроме того, если характеристика $\bar{\Phi}$ равна нулю, то кольцо Φ содержит $\mathbb{Q}$, многообразие задается полилинейными тождествами и результаты А. Р. Кемера о локальной представимости (и, кстати, о представимости грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры) переносятся непосредственно. Поэтому мы считаем, что поле $\bar{\Phi}$ имеет характеристику $p > 0$ и, таким образом, нетерово кольцо Φ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $p^k x = 0$ при всех $x \in \Phi$.

Тогда алгебра $\bar{A} = \bar{\Phi} \otimes A$ представима по ранее доказанному. Пусть существенные смешанные элементы присутствуют. Тогда в этой алгебре есть ненулевой экстремальный идеал J_C, отвечающий пути C максимального состава. Кольцо R, отвечающее действию подстановок на элементах максимального состава, определено в разделе 5.3.1. При этом тождества в $\widehat{\bar{A}}$ однородны по всем существенным компонентам и по компонентам существенных клеток (с учетом кратностей).

Если существенные смешанные элементы отсутствуют, то можно в качестве J_C взять идеал Γ, соответствующий степени радикала порядка $c(A)-1$, и соответствующий идеал Γ^0, построенный в разделе 5.4.2, и воспользоваться следствием 5.5. R будет кольцом форм.

Пусть H – проективно минимальный R-замкнутый T-идеал в J_C. Тогда он сильно проективно минимален и, кроме того, состоит из крайних элементов. Наша цель — в построении пространства в A, изоморфного H.

Предложение 6.10. *Пусть H – проективно минимальный R-замкнутый T-идеал в J_C. Тогда существуют такие $r \in R$ и $x \in \Phi$, что T-идеал xrH алгебре A изоморфен (как T-пространство и $\bar{A}$-бимодуль) T-идеалу rH в $\bar{A}$. При этом для любого $\varepsilon \in J(\Phi)$ выполнено равенство $\varepsilon xrH = 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in J^{\cdot}(\Phi)$. Тогда, в силу предложения 6.1, T-идеал xH в A изоморфен фактору I в $\bar{A}$ по некоторому T-идеалу E. Если $E = 0$, то мы получили искомое, иначе x аннулирует T-идеал $H_1 = rH$ для некоторого $r \in R \backslash \{0\}$. Пусть $\Psi_1 = \Psi / \operatorname{id}(x)$. Выберем произвольный элемент из $J^{\cdot}(\Psi_1)$ и его представитель $x_1 \in \Psi$. Теперь перейдем к элементу x_2 и T-идеалу H_2. Процесс очевидным образом закончится, что приведет к построению нужного объекта. □

Таким образом, мы построили идеал xH, где H удовлетворяет заключению леммы 5.13. Этот идеал R-замкнут, аннулируется радикалом $J(\Phi)$ и является точным нетеровым сильно проективно минимальным R-модулем. (Действие кольца R определено формально через подстановки.) Мы покажем, что в этом идеале нет препятствия к представимости A. Этот идеал экстремален в двух смыслах: в смысле максимального состава и в смысле "цокольности" — умножения на радикал кольца Φ.

Замечание. Техника, изложенная в этом разделе, есть не что иное, как развитие техники, связанной с применением леммы Артина–Рисса, и ее некоммутативное обобщение. Применение этой леммы к вопросам конечной базируемости позволяет контролировать потерю равносильности при операциях над системами тождеств. Например, если S – система многочленов в алгебре общих матриц, а Z – центральный полином, то система SZ при некотором $k \in \mathbb{N}$ накрывает пересечение $S \cap \operatorname{id}(Z)^k$. Это позволяет осуществлять спуск по сложности. В общем случае умножений недостаточно, нужны расталкивающие замены. Для них верно аналогичное свойство: $P(I) \supset I \cap P^s(H)$, где H – пространство всех полиномов, P символически изображает операцию расталкивающих замен. Удобнее иметь дело с накрытиями идеалов из коммутативного кольца R, отсюда конструкция проективно минимальных модулей.

Чего мы добились? Поясним на примере. В работе К. А. Зубрилина [42] было показано следующее. Пусть в алгебре выполняется система тождеств Капелли

C_{n+1} порядка $n+1$. И пусть имеется n переменных $t_1, \ldots, t_n$, по которым ведется альтернирование. Рассматриваются многочлены, полилинейные по t_i; остальные переменные в множество $\{t_i\}$ не входят. Пусть U – препятствие к алгебраичности порядка n для элементов алгебры, выражающихся без помощи t_i. Пусть D – алгебра из таких элементов. Тогда если провести альтернирование по t_i, то пересечение U с пространством элементов, полилинейных по t_i, обратится в ноль. Иными словами, в пространстве элементов полилинейных и кососимметричных по t_i нет препятствия к представимости алгебры, и оно вкладывается в аналогичное пространство для канонического алгебраического вложения алгебры, порожденной остальными образующими. Аналогия с ситуацией из работы [42] во втором основном случае (отсутствия смешанных элементов) становится более понятной (см. раздел 6.2.4).

Одна из ключевых идей доказательства такова: с помощью предложения 0.9 показывается, что препятствие к алгебраичности порядка n для одного элемента d из D в полилинейных кососимметричных многочленах по t_i обращается в ноль. Далее переходят к расширенной алгебре путем добавления коэффициентов многочлена, аннулирующего d, куда вкладывается пространство таких многочленов, проводят те же рассуждения с новым элементом $d' \in D$ и т.д. В итоге пространство полилинейных кососимметричных многочленов по t_i вложится в аналогичное пространство, соответствующее каноническому алгебраическому представлению D порядка n (см. доказательство леммы 2.5).

Поскольку в конечно–порожденном случае выполняется тождество Капелли некоторого порядка, то хочется получить таким образом локальную представимость.

Проблема в том, что альтернироваться могут не только выделенные переменные, которые нигде больше не встречаются, а целые мономы, и T-идеал может быть составлен из комбинаций выражений такого рода. После подстановки в t_i к исходному хорошему виду уже не вернуться.

Однако T-идеал H, построенный нами, позволяет все время возвращаться к виду многочлена, указанного в лемме 5.13 о расталкивающих заменах! И любой многочлен $f \in H$ всегда выдерживает процедуру "расталкивания". Таким образом, буквы, нужные для осуществления замен, которые встречаются только там где надо и так как надо, мы всегда можем приобрести с помощью T-пространственной операции, причем результат всегда будет не нулевым, а проективно эквивалентным исходному многочлену! Дальше — вопрос техники.

Сформулируем это в виде леммы:

Лемма 6.10. *а) Пусть $f \in H'$, где $H' = xH$ – ранее построенный экстремальный T-идеал. Тогда существует ненулевой элемент $P(f)$ из $\mathrm{T}(f)$, имеющий вид, указанный в лемме о заменах (или предложения 5.24).*

б) Более того, композицию расталкивающих замен можно проводить любое число раз, [1] *так что определена ненулевая бесконечная композиция $P^\infty(f)$ расталкивающих замен из $\mathrm{T}(f)$ (соответствующая конструкция определена ниже).* $\square$

Что происходит при повторном применении процедуры "расталкивающих замен"? В силу леммы 5.14 в ядрах Q_i имеется по одной существенной смешанной радикальной специализации (а остальные специализации в ядрах имеют существенный несмешанный радикальный или полупростой тип), а вне ядер существенных

[1] Как и умножение на многочлен Капелли порядка $b(A)$ в случае без существенных смешанных элементов.

смешанных радикальных специализаций нет. Поэтому повторное применение расталкивающих замен производится только в ядра многочленов Q_i, построенных на предыдущем шаге. Такое применение мы называем *правильным*, а находящиеся вне ядер Q_i переменные из полиномов Капелли, формирующих Q_i для s-того этапа, будем называть *переменными s-го этажа.*

Таким образом, существует бесконечная последовательность ненулевых многочленов из $\mathrm{T}(f)$, каждый следующий из которых получается применением системы расталкивающих замен к ядрам предыдущих. При этом переменные для каждого этапа свои, в частности не пересекаются с переменными, стоящими вне t_i для первого шага. Поэтому корректно определена *бесконечная композиция расталкивающих замен.* Такая композиция считается *не равной нулю*, если результат на каждом шаге ненулевой, и *равной нулю* в противном случае. Это своего рода аналог процедуры локализации.

Одно алгоритмическое наблюдение. При осуществлении процесса из доказательства 5.14, начиная со второго шага (применения к ядрам уже полученных Q_i, удовлетворяющих этой лемме) мы работаем только с переменными, имеющими ограниченные степени вхождения (причем для всех дальнейших шагов сразу). Поэтому количество применяемых элементарных операторов вырезания и их типов ограничено.

Из п.б) предыдущей леммы непосредственно вытекает

Следствие 6.4. *Пусть f удовлетворяет условию предыдущей леммы. Тогда существует ненулевой элемент $g \in \mathrm{T}(f)$, имеющий вид, указанный в лемме о заменах 5.14. Он порождает бесконечную ненулевую композицию расталкивающих замен, которая описана выше.* □

Бесконечная композиция расталкивающих замен удобна тем, что на каждом конечном шаге образования, участвующие в организации структуры замен, могут быть “распотрошены” с помощью соотношений алгебры. А для бесконечной системы “распотрошено” может только конечное число образований. Кроме того, на каждом шагу процесса замен (возможно) происходит факторизация и остановка этого процесса даст соотношений не больше, чем предельное образование. (Но начиная с некоторого шага факторизации не происходит.) Работать мы будем с системами полиномов, к ядрам которых последовательно применяется расталкивающая система подстановок. T-идеал H такую расталкивающую систему выдерживает, и мы покажем, что он содержит ненулевой T-идеал, изоморфный (как T-пространство и бимодуль над алгеброй) T-идеалу некоторой представимой алгебры из $\mathrm{Var}(A)$. Эта алгебра есть результат канонического алгебраического представления некоторого порядка относительно множества элементов, выражающихся через переменные, не входящие в структуру замен.

6.2.3. Завершение доказательства локальной представимости. Тестовые алгебры

Основное внимание в этом разделе посвящено первому основному случаю. Второй основной случай изучается в разделе 6.2.4. При этом предложение 6.17 соответствует предложениям 6.12, 6.13, 6.14.

Рассмотрим многочлен вида h из леммы о расталкивающих заменах 5.13. А именно. Рассмотрим наборы переменных t_{ij}, символизирующие существенные межклеточные переходы вдоль пути максимального состава, рассмотрим расширение $A< \{t_{ij}\} >$ в многообразии $\mathrm{Var}(A)$ и профакторизуем его по однородным по всем t_{ij} компонентам соотношений. Кроме того, возьмем фактор по словам, содержащих хоть одно из t_{ij} в количестве, бо́льшем чем содержание соответствующего граничного оператора в пути максимального состава C для алгебры $\bar{A}$. Получили $\breve{A}$ – некоторое расширение Ф-алгебры A.

Факторам алгебры A, а также ее центральным расширениям, отвечают аналогичные образования для $\breve{A}$. Кроме того, через t_i можно осуществлять действие расталкивающих замен, в том числе повторно. Тогда они будут осуществляться правильным образом. Помимо алгебры A будут рассматриваться ее центральные расширения, при этом подчеркнем, что в расталкивающих операторах фигурируют только элементы основного кольца Φ, а также новые резервные переменные, а не константы, которыми расширяем. Таким образом, мы работаем с тройками $(A, \breve{A}, \mathfrak{M})$, где A – некоторое центральное расширение алгебры из $\mathfrak{M}$, а конструкция $\breve{A}$ строится по пути максимального состава для носителя многообразия $\bar{\Phi} \otimes \mathfrak{M}$. Все свойства операторов расталкивающих замен, применяемых к переменным типа t, сохраняются. (В случае алгебр над полем мы работали с тождествами пары $(A, \tilde{A})$.)

Теперь возьмем фактор по препятствию к алгебраичности порядка $k \cdot c(\Phi)$ для всех элементов из A. Здесь $c(\Phi)$ – индекс нильпотентности радикала кольца Φ, а число k таково, что в алгебре $\bar{A}$ нет препятствия к алгебраичности порядка k и, кроме того, все элементы из $\bar{A}$ алгебраичны порядка не выше k над кольцом R из леммы 5.13 о расталкивающих заменах. Поскольку $\bar{\Phi}$ – поле, для алгебр над полем локальная представимость уже доказана, а в алгебре нетерового типа все элементы алгебраичны над кольцом представления ограниченного порядка, то такое k существует. Получившуюся алгебру будем обозначать $\breve{A}$.

$\breve{A}_k$ есть подалгебра фактора центрального расширения $\breve{A}$ набором констант $\{\delta_{a,j}\}$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$a^k - \sum_{i=1}^{k} \delta_{a,i} a^{k-i}.$$

Это и есть та представимая алгебра, которая нам нужна. Имеет место следующее

Предложение 6.11. *а) Алгебра $\breve{A}$ представима.*

б) Любой многочлен из xH, который не равен тождественно нулю в A, не равен тождественно нулю в $\breve{A}$.

в) В T-идеале xH нет препятствия к представимости алгебры A.

Доказательство. П.а) непосредственно следует из теоремы Ширшова о высоте. Ибо если в алгебре B каждый элемент есть сумма элемента из нильпотентного радикала и элемента, алгебраичного над коммутативным кольцом S, коммутирующим с элементами из B, то такая алгебра представима. П.в) есть переформулировка п.б). Доказательство п.б) будет следовать из вспомогательных утверждений, которые будут приведены ниже.

К этому пункту свелось доказательство локальной представимости. В самом деле. Предложение 6.11 осуществляет редукцию представимости алгебры A к представимости A/xH, и дело завершается спуском. Спуск обрывается за конечное число шагов в силу локальной шпехтовости, которая уже доказана. Поэтому нам осталось доказать п.б) из предложения 6.11, к чему мы и переходим.

Рассмотрим элементы из расширения $\breve{A}$, лежащие в идеале J, порожденном словами, содержащими t_{ij} в максимально возможном количестве. (По препятствию к алгебраичности при конструкции $\breve{A}$ мы не факторизуем.) Осуществим через t_{ij} систему расталкивающих замен. Получим квазимоном вида $g = \phi(\overrightarrow{x}, Q_1, \ldots, Q_s)$, из леммы 5.14, который отвечает путям максимального существенного состава (а не только полного) и который, кроме того, однороден по переменным из Q_i. *Квазимономами* мы называем многочлены, представимые в виде сумм слагаемых, таких что во всех слагаемых порядок переменных из $\overrightarrow{x}$ одинаков, порядок ядер Q_i одинаков тоже, остальные переменные из Q_i осуществляют расталкивание. При этом множества расталкивающих переменных, переменных из ядер для различных Q_i, переменных внутри Q_i, предназначенных для "приема форм", и переменных из $\overrightarrow{x}$ не пересекаются. Иными словами, это результат применения расталкивающих замен через t_{ij} к моному. Переменные из $\overrightarrow{x}$ соответствуют элементам A. Многочлен назовем *правильным*, если он есть линейная комбинация квазимономов. Наборы переменных, входящие в многочлены Q_i и не входящие в их ядра, построенные на k-м этапе, мы называем *этажами*. Они "предназначены" для "приема форм".

Предложение 6.12. *Определим величины k и $c = c(\Phi)$, как это сделано в предыдущем предложении. Пусть E – правильный многочлен. Определим действие операторов из R на записях формальным образом. Данное действие определено корректно на правильных многочленах.*

а) Пусть E содержит k-ю степень элемента $v \in A$. Тогда E линейно представим по модулю $AJ(\Phi)$ результатами замен $v^s \to v^k$, где $s < k$, в фиксированном вхождении v^k с формальными коэффициентами из R.

б) Пусть E содержит $c \cdot k$-ю степень элемента $v \in A$, W – результат c-кратного правильного применения к ядрам Q_i из E системы расталкивающих замен. Тогда W линейно представим результатами подстановок $v^s \to v^k$, где $s < c \cdot k$, в данное фиксированное вхождение $v^{c \cdot k}$ в W с формальными коэффициентами из R, примененное к разным группам переменных, принимающих формы.

В обоих случаях выражение не зависит от многочлена E.

Доказательство. П.а) следует из уже доказанного утверждения о том, что в алгебре $\bar{A}$ формы целы над операторами из R. Выведем п.б) из п.а). Разобьем $c \cdot k$-ю степень v на c блоков, каждый равен v^k. Сопоставим каждому блоку свой этаж в правильной системе замен и группу переменных для "приема" форм. Применим операции из п.а) по отдельности и независимо (т.е. вместо v^k ставим разность $v^k - \sum_{s<k} v^s r_s$. При этом $r_i \in R$ действуют на своем этаже.) Из п.а) следует, что результат будет нулевым. В самом деле, первая разность обеспечит попадание в $J(\Phi)A$. При этом приход в этот идеал можно обеспечить, даже если все вне этого из A v^k закодировать одной буквой, а ядра первого этажа не раскрывать. Аналогично, второй множитель обеспечит попадание в $J(\Phi)^2 A$ и т.д. Поскольку $J(\Phi)^c A = 0$, в конце получится ноль. Но равенство нулю такой системы операторов замен и есть искомая алгебраичность v над подстановками. $\square$

Сделаем одно важное наблюдение: операторы r_i, соответствующие данному v, выражаются через комбинации подстановок типа $y_i \to y_i v$ и потому друг с другом коммутируют. (По модулю $\mathrm{id}(J(\Phi))$ они коммутируют и при разных v.)

Следующие два предложения являются прямыми аналогами соответствующих утверждений из работы К. А. Зубрилина [42]:

Предложение 6.13. *Пусть $a \in A$, $\mathrm{Obstr}_m(a)$ – препятствие к алгебраичности порядка m для элемента a, $J_m(a) \subset \breve{A}$ есть $J \cap \mathrm{Obstr}_m(a)$. Тогда при $c(\Phi)$-кратном применении систем расталкивающих замен через t_{ij} образ $J_{c(\Phi)k}(a)$ равен нулю.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку $\breve{A}$ однородна по t_{ij} и $a \in A$ имеет степень однородности по t_{ij} ноль, то препятствие к алгебраичности тоже однородно по t_{ij}. Расширим алгебру A свободными коммутативными константами

δ_i, где $i = 1, \ldots, c \cdot k$. Каждому полиному из $\breve{A}[\delta_i] \cap J$ сопоставим полином из пространства, порожденного расталкивающими заменами, при этом каждому δ_i сопоставим оператор r_i. Данное соответствие корректно и мы видим, что идеалу в J, порожденному элементами

$$a^{c\cdot k} - \sum_{i=1}^{c\cdot k} \delta_i a^{c\cdot k-i},$$

отвечает нулевой идеал. □

Из этого предложения точно так же, как и в работе [42], выводится следующее

Предложение 6.14. *Пусть* Obstr_m *– препятствие к алгебраичности порядка* m *для всех элементов из* A *одновременно,* $J_m \subset \breve{A}$ *есть* $J \cap \mathrm{Obstr}_m$. *Тогда при* $c(\Phi)$*-кратном применении систем расталкивающих замен через* t_{ij} *образ* $J_{c(\Phi)k}$ *равен нулю.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ – произвольный элемент. Расширим алгебру A свободными коммутативными константами δ_i, где $i = 1, \ldots, c\cdot k$, и возьмем фактор по идеалу, порожденному элементом

$$a^{c\cdot k} - \sum_{i=1}^{c\cdot k} \delta_i a^{c\cdot k-i}.$$

Обозначим получившуюся алгебру через A_1 (некоторые тождества, выполняющиеся в A, в ней могут не выполняться). Ей естественным образом соответствует алгебра $\breve{A}_1$, являющаяся фактором расширения $\breve{A}[\overrightarrow{\delta}]$ по идеалу, порожденному элементом

$$a^{c\cdot k} - \sum_{i=1}^{c\cdot k} \delta_i a^{c\cdot k-i}.$$

Пересечение ядра такой факторизации с идеалом J алгебры $\breve{A}$, согласно предыдущему предложению, аннулируется под действием системы расталкивающих замен. Поэтому образ соответствующего пространства J у алгебры $\breve{A}_1$ под действием расталкивающих замен изоморфен образу J у алгебры $\breve{A}$. Итак, мы перешли к тройке $(A_1, \breve{A}_1, \mathfrak{M})$.

Теперь возьмем другой элемент $a_1 \in A$ и проведем с этой тройкой аналогичную конструкцию (со своими константами δ_i). Препятствие к алгебраичности элемента a_1 в новой алгебре A_1 также обратится в нуль (поскольку соответствующий идеал порождается элементами, не содержащими старых δ_i, которые на новом этапе с операторами из R больше не склеиваются). Затем перейдем к тройке $(A_2, \breve{A}_2, \mathfrak{M})$ и т.д. При этом образ пространства J в $\breve{A}_i$ вкладывается в образ пространства J в $\breve{A}_{i+1}$, а значит — и в $\breve{A}_k$ при всех $k \geq i$. Следовательно, для каждого конечного подмножества $N \subset A$ обращается в нуль образ препятствия к алгебраичности порядка $c \cdot k$ для его элементов. А такие идеалы очевидным образом покрывают все препятствие $\mathrm{Obstr}_{c\cdot k}(A)$. □

Замечание. Приведенное рассуждение скопировано из работы [42]. Оно непривычно, автор сам к нему привыкал. Для наших целей хватает алгебраичности конечного числа элементов — базиса Ширшова (сделаем нужное число расталкивающих замен, и каждый элемент базиса Ширшова обслуживается своим этажом, либо осуществим сразу бесконечную правильную цепочку и воспользуемся проективной минимальностью. Результат убьет препятствие, но оставит проективно минимальный T-идеал), но важно не решить задачу кое-как, но иметь принципиальное утверждение. Кроме того, расталкивающие операторы следует рассматривать как важное обобщение операторов симметрирования и альтернирования. Такая точка зрения автору представляется очень важной применительно к неассоциативной ситуации, а возможно — и к теории представлений.

Из данного предложения следует, что, взяв фактор по ядру канонического представления A порядка $c \cdot k$, мы из алгебры $\breve{A}$ получим алгебру, изоморфную $\breve{A}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Предложение 6.15. *Пусть образ $f \in J$ в алгебре $\breve{A}$ не обращается в нуль при системе расталкивающих замен. Тогда его образ при редукции в алгебре $\breve{A}$ не равен тождественно нулю.* $\square$

Следствие 6.5. *T-пространства полиномов, получаемых в алгебрах A и $\breve{A}$ путем применения систем расталкивающих замен, изоморфны.* $\square$

Поскольку T-идеал cH, заданный многочленом с фиксированными t_{ij}, изоморфен T-идеалу H в $\bar{A} < t_{ij} >= \bar{\Phi} \otimes A < t_{ij} >$ и выдерживает любое число расталкивающих замен, образ соответствующих многочленов в алгебре $\breve{A}$ не является тождественным нулем. Таким образом, для первого основного случая (присутствия существенных смешанных элементов в $\bar{A}$) мы доказали п.б) предложения 6.11, а тем самым — и локальную представимость Φ-алгебр для произвольного нетерового кольца Φ.

Суммируем результаты данного раздела:

Предложение 6.16. *а) Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие Φ-алгебр конечного базисного ранга. Тогда решетки T-идеалов в относительно свободной алгебре A из $\mathfrak{M}$ и в соответствующей алгебре $\breve{A}$, содержащие сумму Σ проективно минимальных T-идеалов, изоморфны.*

б) Пусть Γ – идеал тождеств $\mathfrak{M}$, $f \notin \Gamma$. Тогда либо $f \notin \Sigma$, либо $\breve{A}$ отделяет f от Γ. $\square$

Если $f \notin \Sigma$, то можно перейти к изучению отделения f от $\Sigma + \Gamma$. Из данного предложения (вместе с его естественным аналогом для второго основного случая) вытекает ограниченность отделителя и, следовательно, локальная представимость.

6.2.4. Случай отсутствия смешанных элементов в $A/J(\Phi)A$

В этой ситуации представимый T-идеал $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$ ищется проще, но немного иначе.[1] Вместо расталкивающих замен используется умножение на полином Капелли C_{n^2}, где $n = \mathrm{PIdeg}(A)$. Умножение заменяет действие расталкивающей подстановки через смешанный элемент и нужно только в этом случае (конец слова — это "несобственный смешанный элемент"). Остальные рассуждения очень похожи, и доказательства переносятся почти дословно. Положим $b(A) = b(A/J(\Phi)A)$ (см. раздел 3.3). Через $d(A)$ обозначается минимальное целое число, такое, что любой многочлен, кососимметричный по переменным внутри d групп из $b+1$ переменой в каждой, обращается в ноль. Отметим, что $d(A)$ – радикальная характеристика, и, вообще говоря, $d(A) \neq d(A/J(\Phi)A)$. Препятствие к алгебраичности элемента a порядка q обозначается $\mathrm{Obstr}_q(a)$.

Сформулируем утверждение, аналогичное предложениям 6.12, 6.13, 6.14:

[1]Как и в случае алгебр над полем; см. раздел 5.4.2, а также обсуждение в разделе 4.6.3.

Предложение 6.17. *Пусть $b = b(A)$, $d = d(A)$. Рассмотрим пространство $A(C_b)^d$. Тогда:*

а) Каждый $a \in A$ алгебраичен порядка bd над операторами внутренних форм, определенных с помощью Капелли – множителей.

б) $\mathrm{Obstr}_{db}(a) \cdot (C_b)^d = 0$.

в) $\mathrm{Obstr}_{db}(A) \cdot (C_b)^d = 0$.

Замечание. В формулировке этого предложения, как и других результатов этого раздела, величина $c(\Phi)$ не фигурирует, поскольку уже учтена в показателе $d(A)$. Если p – характеристика первичных факторов основного кольца Φ, $A_p = \mathbb{Z}_p \otimes A$, то

$$b(A) = b(A_p), d(A) \leq d(A_p)c(\Phi).$$

Это сделано потому, что в случае, которому посвящен данный раздел, достаточно ограничиться техникой А. Р. Кемера.

Доказательство. Справедливость п.а) устанавливается аналогично доказательству предложения 6.12, п.б) выводится из п.а) точно так же, как предложение 6.13 выводится из 6.12 (при этом следует заметить, что в ассоциативной ситуации формы, связанные с одним элементом $a \in A$, коммутируют между собой), п.в) получается аналогично доказательству предложения 6.14. □

Отметим, что данное утверждение — аналог технических предложений о расталкивающих заменах — по сути дела, есть видоизменение результатов работы К. А. Зубрилина [42] (см. также предложение 0.9)!

Аналогом предложения 6.15 является следующее

Предложение 6.18. *Пусть $n = \mathrm{PIdeg}(A)$, $f \cdot (C_{n^2})^{b(A)d(A)} \neq 0$. Тогда его образ при редукции по модулю $\mathrm{Obstr}_{db}(A)$ не равен тождественно нулю.* □

Следствие 6.6. *T-пространства полиномов в алгебрах A и $A/\mathrm{Obstr}_{db}(A)$ после умножения на $(C_{n^2})^{b(A)d(A)}$ изоморфны.* □

Из этого утверждения вытекает п.б) предложения 6.11 для второго основного случая, что завершает доказательство локальной представимости алгебр над кольцами.

Замечания. 1. Особенность ассоциативного случая состоит в том, что полином контролируется разреженным множеством ключевых позиций — вхождениями существенных радикальных элементов, которые расталкивающие подстановки контролируют. Эти элементы контролируют ситуацию, задавая переходы для существенных клеток. Наверное, когда есть такие контролирующие образования в неассоциативной ситуации, там тоже можно построить аналогичную теорию.

2. Было бы интересно построить теорию "улучшенных" представлений относительно свободных колец и Φ-алгебр, аналогичную теории "улучшенных" представлений алгебр над полем. Рассуждения, связанные с замыканием по Зарисскому, переносятся непосредственно. Для первичных клеток возникает дополнительная характеристика: аддитивное кручение (число p) или отсутствие оного (кручение 0). Отметим, что произведение элементов с p-кручением и q-кручением равно нулю, а каждый элемент представим в виде суммы элементов примарного кручения. Поэтому можно ограничиться случаем, когда кручение каждого элемента есть либо ноль, либо степень p. Кроме того, может наблюдаться совпадение клеток по модулю степени p, а также появятся радикальные операторы, связанные с умножением на p.

3. Интересно, что взаимосвязь между первым и вторым основными случаями, а также с методом Кемера была понята автором после анализа ситуации в алгебрах над общими кольцами.

4. Можно работать со вторым основным случаем как и с первым, введя одну дополнительную радикальную букву t (символизирующую умножения — “несобственные подстановки”) и определив алгебру $\check{A}$ как фактор $A < t > / \mathrm{id}(t)^2$, в котором элементы из A принудительно объявлены алгебраическими порядка $nc(A)c(\Phi)$, где n есть максимальная степень тождества Капелли, не выполняющегося в A. В качестве показателя k (введенного в разделе 6.2.3) можно взять произведение $c(\Phi)\max(\max_p(d(A_p)), d(A\otimes\mathbb{Q}))$.

6.3. Алгоритмические свойства многообразий

Проблема распознавания или, как ее еще называют, следования тождеств является хорошо известной алгоритмической проблемой для алгебраических систем. В. Л. Мурский (1968) и Ю. Г. Клейман (1982) [56], [57] показали, соответственно, что проблема следования тождеств для полугрупп и групп алгоритмически неразрешима. Для ассоциативных колец ее поставил А. И. Мальцев в 1966 году. В частном случае (для тождеств с нормальной характеристикой равной 1) положительное решение было получено С. И. Кублановским [64]. Наша цель состоит в получении более общего результата (теорема о каноническом носителе).

Мы показали, что любое относительно свободное кольцо представимо. Результаты предыдущего параграфа надо “алгоритмизировать”.

Под *вычислением* представимой алгебры понимается представление ее образующих a_i в виде $a_i = \sum_i \lambda_j^i \overrightarrow{e}_i$, где $\overrightarrow{e}_i \overrightarrow{e}_j = \sum_k C_{ij}^k \overrightarrow{e}_k$, причем набор структурных констант C_{ij}^k и координатных констант λ_j^i из ассоциативно-коммутативного нетерового кольца задан, а само это кольцо — *вычислено* (т.е. задано набором образующих и определяющих соотношений). Для вычисленных колец положительно решается проблема равенства.

Из теоремы Ширшова о высоте следует такой факт:

Предложение 6.19. *Пусть m – степень s-порожденной PI-алгебры A над Φ, заданной образующими, определяющими соотношениями и/или набором тождеств. Тогда каноническое алгебраическое представление порядка m алгебры A вычислимо.* □

Предложение 6.20. *Пусть A – вычисленная представимая алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тогда существует алгоритм построения правильного представления относительно свободной алгебры из $\mathrm{Var}\,A$, а также вычисления графа Γ и всех конструкций из раздела 4.* □

Следствие 6.7. *Пусть A – вычисленная представимая алгебра над полем, f – многочлен. Тогда существует алгоритм проверки того факта, является ли f тождеством A или нет.* □

6.3.1. Сведение к PI-случаю

Пусть f – многочлен, $\{g_i\}$ – система многочленов, $K \triangleleft \Phi$ – идеал, порожденный коэффициентами, стоящими при мономах в многочленах g_i. Если один из коэффициентов при мономах многочлена f не лежит в K, то f не следствие системы $\{g_i\}$.

Если же все эти коэффициенты лежат в K, то в силу следствия 6.3 из раздела 6.1.2 многочлен f лежит в $\mathrm{T}(\{g_i\})$ тогда и только тогда, когда он лежит в

$\mathrm{T}(\{g_i\} \cup \{C_{H(n,s)^2+1}\}$, где $n = \max \deg(g_i)$, s – число переменных, входящих в f. (Ибо в алгебре матриц порядка $H(n,s)$ выполняется тождество $C_{H(n,s)^2+1}$.) Поскольку H – рекурсивная функция и все коэффициенты многочлена $C_{H(n,s)^2+1}$ равны ± 1, произведена редукция к *PI*-случаю, т.е. случаю, когда $\mathrm{T}(\{g_i\})$ содержит полилинейное тождество, один из коэффициентов которого равен единице.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с этим случаем.

6.3.2. Алгебры над полем

С алгеброй $\widehat{A}$ можно связать многоосновную алгебру $\widehat{A}'$ или систему градуированных компонент, каждая из которых снабжена структурой нетерова модуля (правда, над своим кольцом форм). Умножения однородных компонент в алгебре $\widehat{A}$ наследуют структуру многоосновной алгебры, и эта многоосновная алгебра будет алгеброй нетерова типа (в отличие от исходной алгебры $\widehat{A}$).

Системе тождеств в $\widehat{A}$ отвечает система разносортных тождеств в этой многоосновной алгебре. Поэтому алгоритмические свойства алгебры $\widehat{A}$ ничем не отличаются от алгоритмических свойств алгебры нетерового типа. И если алгебра $\widehat{A}'$ вычислена как многоосновная алгебра, то есть алгоритм проверки, является ли многочлен f тождеством $\widehat{A}$. Для этого надо представить каждую переменную как сумму своих компонент и проверить выполнимость конечного числа возникающих разносортных тождеств.

Если задано тождество f и число образующих s алгебры, то можно оценить число n, такое что $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_n) \supset \mathrm{Var}(f)$. Итак, конструктивно строится стартовая алгебра.

Далее, имеется алгоритм построения базиса, отвечающего жордановой клетке оператора, а также его полупростой части, и полупростых компонент алгебры. Тем самым, если алгебра A представима и представление задано образами образующих, то имеется алгоритм построения улучшенного представления и соответствующего базиса, в котором связь коэффициентов при матричных единицах будет такой, как она описана в главе 4 (разделы 4.2, 4.3).

Процедура построения замкнутого T-идеала, изложенная в главе 5 (см. разделы 5.4, 5.4.1, 5.4.2), является конструктивной. Поэтому конструктивным является вычисление соответствующего фактора, а также, следовательно, и процесс построения представления пары $(A, \widehat{A})$, состоящей из алгебры A , заданной набором тождеств, и соответствующей расширенной алгебры $\widehat{A}$.

Таким образом, проблема Мальцева для полей решается положительно.

Для осуществления индукционного спуска полезно сделать такое наблюдение.

Лемма 6.11. *Количество сложностных типов (“путей”), с ограниченным размером максимальной клетки и ограниченной степенью нильпотентности радикала конечно.* $\square$

Пусть M – k-порожденный свободный модуль над кольцом Ψ многочленов с целыми коэффициентами. Он градуирован. Степень неоднородного элемента есть степень максимальной старшей компоненты. N – подмодуль N, порожденный q элементами степени не выше h.

Лемма 6.12. *Пусть $t \in H = M/N$, $x \in \Psi$, $tx^n = 0$. Тогда $tx^{kq^h} = 0$.* $\square$

Из данной леммы и доказательств лемм о расталкивающих заменах получается такое

Следствие 6.8. *Пусть A – относительно свободная алгебра над полем, представимая матрицами порядка n, $\{g_i\}_{i=1}^{q_1}$ – полная система многочленов, порождающих проективно минимальные идеалы (это означает, что каждый проективно минимальный идеал проективно эквивалентен идеалу, содержащемуся в сумме идеалов, порожденных g_i), $n_i = \deg(g_i)$. Пусть, далее, кольцо форм Φ изоморфно фактору $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]/\operatorname{id}(\{h_j\}_{j=1}^{q_2})$; $m_j = \deg(h_j)$. Тогда*

$$c(A/\operatorname{id}(\{g_i\}_{i=1}^{q_1}) \le c(A)n^2 \prod_{i=1}^{q_1} n_i \prod_{j=1}^{q_2} m_j.$$

$\square$

Из этого утверждения и леммы 6.11 получается

Следствие 6.9. *Множество сложностных типов для несводимых компонент фактора $A/\operatorname{id}(\{g_i\}_{i=1}^{q_1}$ конечно, эффективно ограничено и перечислимо.*

Далее, для относительно свободной алгебры A над полем также можно построить алгебру $\breve{A}$, а также проективно минимальный T-идеал I, область значений которого лежит в идеале τ, порожденном произведениями элементов t_{ij} в максимально возможном количестве. Далее, можно построить алгебру $A_1 = A/I$ и далее алгебру $\breve{A}_1$, в ней опять найти проективно минимальный T-идеал и т.д. В силу локальной конечной базируемости процесс остановится. В итоге многообразие $\mathfrak{M}$ будет задано алгеброй

$$\bigoplus_i \breve{A}_i,$$

которая вычисляется конструктивно по тождествам, задающим многообразие $\mathfrak{M}$.

Сформулируем это в виде предложения:

Предложение 6.21 (О каноническом носителе). *Для многообразия $\mathfrak{M}$ алгебр над полем конечного базисного ранга m существует порождающая алгебра, равная конечной прямой сумме*

$$\bigoplus_{\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{M}} \breve{A}_i.$$

Если $\mathfrak{M}$ задано набором тождеств либо носителем, то существует алгоритм вычисления данной алгебры. $\square$

Замечание. В случае отсутствия существенных смешанных элементов алгебра $\breve{A}$ строится, как указано в замечании на стр. 327.

Следующее утверждение вытекает из только что изложенных рассуждений и будет использоваться в дальнейшем:

Предложение 6.22. *Существует алгоритм нахождения системы проективно минимальных T-идеалов в алгебре A (над полем).* $\square$

Подобные конструкции проходят и для алгебр над кольцами, только в данном случае надо рассмотреть дополнительную структуру, связанную с фильтрациями по степеням радикала основного кольца Φ.

6.3.3. Алгоритмическая вычислимость в $\breve{A}$. Фильтрации

Перейдем к изучению многообразий ассоциативных алгебр над произвольным нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом $\Phi \ni 1$. Рассмотрим алгебру $\breve{A}$. Вообще говоря, она не является алгеброй нетерового типа. Более того, произвольное многообразие не может быть задано алгеброй нетерового типа (см. раздел 6.5.1). Однако с соответствующими носителями связываются многоосновные алгебры, которые уже таковыми является и определяют нужные многообразия. Данный раздел посвящен соответствующим конструкциям и алгоритмам.

С алгеброй $\breve{A}$ можно связать многоосновную систему $\widetilde{A}$. Имеется система пространств, порожденных алгебрами $A^{(i)}$ и произведениями их элементов через $+t_{ij}$. На каждом $A^{(i)}$ действует кольцо q-ых степеней форм R_i, $q = p^k > c(\breve{A})$.

Относительно этого действия компонента $A^{(i)}$ приобретает структуру нетерова модуля (зависящей от i). Далее на произведениях с участием t_{ij} также естественным образом возникает структура модуля над формами. И многоосновная алгебра $\widetilde{A}$ является алгеброй нетерового типа. Кроме того, все градуировки согласованы с фильтрациями и базис тождеств с формами алгебры $\widetilde{A}$ очевидным образом конечен. Таким образом, с алгоритмической точки зрения алгебра $\breve{A}$ ничем не отличается от алгебры нетерового типа.

Поскольку конструкция алгебры $\breve{A}$ определяется многообразием и путем C, мы иногда будем писать $\breve{A}_C$. Мы будем выделять систему тождеств $\{g_j\}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, задающих сложностнóй тип. Они и их редукции по любому простому модулю задают тип, отвечающий пути C. При этом C всегда вычислимо. В этом случае мы будем писать $\breve{A}(\{f_i\}, \{g_j\})$, опуская индекс C.

Замечание. В конструкции алгебры $\breve{A}$ участвует также показатель $k' = kc(\Phi)$ (см. раздел 6.2.3 и замечание (4) на стр. 327). Однако это число определяется редукцией многообразия в алгебры над полем и индексом нильпотентности $c(\Phi)$, т.е. оно является инвариантом (редукции) многообразия и кольца Φ. Далее, в процессе спуска и применения предложения 6.2 (см. раздел 6.3.4) будет происходить переход к алгебрам над факторами кольца Φ, индекс нильпотентности радикала которых всякий раз конструктивно оценивается. Поэтому индекс k' будет опускаться. Мы всегда считаем, что k' есть произведение $c(\Phi)$ и такой величины k, что все препятствия к алгебраичности порядка k для всевозможных редукций относительно свободной алгебры из изучаемого многообразия в алгебры над полем — нулевые. Эта величина также всякий раз конструктивно оценивается, ибо соответствующий набор первичных факторов основного кольца (локализация которых дает нужные поля) всякий раз будет также строиться конструктивно.

При проверке того, выполняется ли g в алгебре $\breve{A}$, достаточно, во-первых, рассмотреть линеаризации g (их множество конечно) и подставлять вместо переменных однородные элементы. Во-вторых, достаточно подставлять базисные элементы относительно действий, описанных в предыдущем абзаце. Таким образом, доказано следующее

Предложение 6.23. *Существует алгоритм проверки того, выполняется ли данное тождество g в алгебре $\breve{A}$.* □

Аналогично получается

Предложение 6.24. *Для каждой компоненты $\bar{\Phi}_i$ существует алгоритм вычисления ненулевого элемента z_i кольца форм S, который аннулирует все существенное S-кручение в каждой компоненте, связанной с Φ_i, и элемента $\phi_i \in$*

$\Phi\backslash\{0\}$, *аннулирующего все существенное кручение, относящееся к компонентам, связанным с кольцом* $\bar{\Phi}_i$, *и для любого* $j \neq i$ *его образ в локализации по множеству элементов с ненулевой проекцией в кольцо* $\bar{\Phi}_j$ *равен нулю.* □

Рассмотрим идеал τ в алгебре $\breve{A}$, порожденный словами, содержащими переменные t_{ij} в "полном комплекте" или количестве, равном числу граничных операторов в пути максимального состава для алгебры $\bar{\Phi} \otimes A$. Расширим идеал τ кольцом R, порожденным коэффициентами характеристических полиномов элементов из A. Расширенный идеал $\tau(R)$ является нетеровым R-модулем. Расширению идеала соответствует расширение исходной алгебры. Будем его обозначать $P(A)$. Отметим, что алгебра $\breve{A}$ однородна по всем t_{ij}.

Лемма 6.13. *а) Существует алгоритм проверки того, имеет ли множество значений многочлена* g *в алгебре* $\breve{A}[S]$ *ненулевое пересечение с* τ, *а также алгоритм проверки того, имеет ли множество значений многочлена* $P(g)$ *в алгебре* $\breve{A}$ *ненулевое пересечение с* τ.

б) Существует алгоритм проверки того, имеет ли множество значений многочлена g *в алгебре* $\breve{A}$ *ненулевое пересечение с* τ.

Доказательство. П.а) следует из нетеровости соответствующих S-модулей, п.б) вытекает из п.а). □

Сформулируем некоторые другие алгоритмические свойства, которые вытекают из наличия многоосновной структуры нетеровых модулей и алгебр нетерового типа:

Предложение 6.25. *а) Существует алгоритм отыскания базиса модулей кручения относительно описанных выше действий, а также алгоритм проверки того, принадлежит ли элемент модулю кручения. Для каждой однородной компоненты существует также алгоритм построения ненулевого элемента кольца форм, аннулирующего модуль кручения, порождённый этой компонентой. Кольцо форм на каждой компоненте действует как первичное кольцо.*

б) Существует алгоритм построения полной системы проективно минимальных модулей во всех фильтрованных компонентах алгебры $\breve{A}$. *Более того, существует алгоритм построения полной системы проективно минимальных модулей во всех фильтрованных компонентах алгебры* $\breve{A}$, *согласованной с* T*-идеалом* Γ.

Доказательство. П.а) следует из предыдущих рассмотрений. Далее, применив предложения 6.24 и 6.2, сводим ситуацию к случаю отсутствия существенного S- и Φ-кручения.

Рассмотрим полную систему $\{M_\alpha\}$ проективно минимальных модулей для $A/J(A)$ и для каждого возьмем порождающий многочлен $h_\alpha \in M_\alpha$. Эта система конечна и вычислима. Пусть элемент $r \in \Phi$ таков, что $rJ(\Phi) = 0$ и r отвечает младшей ("цокольной") фильтрованной компоненте кольца Φ.

Если элемент компоненты $rh_\alpha \neq 0$, то он порождает проективно минимальный идеал. Итак, хотя бы один проективно минимальный идеал мы научились строить. Легко построить систему проективно минимальных идеалов $\{N_\alpha\}$ в пространстве $r\breve{A}$.

Далее, легко найти пересечение $S(\Gamma) \cap S(\{N_\alpha\}$, применить расталкивающие замены, построить в нем базис проективно минимальных идеалов из Γ и дополнить его до системы проективно минимальных идеалов, M_μ, эквивалентных $S(\{N_\alpha\})$.

Для получения полной системы проективно минимальных идеалов надо перейти к фактору по rA и продолжить процесс, ибо этот фактор, как многоосновная система, является алгеброй нетерового типа. Таким образом, п.б) следует из п.а) □

Таким образом, процедура построения полной системы проективно минимальных идеалов заключается в следующем: надо рассмотреть систему $\{N_\beta\}$ проективно минимальных идеалов в алгебре $A/J(A)$, лежащих в модуле кручения, и взять максимальную подсистему N_α, независимую по модулю $\mathrm{id}(\{N_\beta\})$ (вычисления производятся в алгебре $A/J(A)$). Результат надо умножить на форму, анулирующую модуль кручения.

Лемма 6.14. *а) Пусть M – нетеров S-модуль без существенного кручения. Тогда существует алгоритм построения набора образующих проективно минимального подмодуля M.*

б) В общем случае существует алгоритм построения набора образующих для модулей кручения, а также существенного кручения. $\square$

Нас будет интересовать S-кручение и Φ-кручение.

В силу вычислимости модулей кручения и предложения 6.2 алгебру $\breve{A}$ можно “улучшить”, заменив конечной прямой суммой алгебр вида $\breve{A}^{\Phi_i}$, где Φ_i есть такая локализация фактора кольца Φ, что $J(\Phi_i) = N(\Phi_i)$ и $\Phi_i/N(\Phi_i)$ – поле. Данная конечная сумма эффективно вычисляется:

Лемма 6.15 (Об улучшении алгебры $\breve{A}$). *Пусть алгебра $\breve{A}$ вычислена. Тогда существует естественный морфизм φ алгебры $\breve{A}$ в вычисленную конечную прямую сумму $\oplus\breve{A}^{\Phi_i}$ для набора локальных колец Φ_i. При этом $\oplus\breve{A}^{\Phi_i}$ не имеют существенного кручения, величины $c(\Phi_i)$ также эффективно оцениваются и* $\mathrm{Var}(\breve{A}) = \mathrm{Var}(\oplus\breve{A}^{\Phi_i})$. $\square$

Фильтрации. Пусть A – произвольная представимая Φ-алгебра. Покажем, как с ней связать систему фильтрованных пространств вида $x_iA/J_i;\ x \in \Phi; J_i \lhd \Phi$, и каждый такой фактор устроен как прямая сумма $\bar{\Phi}_i$-алгебра без существенного кручения над Φ'. Здесь $\bar{\Phi}_i$ есть первичная компонента $\bar{\Phi}$. Для алгебр над кольцом $\bar{\Phi}$ в силу индуктивных соображений проблему Мальцева мы можем считать решенной.

Линейно упорядочим компоненты радикала $J(\Phi)$ так, чтобы компонента произведения была старше компонент сомножителей и кроме того, $x \preceq xy$ при всех x, y. Отметим, что при этом условие $x \prec y \Rightarrow xz \prec yz$ выполняться не обязано (произведение двух элементов из первой степени радикала может попасть в любую его степень).

Рассмотрим каждое такое слагаемое. (Для простоты индекс i опускаем.) Его фактор по $AJ(\Phi)$ является $\bar{\Phi}$-алгеброй и вкладывается в поле частных кольца Φ. Рассмотрим систему представителей (как Φ-модулей) $x_j^{(k)}$ для k-ой степени радикала $J(\Phi)^k$ по модулю $J(\Phi)^{(k+1)}$ при всех $k = 0, \ldots, c(J) - 1$. В силу нетеровости основного кольца Φ, все эти системы конечны. Имеется набор фактор-пространств

$$M_k = (x_j^{(k)}A + \sum_{s>j} xk_sA)/(J(\Phi)^{k+1} + \sum_{s>j} xk_sA).$$

Каждое из них изоморфно фактору $A/J(\Phi)A$ по некоторому T-идеалу. Оно разлагается в компоненты, отвечающие компонентам $\bar{\Phi}_i$. Каждому i отвечает своя алгебра $\bar{\Phi}_i \otimes A$.

Каждое пространство M_k может содержать Φ-кручение. Оно далее естественным образом разлагается в конечный композиционный ряд, все факторы которого

M_{kj} есть подкольца представимых алгебр над полями, получающимися факторизацией кольца Φ по первичному идеалу, с последующей локализацией. При этом $M_{kj} \simeq A_{kj} = A/(I_{kj} \cdot A + H_{kj})$, где $I_{kj} \triangleleft \Phi$, $H_{kj} \triangleleft A$ – первичные идеалы.

Из леммы 6.1 (см. также предложение 6.1) непосредственно получается такая

Лемма 6.16. *Пространства M_k (соответственно, M_{kj}) изоморфны как T-пространства факторам исходной относительно свободной алгебры по некоторым T-идеалам J_k (соответственно, J_{kj}).* □

Если все алгебры A_{kj} вычислены, то будем говорить, что фильтрация тоже *вычислена*. Ясно, что если A-вычисленная представимая алгебра нетерового типа, то ее фильтрация тоже вычислена.

Отметим, что если A – представимая алгебра, то алгоритм вычисления фильтрации в общем случае неясен, а в нулевой характеристике его скорее всего не существует.

Предложение 6.26. *Фильтрация алгебры $\breve{A}$ вычислима, т.е. существует алгоритм вычисления представлений системы алгебр $\breve{A}_{ij}$ каждой фильтрованной компоненты алгебры $\breve{A}$.*

Существует алгоритм вычисления соответствующей системы проективно минимальных T-идеалов. □

Замечание. Морфизму колец $\Phi \to \Psi$ естественным образом отвечает морфизм алгебр типа $\breve{A}_C$, C – соответствующий путь. Алгебра $\breve{A}_C$ обслуживает все поля, куда отображается кольцо Φ. Если редукция f лежит в проективно минимальном идеале алгебры $\breve{A}_C^{\mathbb{F}}$ ($A^{\mathbb{F}} = \mathbb{F} \otimes A$) и там ненулевая, то f не обращается в ноль и в алгебре $\breve{A}_C$. Таким образом, $\breve{A}_C$ 'обслуживает' все гомоморфные образы кольца Φ и хорошо взаимодействует с модулем кручения.

При этом проективно минимальным T-идеалам отвечают либо проективно минимальные T-идеалы, либо элементы модуля S-кручения (кручения над кольцом форм). Этим обстоятельством мы будем пользоваться.

Из следствия 6.8 вытекает такое

Предложение 6.27. *Пусть в алгебре $\breve{A}$ эффективно задана полная система проективно минимальных идеалов $\{h_j\}$.*

Тогда алгебра $\breve{A}/\operatorname{id}(\{h_j\})$ эффективно вычислима, и кроме того, эффективно вычислимо конечное семейство алгебр $\{\breve{A}_i\}$, для которого $\operatorname{Var}(\breve{A}/\operatorname{id}(\{h_j\})) = \operatorname{Var}(\{\breve{A}_i\})$. □

Расталкивающие процедуры в алгебре $\breve{A}$. Будем последовательно проводить процедуру P "расталкивания" и построения проективно минимального модуля. Пусть $\bar{A}_i$ есть $\mathbb{F}_i \otimes A$ алгебра над полем $\mathbb{F}_i$, отвечающим локализации кольца Φ_i. Для любого многочлена f можно конструктивно построить такой конечный набор замен P_j, что набор $\{P_j(f)\}$ образует полную систему проективно минимальных модулей из $\mathrm{T}(f)$, а если таких модулей нет, то $P_j(f) = 0$.

Теперь рассмотрим многочлены вида $rz_i\phi_i P_j(f)$ как многочлены в алгебре $\breve{A}$. Каждый из них либо порождает проективно минимальный T-идеал в соответствующей компоненте, либо попадает в бóльшую фильтрованную компоненту, чем ту, которая отвечает показателю r. В этом случае получится семейство многочленов вида $\{r_1 f_{1j}\} = \{rP_j(f)\}$, где $r_1 \succ r$ и соответствующие компоненты явно находятся. К каждому из них можно снова применить такую процедуру и т.д.

Получится система элементов кольца $r \prec r_1 \prec \cdots \prec r_k$, $k \leq C(\Phi)$ и многочленов $\{r_i f_{ij}\}$.

Порядком расталкивающей процедуры называется число проведенных шагов. Оно не превосходит $c(\Phi)$ — индекса нильпотентности радикала основного кольца Φ. Применение указанной процедуры вместе с умножением на элемент $z_i\phi_i$ приводит к построению проективно минимального T-идеала.

Из следствия 6.5 вытекает

Предложение 6.28. *Пусть $k = \sum k_\alpha$ – сумма порядков операторов расталкивающих замен, обеспечивающих попадание в идеалы полного состава, g – результат правильного применения композиции расталкивающих замен соответствующих порядков. Тогда все компоненты фильтрации $(z_\mu s_\mu)^{c(\Phi)}\,\mathrm{T}(g)$ лежат в идеалах полного состава, совпадают с соответствующими компонентами алгебр $\breve{A}$ и $P(A)$ и лежат в идеалах J и $J[R]$ соответственно.* □

Теперь заметим, что каждая компонента фильтраций алгебры A изоморфна фактору компоненты $A/J(\Phi)$ по некоторому T-идеалу.

Следствие 6.10. *Все фильтрованные компоненты алгебры $P(A)$ вычислимы. Компоненты в алгебре A образов многочленов при системе расталкивающих замен вычислимы также. Соответствующий набор фильтраций в факторе алгебры A по системе расталкивающих замен вычислим также.* □

6.3.4. Теорема о каноническом носителе

Будем действовать по обычной для проблем шпехтового типа схеме. Рассмотрим пару $(\Gamma, \breve{A}_C^\Phi = \breve{A}_C \otimes \Psi)$, для которой $\mathrm{T}(\breve{A}_C^\Phi) \subseteq \Gamma$, Ψ есть фактор основного кольца Φ. T-идеал Γ задан набором тождеств $\{f_i\}$, алгебра $\breve{A}_C^\Phi$ считается вычисленной. Будем сближать T-идеал и носитель, озаботившись о вычислимости процедуры.

В силу нетеровости основного кольца Φ все утверждения данного раздела для всех его факторов можно считать установленными, и потому полагаем $\Phi = \Psi$. Далее, алгебру $\breve{A}_C^\Phi$ можно считать несводимой, и в силу предложения 6.2 и леммы 6.15 алгебру $\breve{A}_C^\Phi$ можно считать не имеющей существенного кручения, фактор $\Phi/J(\Phi)$ – первичным кольцом, а алгебру $\breve{A}_C$ можно считать $\mathbb{Z}_{p^k}$-алгеброй или алгеброй без кручения в аддитивной группе.

Наша цель — отыскать пару замкнутых T-идеалов, удовлетворяющих условиям $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $S \supseteq \Gamma_0$, $\Gamma \cap S = \Gamma_0$ и чтобы при этом $\breve{A}/S$ имело меньший сложностно́й тип.

Пусть $r \in \Phi$ таково, что $rJ\tau = 0$ в $\breve{A}$ и $r\tau \neq 0$ в $\breve{A}$, и имеет нулевое существенное S-кручение (т.е. r есть “цокольный элемент”). Будем сравнивать сложностные типы так: сперва — тип $A/J(\Phi)A$, если же эти типы совпадают, то старшей будем считать ту алгебру, у которой данной сложностно́й тип наблюдается в младшей фильтрованной компоненте.

Полная система независимых проективно минимальных идеалов $\{g_i\}_{i=1}^k$ в пространстве rA называется *согласованной* с Γ, если $g_i \in \Gamma$ при $i \leq i_0$ и $g_i \notin \Gamma$ при $i > i_0$. И если, кроме того, все коэффициенты многочленов $\{g_i\}$ лежат в $\mathbb{Z}$, то такая система называется *удобной*. $\breve{A}_C^\Phi(\Gamma)$ обозначает алгебру $\breve{A}_C^\Phi/\Gamma$.

Начнем со вспомогательных утверждений.

Лемма 6.17. *а) Пусть Γ – T-идеал и $P(f) \notin \Gamma$. Тогда $f|_{\breve{A}_C^\Phi(\Gamma)} \neq 0$.*

б) Пусть $\{g_i\}$ – система проективно минимальных идеалов, согласованных с T-идеалом Γ, и пусть $f \in \mathrm{T}(\{g_j\}_{g_j \notin \Gamma}$. Тогда $f|_{\breve{A}_C^\Phi(\Gamma)} \neq 0$. □

Следствие 6.11. *Имеет место вложение* $A \to \breve{A}_C^{\Phi}(\Gamma) \oplus A/\operatorname{id}(\cup_f \mathrm{T}(P(f)))$. *Если алгебра* $\breve{A}_C^{\Phi}$ *вычислена, то и алгебра* $\breve{A}_C^{\Phi}(\Gamma)$ *тоже вычислена и кроме того, система тождеств* $\{f_i\} \cup \{g_i\}_{i=i_0+1}^k$ *также эффективно определена.* □

Система тождеств $\{f_i\} \cup \{g_i\}_{i=i_0+1}^k$ задает новый T-идеал $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Предложение 6.29. *а) Для любого* Γ *существует алгоритм нахождения полной системы проективно минимальных идеалов* $\{g_i\}$*, согласованных с* Γ.

б) Алгебра $\breve{A}_C(\mathrm{T}(\{g_i\})$ *имеет меньший сложностно́й тип, вкладывается в конечную прямую сумму алгебр вида* A_i*, каждая из которых несводима, либо не имеет кручения в аддитивной группе, либо является алгеброй над* $\mathbb{Z}_{p^k}$ *а также алгеброй над кольцом* Φ'*, причем* $\Phi'/J(\Phi')$ *первично и эта сумма вычислима.*

в) При этом $c(\Phi')$ *эффективно оценивается. Эффективно оцениваются также индексы нильпотентности радикала всех факторов по идеалам, порожденным* $J(\Phi')$.

г) Каждая алгебра A_i *порождает то же многообразие, что и алгебра вида* $\breve{A}_{C_i}$*, и эта алгебра вычислима.*

Замечания. 1. В общем случае получается только композиционный ряд из проективно минимальных идеалов, согласованных с Γ, а не прямое разложение. Впрочем, это и не важно — процессы, описание которых вытекает из предыдущих утверждений, проходят изоморфным образом для алгебр A и $\breve{A}$, ибо на каждом шаге мы получаем алгебры с изоморфными решетками проективно минимальных идеалов с точностью до проективной эквивалентности, причем всякий раз согласованное разбиение вычислимо.

2. Можно провести группу шагов до понижения сложностно́го типа $A/J(\Phi)A$. При этом алгебру $\breve{A}$ можно "не менять" и сразу получить морфизм $A \to \breve{A}_C(\Gamma) \oplus A/\mathrm{T}(\{g_i\})$ где набор многочленов $\{g_i\}$ явно указывается и фактор по нему имеет меньший сложностно́й тип для алгебры $(A/\mathrm{T}(\{g_i\}))/(A/\mathrm{T}(\{g_i\}))J(\Phi)$.

3. Основная идея данной главы заключается в том, что из T-идеала, порожденного расталкивающими заменами после любых промежуточных подстановок, можно вернуться обратно к многочленам, вид которых описан в леммах о расталкивающих заменах (с небольшими вариациями при переносе на Φ-алгебры) и которые эквивалентны исходному. А работа с пространствами многочленов такого вида — это работа с алгебрами типа $\breve{A}$ (идейно близкие конструкции — в разделе 2.2, только там хуже: после подстановки слов вместо резервных переменных t_{ij} уже нет возврата к старой ситуации). Отсюда соответствующий формализм, универсальность свойств алгебры $\breve{A}$ (в ней нет препятствия к представимости соответствующих T-идеалов "полного состава", даже лежащих в модуле кручения). Этот формализм хорошо согласован с Φ-кручением и морфизмами кольца Φ и с расталкивающими заменами. При этом алгебра $\breve{A}$ имеет хорошие алгоритмические свойства.

Воспользуемся конструкцией системы многочленов $\{g_i\}$ из только что сделанного замечания. Рассмотрим систему представителей $\{\hat{g}_i\}$ элементов, образующих композиционный ряд, согласованный с Γ. Они порождают S-замкнутые T-идеалы H и $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$, $H \cap \Gamma = \Gamma_0$. Воспользуемся предложением 6.16. Фактор $\breve{A}/H$ вкладывается в прямое произведение своих несводимых компонент, факторов по модулю существенного Φ-кручения, а также факторов по идеалам вида $I\breve{A}/H$, где $I \triangleleft \Phi$ (см. предложение 6.2). Воспользовавшись этим разложением, имеем следующее редукционное утверждение:

Предложение 6.30. *Пусть A – относительно свободная Φ-алгебра, заданная набором тождеств $\{f_i\}$. Кроме того, пусть задан путь C и конечный набор тождеств $\{g_i\}$, такие что $A \in \mathrm{Var}(\breve{A}_C(\{g_i\}))$.*

Тогда вычислимо конечное семейство многочленов $\{h_j\}$ и вложение

$$A \to \breve{A}_C(\{g_i\}) / \mathrm{T}(\{f_i\}) \oplus \bigoplus_i A^{\mathbb{F}_i} / \mathrm{T}(\{h_j\}).$$

При этом $\mathbb{F}_i$ являются локальными кольцами (локализациями факторов Φ). Кроме того, вычислимы индексы нильпотентности радикала колец $\mathbb{F}_i$, величины $c(A^{\mathbb{F}_i} / \mathrm{T}(\{h_j\}))$, а также семейство многочленов $\{g_{jik}\}$ и путей C_{ik} такие, что алгебры $\breve{A}_{C_{ik}}(\{g_i\} \cup_j \{g_{jik}\})$ несводимы, типы C_{ik} строго меньше типа C и при этом

$$A^{\mathbb{F}_i} / \mathrm{T}(\{h_j\}) \in \mathrm{Var}(\bigcup_k \breve{A}_{C_{ik}}(\{g_i\} \cup_j \{g_{jik}\})).$$

$\square$

Теперь можно осуществить некоторое каноническое построение алгебры, определяющей многообразие $\mathfrak{M}$, заданное свободной m-порожденной алгеброй $A_m(f_1, \dots, f_s)$ в многообразии, соответствующем системе тождеств $\{f_1, \dots, f_s\}$. Один шаг построения такого представления описан в предыдущем предложении.

1) Строим алгебру $\breve{A}_1$; $A = A_m(f_1, \dots, f_s)$.

2) Строим в ней полную систему проективно минимальных идеалов M_α и задающих их полиномов g_α. При этом все их коэффициенты принадлежат $\mathbb{Z}$. При этом редукция системы $\{g_\alpha\}$ по любому простому модулю определяет тот же сложностной тип, индекс нильпотентности радикала которого вычислим.

3) Переходим к набору $\{f_1, \dots, f_s\} \cup \{g_\alpha\}$ и повторяем с ним ту же процедуру, работая с алгеброй $A_2 = A_m(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_r)$ и строя алгебру $\breve{A}_2$.

4) Степени элементов g_α эффективно ограничены. Кроме того, если система многочленов $\{g_\beta\}$, построенная на предыдущем шаге отвечает $\mathbb{Z}$-алгебре со сложностным типом C и степенью нильпотентности радикала c, то новая система отвечает алгебре с меньшим сложностны́м типом и степенью нильпотентности радикала, не превосходящей $c \cdot d \cdot \prod_\beta g_\beta \cdot c(\Phi)$; d есть ранг алгебры нетерового типа, куда вложена представимая алгебра. (Ибо образующие проективно минимального модуля отвечают соотношениям на коэффициенты и факторизация относительно них согласована с факторизацией относительно коэффициентов. См. следствие 6.8 и предложение 6.27). Кроме того, все индексы l, такие что $\exists x \in \Phi y \in A_i : yx^l \neq 0, yx^{l+1} = 0$, эффективно ограничены. Эффективно ограничено и кручение, возникающее на каждом шаге.

5) Алгебру, построенную на каждом шаге, заменяем прямой суммой её несводимых факторов, каждый из которых является алгеброй над фактором кольца Φ либо не имеет существенного Φ-кручения. Указанная процедура эффективно осуществима.

6) В силу леммы 6.11 каждый шаг этой процедуры имеет конечное число ответвлений, а в силу локальной шпехтовости процесс заканчивается.

Отметим, что добавление новых тождеств может понизить сложностной тип, что приведет к другой алгебре $\breve{A}$. И хотя многочлен h, не являющийся тождеством алгебры A и не лежащий в проективно минимальном модуле, может оказаться тождеством $\breve{A}_m(f_1, \ldots, f_s)$, тем не менее он не окажется тождеством в одной из последующих алгебр.

Искомая алгебра, задающая $\mathfrak{M}$, есть прямая сумма алгебр, построенных на шагах процесса, описанного выше. Сформулируем это в виде утверждения.

Теорема 6.5 (О каноническом носителе). *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ PI-алгебр задано набором тождеств $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Тогда существует алгоритм построения системы алгебр вида $\breve{A}(f_1, \ldots, f_k, \{g_\alpha\}_{\alpha \in I})$, таких, что многообразие $\mathfrak{M}$ порождается конечной прямой суммой*

$$\mathfrak{M} = \mathrm{Var}\left(\bigoplus_I \breve{A}^{\mathbb{F}_i}(f_1, \ldots, f_k, \{g_\alpha\}_{\alpha \in I})\right).$$

Здесь $\mathbb{F}_i$ – локализации фактора кольца Φ, являющиеся локальными кольцами, и алгебры $\breve{A}^{\mathbb{F}_i}(f_1, \ldots, f_k, \{g_\alpha\}_{\alpha \in I})$ не имеют существенного $\mathbb{F}_i$ – кручения. Все объекты, участвующие в образовании этих алгебр, являются конструктивными.
□

Замечание. В случае отсутствия существенных смешанных элементов алгебра $\breve{A}_i$ строится, как указано в замечании на стр. 327. При редукции такая ситуация неизбежна и некоторые прямые слагаемые имеют такой вид.

Следствие 6.12. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебр над нетеровым ассоциативно коммутативным кольцом Φ, заданное конечным набором тождеств $\{f_i\}$. Тогда*

а) Существует алгоритм проверки того, выполняется ли заданное тождество g в многообразии $\mathfrak{M}$.

б) Существует алгоритм нахождения идеала в кольце Φ, аннулирующего ненулевой элемент в относительно свободной s-порожденной алгебре из $\mathfrak{M}$ (для любого s).

в) Для любого $\xi \in \Phi$ можно указать базис T-идеала многочленов, аннулируемых умножением на x. □

6.3.5. Алгоритм проверки следования тождеств

Пусть $\{f_i\}_{i=1}^s = \{f_1, \ldots, f_s\}$ – набор тождеств. Требуется определить, следует ли данное тождество g от n переменных из набора $\{f_i\}_{i=1}^s$.

Алгебра $\breve{A}[S]$ нетерова. Поэтому можно явно построить S-модуль N, порожденный значениями g в алгебре $\breve{A}$, принадлежащими идеалу, порожденному всеми t_{ij} в количестве, соответствующему числу граничных операторов в пути максимального состава.

Если этот модуль ненулевой, то тождество g не является следствием набора $\{f_i\}_{i=1}^s$.

Если же $N = 0$, то область значения g в относительно свободной n-порожденной алгебре $A_n(\{f_i\})$ не пересекается с множеством значений любого многочлена H, область значений которого в алгебре $\breve{A}_n(\{f_i\}_{i=1}^s)$ отлична от нуля и лежит в некотором проективно минимальном идеале. В этом случае можно пополнить набор $\{f_i\}_{i=1}^s$ тождеством h, и тогда достаточно проверить, не следует ли g из набора $\{f_i\}_{i=1}^s \cup \{h\}$. Локальная конечная базируемость (стабилизация возрастающих цепочек T-идеалов в n-порожденных алгебрах) обеспечит остановку процесса.

6.3.6. Существование алгоритма, проверяющего, является ли f тождеством данной представимой алгебры A

Сведем ситуацию к случаю, когда f квазилинейно. Пусть g – некоторая собственная квазилинеаризация f, являющаяся его следствием (см. раздел 0.2.2, лемма 0.4). Если g не выполняется в A, то f не выполняется в A. Число этапов квазилинеаризации конечно (не превосходит $\deg(f)$) и потому в силу индукционных соображений (проверив выполнимость квазилинеаризаций f) можно считать, что многочлен f квазилинеен в A. В этом случае вместо переменных достаточно подставлять слова от образующих.

Пусть алгебра B является нетеровым модулем над своим центром Z. Тогда сумма $N = \sum_{i=1}^{k} \otimes_Z^k B$ является нетеровым Z-модулем, f – произвольный квазилинейный полином степени k. Пусть алгебра A вложена в алгебру B и это вложение вычислено, $a_1, \ldots, a_s$ – образующие A. Через N_q обозначим Z-подмодуль в B, порожденный словами не выше q от образующих a_i.

Ясно, что система $\{N_q\}$ образует возрастающую цепочку Z-подмодулей B, которая стабилизируется на некотором шаге q_0, и это q_0 эффективно вычислимо.

Ясно также, что для проверки того, обращается ли f тождественно в ноль при подстановке вместо переменных слов от образующих a_i, достаточно проверить только слова длины не выше q_0, т.е. осуществить конечный перебор.

Теорема 6.6. *Существует алгоритм, проверяющий, является ли f тождеством данной вычисленной представимой алгебры, т.е. алгебры, заданной своими образующими, лежащими в алгебре нетерового типа B. При этом B задаётся центром Z, своими образующими как Z-модуля и набором структурных констант.* $\square$

Замечание. Данная теорема без изменений в доказательстве переносится на многоосновные алгебры произвольной сигнатуры над ассоциативно–коммутативным нетеровым кольцом Φ.

6.4. Критические бесконечные кольца

$K \trianglelefteq \Phi$ обозначает идеал коэффициентов тождеств, выполняющихся в рассматриваемом критическом кольце Φ.

Определение 6.7. Кольцо R называется *критическим*, если все его собственные подкольца и фактор-кольца порождают многообразие, строго меньшее чем $\mathrm{Var}(R)$. Аналогично определяется *критическая* алгебра.

Известна следующая

Проблема [33]: *Существуют ли бесконечные критические кольца?*

Для алгебр над полем нам удалось свести эту проблему к случаю тел.

Теорема 6.8. *Бесконечная критическая алгебра над полем является телом и не является PI-кольцом.*

Сформулируем основной результат данного раздела:

Теорема 6.9. *Бесконечных критических колец, имеющих бесконечномерный над основным кольцом и первичный PI-фактор, не существует.*

Следствие 6.13. *а) Бесконечномерных над Φ критических колец, обладающих собственным тождеством, не существует.*

б) Бесконечномерных над полем F критических PI-алгебр не существует. $\square$

В этой связи возникает следующая **задача**, решение которой автору неизвестно:

Доказать несуществование бесконечного критического кольца R, являющегося алгеброй над нетеровым ассоциативно коммутативным кольцом Φ, в котором выполняются собственные тождества, KR конечно и для любого $\phi \in \Phi$ существует $r \in R : r\phi \neq 0$.

В случае, когда основное кольцо Φ бесконечно, под *конечностью* алгебры понимается ее нетеровость как Φ-модуля. (Иначе тривиальным примером бесконечной критической алгебры служит алгебра матриц над полем.) Пусть R – критическое кольцо.

Прежде всего заметим, что любой полином зависит только от конечного числа переменных. Поэтому любое многообразие колец порождается своими конечно порожденными подкольцами. Поскольку R критично, то одно из таких подколец должно совпадать с R. Поэтому R конечно порождено. Всюду в этом разделе мы, без специальных оговорок, рассматриваем только конечно порожденные кольца.

Далее, пусть R_p есть фактор R по идеалу I_p, состоящему из элементов, имеющих *p-кручение* (т.е. кручение порядка степени p). При $p \neq q$ пересечение $I_p \cap I_q = 0$ и R вкладывается в прямую сумму $R_q \oplus R_p$. В силу критичности R тогда $I_p = 0$ либо $I_q = 0$. Таким образом, все элементы R могут иметь p кручение только для одного простого числа p (см. предложение 6.7).

Далее, покажем, что либо все элементы имеют p – кручение, либо R является алгеброй над $\mathbb{Q}$. Воспользуемся леммой 6.6 и заметим, что любой многочлен зависит только от конечного числа переменных. Поэтому

$$\operatorname{Var}(R) = \operatorname{Var}(\{R_{p,k}\}_{k=1}^{\infty}, \{R/\operatorname{Ann}_R(R_{p,k})\}_{k=1}^{\infty}, \{\operatorname{Ann}_R(R_{p,k})\}_{k=1}^{\infty}).$$

Если единица кольца Φ раскладывается в сумму ортогональных идемпотентов, то кольцо R вкладывается в подпрямое произведение своих факторов, отвечающих этим идемпотентам, и потому с одним из них совпадает. Например, если кольцо Φ конечно, или $\Phi = \mathbb{Z}$, то получаем редукцию к случаю, когда $\bar{\Phi}$ есть первичное кольцо и даже поле.

В общем случае рассуждения из раздела 6.2.1 непосредственно не проходят (нет результатов об ограниченности кручения для алгебр, не являющихся относительно свободными). Поэтому действовать приходится следующим образом: сперва рассматривать случай критических колец, в которых никакое тождество не выполняется (из теоремы Ж. Левина 3.1 тогда следует, что такие кольца простые, и, значит, их можно рассматривать как алгебры над полем).

Мы считаем, что рассматриваемые критические кольца являются точными Φ-модулями, иначе можно перейти к фактору основного кольца Φ.

Пусть какие-то тождества выполняются и K есть идеал в кольце Φ, порожденный их коэффициентами. Покажем, что все коэффициенты критического тождества g лежат в K. Предположим противное. Если g имеет коэффициент не из K, то в силу процедуры квазилинеаризации g можно считать полилинейным.

Воспользуемся рассуждениями из доказательства леммы 6.4 и тогда установим, что существует такое $x \in \Phi \backslash K$ и многочлен $h = xC_k \in \mathrm{T}(g)$. Кроме того, опять–таки в силу той же леммы 6.4, нетеровости Φ и локальной шпехтовости можно считать, что число k выбрано достаточно большим и для любого $y \in K$ выполняется тождество $yC_k \equiv 0$.

Но тогда множество значений многочленов C_k образует собственное подкольцо, на котором выполняется тождество h. Это значит, что в алгебре A выполняется полилинейное тождество

$$xC_k(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{t})|_{C_k(\overrightarrow{\tau}_i^0, \overrightarrow{\rho}_i^0 \to z_i); C_k(\overrightarrow{\tau}_i^1, \overrightarrow{\rho}_i^1 \to t_i)};$$

(“Капелли от Капелли”). Его коэффициенты не принадлежат K, что противоречит конструкции $K \triangleleft \Phi$. Таким образом, все коэффициенты критического тождества лежат в K.

В этом случае мы будем рассматривать критические полиномы как морфизмы из PI-алгебры $\bar{A} = A/\operatorname{T}(C_k)$ в алгебру A, ибо техника раздела 6.4.2 не зависит от области значений критического полинома.

Мы сведем ситуацию к случаю, когда критическое кольцо R является PI-кольцом и обладает собственным тождеством, либо есть алгебра над полем, либо кольцо KR конечно.

Основная идея данного раздела заключается в следующем. Пусть f – критический полином. Можно считать, что он имеет вид как в лемме о расталкивающих заменах. Тогда можно указать ненулевое следствие $g \in \operatorname{T}(f)$, получающееся из f специально подобранными подстановками, так чтобы каждое его значение равнялось значению f на некотором собственном подкольце.

В ситуации алгебр над кольцом надо работать в фильтрованной компоненте. А именно, надо придти к случаю, когда $f = rh$, $r \in \Phi$, и rh в относительно свободной алгебре B из $\operatorname{Var}(A)$ порождает T-пространство, изоморфное T-пространству, порожденному h в факторе B/Γ, где Γ – некоторый T-идеал. При этом B/Γ есть алгебра над некоторым первичным фактором F основного кольца Φ, не имеющая F-кручения (и вкладывающаяся в относительно свободную алгебру над полем).

6.4.1. Случай отсутствия тождеств

Из теоремы Ж. Левина 3.1 следует

Предложение 6.31. *Критическое кольцо R, в котором не выполняются тождества, простое.* □

В частности, оно является алгеброй над полем.

Чтобы показать, что R есть тело, достаточно проверить, что в R нет ненулевых левых идеалов. Для этого достаточно показать, что сумма двух левых идеалов является PI-кольцом.

В самом деле. Если R критическое и не PI, то в этом случае сумма любого конечного числа левых идеалов есть левый идеал и PI-кольцо. В силу критичности R некоторое тождество выполняется в сумме любого конечного числа левых идеалов, а следовательно, и в сумме их всех. Тем самым сумма всех левых идеалов отлична от R и, как хорошо известно, является двусторонним идеалом (см., например, [116]) в R. Это противоречит простоте кольца R.

Итак, пусть I_1, I_2 – левые идеалы в R и $H = I_1 + I_2$. Поскольку идеалы I_1 и I_2 образуют базис кольца H, достаточно показать, что для некоторой диаграммы Юнга D, являющейся квадратом размера $k \times k$, в тройке (H, I_1, I_2) выполняется любое разреженное тождество, отвечающее этой диаграмме, имеющее вид

$$\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \dots y_{m-1} x_{\sigma(m)} = 0,$$

где либо $x_i \in I_1$ при всех i, либо $x_i \in I_2$ при всех i.

В этом случае в алгебре H выполняется любое разреженное тождество, отвечающее квадрату размера $2k \times 2k$ (ибо если $2k$ переменных лежат в $I_1 \cup I_2$, то хотя бы k лежат в одном I_α). В силу симметрии достаточно ограничиться случаем, когда $x_i \in I_1$ при всех i.

Доказательство основано на оценке числа полилинейных m-разбиваемых слов и осуществляется методами раздела 0.2.4.

Построим свободный объект в многообразии, порожденной тройкой (H, I_1, I_2). Сопоставим каждому элементу $x \in I_j$ набор свободных коммутативных переменных $\mu_i^j(x)$ $(j = 1, 2,\ i = 1, \ldots, \infty)$.

Рассмотрим формальные суммы

$$x_i = \sum_{x \in I_1} \mu_i^1(x)x,\ \ y_i = \sum_{y \in I_2} \mu_i^2(y)y.$$

Упорядочим элементы $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec y_1 \prec y_2 \prec \ldots$. Этот порядок индуцирует лексикографический порядок в пространстве слов от x_i, y_i. Рассмотрим полилинейные слова v_I вида

$$v_I = x_{i_1}y_{i_1}x_{i_2}y_{i_2}\ldots x_{i_s}y_{i_s}. \tag{1}$$

Нас интересуют v_I, не представимые в виде линейных комбинаций меньших слов вида (1).

Поскольку кольцо R критично, левые идеалы I_1 и I_2 суть PI-кольца и некоторое полилинейное разреженное тождество вида

$$\sum_{\sigma \in S_q} \alpha_\sigma z_0 x_{\sigma(1)} z_1 x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(q)} z_q = 0 \tag{2}$$

выполняется в каждом из них.

Поскольку левое умножение левого идеала не выводит за его пределы, в тройке (H, I_1, I_2) выполняются тождества:

$$\begin{gathered}\sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma z_{\sigma(1)} t_{\sigma(1)} u_1 \ldots z_{\sigma(m)} t_{\sigma(m)} u_m = 0,\\ \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma z_{\sigma(1)} u_1 \ldots z_{\sigma(m)} u_m = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\forall i\ z_i, u_i \in I_1, t_i \in I_2$ либо $\forall i\ z_i, u_i \in I_2, t_i \in I_1$.

Рассмотрим полилинейные слова от построенных относительно свободных переменных x_i, y_i тройки (H, I_1, I_2), которые нельзя представить в виде линейной комбинации меньших слов. Из равенств (3) следует, что такие слова не являются $2m$-разбиваемыми. (Множитель 2 возник из–за двух типов переменных x и y.)

Теперь заметим, что в алгебре, порожденной x_i и y_i, действует прямое произведение бесконечных симметрических групп $S_\infty \times S_\infty$, переставляющее переменные каждого сорта между собой и не смешивающее сорта.

Отсюда, из оценки $n^{2(2m-1)}$ на число полилинейных слов длины n, не являющихся $2m$-разбиваемыми, а также оценок на размерность неприводимых S_q-модулей, отвечающих диаграмме D_m, $m = n(n+1)/2$, состоящей из строк длины $1, 2, \ldots, n$ (см. раздел 0.2.4):

$$\sqrt{\frac{\pi}{(2m)^{1/2}e}}2^{-m}m^{1/2(m-\sqrt{m})}e^{-\sqrt{18m}} < \dim(M_{D_m}) < \sqrt{\frac{\pi}{(2m)^{1/2}e}}2^{-m}m^{1/2(m-\sqrt{m})},$$

следует, что в алгебре H выполняется разреженное тождество вида (2) при $q = (3m)^4$.

Итак, проблема существования бесконечных критических не PI-колец свелась к случаю тел. До сих пор стоит открытым следующий

Вопрос: *Существует ли конечно порожденное тело, бесконечномерное над основным полем?*

Для PI-алгебр ответ отрицателен. Если получить отрицательный ответ в общем случае, то проблема существования бесконечных критических колец получит отрицательное решение.

Однако может оказаться, что конечно порожденное бесконечномерное тело существует. Но если тело является критическим кольцом, то оно не только 2-порождено, но и любой набор элементов, порождающий алгебру, в которой не выполняются все тождества алгебры матриц некоторого фиксированного порядка, порождает все тело.

В этой связи возникает

Вопрос: *Существует ли такое тело, что любые два некоммутирующие элементы его порождают?*

Предполагаемый ответ — отрицателен.

Поскольку вопросы, связанные с не PI-телами, выходят за рамки данной работы (как в отношении проблематики, так и методов исследования), то мы ограничимся этим кратким обсуждением.

6.4.2. Случай наличия тождеств

Данный пункт посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 6.10. *Пусть R – критическое кольцо, $K \trianglelefteq \Phi$ – идеал коэффициентов тождеств, выполняющихся в R. Тогда KR – конечное кольцо.*

Мы докажем несколько более общий факт:

Теорема 6.11. *Бесконечных критических колец, имеющих бесконечномерный над основным кольцом и первичный PI-фактор, не существует.*

Следствие 6.14. *Бесконечных критических колец, обладающих собственными тождествами, не существует.* □

Любое конечно порожденное бесконечномерное над основным кольцом PI-кольцо удовлетворяет условиям данной теоремы. Тем самым из нее следует несуществование бесконечномерных собственно PI-колец (когда коэффициенты тождеств порождают единичный идеал).

Пусть коэффициенты тождеств образуют идеал $K \triangleleft \Phi$. Мы рассматриваем случай, когда для любого $\xi \in \Phi$ существует $a \in A: \ \xi a \neq 0$. Иначе ситуация ничем не отличается от алгебр над фактором Φ (и после такого перехода, кстати сказать, тождеств может вообще не оказаться и ситуация будет как в предыдущем разделе). Пусть $f \not\equiv 0$ – критическое тождество. Тогда некоторая фильтрованная компонента алгебры A изоморфна соответствующей компоненте фактора алгебры A по некоторому собственному T-идеалу и при этом содержит ненулевое значение полинома f (см. раздел 6.1.2).

Пусть $\tilde{A}$ – относительно свободная алгебра из многообразия $\mathrm{Var}(A)$. В силу результатов раздела 6.1.3 можно считать, что значения многочлена f в алгебре

$\tilde{A}$ порождают T-идеал, естественно изоморфный T-пространству $V = \Psi \otimes \tilde{A}/I$, где I – некоторый T-идеал $\tilde{A}$, Ψ-некоторый первичный фактор кольца Φ, причем V не имеет Ψ-кручения.

Пусть R – критическое кольцо, f – тождество, которое выполняется во всех собственных подкольцах и фактор-кольцах R, A – относительно свободная алгебра из $\mathrm{Var}(R)$, C – максимальный путь в соответствующем графе (для A как $\mathbb{Q}$-алгебры либо алгебры $\mathbb{Z}_p \otimes A$). Можно считать, что $f \in I_C$ лежит в идеале, образованном расталкивающими заменами, соответствующими пути C. (Отметим, что в свободной алгебре может не быть двух T-идеалов с нулевым пересечением, а в факторе, порождающем то же многообразие, из-за склейки различных компонент они могут появиться.)

Логика рассуждений такова. Ищется система многочленов R_i такая, что

- При подстановке $\{R_i \to x_i\}_{i \in I}$ многочлен $f|_{R_i \to x_i; i \in I}$ не обращается в ноль в алгебре $\tilde{A}$.
- Если $f|_{R_i(\overrightarrow{y}) \to x_i; i \in I} \neq 0$ в алгебре A, то многочлены $\{R_i(\overrightarrow{y})\}_{i \in I}$ образуют собственное подкольцо в A (установим что в некотором первичном факторе A, а значит и в самой алгебре).

В этом случае f принимает ненулевое значение на некотором собственном подкольце A, что противоречит критичности (ибо если $f|_{R_i \to x_i; i \in I} \neq 0$ в алгебре $\tilde{A}$, то $f|_{R_i(\overrightarrow{y}) \to x_i; i \in I} \neq 0$ в A для некоторого $\overrightarrow{y}$).

Для построения собственных подколец нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Начнем с изучения конечно порожденных алгебр над конечном полем.

Лемма 6.18. *Пусть A – к.п. первичная PI-алгебра над полем $\mathbb{F}$. Тогда размерности конечномерных подалгебр ограничены в совокупности. Если $\mathbb{F}$ конечно, то их порядки ограничены числом q и при некоторых $q_1 \neq q_2$ и q_3 во всех конечномерных подалгебрах выполняется тождество $x^{q_1} = x^{q_2}$ и тождество на формы $\Psi^{q_3} = \Psi$.* □

Пусть A есть PI-алгебра, $\bar{A}$ есть ее бесконечномерный первичный фактор минимальной сложности n. Пусть $\mathbb{F}$ конечно. Можно считать, что величины q_1, q_2 и q_3 выбраны так, что тождества из предыдущей леммы выполняются во всех первичных факторах сложности ме́ньшей n. Тогда имеет место следующая

Лемма 6.19. *Пусть Z_n – центральный полином, отвечающий матрицам размера n, R – первичное кольцо сложности n (очевидным образом представимое матрицами над многочленами). Тогда для некоторого q_3 имеет место альтернатива:*

Для любого $\overrightarrow{x}$ либо $Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3} = 0$, либо $1 + Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}$ порождает собственный идеал.

Доказательство. Вложим первичное кольцо в кольцо матриц над конечным расширением K кольца многочленов и выберем базис трансцендентности $\{x_i\}$, над которым K цело. Для любого q можно выбрать такое q_3, что величина $Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}$ принимает значение 0 при любой специализации x_i в элементы конечного расширения порядка q основного поля. Если взять q достаточно большим, то величине $1+Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}$ будет отвечать диагональная матрица с элементами на главной диагонали, отличные от константы. А любой такой элемент порождает собственный идеал в нетеровом модуле (при расширении первичного фактора значениями форм), а значит — и в искомой алгебре. □

Пусть R – критическое s-порожденное кольцо, $\bar{B}$ – относительно свободная s-порожденная алгебра из $\mathrm{Var}(R/J(\Phi)R)$, B есть свободное s-порожденное кольцо из $\mathrm{Var}(R)$. Назовем многочлен f *многочленом первого рода*, если для любого $g \in \mathrm{T}(f)$ пространство $\mathrm{T}(g)$ бесконечно. Если же пространство $\mathrm{T}(f)$ конечно в B, то f есть *многочлен второго рода.*

Многочлены первого рода отвечают несводимым компонентам, содержащим существенные клетки, а многочлены второго рода отвечают несводимым компонентам, не содержащим существенные клетки. Легко видеть, что любой ненулевой многочлен в относительно свободной алгебре имеет своим следствием ненулевой многочлен либо первого, либо второго рода. Далее, переходя к алгебрам над кольцам, рассматривая фильтрованные компоненты и пользуясь леммой 6.4, получаем, что и в случае алгебр над кольцами любой многочлен имеет следствие (порождающее проективно минимальный идеал в свободной алгебре), являющееся многочленом либо первого, либо второго рода.

Таким образом, достаточно рассмотреть только два случая:

1) Когда критическое тождество f есть многочлен первого рода.

2) Когда критическое тождество f есть многочлен второго рода.

Начнем с рассмотрения случая 1. Воспользуемся леммой 5.14 о расталкивающих подстановках, из которой вытекает следующая

Лемма 6.20. *Пусть B – относительно свободная алгебра из $\mathrm{Var}(A)$, $f|_A \neq 0$. Тогда $\forall q_3 = p^k$ существует квазилинейный многочлен $g \in \mathrm{T}(f) \setminus \mathrm{T}(A)$, значение которого не обращается в ноль в алгебре $\widehat{B}$ при некоторой подстановке следующего вида:*

- *Вместо переменной x_i, отвечающей граничному оператору, связанному с клеткой размера $> n$, подставлен многочлен вида $[x_i, Z_n]$.*

- *Вместо переменной, отвечающей несмешанному элементу, связанному с клеткой размера, бо́льшего чем n, подставлен многочлен вида $x_i h$, где h есть тождество $\mathbb{M}_n$.*

- *Вместо переменной x_i, отвечающей граничному оператору, связанному с клеткой размера n, подставлен многочлен вида*

  $$[x_i, Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}]$$

  или многочлены вида

  $$[[Z_n(\overrightarrow{x'}) - Z_n(\overrightarrow{x'})^{q_3}, x_i], Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}]$$

  в зависимости от типа граничного оператора (вход, выход или переход).

- *Вместо переменной, отвечающей несмешанному элементу, связанному с клеткой размера $\leq n$ (а также внутрирадикальной переменной), подставлен многочлен вида $(1 + Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})x_i$*

- *Вместо переменной, отвечающей граничному оператору, связанному с клеткой размера строго меньше n (а также внутрирадикальной переменной), подставлен многочлен вида $(1+Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})x_i$, или $x_i(1+Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})$, либо*

  $$(1 + Z_n(\overrightarrow{x'}) - Z_n(\overrightarrow{x'})^{q_3})x_i(1 + Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})$$

  в зависимости от типа граничного оператора (вход, выход или переход).

Тем самым многочлену g отвечает ненулевой многочлен Q.

Линейная комбинация множеств значений многочленов такого вида содержит некоторый собственный T-идеал и потому не обращается в ноль в критической алгебре A. □

Рассмотрим подкольца в алгебре A, порожденные наборами элементов, отвечающих значениям подстановок, описанных в предыдущей лемме. А именно. Зафиксируем произвольным образом набор образующих $\overrightarrow{x}$, число n есть минимальная сложность бесконечного первичного фактора кольца R, q_3 выбрано согласно лемме 6.19. Назовем подкольцо S кольца R *правильным*, если оно порождено элементами следующего вида:

1) $[x_i, Z_n]$.
2) $x_i h$, где h есть тождество $\mathbb{M}_n$.
3) $[x_i, Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}]$.
4) $[[Z_n(\overrightarrow{x'}) - Z_n(\overrightarrow{x'})^{q_3}, x_i], Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}]$.
5) $(1+Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})x_i$; $x_i(1+Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})$; $(1+Z_n(\overrightarrow{x'})-Z_n(\overrightarrow{x'})^{q_3})x_i(1+Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})$.

Если элементы типа (3) или типа (4) ненулевые, то (в силу леммы 6.19) подкольцо S содержит собственный идеал. В любом случае оно является собственным подкольцом. Пусть f – критическое тождество первого рода. Тогда существует $g \in \mathrm{T}(f)\backslash 0$, вид которого указан в лемме о расталкивающих подстановках. Далее, существует такое ненулевое $h \in \mathrm{T}(g)$, вид которого указан в лемме 6.20. Но это значит, что критический многочлен g не обращается в нуль на некотором удобном подкольце S. При этом (поскольку $h \neq 0$) элементы типа (3) или (4) не обращаются в нуль, и потому подкольцо S собственное. Получили нужное противоречие. Итак, основное утверждение для алгебр в первом основном случае (когда f отвечает пути со смешанными элементами) доказано.

Во втором случае надо заметить, что подстановка

$$Z_n(\overrightarrow{x})x_i(1 + Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}) \to x_i$$

переводит не тождества в не тождества, и провести аналогичные рассуждения: в факторе $A/J(A)$ элементы $Z_n(\overrightarrow{x})x_i(1 + Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})$, $i = 1, \ldots, s$, образуют собственное подкольцо (величина q_3 выбирается согласно лемме 6.20).

Тем самым несуществование бесконечных критических PI-алгебр над конечным полем с критическим многочленом первого рода установлено. Для случая бесконечного основного поля рассуждения устроены аналогично, с привлечением следующей леммы:

Лемма 6.21. *Пусть основное поле $\mathbb{F}$ бесконечно, элементы $\mu_{ij} \in \mathbb{F}$ таковы, что для любого j набор $\{1 + \mu_{ij}(Z_n(\overrightarrow{x}) - Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})\}$ порождает собственный идеал кольца $\bar{A}$, G – полиномиальная форма. Тогда*

$$G(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Span}_j(G(x_1(1+\mu_{1j}(Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3})), \ldots, x_s(1+\mu_{sj}(Z_n(\overrightarrow{x})-Z_n(\overrightarrow{x})^{q_3}))).$$

□

Для ситуации бесконечного основного поля все многочлены имеют первый род. Остается рассмотреть случай второго рода.

Сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 6.22. *Пусть A – s-порожденная алгебра. Тогда существуют такие натуральные числа $q_1 \neq q_2$, что для любых наборов $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ и любого многочлена второго рода f выполняется равенство*

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})|_{\forall i \ \ x_i(1+y_i^{q_1}-y_i^{q_2})\to x_i}.$$

Доказательство. В конечном кольце выполняется тождество вида $y^{q_1} - y^{q_2} = 0$. □

Лемма 6.23. *Если алгебра A имеет бесконечномерный над основным полем первичный фактор, то существует такое y, что $A(1 + y^{q_1} - y^{q_2})$ порождает собственное подкольцо.*

Доказательство. Достаточно перейти к этому первичному фактору и заметить, что центральные многочлены образуют алгебру ненулевой степени трансцендентности над основным полем, которое цело над некоторым подкольцом H, изоморфным кольцу многочленов. В качестве y можно взять значение центрального многочлена, являющееся переменной из H. □

Из этих двух лемм непосредственно получается случай критического многочлена второго рода, ибо при некотором y (см. лемму 6.20) $A(1+y^{q_1}-y^{q_2})$ образует собственное подкольцо в A.

Общий случай колец получается путем рассмотрения компоненты фильтрации, на которой все тождества устроены так же, как тождества алгебры — фактора кольца R. Каждая компонента (как пространство) изоморфна алгебре над фактором F_i кольца Φ, которое вкладывается в соответствующее пространство над полем частных $\mathbb{F}_i$ кольца F_i (см. раздел 6.3.3, а также леммы 6.1, 6.16).

И для этой компоненты проходят те же рассуждения для пространств, отвечающих первичным факторам, т.е. пространств, порожденных элементами вида ξg, где $\xi \in \Phi$ – элемент, порождающий "экстремальный" идеал кольца Φ. Для не PI-случая с несобственными тождествами проходят те же рассуждения относительно пространства $KA \simeq KA/\,\mathrm{T}(C_k)$, которое изоморфно соответствующему пространству в PI-алгебре (см. лемму 6.4).

Лемма 6.24. *а) Пусть f – тождество, которое выполняется на всех собственных подалгебрах и фактор–алгебрах алгебры A, но не выполняется в самой алгебре. Пусть f — многочлен первого рода. Тогда существует элемент $\xi \in \Phi$ и $g \in \mathrm{T}(f)$ такие, что*

- $\xi g|_A \neq 0$.
- *Пространство значений ξg в относительно свободной алгебре B из $\mathrm{Var}(A)$ изоморфно пространству значений $\mu g = h$ в фильтрованной компоненте $\mu B/\nu B$, а сама эта компонента изоморфна алгебре над полем вида $\mathbb{F}\otimes B/J$, где $\mathbb{F}$ есть локализация фактора основного кольца Φ, а J – T-идеал.*
- *Многочлен h имеет вид, указанный в лемме 6.20 (если $\mathbb{F}$ конечно) либо в лемме 6.20 (если $\mathbb{F}$ бесконечно).*

б) Пусть $K \trianglelefteq \Phi$ – идеал коэффициентов тождеств. Тогда в предположениях предыдущего пункта указанная фильтрованная компонента отвечает KA и если при этом пространство KA бесконечно, то указанная фильтрованная компонента также бесконечна. □

Из данной леммы непосредственно вытекает случай первого рода. В самом деле: значение h не тождественный ноль, но оно равно значению некоторого многочлена из $\mathrm{T}(g)$ на некотором правильном наборе и этот правильный набор порождает собственное подкольцо.

Аналогично разбирается случай второго рода. Он непосредственно выводится из следующей леммы:

Лемма 6.25. *Пусть f – тождество, которое выполняется на всех собственных подалгебрах и фактор–алгебрах s-порожденной алгебры A, но не выполняется в самой алгебре. Пусть f — многочлен второго рода. Тогда существуют $\xi \in \Phi$ и $g \in \mathrm{T}(f)$ такие, что*

- $\xi g|_A \neq 0$.
- *Пространство значений ξg в относительно свободной алгебре B из $\mathrm{Var}(A)$ изоморфно пространству значений $\mu g = h$ в фильтрованной компоненте $\mu B/\nu B$, а сама эта компонента изоморфна алгебре над полем вида $\mathbb{F}\otimes B/J$, где $\mathbb{F}$ есть локализация фактора основного кольца Φ, а J – T-идеал.*
- *Существуют такие натуральные числа $q_1 \neq q_2$, что для любых наборов $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ и любого многочлена второго рода f выполняется равенство*

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})|\forall i \ x_i(1+y_i^{q_1}-y_i^{q_2}) \to x_i.$$

- *Пусть алгебра A имеет бесконечномерный над основным кольцом первичный фактор (точнее сказать - локализация по $\bar{\Phi}\backslash 0$ бесконечномерна, где $\bar{\Phi}$ есть соответствующий фактор Φ). Тогда существует такое y, что $A(1+y^{q_1}-y^{q_2})$ порождает собственное подкольцо.*

Доказательство. Множество фильтрованных компонент в алгебре B конечно, каждая конечная компонента изоморфна как T-пространство некоторой конечной алгебре, и можно выбрать такие $q_1 \neq q_2$, что во всех таких алгебрах выполняется тождество $y^{q_1} - y^{q_2} = 0$. □

Из данной леммы вытекает существование собственного подкольца, на котором f в ноль не обращается, что противоречит его критичности.

Итак, теорема 6.11 доказана.

Замечания. 1. На первый взгляд кажется, что многочлены, отвечающие путям максимального существенного состава, порождают бесконечное пространство, если они порождают таковое в относительно свободной алгебре. В этом случае $f \in I_C$ порождает модуль M, все собственные подмодули которого с ним совпадают. На нем естественно вводится структура умножения на формы, относящиеся к крайним клеткам C (не зажатым с двух сторон граничными операторами) и такой модуль будет проективно минимальным, нетеровым и не может быть бесконечным. К сожалению, такой подход не проходит. $\mathrm{T}(f)$ может породить конечномерное пространство. Например, пусть в $\mathbb{Z}_p$-алгебре R выполняются соотношения $ac = da = dc = d^2 = c^2 = 0$, $\forall x \in R \ ex = xe = hx = xh = 0$ и, кроме того,

$$ca^k d = e \iff k \in S_1; \ ca^k d = h \iff k \in S_2,$$

где $S_1 \cup S_2 = \mathbb{N}$ – произвольное разбиение натурального ряда. Пусть $f = [x,y]r[z,t]$. Тогда значения f порождают двумерное пространство над $\mathbb{Z}_p$, а если разбиение

$S_1 \cup S_2 = \mathbb{N}$ выбрано подходящим образом, то R порождает многообразие, заданное тождествами $g[x,y]r[z,t] = 0$ и $[x,y]r[z,t]g = 0$. И в 2-порожденной алгебре из этого многообразия $\mathrm{T}(f)$ бесконечно.

2. Рассуждения данного раздела можно изложить на языке точек максимального спектра центра алгебры нетерового типа, куда вложена соответствующая относительно свободная алгебра, и специализаций. Удобные наборы можно строить как наборы элементов, обращающихся в нуль при специализации в некоторую точку максимального спектра размысловского центра первичного кольца. При этом фактор по идеалу, порожденному удобным набором, будет конечномерным (и содержащим $\mathrm{T}(g)$). В случае же нулевой характеристики фактор по сумме всех таких идеалов будет нильпотентным. Далее, пути C максимального состава отвечают вынуждающие полиномы в относительно свободной алгебре, на которых можно организовать с помощью подстановок своего рода "полимодульную структуру". Фактически мы показали, что множество значений g на удобных кольцах покрывает некоторый проективно минимальный идеал из $\mathrm{T}(g)$.

6.5. Вопросы однородности

Итак, любое относительно свободное кольцо (Φ-алгебра) представимо. Однако, как мы видели, не любое многообразие ассоциативных колец порождается алгеброй нетерового типа. Тем не менее, для алгебр над бесконечным полем любое многообразие локально порождается конечномерной алгеброй (см. [55]). Эта ситуация (см. разделы 0.1.3 и 0.2.2) равносильна однородному случаю. В данном разделе обсуждаются вопросы, связанные с однородностью многообразий, критерием их порождаемости конечномерной алгеброй, а также со свойствами однородных компонент тождеств,

6.5.1. Однородные многообразия

В данном разделе мы покажем, каким должно быть многообразие $\mathfrak{M}$, чтобы оно порождалось алгеброй нетерового типа.

Определение 6.12. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *однородным*, если каждое тождество выполняется в $\mathfrak{M}$ вместе со всеми своими компонентами, однородными по каждой переменной.

Однородные многообразия — это в точности те многообразия, которые устойчивы относительно центральных расширений:

Предложение 6.32. *Пусть $\mathfrak{M}$ – однородное многообразие алгебр, не обязательно ассоциативных. $B \in \mathfrak{M}$, C – ассоциативно-коммутативное кольцо. Тогда алгебра $B \otimes C$ принадлежит $\mathfrak{M}$.* □

Предложение 6.33. *Любая алгебра нетерового типа над бесконечным кольцом представления R, не имеющая R-кручения (тем самым R – первичное кольцо), порождает однородное многообразие.* □

Пусть $A \subseteq \tilde{A}$, $\tilde{A}$ – алгебра нетерового типа, R – кольцо представления. Тогда если многообразие $\mathrm{Var}(A)$ однородно, то центральное расширение $A[R]$ подалгебры A является алгеброй нетерового типа и порождает то же многообразие, что и A. Мы установили следующий факт:

Теорема 6.13. *Любое однородное многообразие ассоциативных алгебр локально порождается алгеброй нетерового типа.* □

Данная теорема верна не только для многообразия ассоциативных алгебр, но и для многообразий с условием локальной представимости относительно свободных алгебр.

Эту теорему можно доказать одновременно с нашей основной теоремой: в однородном случае все промежуточные носители будут алгебрами нетерового типа, при этом алгебра $\tilde{A}$ будет совпадать с алгеброй $\widehat{A}$. Так что вместо пары из алгебры нетерового типа и ее подалгебры достаточно рассматривать только одну алгебру. Остальные рассуждения останутся теми же. Лемма 5.14 не понадобится. Достаточно рассматривать только пути максимального состава, и доказательство локальной представимости осуществится с помощью тех же рассуждений, что и доказательство шпехтовости.

Следствие 6.15. *Пусть фактор по любому максимальному идеалу кольца Φ бесконечен. Тогда любое многообразие Φ-алгебр однородно и локально порождается алгебрами нетерового типа.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 6.8. □

Дадим теперь критерий того, что многообразие порождается алгеброй нетерового типа. Пусть A – алгебра нетерового типа, R – кольцо представления. Воспользовавшись предложением 6.2, мы можем считать алгебру A прямой суммой R_i-алгебр A_i, причем каждая A_i не имеет R_i-кручения. В силу предложения 6.33 при бесконечных R_i алгебра A_i порождает однородное многообразие. Таким образом, мы имеем следующее утверждение.

Предложение 6.34. *Любое многообразие, которое порождается алгеброй нетерового типа, есть пересечение многообразия, порожденного конечной алгеброй, и однородного многообразия.* □

Данная теорема верна и в неассоциативном случае, а для ассоциативных колец в локальной формулировке теорема дает окончательный критерий: тогда и только тогда.

Таким образом, ситуация, когда многообразие не порождается алгеброй нетерового типа, имеет место всегда, когда есть взаимодействие между конечной и бесконечной частями. Впрочем, это может быть и при отсутствии конечной части (эффект кратных клеток). Если осуществить центральное расширение A до алгебры нетерового типа и изучать минимальное однородное многообразие, содержащее A, то клетки разной кратности станут независимыми, а конечные клетки превратятся в клетки новых существенных типов. При этом размерность Гельфанда–Кириллова может сильно возрасти. Соответственно, все смешанные компоненты станут существенными, а градуировка в $\widehat{A}$ – более тонкой.

И в заключение этого раздела — одно наблюдение.

Предложение 6.35. *Пусть $\mathfrak{M}$ – однородное многообразие, Γ – T-идеал. Тогда старшие компоненты тождеств из Γ (максимальной степени по суммарному числу переменных) сами образуют T-идеал Γ' с той же функцией роста. Множества нормальных базисов в соответствующих относительно свободных алгебрах совпадают.*

То же верно для T-идеала Γ'', отвечающего старшим компонентам многочленов из Γ по совокупности переменных. □

Как следствие, получается рациональность ряда Гильберта относительно свободной алгебры в неоднородном случае (см. раздел 3.4.1).

Определение 6.14. Компонента многочлена имеет *максимальную степень по каждой из переменных*, если каждый моном, в нее не входящий, имеет не большую степень относительно каждой переменной и строго меньшую относительно одной из них. Через $\bar{\mathfrak{M}}$ будет обозначаться многообразие, отвечающее старшим компонентам тождеств, выполняющихся в $\mathfrak{M}$, относительно общего числа переменных, а $\bar{\mathfrak{M}}'$ – компонентам максимальной степени по каждой переменной.

В частности, шпехтовость $\mathfrak{M}$ вытекает из условия обрыва возрастающих цепей T-идеалов, однородных по общему числу входящих в них переменных (алгебры из $\mathfrak{M}$ не обязательно ассоциативны). Поэтому шпехтовость можно доказывать в финитно аппроксимируемой ситуации.

Отметим, что множество компонент с максимальным числом вхождения данной переменной, T-идеала естественным образом не порождают. Было бы интересно выяснить взаимоотношение носителей T-идеалов, построенных с помощью взятия однородных компонент в терминах клеток и т.п. Кроме того, интересно (особенно в неассоциативном случае) изучить взаимосвязь шпехтовости и финитной аппроксимируемости.

6.5.2. Радикальные свойства однородных компонент тождеств и теорема о высоте

Обозначения. В этом разделе алгебра считается *PI*, если в ней выполняется полилинейное тождество, один из коэффициентов которого равен единице. Нам понадобится видоизменить понятие сложности, исключив алгебраический радикал. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр, тогда $\overline{\mathfrak{M}}$ обозначает многообразие алгебр, порожденное однородными по каждой переменной компонентами тождеств, выполняющихся в $\mathfrak{M}$. *Сложностью* $\mathrm{PIdeg}(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ называется максимальное n такое, что для некоторого простого фактора F кольца $\Phi \quad M_n^F \in \overline{\mathfrak{M}}$. Равносильное определение: $\mathrm{PIdeg}(\mathfrak{M})$ есть максимальное n такое, что алгебра $n\times n$ матриц с бесконечным центром принадлежит $\mathfrak{M}$. При этом линеаризация f может приводить к росту сложности (простейший пример — $f = x^2$). $\mathrm{alg}(A)$ обозначает множество элементов A, целых над Φ; $\mathrm{GT}(A)$ — идеал, порожденный однородными компонентами тождеств, выполняющихся в A, $\bar{A} = A/\mathrm{GT}(A)$, π — естественная проекция, $R(\bar{A})$ — радикал $\bar{A}$, $R'(A) = \pi^{-1}(R(\bar{A}))$; $m = \deg(A)$, g обозначает тождество, выполняющееся в алгебре A; $\widehat{A}_s^F(g)$ — относительно свободная s-порожденная F-алгебра в многообразии, порожденном тождеством g; $T(\mathrm{St}_n)$ — T-идеал, порожденный стандартным тождеством степени n; $|M|$ — количество элементов множества M.

Теорема 6.15. *Пусть A — относительно свободная Φ-алгебра. Тогда множество целых над Φ элементов образует локально целый идеал ALG, фактор по которому целых над Φ элементов не имеет. Все однородные компоненты тождеств принадлежат ALG. Если Φ нетерово, то существуют такие M, N, K, что любое $x \in ALG$ удовлетворяет уравнению $(x^M - x^N)^K = 0$.*

Теорема вытекает из следующего предложения.

Предложение 6.36. *а) Пусть F — поле, $|F| > \deg(g)$, $F' \rhd F$. Тогда $\widehat{A}_s^F(g) \otimes_F F' = \widehat{A}_s^{F'}(g)$.*

б) Пусть x — однородная компонента g. Тогда центр каждого первичного фактора с ненулевым образом x содержит не более $\deg(g)$ элементов, а сам фактор содержит не более $\deg(g)^{\deg(g)}$ элементов.

Положим $K = \deg(g)^{\deg(g)}$.

в) $x^{2K!} - x^{K!} \in \mathrm{Rad}(A)$, $\exists N$: $(x^{2K!} - x^{K!})^N = 0$; $x \in \mathrm{alg}(A)$.

г) $\mathrm{GT}(A) \subseteq \mathrm{alg}(A)$ *и образует алгебраический идеал.*

д) Пусть алгебра A *относительно свободна. Тогда* $\mathrm{alg}(A) = R(\mathrm{GT}(A))$. *Если* Φ *нетерово и* A *— к.п. алгебра, то при некотором* $t \in \mathbb{N}$ $\quad (\mathrm{alg}(A))^t \subseteq \mathrm{GT}(A)$.

Доказательство. а) Если $|F|$ больше степени g, то в алгебрах $\widehat{A}_s^F(g)$ и $\widehat{A}_s^{F'}(g)$ выполняются все однородные компоненты g и все их линеаризации (см. [36]). Поэтому $\widehat{A}_s^F(g) \otimes_F F' = \widehat{A}_s^{F'}(g)$.

Импликации а)$\Rightarrow$ б)$\Rightarrow$ в)$\Rightarrow$ г)$\Rightarrow$ д) очевидны. (Импликация а)$\Rightarrow$ б) следует из классификации конечных простых ассоциативных алгебр — алгебр матриц над конечным полем, импликация г)$\Rightarrow$д) использует теорему Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала.) $\square$

Замечания. а) Аналоги данного предложения и теоремы 6.15 переносятся на многообразия неассоциативных алгебр, для которых радикал нильпотентен, простые алгебры с конечным центром конечны и первичные алгебры вкладываются в прямую сумму простых (см. приложение A).

б) Легко видеть, что неизоморфные простые конечные кольца порождают различные многообразия.

Предложение 6.37. *Если в* Φ*-алгебре* A *выполняется* St_{2n} *— стандартное тождество степени* $2n$*, то* A *имеет ограниченную числом* H *высоту над множеством слов* Y *степени не выше* n*. При этом* H *оценивается из теоремы 1.57:*

$$H = ((2n+3)2nl^{2n+1} - 1) \cdot 4n^2 l^{n+1}(2n+R) + 2nl^n,$$

где l *— число образующих алгебры* A*.*

Доказательство. Можно считать, что A — относительно свободная алгебра из многообразия, порожденного стандартным тождеством St_{2n}. Нам достаточно показать, что для любого ρ в абсолютно свободной алгебре $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$ все слова длины ρ линейно представимы по модулю $T(\mathrm{St}_{2n})$ словами $V_{\rho,H}$ длины ρ и высоты не выше H.

Пусть L — $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный словами длины ρ,

$$M = L \cap [T(\mathrm{St}_{2n}) + \langle V_{\rho,H} \rangle],\ N = L/M.$$

Отметим, что оценки из теоремы 1.57 для высоты не зависят от основного поля, поэтому из точности справа тензорного произведения следует, что для любого простого $q \quad N \otimes \mathbb{Z}_q = 0$. Поскольку $\mathbb{Z}$-модуль N конечно порожден, то по лемме Накаямы $N = 0$. $\square$

Замечание. Вместо стандартного тождества можно с тем же успехом оперировать любым полилинейным тождеством сложности n (и сложности n всех его редукций по простому модулю).

Нам понадобится такое следствие из предложения 1.78:

Лемма 6.26. *Пусть* $n = \mathrm{PIdeg}(A)$, $k < n$; $\mathcal{M}$ *– множество слов, содержащее циклически сопряженное слово к каждому слову длины, ме́ньшей* k*. Тогда существует конечный набор элементов* $\{f_1, \ldots, f_s\} \subset \mathrm{T}(\mathbb{M}_k)$ *такой, что* A *имеет ограниченную высоту над множеством* $\{f_1, \ldots, f_s\} \cup \mathcal{M}$*.* $\square$

Из теоремы Амицура–Левицкого, теоремы 6.15, предложения 6.37 и предыдущей леммы вытекает

Теорема 6.16. *Конечно порожденная алгебра A над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше $n = \mathrm{PIdeg}(A)$. Если A относительно свободна, а Y — базис Ширшова алгебры A, состоящий из слов, то для любого слова u, длина которого не выше n, множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени u^k. Каждое такое Y является s-базисом A, а если Y содержит образующие A, то Y — базис Ширшова.* □

Для некоторого тождества $f \in \mathrm{T}(A)$ одна из его полиоднородных компонент имеет сложность $\mathrm{PIdeg}(A)$. Если число элементов основного поля больше чем $\deg(f)$, то тождество f равносильно набору своих полиоднородных компонент. Поскольку конечное тело есть поле, имеем

Предложение 6.38. *Существует только конечное число простых факторов к.п. алгебры A, изоморфных алгебре матриц размера больше чем $\mathrm{PIdeg}(A)$ над некоторым полем. (В частности, конечно порожденное кольцо сложности 0 конечно).* □

Замечание. Отметим, что нетеровость основного кольца Φ нигде не использовалась.

6.5.3. Об одном вопросе И. В. Львова

И. В. Львов в Днестровской тетради [33] поставил следующий вопрос:

Пусть f есть собственный полином степени m, коэффициенты которого образуют единичный идеал в кольце Φ. Верно ли, что из f следует некоторое полилинейное тождество степени m вида

$$x_1 \ldots x_m - \sum_{\sigma \in S_m \setminus \{1\}} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m)}\ ?$$

И. В. Львов показал, что из f следует полилинейное тождество указанного вида степени m^2. Вопрос продолжает оставаться открытым. Наша цель — свести ситуацию к примарному случаю.

Лемма 6.27. *Пусть u – старшее полилинейное слово длины m, модуль N порожден словами длины m от тех же букв, лексикографически меньших u, M порожден N и словом u, $Q = M/N$.*

а) Пусть I_α – идеалы кольца Φ, в сумме дающие единицу. Тогда если для любого α $\Phi/I_\alpha \otimes Q = 0$, то $Q = 0$.

б) Пусть $\mathbb{Q} \otimes M/\mathbb{Q} \otimes N = 0$ и кроме того $\mathbb{Z}_{p^k} \otimes M/\mathbb{Z}_{p^k} \otimes N = 0$ для любого простого p и натурального k. Тогда $Q = 0$.

Доказательство. П.а) очевиден. Будем доказывать п.б) для произвольного нетерова модуля и его подмодуля. Поскольку кольцо $\mathbb{Z}_n$ изоморфно прямой сумме колец $\mathbb{Z}_{p^k}$, то второе условие п.б) можно переформулировать так: $\mathbb{Z}_n \otimes M/\mathbb{Z}_n \otimes N = 0$ для любого натурального n. Положим $N_n = \{x \in M | n! \cdot x \in N\}$. Поскольку модули N_n образуют возрастающую цепочку, при некотором n они стабилизируются. Но из первого условия следует, что для любого $x \in M$ существует натуральное k такое, что $kx \in N$. Тогда $x \in N_{k!}$ и, следовательно, $x \in N_n$, т.е. $\forall x \in M\ n!x \in N$. С другой стороны, условие $\mathbb{Z}_{n!} \otimes M/\mathbb{Z}_{n!} \otimes N = 0$ означает, что любой элемент $x \in M$ представим в виде суммы $z + n!y$, где $z \in N$. И поскольку $n!y \in N$, элемент x также принадлежит N, т.е. $Q = M/N = 0$. □

Замечание. Наивные редукционные рассуждения с локализацией и факторизацией по элементу $x \in \Phi$ не проходят.

Отметим, что для алгебры из многообразия степени m условие $\mathbb{Q}\otimes M/\mathbb{Q}\otimes N = 0$ выполняется автоматически.

Из данной леммы и предложения 6.8 непосредственно следует сведение к случаю, когда аддитивная группа кольца Φ примарна, а само кольцо Φ радикально, причем радикал Джекобсона $J(R)$ нильпотентен. И, более того, само кольцо Φ конечно и не имеет идеалов с нулевым пересечением.

Интересно изучить случай $\Phi = \mathbb{Z}_{p^k}$, в частности, при $k = 2$. Многочлен f связывает свои однородные компоненты. Например, пусть $\Phi = \mathbb{Z}_{p^2}$, многочлен f имеет вид $f_1 + pf_2$, где f_1 полилинеен, а f_2 квазилинеен над $\mathbb{Z}_p$ и его порядок квазилинейности равен p (и степень в p раз больше степени f_1). На тождествах действует группа перестановок переменных. Поэтому многочлены такого вида осуществляют своего рода связь между “полилинейными” и “квазилинейными” представлениями симметрической группы.

Старшие компоненты f должны порождать изоморфные $\Phi[S_k]$-модули (иначе они разделяются). Можно рассмотреть квазилинеаризацию компонент. Таким образом, вопрос И. В. Львова имеет отношение к квазилинейным представлениям симметрической группы и связям между представлениями разной “степени квазилинейности”.

Кроме того, интересно рассмотреть обобщение вопроса И. В. Львова на случай, когда коэффициенты многочлена f образуют идеал K кольца Φ, отличный от единицы. Следует ли из f в этом случае некоторое полилинейное тождество g, $\deg(g) = \deg(f)$, коэффициенты которого образуют идеал K (или набор полилинейных тождеств $\{g_i\}$ той же степени, коэффициенты которых образуют идеал K)? Наверно, для степени $\deg(f)^2$ можно ожидать положительный ответ.

7. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов

7.1. Основные конструкции

$\mathbb{K}$ обозначает основное поле, p – простое число, $|v|$ — длина слова v. Мы стартуем от алгебры A из многообразия, порожденного тождеством $[[x, y], z] = 0$ с образующими $x_i, y_i; i = 1, \dots, \infty$. В этой алгебре все слова, содержащие $p+1$ вхождение какой-нибудь образующей, нулевые. И в случае характеристики $p > 2$ основного поля алгебра A задается этими соотношениями и тождеством аменабельности.

В случае $p = 2$ переменные y_i не рассматриваются, а сама алгебра A задается соотношениями

$$x_i^3 = 0, [x_i, x_j] = \epsilon_i \epsilon_j x_i x_j,$$

где $\epsilon_i^2 = 0$, ϵ_i коммутирует со всеми элементами алгебры (и с ϵ_j). Ясно, что $\epsilon_i x_i x_j = \epsilon_i x_j x_i$, поэтому соотношения определены корректно. Из этих соотношений следует тождество аменабельности. Алгебра A в данном случае — это алгебра Гришина φ_p.

Замечание. Можно показать, что в алгебре A выполняется тождество:

$$z u_1 z u_2 \cdots u_{q-1} z = 0,$$

где q – некоторая степень p.

Это можно вывести из результатов А. Р. Кемера о том, что в алгебре Грассмана в характеристике p выполняются все тождества алгебры матриц порядка p, и из леммы Кемера, что достаточно сильная линеаризация некоторого тождества автоматически выполняется в алгебре матриц. Впрочем, этот результат можно вывести и непосредственно используя специфику тождества аменабельности $[[x, y], z] = 0$.

Пусть $z = x_1 \ldots x_n$ – слово. Тогда для свободной ассоциативной алгебры имеет место равенство

$$[z, y] = \sum_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_n|_{x_i=[z,x_i]} \tag{1}$$

Замечание. Рассмотрим произвольное (не обязательно полилинейное) слово v от переменных $\{y_i\}$ (получаемое из v путем склейки некоторых x_i) и систему подстановок $S : y_i \to [z, x_i]$. Из равенства (1) следует, что $[v, z]$ есть z-линейная часть $S(v)$. Поэтому если основное поле бесконечно, однородые компоненты разделябтся (см. раздел 0.2.2) и взятие комутанта является T-пространственной операцией (причем *слабой T-пространственной*, т.е. сохраняющей структуру ассоциативно-лиевой пары. Поэтому в случае (слабого) T-пространства S над бесконечным полем имеет место включение $[S, A] \subset A$ и T-пространство в алгебре Ли над бесконечным полем является T-идеалом. Для алгебр Ли над конечным полем в силу неассоциативности произведения многообразий это неверно (см. [5], гл. 4).

Нам понадобятся леммы, относящиеся к свойствам тождества аменабельности. Следующая лемма принадлежит В. Н. Латышеву [66] :

Лемма 7.1. *Пусть в A выполняется тождество $[[x, y], z] = 0$. Тогда коммутант $[x, y]$ централен и в A выполняются тождества:*

а) $[x, y]u[z, t] = -[x, t]u[z, y]$.

б) $[x, y]u[z, y] = 0$.

в) В любой 2-порожденной подалгебре выполняется тождество: $[x, y]u[z, t] = 0$. □

Назовем *p-словом* слово, в которое число вхождений каждой образующей алгебры сравнимо с нулем по модулю p. Ясно, что в любое ненулевое p-слово алгебры A каждая образующая входит либо ноль, либо p раз. Полином называется *полным*, если он есть линейная комбинация p-слов. Слово U называется *циклически сопряженным* слову V, если для некоторых слов V_1 и V_2 выполняются равенства: $U = V_1V_2$; $V = V_2V_1$. Отношение “циклической сопряженности” является отношением эквивалентности. Следующие две леммы принадлежат В. В. Щиголеву:

Лемма 7.2. *а) Значение любого p-слова центрально. (А значит, любой полный полином централен.)*

б) Значения полиномов $Q(x, y) = x^{p-1}y^{p-1}[x, y]$ ($char(\mathbb{K}) = p$) и x^2 (если $char(\mathbb{K}) = 2$) лежат в центре A.

Доказательство. П.б) есть непосредственное следствие п.а). Докажем п.а). Обозначим через $\mathrm{ord}_x(V)$ количество вхождений буквы x в слово V, $D_x(V)$ — результат вычеркивания буквы x из V (подстановки вместо x единицы). В нашем случае из равенства (1) и леммы 7.1 следует равенство

$$[z, x]V = [z, x]x^{\mathrm{ord}_x(V)}D_x(V).$$

Откуда в силу правила Лейбница для дифференцирования и центральности значения коммутатора имеем:

$$[v,x]=\sum_i [x_i,x]\,\mathrm{ord}_{x_i}(V)x_i^{ord_{x_i}(V)}D_{x_i}(V).$$

Если V – p-слово, то $\mathrm{ord}_{x_i}(V)=0$ при всех i и коммутатор $[x,v]$ обращается в ноль при всех x. Поэтому V лежит в центре, что и требуется доказать. $\square$

Замечание. p-слово — это своего рода аналог "спаривания". Возможно, что за p-словами стоит содержательная теория (подобно теории 2-слов Ю. П. Размыслова).

Лемма 7.3. *а) Пусть V – p-слово, V' циклически сопряжено V. Тогда в в алгебре A значения V и V' одинаковы.*

б) Пусть W – центральный полином в A, V и V' – циклически сопряженные слова и полином WV полон. Тогда $WV=WV'$.

Доказательство. Поскольку от слова V можно перейти к любому его циклически сопряженному путем последовательного перенесения по одной букве из конца в начало, достаточно рассмотреть случай элементарного циклического сопряжения. Пусть x – буква, xV – p-слово. Нам надо доказать, что $xV=Vx$, или равенство нулю коммутатора $[x,V]$. Но это следует из равенства 7.1, поскольку если $x_i\neq x$, то $\mathrm{ord}_{x_i}(V)=\mathrm{ord}_{x_i}(xV)\equiv 0 \bmod p$. Если же $x_i=x$, то $[x_i,x]=0$.

Докажем п.б). Пусть $v=v_1v_2; v'=v_2v_1$. Тогда $Wv=v_1Wv_2; Wv'=v_2Wv_1$. Остается расписать W в виде линейной комбинации слов и применить п.а) данной леммы. $\square$

Следствие 7.1. *Пусть W – центральный полином в A, $v=v_1v_2$ и $v'=v_3v_4$ – циклически сопряженные слова, полином Wv полон. Тогда $Wv=Wv'=v_1Wv_2=v_3Wv_4$.* $\square$

Приведем следующие результаты А. В. Гришина и В. В. Щиголева, относящиеся к свойствам алгебры A.

Лемма 7.4. *а) Пусть $char(\mathbb{K})=2$. Тогда любой полный полином, являющийся линеаризацией полинома из T-пространства, порожденного $\prod {x_i}^2$, принадлежит $\mathrm{T}([[x,y],z])$.*

б) Пусть $char(\mathbb{K})=p>2$. Тогда любой полный полином, являющийся линеаризацией полинома из T-пространства, порожденного $\prod Q(x_i,y_i)$, принадлежит $\mathrm{T}([[x,y],z])$.

Иными словами, полиномы указанного вида обращаются в нуль на A и остается только возможность подстановки слов вместо переменных.

Положим $H_n=\prod_{i=1}^n {x_i}^2$, $G_n=\prod_{i=1}^n Q(x_i,y_i)$.

Лемма 7.5. *Полиномы H_n (соответственно G_n) не принадлежат линейному пространству, порожденному подстановкой слов вместо переменных в H_s (соответственно в G_s) при всех $s<n$.*

Теперь мы расширим алгебру A элементами e, f, и t, добавив соотношения:

$$t^{4q+1} = 0, \quad [t, x_i] = [t, y_i] = 0.$$
$$[t, fe] = [fe, x_i] = [fe, y_i] = 0.$$
$$x_i e = y_i e = te = e^2 = 0. \quad fx_i = fy_i = ft = f^2 = 0.$$
$$\{v = 0 | v \text{ имеет более } q \text{ вхождений } e \text{ или более } q \text{ вхождений } f\}$$

Получившуюся алгебру мы обозначаем $\widehat{A}$. Каждое слово из $\widehat{A}$ приводится к подслову слова следующего вида: $w = et^{k_1} v (fe)^{k_2} f$, где v — слово из A, т.е. слово от x_i и y_i. Слово W называется *p-словом*, если v — p-слово. Полнота многочлена определяется аналогично.

Теперь можно привести бесконечно–базируемые системы полиномов R_n и $R_n^{(2)}$:

$$R_n^{(2)} = [[E, T], T] \prod_{i=1}^{n} x_i^2 ([T, [T, F]][[E, T], T])^{q-1} [T, [T, F]],$$

если $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ и в общем случае положительной характеристики

$$R_n = [[E, T], T] \prod_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i) \left([T, [T, F]][[E, T], T]\right)^{q-1} [T, [T, F]],$$

где $Q(x, y) = x^{p-1} y^{p-1} [x, y]$.

7.2. Основная теорема

Наша цель — доказать основную теорему:

Теорема 7.1. *Системы полиномов $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{R_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют бесконечно базируемый T-идеал в алгебре $\widehat{A}$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем неформальное пояснение, относящееся к конструкции алгебры $\widehat{A}$. Алгебра A — это фактически алгебра Грассмана, $A[t]$ — ее расширения центральным нильпотентом. Алгебру $\widehat{A}$ можно определить, представив ее матрицами над расширением "алгебры Грассмана" $A[t]$, у которых на диагонали стоят одинаковые элементы. Рассмотрим матрицы порядка $2q+1$ над алгеброй $A[1, t]$, E_{ij} обозначают матричные единицы. Тогда образующим алгебры $\widehat{A}$ соответствуют следующие элементы:

$$x_i \mapsto x_i \sum_{i=1}^{q} E_{2i,2i}, \quad y_i \mapsto y_i \sum_{i=1}^{q} E_{2i,2i}, \quad t \mapsto t \sum_{i=1}^{q} E_{2i,2i};$$
$$e \mapsto \sum_{i=1}^{q} E_{2i-1,2i}, \quad f \mapsto \sum_{i=1}^{q} E_{2i,2i+1}$$

Диагональная позиция называется *клеткой*, по аналогии с конечномерным случаем. (Бесконечно порожденная алгебра Грассмана T-первична в смысле Кемера, и мы ее используем в своих конструкциях как первичную алгебру.) Поясним это подробнее.

Конечномерная алгебра разлагается в сумму радикала и полупростой части. В локальном случае любая относительно свободная алгебра B представима матрицами. При этом можно добиться такого устройства представления: вдоль диагонали идут блоки. Ограничение элементов алгебры на каждый такой блок дает гомоморфизм на алгебру общих матриц. Под блоками идут нули. Любые два блока могут быть либо *похожими* (для любого элемента алгебры коэффициент при соответствующей матричной единице в двух блоках совпадает), либо *независимыми* (на любых позициях стоят различные трансцендентные переменные). Радикал осуществляет связь между блоками. Эти связи обеспечиваются компонентами вида E_{ij}, где индекс i отвечает одному блоку, j – другому, или один из индексов никакому блоку не соответствует. Радикальные компоненты $\lambda_{ij}E_{ij}$ бывают следующих типов:

1. Отвечающие входам в клетку (i – не индекс внутри клетки, j – индекс внутри клетки).

2. Выходам из клеток.

3. Переходам из одной клетки в другую.

4. Другого типа.

Это можно сказать на языке пирсовского разложения. А именно: алгебру B можно расширить до $\widehat{B}$ так, что $\mathrm{Var}(\widehat{B}) = \mathrm{Var}(B)$. При этом система похожих клеток отвечает первичной компоненте расширенной алгебры $\widehat{B}$, независимые клетки — разным компонентам, а радикальные компоненты типа 1, 2, 3, отвечают смешанным элементам пирсовского разложения (ν_i — ортогональные идемпотенты, отвечающие единицам в первичных компонентах, $\nu_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \nu_i$, nu_0 – соответствует “внеклеточным” индексам. *Смешанным* (в терминологии А. Р. Кемера) называется элемент вида $\nu_i x \nu_j$, где $i \neq j$.) Более того, элементы типа 1 можно представить в виде $\nu_0 x \nu_i, i > 0$, а типа 2 — в виде $\nu_i x \nu_0, i > 0$. Элемент из B есть сумма своих компонент (которые лежат в расширенной алгебре $\widehat{B}$).

Через $\overline{x}_r$ обозначим сумму полупростых компонент элемента x_r, т.е. его полупростую часть, $\theta_r = x_r - \overline{x}_r$ — его радикальная часть. Подстановке $P_r(x_1, \dots, x_n) \to x_r$ соответствует такая же подстановка на полупростых частях. Можно определить действие этой подстановки на радикальных частях $\theta'_r = P_r(x_1, \dots, x_n) - P_r(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$. (Техника такого рода подстановок развита в работах [26], [28].)

В “глобальном” случае аналогом первичной клетки будет грассманиан, который порождает T-первичное многообразие. Все клетки будут похожими.

Для перехода от T-пространств к T-идеалам, чтобы предохраниться от умножений, нужно элементы A “запереть в клетках” (с двух сторон). Но подстановки осуществляются и в запирающие “прокладки”. Чтобы обеспечить бесконечную базируемость, надо элиминировать действие таких подстановок. Для этого мы строим алгебру $\widehat{A}$ так, чтобы:

1) слова, содержащие более p вхождений образующих, в алгебре A были нулевыми (Это обеспечивает невозможность при подстановке окружить радикальную связку одним и тем же словом, что вынуждает линеаризацию);

2) количество q диагональных элементов выбиралось равным степени p. Оно равно числу “прокладок” каждого типа — запирающих радикальных компонент, отвечающих входам в диагональные клетки (оператор e) и выходам из них (оператор f). Это обеспечивает равенство нулю линеаризаций.

Мы работаем с произведениями, содержащими максимально возможное число радикальных множителей. Перейдем к построению доказательств.

7.2.1. Подстановки слов на заданные позиции

Итак, достаточно доказать бесконечную базируемость пространства, порожденного R_n ($R_n^{(2)}$) в алгебре $\widehat{A}$ относительно вербальных операторов. Исследуем расстановки слов из $\widehat{A}$. Из свойств алгебры $\widehat{A}$ вытекает

Лемма 7.6. *а) Любая ненулевая подстановка слов из $\widehat{A}$ внутрь коммутаторов $[[E,T],T]$ и $[T,[T,F]]$ имеет вхождение элемента e или элемента f (см. конструкцию $\widehat{A}$).*

б) Любая ненулевая расстановка слов из $\widehat{A}$ в полином R_n ($R_n^{(2)}$) имеет вхождение ровно одной переменной e в $[[E,T],T]$ и ровно одной переменной f в $[T,[T,F]]$. в) Слово, содержащее x_i или y_i, для любой расстановки имеет не более p вхождений.

Доказательство. Пункты а) и в) очевидны в силу свойств A и $\widehat{A}$. Докажем п.б). В силу п.а) все $2q$ возможных вхождений e и f должны быть израсходованы. Остается заметить, что следовать за f может только e, а вхождению e может предшествовать только f (еще f может завершать слово, а e может начинать) и что коммутаторы с $[[E,T],T]$ и с $[T,[T,F]]$ чередуются. □

Назовем расстановку *хорошей*, если слово, содержащие x_i или y_i, не имеет вхождений в позиции E, F или T, иначе она *плохая*. Назовем вербальный оператор *хорошим*, если все соответствующие расстановки хорошие, и *плохим* в противном случае.

Лемма 7.7. *а) Любая ненулевая хорошая подстановка слов из $\widehat{A}$ внутрь коммутаторов $[[E,T],T]$ или $[T,[T,F]]$ пропорциональна $(ef)^h et^k$ или $t^k f(ef)^h$, где $k+h\geq 2, h\geq 0$.*

б) Пусть ρ – ненулевая хорошая расстановка слов из $\widehat{A}$ в полином R_n ($R_n^{(2)}$, см. формулировку основной теоремы), ρ' получается из ρ, если в T, E, F подставить соответственно t, e, f, а остальные позиции оставить без изменений. Тогда ρ' пропорционально ρ, и коэффициент пропорциональности не зависит от этих других позиций.

Доказательство. П.а) очевиден. п.б) следует из п.а), свойств алгебр A и $\widehat{A}$ и п.б) предыдущей леммы. □

Отметим, что результат умножения значения полинома R_n ($R_n^{(2)}$) на что угодно в алгебре $\widehat{A}$ нулевой. Поэтому из бесконечной базируемости T-пространств $\{\prod_{i=1}^n x_i^2\}_{n=1}^\infty$ и $\{\prod_{i=1}^n Q(x_i,y_i)\}_{n=1}^\infty$ вытекает следующая

Лемма 7.8. *Система полиномов R_n ($R_n^{(2)}$) бесконечно базируема относительно хороших вербальных операторов.*

Теперь мы закончили техническую работу.

7.2.2. Доказательство основной теоремы

Воспользуемся леммами 7.7, 7.8. Тогда из основной леммы легко следует, что путем подстановки из R_k (соответственно, $R_k^{(2)}$), где $k<n$, нельзя получить R_n (соответственно, $R_k^{(2)}$). С другой стороны, и "идеальное действие" — умножение R_n ($R_n^{(2)}$) на любой элемент из $\widehat{A}$ — дает нулевой результат. Поэтому остается доказать следующее утверждение, позволяющее исключить из рассмотрения подстановки в E, T и F:

Основная лемма. *Пусть полный полином Q получается из полинома R_n (или $R_n^{(2)}$) путем применения плохого вербального оператора. Тогда полином Q — нулевой.*

Доказательство. Определим оператор кругового сдвига σ на расстановках. Занумеруем вхождения пар коммутаторов $[T,[T,F]][[E,T],T]$ в полиноме

$$R_n = [[E,T],T]\prod_{i=1}^{n} x_i^2([T,[T,F]][[E,T],T])^{q-1}[T,[T,F]]$$

$(\mathrm{char}(\mathbb{K})=2)$,

$$R_n = [[E,T],T]\prod_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i)([T,[T,F]][[E,T],T])^{q-1}[T,[T,F]]$$

$(\mathrm{char}(\mathbb{K})=p)$ по кругу. При этом последний коммутатор $[T,[T,F]]$ имеет своей парой начальный $[[E,T],T]$. Каждой паре коммутаторов $[T,[T,F]][[E,T],T]$ отвечает 6 позиций (левое T, следующее T, F, E, и опять два T). Каждой из этих позиций сопоставим такую же позицию в соседней справа паре коммутаторов (последней паре $[T,[T,F]][[E,T],T]$ отвечает пара из концевого $[T,[T,F]]$ и начального $[[E,T],T]$, а этой паре, в свою очередь, — первая пара, стоящая после $\prod x_i^2$ (соответственно $\prod Q(x_i,y_i)$). Сопоставив каждой позиции в паре $([T,[T,F]][[E,T],T])$ позицию в соседней паре, мы естественным образом определим циклический сдвиг σ на расстановках. (Подставляются те же слова, но на сдвинутые позиции, а на позициях, отвечающих вхождению X_i, Y_i расстановка не меняется).

Действие оператора σ на расстановках обладает следующими свойствами:

- Пусть $p^s=q$. Тогда орбита любой расстановки имеет порядок p^r, где $0\le r\le s$.
- Если $r=0$, то расстановка инвариантна. Количество вхождений каждого слова на E,F,T — позициях в инвариантной расстановке сравнимо с нулем $(\mod q)$.
- Плохая инвариантная расстановка обращается в нуль. (Из леммы 7.6 следует, что в ненулевом слове подслово, содержащее x_i или y_i, не может иметь более p вхождений, а здесь $q>p$.)
- Если расстановка не инвариантна, то длина орбиты делится на p.

Все члены, составляющие вербальный оператор, группируются в орбиты оператора σ.

Для доказательства основной леммы осталось показать, что расстановки одной орбиты, если они полные многочлены, изображают одинаковые элементы алгебры $\widehat{A}$. Тогда их сумма ноль. Иными словами, надо показать, что оператор σ, сдвигающий разметки, переводит член в равный ему.

Но это вытекает из леммы о центральности полинома $Q(x,y)$ (соответственно, полинома x^2) и следствия 7.1 из леммы 7.3 о циклическом сдвиге.

Замечание. Рассмотрим произвольную подстановку в R_n ($R_n^{(2)}$), результат которой не обязательно полный полином. Поскольку в алгебре A выполняется тождество $zv_1zv_2\cdot\ldots\cdot v_{p^\alpha-1}z=0$, то члены, получающиеся путем подстановки слов, содержащих x_i или y_i в T (в E, в F) на p^α позиций, — нулевые. Поэтому если $q\ge p^\alpha$, то инвариантные члены дадут нулевой вклад в любом случае.

В заключение хотелось бы еще раз посмотреть на структуру доказательства. Чтобы показать, что $R_n\notin \mathrm{T}(\{R_i\}_{i<n})$, ($R_n^{(2)}\notin \mathrm{T}(\{R_i\}_{i<n})$), мы показываем, что полный полином — значение R_n на образующих модельной алгебры $\widehat{A}$ не может

быть получен подстановками и умножением на элементы из $\widehat{A}$. Эти умножения приводят к нулевому результату. Поэтому достаточно рассмотреть подстановки, или, что то же самое, действие вербальных операторов, результат которых есть полный полином. Суммируя результаты основной леммы и лемм 7.4, имеем:

- Результат плохих вербальных операторов (а стало быть, подстановок, подставляющих элемент из идеала, порожденного алгеброй A, в $(E-F-T)$-позиции) нулевой, если он полный полином.

- Если вербальный оператор связан с линеаризацией подстановок в X или Y-позиции, то ее результат, если он полный полином, тоже нулевой (лемма 7.4).

- Единственная возможность получить ненулевой полный полином состоит в тождественной подстановке в T, E, F (другие хорошие подстановки ей пропорциональны) и в подстановке слов вместо x_i, y_i.

И для заключительного шага остается воспользоваться независимостью значений полиномов R_n ($R_n^{(2)}$ на словах (см. лемму 7.5).

7.3. Обобщения конструкции. Неассоциативный случай

Приведенная конструкция допускает обобщения. Прежде всего отметим, что, как показало обсуждение с В. В. Щиголевым, s можно считать равным единице. Тогда, конечно, плохие ненулевые инвариантные подстановки возникнут, но, как отметил В. В. Щиголев, их действие приведет к появлению ровно одной дополнительной p-ой степени слова. Это будет эквивалентно рассмотрению вместо T-пространств $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ T-пространств $\{v^pE_n\}$ и $\{v^pF_n\}$. Кроме того, T-идеалы можно строить на базе произведений многочленов $Q_s(x_i,y_i)$ для любого $s\geq 1$. Вместо коммутаторов $[[E,T],T]$ и $[T,[T,F]]$ можно использовать и многие другие многочлены, обращающиеся в ноль на грассманиане, — т.е. не размещающиеся на одной клетке.

Данная конструкция позволяет строить бесконечно базируемые многообразия Лиевых и специальных йордановых алгебр (ассоциативные алгебры есть частный случай альтернативных). Поскольку все доказательства проходят почти дословно, мы ограничимся тем, что приведем примеры для йорданова случая:

$$R_n'^{(2)} = \{E,T^2,T^2\}\cdot\prod_{i=1}^{n} R[x_i]^2\cdot\big(R[\{E,T^2,T^2\}]\cdot R[\{T^2,T^2,F\}]\big)^{q-1}\times \\ \times R[\{T^2,T^2,F\}],$$

если $\operatorname{char}(\mathbb{K})=2$;
в общем случае положительной характеристики

$$R_n' = \{E,T^2,T^2\}\cdot\prod_{i=1}^{n} Q(R[x_i],R[y_i])R[x_i]^2\times \\ \times\big(R(\{E,T^2,T^2\})\cdot R[\{T^2,T^2,F\}]\big)^{q-1}R[\{T^2,T^2,F\}],$$

где $Q(x,y)=x^{p-1}y^{p-1}[x,y]$, $R[x]$ — оператор правого умножения на x, $\{x,y,z\}=(xy)z-x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, и z. Многочлены понимаются как многочлены от операторов. Вместо соотношения $t^{4q+1}=0$ на алгебру $\widehat{A}$ накладывается соотношение $t^{8q+1}=0$.

Приложение

A. О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным

Известно, что многие результаты, полученные для ассоциативных *PI*-алгебр, в дальнейшем переносились на другие случаи, в частности, на случаи альтернативных или йордановых колец. Такой перенос позволяет "очистить" рассуждения и лучше понять саму ассоциативную ситуацию.

Близость к ассоциативности означает возможность осуществлять перенос информации, относящейся к операторной алгебре $D(A)$, на саму алгебру A. Значительную часть работы мы можем проводить алгеброй левых умножений $L[A]$.

Мы попытались сформулировать критерии асимптотической близости к ассоциативным кольцам и выделить некоторые основные понятия и конструкции.

В центре внимания находятся вопросы, связанные с локальной конечной базируемостью и локальной представимостью, а также рациональность рядов Гильберта. Ключевое значение имеет *структурируемость* или возможность представления алгебры в виде суммы полупростой части и нильпотентного радикала.

Программа А. Р. Кемера состояла в явном описании экстремального идеала I, "вынуждающего" максимально возможное число радикальных специализаций и специализации, связанные с каждой первичной компонентой. В абстрактной неассоциативной ситуации эта программа нуждается в значительных изменениях. Прежде всего, нет такой хорошей теории носителей — конечномерных алгебр, поэтому работа с носителями затруднена и подход более функционален. Поэтому вместо рассмотрения моделей–носителей мы предъявляем прямое чисто комбинаторное доказательство инвариантности внутренних следов и это, по мнению автора, является основой данного раздела.

В случае, когда основное поле имеет характеристику нуль, основные схемы рассуждений достаточно хорошо переносятся на неассоциативный структурируемый случай. За исключением одного момента — доказательства того, что в *PI*-алгебре выполняются все тождества некоторой конечномерной алгебры. Поэтому в альтернативном и йордановом случаях действуют обходным путем. Локальная представимость в этом случае так и не доказана, и нет достаточно хорошей теории, связанной с "супер-трюком". И в этой связи важное значение приобретает следующий

Вопрос: *Когда в неассоциативной PI-алгебре, в которой выполняется система C_n, выполняются все тождества некоторой конечномерной алгебры? В частности, установить выполнимость всех тождеств конечномерной алгебры для альтернативных и йордановых PI-алгебр.*

При исследовании проблем шпехтового типа мы вынуждены постулировать выполнимость всех тождеств конечномерной алгебры.

Одно важное предупреждение. $\mathrm{T}(f)$ в данной главе означает *T-пространство, порожденное многочленом f* (а не T-идеал).

A.1. Хорошие многообразия и теорема о высоте

Определение A.1. Алгебра A имеет *ограниченную L-длину*, если при некотором k алгебра $L[A]$ ее левых умножений линейно представима множеством элементов вида $L(p_1)\dots L(p_q)$, где $q < k$ и $L(x)$ — оператор левого умножения на x. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *неплохим*, если алгебра левых умножений любой конечно порожденной алгебры из этого многообразия

1) конечно порождена,

2) имеет ограниченную L-длину,

3) кроме того, сама алгебра A *эластична*, т.е. любая 1-порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$ ассоциативна, или $\mathfrak{M}$ есть *многообразие с ассоциативными степенями*.

Эти условия означают близость ассоциативной алгебры $L[A]$ к исходной алгебре A, позволяя переносить утверждения, относящиеся к $L[A]$,= на A.

Определение A.2. Класс колец $\mathfrak{C}$ называется *классом Капланского*, если для любого $R \in \mathfrak{C}$ выполняются следующие условия:

1) Если R первично и $Nil(R) = 0$, то R имеет нетривиальный центр.

2) Фактор $R/Nil(R) \in \mathfrak{C}$ и есть подпрямое произведение простых колец.

3) $R \otimes \mathbb{F}[\lambda] \in \mathfrak{C}$.

4) $Nil(R) = 0 \Rightarrow Jac(R \otimes \mathbb{F}[\lambda]) = 0$.

Условие (4) равносильно следующим:

- Если R – первично и $Nil(R) = 0$, то локализация по центру $Z(R)$ проста.
- Если $Nil(R) = 0$, то $R \otimes \mathbb{F}[\lambda]$ есть подпрямое произведение первичных алгебр. Любой идеал пересекает $Z(R)$ нетривиально.

Замечание. Любое многообразие ненильпотентных алгебр Ли неплохим не является, поскольку l-длина не ограничена. Оно также не принадлежит классу Капланского.

Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *хорошим*, если оно неплохое, и кроме того

4) алгебра левых умножений любой конечно порожденной алгебры из этого многообразия является PI-алгеброй.

Алгебра называется *представимой*, если она вкладывается в конечномерную алгебру над ассоциативно-коммутативным кольцом.

Имеет место следующее

Предложение A.1. *а) В категории n-мерных представлений существует универсальный отталкивающий объект.*

б) Алгебра C представима тогда и только тогда, когда существуют семейство идеалов $\{\mathcal{J}_i\}_{i\in I}$ и число $n \in \mathbb{N}$ такие, что

1) $\bigcap_{i\in I} \mathcal{J}_i = 0$.

2) $\dim C/\mathcal{J}_i \leq n$.

Доказательство. Пункт б) непосредственно следует из п.а), который является известным утверждением. Приведем конструкцию универсального n-мерного над центром представления. Пусть $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ — базисные векторы. Умножение задается структурными коэффициентами C_{ij}^k: $\bar{e}_i\bar{e}_j = C_{ij}^k\bar{e}_k$. Каждой i-й образующей алгебры C поставим в соответствие элемент $\sum_j \lambda_{ij}\bar{e}_i$. Далее, на коэффициенты C_{ij}^k и λ_{ij} наложим соотношения, являющиеся следствиями из соотношений алгебры C. Сами эти коэффициенты считаем из фактора кольца коммутативных многочленов по указанным выше соотношениям. $\square$

Замечание. Отметим, что в классе n-мерных алгебр над полем универсальный отталкивающий объект может не существовать даже в ассоциативном случае. В кольце, порожденном структурными константами, и нильпотенты. (См. [95], [96].)

Обозначения. Mon_r обозначает множество неассоциативных мономов степени r. $M^{(k)}$ — идеал, порожденный k-ми степенями элементов из M. Если J — идеал в C, то I_J есть идеал в $L[C]$, порожденный операторами умножения на элементы из J. Пусть $D \subseteq C$; $I_{D,s}$ обозначает идеал в $L[C]$, порожденный операторами левого умножения на элементы вида $W(t_1,\ldots,t_k)$, где $W \in \mathrm{Mon}_k$, $k \le s$, и $\exists i$: $t_i \in D$. Если I — идеал в $L[C]$, то идеал $\mathcal{J}_I$ есть следующее множество: $\{x \in C\colon \forall d \in \mathrm{id}(x) \quad L(d) \in I\}$. Через $g(r)$ обозначается количество образующих в алгебре левых умножений для $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ — свободной r-порожденной алгебры из $\mathfrak{M}$, $l(r)$ обозначает l-длину $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$. В силу условия конечной порожденности алгебры левых умножений существует функция, обозначаемая $G_\mathfrak{M}(r)$ (или просто $G(r)$) такая, что при $s > G(r)$ в r-порожденной алгебре C из $\mathfrak{M}$ выполняется включение $I_{D,s} \ni I_{\mathrm{id}(D)}$.

Из свойств конечной порожденности алгебр левых умножений следует

Предложение А.2. *Существует функция $h(r)$ такая, что $L[\mathfrak{M}_\mathfrak{r}]$ порождается операторами левого умножения на мономы степени не выше $h(r)$ от образующих алгебры $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$.* □

Предложение А.3. *Если I — идеал в $L[C]$ коразмерности k, то коразмерность идеала $\mathcal{J}_I$ не превосходит $k \cdot N$, где N — число неассоциативных мономов степени не выше $G(r+1)$, r — число образующих в алгебре C.*

Доказательство. Из условия конечной порожденности алгебры левых умножений следует, что $x \in \mathcal{J}_I$, если $L(d) \in I$ для любого неассоциативного монома d степени не выше $G(r+1)$, в который входит x. Поэтому коразмерность $\mathcal{J}_I$ не превосходит произведения коразмерности I на число таких мономов. □

Теорема А.3. *а) Пусть $\mathfrak{M}$ — неплохое многообразие, $C \in \mathfrak{M}$ — к.п. алгебра. Тогда представимость C равносильна представимости $L[C]$.*

б) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее, $C \in \mathfrak{M}$ — полупервичная алгебра, то C представима.

в) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее, $C \in \mathfrak{M}$ — простая алгебра, то C конечномерна.

г) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее и алгебра $C \in \mathfrak{M}$ не имеет идеалов с ненильпотентным фактором, то C проста.

д) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее и любая простая алгебра из $\mathfrak{M}$ не имеет базиса, составленного из нильпотентных элементов, то в $\mathfrak{M}$ положительно решается проблема Куроша. Более того, если C однородна и конечно порождена, то $\exists M \subset C$: $\forall k$ алгебра $C/M^{(k)}$ нильпотентна.

е) Решетка первичных идеалов в многообразии, удовлетворяющем системе тождеств Капелли обладает свойством обрыва как возрастающих, так и убывающих цепей.

Доказательство. Пункт а) следует из предыдущих предложений. Пункты в), г) следуют из б), пункт д) следует из предыдущих пунктов, пункт е) – из теоремы о ранге. Докажем пункт б). В алгебре $L[C]$ найдется последовательность идеалов $\{I_\alpha\}$, пересечение которых лежит в радикале $R(L[C])$, при этом каждый фактор $L[C]/I_\alpha$ вкладывается в алгебру $m \times m$ матриц для некоторого m, общего для всех

I_α. Соответствующая последовательность идеалов $\mathcal{J}_{I_\alpha}$ в C обладает тем свойством, что каждый фактор $C/\mathcal{J}_{I_\alpha}$ вкладывается в алгебру, имеющую размерность над центром не выше некоторого числа m'. Если $x \in \cap\mathcal{J}_{I_\alpha}$, то $L(x) \in R(L[C])$ и $x \in R(C)$. Но, в силу первичности алгебры C, $R(C) = 0$. Осталось воспользоваться предложением A.1. □

Пусть $q(n)$ — степень нильпотентности $C/M^{(n)}$, s — число образующих алгебры C. Через $I(M,n)$ обозначается идеал в алгебре $L[A]$, порожденный элементами вида $L(t_1)\dots L(t_n)$ такими, что $\exists m \in M\colon \forall i \quad t_i = m^{k_i}$ (элемент $m \in M$ общий для всех t_i). Из определения неплохого многообразия вытекает

Предложение A.4. *Оператор $L(x^q)$ при некотором q порождает собственный идеал в алгебре $L[B]$ тогда и только тогда, когда x^t при некотором t порождает собственный идеал в B.* □

Следующее предложение устанавливает связь между нильпотентностью ниль алгебр и условием локальной конечности:

Предложение A.5. *Пусть все ниль-алгебры из хорошего многообразия $\mathfrak{M}$ нильпотентны. Тогда существуют функции $F_{\mathfrak{M}}(n,k)$ и $H_{\mathfrak{M}}(n,k)$, такая, что любая k-порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$ с алгебраическим порядка n элементами, являющимися суммами мономов длины не выше $H_{\mathfrak{M}}(n,k)$ имеет размерность не выше $F_{\mathfrak{M}}(n,k)$.* □

Следующее предложение связано с комбинаторикой в неплохих многообразиях. Оно также позволяет переходить от алгебры к ее алгебре левых умножений и обратно.

Предложение A.6. *а) $L[A]/I_{M^{(k)}}$ нильпотентно степени не выше $q(k)\cdot l(s+1)$.*

б) $\mathrm{Id}(D) \supseteq I_{D,r}$, и при $r \geq h(s+1)$ для всех D имеет место равенство $Id(D) = I_{D,r}$.

в) При достаточно больших k (при $k > g(r+1)$) справедливо включение $I_{M^{(k)},s} \subseteq I(M,n) \quad (k > K(|M|,n,s))$.

г) При $n > k \cdot l(2)$ имеет место обратное включение $I(M,n) \subseteq I_{M^{(k)},s}$.

Доказательство. а) Элемент из $L[A]^t$ лежит в идеале, порожденном операторами левого умножения на элемент из $L[A^{t/l(s)}]$. Если $t/l(s) \geq q(k)$, то $A^{t/l(s)} \supseteq M^{(k)}$.

б) Включение $\mathrm{Id}(D) \supseteq I_{D,r}$ очевидно. Обратное включение при $r \geq h(s+1)$ следует из предложения A.2.

в) Пусть $z \in id(m^k)$. Закодируем элемент m^k новой буквой m'. $L[z]$ лежит в идеале, порожденном буквой m' и мономами степени не выше $G(s+1)$ от образующих A. Пусть z' – такой моном. Теперь подставим m^k вместо m' и получим моном w (от образующих алгебры и буквы m).

Оператор $L(w)$ линейно представим произведениями вида $\prod L(w_i)$, где степень каждого w_i не превосходит $h(s+1)$ (алфавит состоит из s образующих алгебры и элемента m). Назовем *мономом первого рода* моном w_i, содержащий букву, отличную от m, и *мономом второго рода* моном без таких букв. Количество мономов первого рода не превосходит $G(s+1)-1$, и все вместе они содержат не более $(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)$ вхождений буквы m. Таким образом, имеется не менее $k-(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)$ вхождений буквы m в мономы второго рода.

Оператор умножения на моном второго рода линейно представим произведением мономов второго рода степени не выше $h(2)$ (нужна буква m и то, к чему применяются операторы). Следовательно, можно считать, что количество операторов второго рода не меньше, чем

$$\frac{k-(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)}{h(2)}.$$

Поскольку мономов первого рода не более $G(s+1)-1$, то найдется участок, состоящий из не менее чем

$$\frac{k-(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)}{h(2)(G(s+1)-1)}$$

операторов умножений на мономы второго рода, идущих подряд. Таким образом, при

$$k > n \cdot h(2) \cdot (G(s+1)-1) + (h(s+1)-1)(G(s+1)-1)$$

имеет место требуемое включение $I_{M^{(k)},s} \subseteq I(M,n)$.

г) Заметим, что в переработке выражений $x \cdot L[w_1] \cdots L(w_n)$, где w_i – степени m, участвуют два символа — m и x. Поэтому результат п.г) следует из ограниченности L-длины алгебры, порожденной элементами x и m, величиной $l(2)$. □

Пусть число n больше степени тождества, выполняющегося в $L[A]$. Применив предыдущее предложение и лемму о перекачке, получим следующее утверждение.

Лемма А.1. *Пусть C — к.п. градуированная PI-алгебра из хорошего многообразия, $M \subset C$ — конечный набор однородных элементов такой, что $\forall k$ факторалгебра $C/M^{(k)}$ нильпотентна. Тогда существуют число H и конечное множество $D(M)$ такие, что алгебра $L[C]$ линейно представима элементами вида $t_1t_2\cdots t_k$, где $k < H$, и либо $t_i \in D$, либо $\exists m_i \in M$ такое, что $t_i = L(x_{i1})L(x_{i2})\cdots L(x_{ij})$, где (при фиксированном i) все $x_{i\alpha}$ являются степенями одного и того же m_i.* □

Из условия ограниченности L-длины вытекает следующее

Предложение А.7. *Пусть все x_α являются степенями элемента m. Тогда произведение $L(x_1)L(x_2)\cdots L(x_j)$ линейно представимо элементами вида $L(y_1)L(y_2)\cdots L(y_\lambda)$, где $\lambda \le l(1)$, и все y_α являются степенями элемента m.* □

Определение А.4. Алгебра C имеет *существенную высоту* не более H над множеством M, называемым *s-базисом* C, если существует конечное множество $D(M)$ и число N такие, что C линейно представима элементами вида $Q(t_1,\dots,t_l)$, где $Q \in \mathrm{Mon}_l$, $l \le N$, и $\forall i$ либо $t_i \in D$, либо $\exists m_i \in M$, $k_i \in \mathbb{N}$: $t_i = m_i^{k_i}$, причем количество $t_i \notin D$ не превосходит N. Минимальное такое H есть *существенная высота.* Если при некотором H можно положить $D = \varnothing$, то M — базис Ширшова алгебры C. Это равносильно выполнению еще одного условия: M порождает C как алгебру.

Отметим, что в ассоциативном случае можно положить $N = 2H + 1$.

Замечание. Понятия алгебраичности, сильной алгебраичности и разреженного тождества определяются аналогично ассоциативному случаю.

Следующая теорема вытекает из леммы А.1 и предложения А.7.

Теорема А.5 (А. Я. Белов). *Пусть C — конечно порожденная градуированная PI-алгебра из хорошего многообразия, $M \subset C$ — конечный набор однородных элементов. Тогда если $\forall k$ алгебра $C/M^{(k)}$ нильпотентна, то C имеет ограниченную высоту над M. Если же M порождает C как алгебру, то M — базис Ширшова C.* □

Замечание. Предыдущая теорема будет выполняться, даже если отказаться от условия ассоциативности 1-порожденных алгебр. В этом случае в определении существенной высоты условие $\exists m_i \in M : t_i = m_i^{k_i}$ заменяется на условие представимости t_i в виде монома от одного элемента из M.

Следствие А.1. *Пусть C — к.п. градуированная PI-алгебра из хорошего многообразия, $M \subset C$ — конечный набор однородных элементов. Тогда M является s-базисом тогда и только тогда, когда каждый простой фактор алгебры C содержит ненильпотентный образ элемента из M.* □

Воспользовавшись конечномерностью простых алгебр из хороших многообразий, получаем

Следствие А.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — хорошее многообразие такое, что любая простая алгебра из $\mathfrak{M}$ не имеет базиса, составленного из нильпотентных элементов. Пусть C — однородная конечно порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. Тогда C имеет ограниченную высоту над некоторым конечным множеством M.* □

В ряде работ доказывается асимптотическая близость тех или иных алгебр к ассоциативным. При этом, по сути дела, доказывается свойство многообразия “быть хорошим”. В работе [110] показана ограниченность l-длины к.п. йордановых алгебр, в работе [120] — для альтернативных. В работе [120] показано, что алгебра левых умножений альтернативной или специальной йордановой к.п. *PI*-алгебры является *PI*-алгеброй. [1] Там же показано, что для к.п. альтернативной *PI*-алгебры степени m условие теоремы выполняется, если в качестве M взять множество слов степени не выше m^2. В работе [88] показана справедливость условия (4) для к.п. йордановых *PI*-алгебр, в [39] установлена локальная конечность йордановой *PI*-алгебры степени m, у которой все слова степени не выше m^2 алгебраичны. Таким образом, имеет место

Следствие А.3. *а) Пусть A — к.п. градуированная ассоциативная (альтернативная, йорданова) PI-алгебра, $M \subset A$ — конечный набор однородных элементов, порождающий A как алгебру, $M^{(k)}$ — идеал, порожденный k-ми степенями элементов из M. Тогда если $\forall k$ факторалгебра $A/M^{(k)}$ нильпотентна, то A имеет ограниченную высоту над M.*

б) Пусть B — альтернативная или йорданова к.п. PI-алгебра степени m. Тогда B имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше m^2. □

Имеет место следующее

Предложение А.8. *Пусть B — алгебра Кэли—Диксона над произвольным полем. Тогда некоторое слово длины не выше двух от образующих B не нильпотентно.* □

[1] Йорданова алгебра называется *специальной*, если она вкладывается в алгебру A^+ для некоторой ассоциативной алгебры A, и называется *PI-алгеброй*, если в ней есть тождество, которое не выполняется в свободной специальной. Альтернативной *PI-алгеброй* называется альтернативная алгебра с тождеством, не выполняющимся в свободной ассоциативной алгебре.

Из данного предложения, теоремы A.5 и теоремы A.3 вытекает

Теорема A.6. *Пусть B — относительно свободная альтернативная алгебра, M — некоторое множество (неассоциативных) слов от ее образующих. Тогда M является базисом Ширшова (s-базисом) алгебры B тогда и только тогда, когда M является базисом Ширшова (s-базисом) фактора B по ассоциаторному идеалу.* □

Комбинаторно–асимптотические понятия и результаты переносятся на хорошие многообразия. Сложность многообразия $\mathfrak{M}$ определяется как класс простых алгебр, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Разреженное тождество определяется как в разделе 1.5.4.

Теорема A.7. *Пусть $\mathfrak{M}$ — хорошее многообразие. Тогда*

а) Существенная высота представимой алгебры из $\mathfrak{M}$, если она существует, равна размерности Гельфанда—Кириллова самой алгебры, а также равна существенной высоте и размерности Гельфанда—Кириллова ее алгебры левых умножений; а сама указанная размерность конечна.

б) В каждой к.п. алгебре из $\mathfrak{M}$ выполняется тождество сильной алгебраичности, а также естественный аналог тождества Капелли. Поэтому ее алгебра правых умножений тоже PI;

в) Радикал конечно порожденной алгебры из $\mathfrak{M}$ нильпотентен (аналог теоремы Брауна).

г) Если каждая простая алгебра из $\mathfrak{M}$ имеет центр, то справедлив полный аналог теории размысловских многочленов. В частности, локализация первичной алгебры по центру конечномерна над центром, и первичная алгебра вкладывается в алгебру, конечномерную над центром. Размерность Гельфанда—Кириллова есть степень трансцендентности центра.

д) Однородные компоненты тождеств образуют алгебраический идеал, удовлетворяющий тождеству вида $x^{n-1} - x^{n_2} = 0$. Более того, справедливы аналоги теоремы 6.15 и предложения 6.36.

□

И кроме того, как было установлено раньше, для конечно порожденных алгебр из хороших курошевых многообразий выполняется теорема о высоте.

Мы не приводим доказательства теоремы A.7, равно как и определения некоторых участвующих в ней понятий, в силу полной аналогичности ассоциативному случаю. Все рассуждения, связанные с перекачкой, непосредственно переносятся на хорошие многообразия.

Понятие *хорошего многообразия* можно обобщить и для (многоосновных) алгебр произвольной сигнатуры. Оператор D называется *элементарным*, если существует моном M степени $n+1$ и константы $c_1, \ldots, c_n \in B$ такие, что $D(x) \equiv M(x, c_1, \ldots, c_1$. Операторная алгебра в конечно порожденной алгебре имеет *ограниченную длину*, если порождается как векторное пространство произведениями элементарных операторов в ограниченом количестве.

Определение A.8. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *неплохим* если выполняются следующие условия:

1) В конечно порожденной алгебре из $\mathfrak{M}$ операторная алгебра тоже конечно порождена.

2) Операторная алгебра в конечно порожденной алгебре имеет ограниченную длину.

Неплохое многообразие называется *хорошим*, если кроме того

(3) Операторная алгебра в конечно порожденных алгебрах из $\mathfrak{M}$ является *PI*-алгеброй.

Замечание. Для алгебры A (произвольной сигнатуры), в которых выполняется система C_n имеется максимальный локально нильпотентный идеал [44], но про "Бэровскую цепочку" можно показать, что она обрывается на n-ом шаге. Это значит, что в алгебре есть максимальный локально разрешимый идеал $B_0(A)$, в факторе $A/B_0(A)$ есть максимальный локально разрешимый идеал $B_1(A)$, в факторе $A/B_1(A)$ – $B_2(A)$ и т.д. При этом оказывается, что $B_n(A) = 0$ (см. [45]). Для хороших многообразий радикал Бэра совпадает с ниль-радикалом (и с радикалом Джекобсона) и $B_1(A) = 0$.

A.1.1. О проблемах бернсайдовского типа

Интересно получить описание базисов Ширшова в лиевом и йордановом случаях. Эта задача сводится к случаю многообразий, порожденных простыми алгебрами.

Известно, что простая йорданова алгебра — это либо алгебра квадратичной формы, либо неспециальная алгебра HC_3, либо алгебра матриц с операцией $A \circ B = AB + BA$, либо алгебра симметрических матриц относительно операции $\circ$. В первом случае образующие могут быть нильпотентными, но тогда все слова длины два — нет. И базис Ширшова должен состоять из слов длины 1 и 2. В последнем случае (см. следствие 1.26) множество мономов такое, что для каждого правильного слова u длины не выше размера матриц n найдется моном из этого множества, у которого при раскрытии скобок получается старший член u, является базисом Ширшова. Поэтому для улучшения оценок в результате Е. И. Зельманова [39] достаточно провести вычисления в алгебре HC_3. Но в любом случае ограничение на степень слов будет не более чем $\max(m/2, \mathrm{const})$. Отметим, что, в силу возможности разных расстановок скобок, указанное условие на множество йордановых (лиевых) мономов является достаточным, но не необходимым. По всей видимости, его можно уменьшить. В этой связи встает вопрос об описании множеств мономов, являющихся базисами Ширшова. При этом в силу теоремы A.6 достаточно проверять только условие "курошевости". По всей видимости, последнее как-то связано с тензорными рангами выражений. Было бы очень важно прояснить эту связь.

Интересно вычислить решетку идеалов тождеств первичных алгебр для *PI*-колец, близких к ассоциативным, и получить теоремы конечности решетки в максимально общей ситуации.

Известно, что все простые *PI* (λ, δ)-алгебры ассоциативны. Поэтому возникает вопрос:

Будет ли многообразие PI (λ, δ)*-алгебр хорошим?*

Легко видеть, что к.п. энгелева алгебра Ли порождает неплохое многообразие. Можно ли непосредственно доказать, что оно хорошее (т.е. что алгебра умножений *PI*)? Для этого достаточно оценить сверху порядок роста коразмерностей как $o(n)!$. Тогда получится другое доказательство ее нильпотентности (известный результат Е. И. Зельманова).

Возникают также следующие вопросы.

Будет ли алгебра, хорошая слева, хорошей справа? В случае характеристики нуль? Замкнут ли класс неплохих (хороших) многообразий в к.п. случае относительно тензорного произведения? В общем случае? Поскольку тензорное произведение ассоциативных *PI*-алгебр снова *PI*, то алгебра левых умножений в тензорном произведении хороших многообразий снова PI. Кроме того, ясно, что тензорное произведение алгебр A и B с ограниченной L-длиной снова имеет ограниченную L-длину; а если алгебры $L[A]$ и $L[B]$ конечно порождены, то $L(A \otimes B)$ также конечно порождено. Однако *верно ли это для свободного объекта из многообразия* $\mathrm{Var}(A \otimes B)$*?*

При решении проблемы Куроша мы потребовали, чтобы выполнялось условие отсутствия нильбазиса у простой алгебры. Оно выполняется в ассоциативном, йордановом и альтернативном случаях. С другой стороны, конечная алгебра Ли порождает хорошее многообразие с нильбазисом. Интересно получить какие-нибудь общие критерии отсутствия нильбазиса. Нельзя ли *в условии следствия A.2 заменить это условие на более слабое условие отсутствия простых ниль-алгебр?*

A.2. Проблемы Шпехтового типа

При работе с широким классом алгебр конкретные вычисления затруднены, так что отрабатываются абстрактные средства и проясняется ситуация.

Определение A.9. Определим *сложность многообразия* как множество первичных алгебр, которые ему принадлежат. Каждая первичная алгебра рассматривается с точностью до многообразия, которое она порождает. Упорядочим сложности алгебр. $A_i \prec A_j$ означает, что $\mathrm{Var}(A_i) \subset \mathrm{Var}(A_j)$.

Сложно́стным типом многообразия $\mathfrak{M}$ называется семейство наборов первичных алгебр, подчиненных $\mathfrak{M}$. Набор первичных алгебр $\{A_i\}$ называется *подчиненным многообразию* $\mathfrak{M}$, если в $\mathfrak{M}$ есть алгебра, содержащая $\oplus_i A_i$, имеющая ненулевой неассоциативный моном, содержащий вхождение элемента из A_i для каждого i.

В отличие от ассоциативного случая, для произвольного $\mathfrak{M}$ множество сложностей первичных алгебр, вообще говоря, является только частично упорядоченным множеством. Однако, в силу теории Мартиндейла, при наличии разреженного тождество это множество удовлетворяет условиям обрыва как возрастающих, так и убывающих цепей.

Как и в ассоциативном случае, мы имеем дело с наборами алгебр $\{A_i\}$ (среди которых могут быть одинаковые), связанных посредством радикала. Два *сложностны́х типа* T_1 и T_2 для таких *наборов* будем сравнивать так. Если некоторая первичная алгебра A_i содержится в T_1 и T_2, то уменьшим кратность ее вхождения на единицу и получим наборы T_1' и T_2', которые будут находиться между собой в том же отношении, что и T_1 с T_2. Таким образом, достаточно уметь сравнивать наборы без общих элементов. В этом случае $T_i \prec T_j$, если и только если каждый элемент T_i меньше (в смысле отношения $\prec$) некоторого элемента T_j. Получившееся отношение на наборах является отношением частичного строгого порядка. При этом замена любого A_i на любой набор строго меньших алгебр ведет к понижению сложностно́го типа.

В данном параграфе основное поле имеет характеристику нуль. Любая конечномерная алгебра, если не оговорено противное, считается несводимой, т.е. она не содержит двух ненулевых идеалов с нулевым пересечением. Все многообразия считаются структурируемыми.

Основная цель раздела — доказательство следующей теоремы:

Теорема A.10. *а) Пусть* $\mathfrak{M}$ *есть удобное многообразие алгебр (см. определение A.11) над полем нулевой характеристики, все подмногообразия которого* *представимы. Тогда ряд Гильберта H_Q произвольного T-пространства Q в относительно свободной алгебре из $\mathfrak{M}$ рационален.*

б) Удобное многообразие алгебр над полем нулевой характеристики локально Шпехтово, и относительно свободные алгебры из этого многообразия представимы.

A.2.1. Структурируемые алгебры. Первая лемма Кемера

Начнем с изучения первичных компонент. Для дальнейшего нам потребуется ввести еще два существенных ограничения на многообразие.

Определение A.11. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *структурируемым*, если каждая конечномерная алгебра из $\mathfrak{M}$ распадается на сумму простых компонент и нильпотентного радикала.

Структурируемое многообразие называется *удобным*, если оно порождено некоторой конечномерной алгеброй.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть первичная PI-алгебра произвольной сигнатуры Ω. Тогда ее централизатор Мартиндейла есть конечномерная алгебра над некоторым полем, и ее размерность равна максимальной степени многочлена Капелли, не обращающегося в нуль на этой алгебре.

Пусть R – первичная алгебра сигнатуры Ω. Напомним конструкцию *центроида Мартиндейла.* Он определяется как инъективный предел классов эквивалентности морфизмов

$$\varinjlim \{\mathrm{Hom}_R(I,R) | 0 \neq I \lhd R\}.$$

Эквивалентность пар (ψ_1, I_1) и (ψ_2, I_2) означает совпадение ограничений ψ_1 и ψ_2 на пересечении $I_1 \cap I_2$. Сумма морфизмов ψ_i и ψ_j определяется естественным образом, а произведение — как композицию $\psi_i \circ \psi_j$. Возникает структура коммутативного кольца $C(R)$.

Центральным замыканием $Q(R)$ называется множество формальных сумм $\sum \psi_i r_i$ $(r_i \in R)$ с естественным отношением эквивалентности и естественным образом определенными операциями.

Теорема A.12 ([108]). *$C(R)$ есть коммутативное кольцо с единицей, $Q(R) = C(R)R$, произвольный ненулевой D-подмодуль в $Q(R)$ пересекается с R по ненулевому идеалу и для любого D-гомоморфизма χ ненулевого D-подмодуля J $Q(R)$ в $Q(R)$ существует элемент $c \in C(R)$, для которого $cj = \chi(j)$ при любом $j \in J$. Если J — большой D-подмодуль в $Q(R)$, то элемент c определяется однозначно гомоморфизмом χ.* □

Подмодуль M модуля P называется *большим в* P, если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.

Другое определение центроида Мартиндейла можно дать через инъективную оболочку (см. [108]). *Центральное замыкание* первичной алгебры A строится как инъективная оболочка алгебры A, рассматриваемой как $D(A)$-модуль, при этом кольцо $D(A)$-эндоморфизмов этого модуля оказывается полем, куда вкладываются $D(A)$-эндоморфизмы алгебры A. Это поле называется *центроидом Мартиндейла.*

Пусть многочлен $F(\overrightarrow{y}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен относительно переменных x_i. Сделаем подстановки $e_i \to x_i$, $\overrightarrow{y}' \to \overrightarrow{y}$ где $e_i, y'_k \in A$. Далее, зафиксируем вхождения всех e_j при $j \neq i$. Иными словами, рассмотрим его как функцию φ_i. Таким образом, $F(\overrightarrow{y}, e_1, \ldots, e_n) = \varphi_i(e_i)$ и $\varphi_i(e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Мы получили неассоциативный аналог матричных единиц. Вместо базисных единиц E_{ij} имеются элементы e_i. Вместо позиции $*$ между обкладками $E_{ij} * E_{kl}$, куда можно было подставлять матричную единицу E_{jk} (подстановка других единиц приводит к нулевому результату), имеются позиции в полиномах φ_i.

Невыполнимость системы C_n означает "существенную линейную независимость". Пусть R – первичная алгебра, в которой выполняется система C_{n+1}, но не система C_n. Тогда R вкладывается в центральную простую алгебру R' размерности n над полем, порождающую то же многообразие (см., например, [159] или [108]). Дадим точную формулировку соответствующего утверждения:

Теорема А.13 (О ранге [108]). *Пусть V – подпространство в первичной алгебре A сигнатуры Ω. Если $\operatorname{rank}(A,V) < \infty$, то в центральном замыкании $Q(A)$*

$$\dim_{c(A)} C(A)V = \operatorname{rank}(A,V) - 1.$$

$\square$

Рангом $\operatorname{rank}(A,V)$ линейного подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее натуральное k, для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k. На V *выполняются все тождества Капелли порядка* k, если любой полином $F(x_1,\dots,x_k,\overrightarrow{y})$, полилинейный и кососимметричный относительно набора переменных $\{x_1,\dots,x_k\}$, обращается в ноль на алгебре A при подстановке вместо переменных x_i элементов пространства V. кососимметричных относительно набора из k переменных.

Приведем **доказательство** теоремы о ранге, ибо близкими рассуждениями мы будем еще пользоваться. Пусть $a = C_n(v_1,\dots,v_n,\overrightarrow{z}) \neq 0$, $v \in A$, $G(x,y,\overrightarrow{t})$ билинейно по x,y. Положим $a_i(u) = C_n(v_1,\dots,v_{i-1},u,v_{i+1},\dots,v_n,\overrightarrow{z})$. Воспользовавшись леммой 2.3 о поглощении переменной (равенство (2)), имеем:

$$g(a_i(u),a,\overrightarrow{t}) = \sum_{j=1}^{n} g(a_i(v_j),a_j(u),\overrightarrow{t}).$$

Если $u = v_k$ и при этом $k \neq i$, то $a_i(u) = 0$, в силу кососимметричности многочлена Капелли. Если же $k = i$, то $a_i(u) = a_i(v_i) = a$. Поэтому из предыдущего равенства вытекает тождество

$$g(a_i(u),a,\overrightarrow{t}) \equiv g(a,a_i(u),\overrightarrow{t}). \tag{1}$$

В силу первичности алгебры A для любых $g,a \in A\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$, существует $\alpha \in \operatorname{Id}(a)^n$ и ненулевой полилинейный многочлен G такой, что $G(g,\alpha,\overrightarrow{t}) \neq 0$. Из этого и из равенства (1), позволяющего перекидывать вхождения, легко выводится, что оператор $c_i(a,u)$ замены a на $a_i(u)$ корректно определен и не зависит от записи. Более того, данный оператор принадлежит полю $D(A)$-эндоморфизмов центрального расширения алгебры A.

Для доказательства теоремы о ранге достаточно установить равенство

$$b = u - \sum_{i=1}^{n} c_i(a,u)v_i = 0.$$

Но для любого многочлена H, билинейного по первым двум аргументам, имеет место равенство

$$H(b,a,\overrightarrow{t}\,) = H(u,a) - \sum_{i=1}^{n} H(v_i, c_i(a,u)a, \overrightarrow{t}\,) =$$
$$= H(u,a) - \sum_{i=1}^{n} H(v_i, a_i(u), \overrightarrow{t}\,) = 0.$$

Последнее равенство выполняется в силу тождества (2) из леммы 2.3 (в качестве переменной z берется u). Теорема о ранге доказана. $\square$

Из свойств центроида Мартиндейла и центрального замыкания получается

Предложение А.9. *Пусть $A \in \mathfrak{M}$ – первичная алгебра, в которой выполняется система тождеств Капелли $(n+1)$-го порядка, но не выполняется система тождеств Капелли n-го порядка. Тогда A вкладывается в алгебру B, конечномерную над ассоциативно–коммутативным кольцом $\mathbb{K}$ таким образом, что для любого $a \in D(A)$ существует такое $\lambda(a) \in \mathbb{K}$, что для любого многочлена $F(\overrightarrow{y}, x_1, \dots, x_n)$, полилинейного и кососимметричного относительно $x_1, \dots, x_n$, выполняются равенства*

$$\sum_{i=1}^{n} F(\overrightarrow{y}, x_1, \dots, x_n)|_{a(x_i)\to x_i} = \lambda(a) \cdot F(\overrightarrow{y}, x_1, \dots, x_n).$$

При этом кольцо $\mathbb{K}$ порождено такими $\lambda(a)$ и является нетеровым.

Доказательство. В силу свойств центрального замыкания Мартиндейла достаточно убедиться, что если многочлен $F_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$ полилинеен и кососимметричен относительно наборов переменных $x_1, \dots, x_n$ и $z_1, \dots, z_n$, то операция

$$F_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) \to \sum_{i=1}^{n} F_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{z}, x_1, \dots, x_n)|_{a(x_i)\to x_i}$$

задает морфизм $D(A)$-модулей ($D(A)$ – операторная алгебра), порожденных значениями F на T-идеале A, порожденном системой C_n. Последнее вытекает из леммы 2.6 раздела 2.1. $\square$

Следствие А.4. *Решетка T-первичных идеалов в конечно порожденной алгебре произвольной сигнатуры, в которой выполняется система тождеств Капелли, удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей и условию обрыва убывающих цепей.* $\square$

В ряде случаев достаточно ограничиться операторами умножения на элементы из A.

Пусть $\{e_i\}$ – базис R' как векторного пространства. Тогда в силу теоремы о ранге, существует многочлен $F(x_1, \dots, x_n, \overrightarrow{y})$, полилинейный и кососимметричный по набору переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ такой, что $\Psi = F(e_1, \dots, e_n, \overrightarrow{t}\,) \neq 0$. В силу простоты R' любой элемент $x \in R'$ принадлежит k-й степени идеала J, порожденного элементом Ψ, и есть линейная комбинация мономов, имеющих k вхождений элемента Ψ.

Пусть теперь R есть представимая алгебра из структурируемого хорошего многообразия. Ее можно вложить в конечномерную алгебру R' такую, что $\mathrm{Var}(R') = \mathrm{Var}(R)$. Кроме того, R' разлагается в сумму своих первичных компонент и радикала. При этом каждая первичная компонента R'_i имеет размерность

n_i, равную максимальной степени тождества Капелли, не выполняющейся в алгебре R'_i. Тогда каждому R'_i отвечает элемент Ψ_i.

Рассмотрим произвольный полином G и его специализации в алгебре R' (вместо переменных подставляются элементы из первичных компонент и радикала). Пусть некоторая специализация H многочлена G не обращается в ноль и переменной y_i отвечает элемент x_i из R'_i. Такая специализация для любого $k \in \mathbb{N}$ линейно представима специализациями многочленов из $\mathrm{T}(G)$, получающихся подстановками вида $y_i \to M_j$, где M_j – некоторый неассоциативный моном, и элемент Ψ_i подставлен вместо каких-то переменных, относительно которых M_j полилинеен, количество таких переменных k. Поскольку специализация H ненулевая, все такие специализации нового многочлена из $\mathrm{T}(G)$ в ноль обратиться не могут.

Далее, если для любого i специализация H содержит элемент из R'_i, то базисные элементы $\{e_{ij}\}_{j=1}^{n_i}{}_{i=1}^{s}$, входящие в Ψ_i, можно объединить в один набор и проальтернировать. Поскольку подстановка e_{ij_1} вместо e_{ij_2} при $j_1 \neq j_2$ приводит к нулевому результату, то значение результата альтернирования совпадает с исходной специализацией и не равно нулю (рассуждения те же, что и при доказательстве леммы 3.6 в разделе 3.3.1).

Поскольку в M_j подставлено k образований Ψ_i, то можно осуществлять альтернирование относительно k наборов. (В дальнейшем мы будем брать число k достаточно большим.)

Суммируя вышеизложенное, получаем следующее утверждение:

Лемма А.2 (Об измельчении). *Пусть многочлен g принимает ненулевое значение $\bar{g}$ для некоторой специализации, в которой участвуют все первичные компоненты R'_i. Тогда для любого сколь угодно большого $q \in \mathbb{N}$ существует некоторое следствие из $\mathrm{T}(g)$, получающееся из g путем подстановки неассоциативных мономов вместо переменных и альтернирования внутри q групп из $b(A)$ переменных, принимающее то же значение.* □

Таким образом, для удобных структурируемых алгебр произвольной сигнатуры справедлива

Лемма А.3 (Первая лемма Кемера). *Пусть $\mathfrak{M}$ — структурируемое удобное многообразие произвольной сигнатуры, $A \in \mathfrak{M}$, $A^{(i)}$ есть фактор A по идеалу, порожденного i-ой первичной компонентой.*

Тогда либо $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(\bigcup A^{(i)})$ либо $b(A) = \sum \dim(A^{(i)})$.

Если Γ есть T-идеал в A, то $\Gamma \bigcap\limits_i A^{(i)} = 0$, либо $b(A, \Gamma) = \sum \dim(A^{(i)})$. □

Замечания. 1. Первую лемму Кемера для структурируемых многообразий можно сформулировать на языке отделителей (см. раздел 3.3). Тем не менее, провести корректный предельный переход или ограничить отделители не удается.

2. Похожие рассуждения используются в доказательстве теоремы о ранге.

3. Неассоциативный налог второй леммы Кемера не удается доказать методами раздела 3.3. Дело в том, что в неассоциативном случае взаимодействие между первичными компонентами может быть иначе устроено. В частности, любая степень композиции элементов операторной алгебры $D(A^{(i)})$ при разных i может ненулевом образом действовать на радикале (например, в случае йордановых алгебр). Поэтому рассуждения из доказательства леммы 3.11 (раздел 3.3.1), связанные с отправкой смешанного элемента внутрь монома, все остальные элементы, входящие в который имеют только полупростые специализации и обращении в ноль получившегося результата не проходят. Это не удивительно, поскольку связь между первичными компонентами через радикал в неассоциативном случае может быть устроена иначе, а рассуждения для первого основного случая из доказательства леммы 3.11, как мы видели из раздела 4.6.3 основаны на специфике связи первичных компонент в ассоциативном случае. Что касается второго основного случая (отсутствия смешанных элементов), то соответствующие рассуждения легко переносятся в неассоциативную ситуацию.

Поэтому вместо явной "ловли" радикала, как у А. Р. Кемера, с использованием специфики ассоциативного носителя, мы пойдем более абстрактным и более "функциональным" путем и докажем, что внутренние следы в структурируемом случае определены инвариантно и не зависят от записи. В этом и заключается основное содержание данной главы.

A.2.2. Внутренние следы на экстремальном идеале

Целью данного раздела является построение внутренних следов на экстремальном идеале и доказательство их инвариантности. В нем содержится основные технические результаты данной главы, в частности, неассоциативный аналог второй леммы Кемера.

Пусть A – конечномерная алгебра от образующих $a_1,\dots,a_s$ из структурируемого многообразия $\mathfrak{M}$, $\bar{A}=A/J(A)$. Положим

$$A(q)=\bar{A}*_{\mathfrak{M}}\mathbb{F}<\theta_1,\dots,\theta_s>/\Theta^q,$$

где $\Theta=\mathrm{Id}(\theta_1,\dots,\theta_s)$. Это "свободное расширение полупростой части $\bar{A}$ радикалом степени нильпотентности q". Конструкция аналогична ассоциативному случаю (см. определение 3.3 из раздела 3.3).

Пусть D – диаграмма Кемера,

$$\Lambda=\bigcup_{i=1}^{k+2}\Lambda_0^i\cup\bigcup_{j=1}^{d}\Lambda_j$$

есть набор переменных, соответствующий диаграмме D, причем

$$k\geq\max(k(A),c(A)),\ d=d(A),\ |\Lambda_0^i|=b(A),$$

$|\Lambda^j|=b(A)+1$. Каждому многочлену f, полилинейного по переменным из Λ, соответствует многочлен $S_\Lambda(f)$ из $S(D)$, получающийся путем альтернирования по наборам Λ_0^i и Λ^j. При этом для некоторого f многочлен $f'=S_\Lambda(f)$ не обращается в ноль.

T-идеал, составленный из многочленов вида $S_\Lambda(f)$ мы называем *экстремальным*.

Пусть $g\in S(D)$. Тогда его можно представить в виде $\sum S_\Lambda\check{g}_i|_{v_i\to x_i}$ (v_i – некоторые мономы, подставляемые вместо переменных). Мы будем работать с *записями* g или выражениями вида

$$g=\sum S_{\Lambda^{(i)}}g_i,$$

где альтернированию подвергаются слова, соответствующие переменным из набора Λ.

Для каждой такой записи и элемента $a\in A$ определим выражение

$$\delta(a)(g)=\sum_i\sum_k S_{\Lambda^{(i)}}g_i|_{av_{ik}^1\to v_{ik}^1},$$

где $\{v_{ik}^1\}$ есть набор слов, отвечающих переменным из набора Λ_0^1 для i-го слагаемого.

В силу результатов раздела 2.1 операторы $\delta(u_i)$ коммутируют. Кроме того, результат применения оператора $\delta(a)$ не зависит от выбора малого поднабора Λ_0^i набора Λ, с помощью которого (путем подстановок) определяется оператор $\delta(a)$ (см. лемму 2.6 и предложение 2.3).

Наша цель заключается в том, чтобы установить инвариантность данных операторов, т.е. их независимость от записей элемента $g \in S(D)$ из экстремального идеала, к которому применяются операторы вида $\delta(a)$. Для этого достаточно проверить, что запись нулевого элемента переходит в запись нулевого элемента.

В самом деле. Пусть $\sum S_{\Lambda^{(i)}} g_i = g = h = \sum S_{\Lambda^{(j)}} h_j$. Тогда

$$\sum S_{\Lambda^{(i)}} g_i - \sum S_{\Lambda^{(j)}} h_j$$

есть запись нулевого элемента $g - h$, и если $\delta(a)(g) \neq \delta(a)(h)$, то $\delta(a)(g-h) \neq 0$. Таким образом, запись нулевого элемента перешла в запись ненулевого элемента.

Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений и конструкций.

Запись $S_{\Lambda^{(i)}} g_i$ будем называть *буквенной*, если вместо переменных из набора Λ подставлены также некоторые переменные (слова длины 1), т.е. все альтернирования производятся по буквам.

Из полупростоты групповой алгебры симметрической группы вытекает следующее утверждение:

Предложение A.10 (О буквенных альтернаторах). *а) Пусть f есть сумма полилинейных многочленов вида $S_\Lambda(f_i)$, причем все альтернации — буквенные. Тогда f можно представить в виде*

$$f = (\sum_j \alpha_j S_{\Lambda_j})(h),$$

где $\alpha_j \in \mathbb{K}$ и S_{Λ_j} есть оператор альтернирования по наборам переменных, которые соответствуют столбцам диаграммы D.

б) Кроме того, $S_{\Lambda_j}(f) \neq 0$ для некоторого j.

Доказательство. Достаточно заметить, что элементы групповой алгебры

$$\frac{1}{(b+1)!^d b!^{k+2}} S_{\Lambda_j}$$

являются идемпотентами и любая их линейная комбинация не обращается в нуль при умножении на один из них, если его выбрать подходящим образом. $\square$

Замечания. 1. Данное утверждение представляет собой факт из тензорной алгебры и справедливо для любой алгебры произвольной сигнатуры над полем нулевой характеристики.

2. Полупростота групповой алгебры приводит к тому, что если процедуру альтернирования провести один раз, то ее можно проводить любое число раз. Рассуждения из раздела 6.2.2, 6.2.3, 6.3, связанные с наличием проективно минимальных модулей, а также лемму о буквенном утончении A.4 можно рассматривать как далеко идущее обобщение этих соображений. Возможно, на этом пути можно устанавливать PI_n свойства для хороших структурируемых шпехтовых многообразий, т.е. выводить из шпехтовости локальную представимость путем построения T-идеалов, для которых после любой T-пространственной операции возможен возврат к T-идеалам, представленным в удобной форме.

Из данного предложения и результатов раздела 2.2 получается

Следствие А.5. *Пространство многочленов, являющихся буквенными альтернаторами, соответствующими диаграмме Кемера D, представимо.* □

Ключевое значение имеет

Лемма А.4 (О буквенном утончении). *Пусть A есть конечномерная алгебра из структурируемого хорошего многообразия, $g = \sum_i S_{\Lambda^{(i)}} g_i$. Тогда любое значение g в алгебре A линейно представимо значениями буквенных альтернаторов из $\mathrm{T}(g)$, отвечающих диаграмме Кемера D.*

Замечание. Хочется подчеркнуть, что данное утверждение является T-пространственным. Кроме того, подчеркнем, что подставляются элементы из структурируемой представимой алгебры — т.е. отдельно полупростые и отдельно радикальные компоненты.

Доказательство. В силу предложения А.10 достаточно проверить утверждение леммы для одного слагаемого $S_{\Lambda^{(i)}} g_i$. Можно считать, что $g = S_{\Lambda^{(i)}} g_i$, причем g полилинеен.

Будем рассуждать, как в разделе А.2.1 при доказательстве леммы А.3. Рассмотрим произвольную специализацию переменных, для которой $g \neq 0$. Свяжем с этой специализацией систему подстановок $M_i \to x_i$ следующим образом:

- Специализации переменной x_i в радикальный элемент отвечает тождественная подстановка $x_i \to x_i$.

- Специализации переменной x_i в первичную компоненту $A^{(i)}$ алгебры A отвечает подстановка вида $M_i \to x_i$, где M_i — некоторый неассоциативный моном, содержащий достаточное число вхождений монома Ψ_i, полилинейного и кососимметричного относительно некоторого набора из n_i переменных, $n_i = \mathrm{rank}(A^{(i)})$.

- Все переменные из мономов Ψ_i различны.

Назовем переменную *пассивной*, если она входит в (неассоциативное) слово v_i, которое подставляется вместо переменной, входящий в большой набор, соответствующий Λ. Иначе она *активна*. С помощью подстановок в малые наборы активных переменных создаются умножения на следы и структура нетерового модуля.

Поскольку специализация зафиксирована, то каждой исходной переменной отвечает либо радикальная специализация, либо первичная компонента A. тем самым каждому Ψ_i отвечает некоторая компонента $A^{(i)}$.

Заметим, что для любой специализации с ненулевым результатом внутри одного из малых наборов (см. определения 2) будут присутствовать элементы из каждой первичной компоненты R'_i. Поэтому можно указать достаточное число наборов активных переменных Δ_j таких, что

- Каждый такой набор Δ_j есть объединение некоторых наборов из n_i переменных, относительно каждого некоторый Ψ_{ij} кососимметричен.

- Для каждого Δ_i множество первичных компонент алгебры A, отвечающих наборам, входящим в Ψ_{ij} совпадает с множеством всех первичных компонент алгебры A, взятых по одному разу.

- Таким образом, каждый набор Δ_j состоит из $b(A)$ переменных.

Далее относительно наборов Δ_j осуществляется альтернирование. Итак, достаточный запас буквенных альтернаторов, отвечающих малым наборам и состоящих из активных переменных, создан.

При этом получившийся многочлен принимает значение, равное изначально фиксированной специализации для исходного многочлена g, в силу конструкции мономов Ψ_i и результатов раздела A.2.1. (При попадании переменной, специализированной в $A^{(i)}$, в гнездо, отвечающее $A^{(k)}$, где $k \neq i$, результат будет нулевым, поэтому альтернирование не меняет значение многочлена при данной специализации.)

Процедура достижения "буквенности" больших наборов аналогична той процедуре утончения, которая использовалась при доказательстве леммы 2.9 и предложения 2.12 из раздела 2.3. Пусть многочлен f полилинеен и кососимметричен относительно набора переменных $\{y_i\}_{i=1}^{b(A)}$ и переменной x, а многочлен f' равен

$$f' = f - \sum_{i=1}^{b(A)} f|_{x \to y_i; y_i \to x}. \tag{2}$$

Тогда f' полилинеен и кососимметричен относительно набора $\{x\} \cup \{y_i\}_{i=1}^{b(A)}$.

Рассмотрим систему малых наборов Δ_j (см. определения на стр. 117 в разделе 2).

Каждый такой набор Δ_j является буквенными альтернатором, и переменные из него не входят внутрь больших наборов.

Для каждой радикальной специализации, входящей в большой набор, пополним один из малых наборов соответствующей переменной и воспользуемся соотношением (2). В результате исходное значение многочлена G окажется представлено в виде суммы значения буквенного альтернатора (который и требуется построить) и значения многочлена из $\mathrm{T}(G)$, для которого в больших наборах участвует меньшее число радикальных специализаций.

Остается заметить, что если внутри слов, отвечающих большому набору, нет радикальных специализаций, то значение всего многочлена обращается в нуль, ибо размерность полупростой части равна $b(A)$ и меньше числа элементов в большом наборе, по которым производится альтернирование. $\square$

Замечание. Можно не пользоваться предложением A.10, а для каждого слагаемого $S_{\Lambda^{(i)}} g_i$ построить достаточный запас наборов активных переменных Δ_j, не пересекающихся для разных i, и обрабатывать каждое слагаемое по отдельности. (Пассивность или активность переменной может зависеть от выбора слагаемого g_i, в этом суть проблемы.) То обстоятельство, что при обработке предыдущих слагаемых последующие будут размножаться, не страшно, ибо "размноженные" слагаемые с точки зрения дальнейшего процесса будут эквивалентны. Дело в том, что наборы Δ_j не пересекаются, а изменяется в процессе альтернирования расположение переменных внутри этих наборов (эти переменные в последующих шагах процесса "выбивания" использоваться не будут), а также расположение переменных, имеющих радикальную специализацию, количество которых ограничено величиной $c(A)-1$. Число переменных, необходимых для построения нужного числа наборов активных переменных, оценивается величиной $2r(b(A)+1)(d(A)+2)$.

Пусть теперь

$$h = \sum_{i=1}^{r} S_{\Lambda^{(i)}}(h_i) = 0$$

и

$$h_a = \delta(a)(h) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k} S_{\Lambda^{(i)}} h_i|_{av_{ik} \to v_{ik}} = \sum_{i=1}^{r} \delta(a) S_{\Lambda^{(i)}}(h_i) \neq 0.$$

Таким образом, h_a есть препятствие к корректности определения внутреннего следа (для элемента a). Идея доказательства состоит в построении ненулевого элемента $h'_a \in \mathrm{T}(h_a)$ (причем в a ничего не подставлено), имеющего достаточное число (2) активных малых буквенных альтернаторов и $d(A)$ больших. Тогда оператор $\delta(a)$ можно "перебросить" на эти малые альтернаторы без изменения результата, после чего взятие этого оператора выражается с помощью подстановок, действующих через эти переменные, т.е. через T-пространственную операцию. В результате $h'_a \in \mathrm{T}(h')$ и $h' \in \mathrm{T}(h) = \mathrm{T}(0) = 0$. Получили противоречие с тем, что $h'_a \neq 0$.

Применим теперь лемму о буквенном утончении к каждому члену $\delta(a)S_{\Lambda^{(i)}}(g_i)$, входящему в сумму. В результате имеем ненулевой полином $\check{h} \in \mathrm{T}(h)$, представимый в виде

$$\check{h}_a = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j} \delta(a) S_{\Lambda^{(ij)}}(h_{ij}),$$

где все альтернаторы буквенные, для каждого h_{ij} количество букв, участвующих в больших альтернаторах, равно $(b+1)d$.

При этом соответствующий многочлен h обращается в ноль:

$$h = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j} S_{\Lambda^{(ij)}}(h_{ij}) = 0.$$

Количество членов h_{ij} оценивается из анализа доказательства леммы о буквенном утончении и не превосходит c^d. Назовем переменную *пассивной*, если она участвует в одном из больших альтернаторов, и *активной* в противном случае. Количество пассивных переменных легко оценивается числом $r(b+1)dc^d$. Таким образом, можно обеспечить наличие любого числа малых альтернаторов, состоящих из активных переменных.

Кроме того, (ради "перебросок") мы дополнительно обеспечим следующее:

Для любого члена $S_\Lambda(h_{ij})$ имеется малый набор альтернируемых активных переменных (букв) $\{z_k\}$ и малый набор альтернируемых мономов $\{v_k\}$, такие, что ни одно z_α не входит ни в одно v_β.

В многочленах h_{ij} можно зафиксировать один и тот же набор активных переменных, образующих малый альтернатор, и с их помощью определить оператор $\delta_1(a)$. Поскольку

$$h = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j} S_{\Lambda^{(ij)}}(h_{ij}) = 0,$$

а действие оператора $\delta_1(a)$ является T-пространственным и согласовано для всех членов, $\delta_1(a)(h) = 0$. С другой стороны, в силу соображений, связанных с "переброской" (см. результаты раздела 2.1 — предложение 2.3, см. также следствие 2.4), разность $\delta_1(a)(h_{ij}) - \delta(a)(h_{ij})$ лежит в идеале $H(D_1)$, где диаграмма D_1 получается из D путем наращивания малого столбца до большого. Поэтому $\delta_1(a)(h_{ij}) - \delta(a)(h_{ij}) = 0$, и тогда $h_a = \delta_1(h) = 0$.

Мы доказали обращение в ноль препятствия к корректности определения внутреннего следа. Итак, доказана основная

Лемма А.5 (О внутренних следах). *Операторы внутреннего следа для удобных многообразий определены корректно, вне зависимости от записи элемента.* □

С помощью процедуры “перекидывания” похожим образом доказывается следующее

Предложение A.11. *Пусть радикальная компонента $Rad(a)$ элемента a нулевая. Тогда $\delta(a)$ есть умножение на след соответствующего оператора.*

Доказательство. Утверждение очевидно, если все специализации малого набора, участвующего в определении $\delta(a)$, полупростые. С другой стороны, в силу предложения 2.3, подстановки, образующие оператор $\delta(a)$, можно “перекидывать” с набора на набор. С помощью леммы об измельчении можно добиться, чтобы число малых наборов было больше $c(A)$, и для любой специализации переменных все специализации переменных, входящих в один из таких малых наборов, будут полупростыми. □

Из предложения A.11 непосредственно (без использования леммы о буквенном утончении) получается такое

Следствие A.6. *Если $R(a) = 0$, то $h_a = 0$.* □

Из основной леммы A.5 вытекает

Следствие A.7. *Если $\mathfrak{M}$ есть удобное многообразие, все подмногообразия которого представимы, то ряд Гильберта произвольной относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ рационален.*

Доказательство. T-идеал $J = \mathrm{T}(S_\Lambda)$ есть нетеров модуль над внутренними следами. Его ряд Гильберта H_J рационален и $H_A = H_J + H_{A/J}$. Алгебра A/J относительно свободна и, кроме того, либо $b(A/J) < b(A)$, либо $b(A/J) = b(A)$ и $d(A/J) < d(A)$. Таким образом, дело завершает спуск. □

Итак, для доказательства рациональности рядов Гильберта достаточно доказывать локальную представимость.

Определение A.14. Идеал $J \subseteq S_\Lambda$ называется *замкнутым*, если он замкнут относительно операторов внутренних следов $\delta(a)$. Пусть J – произвольный идеал. Тогда J^0 есть максимальный замкнутый идеал, содержащийся в J.

Замечание. Понятие замкнутости естественно определяется и в случае, когда $b(A, J) = b(A)$, для идеалов, лежащих в пространствах H_r. Соответствующие конструкции изложены в разделе A.2.3.

Если J – T-идеал, то J^0 – тоже T-идеал. Кроме того, $d(A/J^0, J) < d(A) = d(A, J)$.

Пусть $I = \bigcap_{i=1}^{s} R_i \cap R(A)^{c(A)-1}$.

Из леммы о буквенных альтернаторах вытекает следующее

Предложение A.12. *Если $J \subset I$ и J – ненулевой T-идеал, то $J^0 \neq 0$.* □

Из леммы об измельчении и предложения о буквенных альтернаторах вытекает

Предложение A.13. *а) Пусть $g \in \mathrm{T}(S_\Lambda(f))$ и $g|_A \neq 0$. Тогда существует $h \in \mathrm{T}(g)$ такой, что $S_\Lambda(h) \neq 0$.*

б) Пусть Q есть T-подпространство $\bigcup_f S_\Lambda(f)$. Тогда существует замкнутый T-идеал $\Gamma \subseteq \bigcup_f S_\Lambda(f)$ такой, что $Q^0 = Q \cap \Gamma$ есть замкнутое T-пространство.

□

Подчеркиваем, что в данной главе $\mathrm{T}(f)$ есть T-пространство, порожденное f. Поэтому наши рассуждения проходят для T-пространств и можно усилить результат следствия A.7.

Теорема A.15. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть удобное многообразие, все подмногообразия которого представимы. Тогда ряд Гильберта H_Q произвольного T-пространства Q в относительно свободной алгебре из $\mathfrak{M}$ рационален.*

Доказательство. Пусть Q есть T-пространство в относительно свободной конечно порожденной алгебре $B \in \mathfrak{M}$. Надо показать рациональность H_Q. Можно считать, что $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(B)$. Пусть A – конечномерная алгебра такая, что $\mathrm{Var}(A) = \mathfrak{M}$. В силу индукционных соображений можно считать, что в алгебре A нет двух идеалов с нулевым пересечением.

Пусть Λ – набор переменных, отвечающий диаграмме Кемера D, $I = \bigcup\limits_g \mathrm{T}(S_\Lambda(g))$, $Q' = Q \cap I$. Достаточно доказать рациональность $H_{Q'}$, поэтому можно считать, что $Q = Q'$. Остается воспользоваться п.б) предыдущего предложения, ибо ряд Гильберта H_{Q^0} очевидным образом рационален. Значит, можно перейти к фактору B/Γ и завершить рассуждения индукционным спуском. □

Следствие A.8. *Ряд Гильберта любого T-пространства в конечно порожденной относительно свободной ассоциативной PI-алебре рационален.* □

Следствие A.9 (Из доказательства). *Пусть $\mathfrak{M}$ есть удобное многообразие, все подмногообразия которого представимы. Тогда любая возрастающая цепочка T-пространств в конечно порожденной относительно свободной алгебре из $\mathfrak{M}$ стабилизируется.* □

Итак, осталось рассмотреть проблемы, связанные с конечной базируемостью и локальной представимостью для T-идеалов.

Расширим алгебру A операцией взятия следа $\delta_e(a)$, а также следами операторов из соответствующей операторной алгебры $D(A)$. Возьмем фактор по идеалу, порожденному элементами $(\delta(a) - \delta_e(a))(f)$, где $f \in S_\Lambda(g)$. Получится алгебра $\widehat{A}$. Имеет место следующее

Предложение A.14. *Любая алгебра из многообразия с расширенной (операторами типа δ) сигнатурой, порожденного алгеброй $\widehat{A}$, является алгеброй нетерового типа. Само это многообразие является структурируемым. Естественный морфизм $A \to \widehat{A}$ является вложением.* □

Замечание. Само расширение операторной алгебры $D(A)$ требует, вообще говоря, бесконечного числа операторов. Однако, с помощью техники раздела 1.6.2 легко убедиться, что в силу теоремы Ширшова о высоте и леммы о дереве 2.8 достаточно ограничиться только конечным числом операторов.

Пусть I есть пересечение идеалов, порожденных R_i а также $(c(A)-1)$-ой степенью радикала. Напоминаем, что алгебра A несводима и в ней есть ненулевой многочлен f, принимающий значения только из I. Многочлен f можно считать полилинейным, и любая специализация переменных, результат которой отличен от нуля, требует $c(A)-1$ радикальной специализации, а также наличия специализации, связанной с каждой полупростой компонентой.

Пусть ненулевой T-идеал $\Gamma \subset I$. Тогда существует ненулевой T-идеал $\Gamma^0 \subset \Gamma$, порожденный многочленами вида $\{g = S_\Lambda(f) | f \in \Gamma\}$ и замкнутый относительно операторов $\delta(a)$.

Пусть $a_i \in R_i'$. Применим к элементу a_i процедуру измельчения, т.е. представим его в виде линейной комбинации мономов $M_{ij}(\Psi_i, \overrightarrow{y})$, имеющих $c(A)$ вхождений элемента Ψ_i. Возьмем произвольный набор специализаций для g и применим к g произведение операторов $\delta(a_i)$. Далее, с помощью Ψ_i и элементов из радикальных специализаций создадим $c(A)$ наборов из $b(A)+1$ элемента в каждом. При альтернировании относительно этих наборов возникают дополнительные члены, где радикальная специализация уходит внутрь a_i, и члены, где содержимое Ψ_i попадает внутрь Ψ_j $(i \neq j)$. Эти добавочные члены обращаются в ноль.

Дело в том, что отправка переменной, принявшей значение из $A^{(i)}$, внутрь монома от элементов из $A^{(k)}$ при $k \neq i$ равна нулю. Кроме того, отправка радикального элемента из $f \in \Gamma^0$ под оператор δ линейно представима элементами вида $\sum f_i \delta_i$, причем в многочленах $f_i \in \Gamma^0$ участвует строго меньше, чем $c(A)-1$ радикальных специализаций, и потому каждый такой многочлен обращается в нуль. (Рассуждение аналогично доказательству второй леммы Кемера для ассоциативного случая, когда смешанные элементы отсутствуют, см. раздел 3.3.1.)

Поскольку T-идеал Γ^0 замкнут относительно умножения на операторы δ, то соответствующие идеалы в исходной и в расширенной алгебре совпадают. Мы доказали неассоциативный аналог второй леммы Кемера:

Предложение A.15 (Вторая неассоциативная лемма Кемера). *Если имеется ненулевой T-идеал $\Gamma_0 \subset I$, то $d(A) = c(A) - 1$.* □

Следствие A.10. *Идеал $H(D)$, отвечающий диаграмме Кемера D алгебры A, представим.* □

Следствие A.11. *Если имеется ненулевой T-идеал $\Gamma_0 \subset I$, то существует точное представление алгебры, для которого внутренние следы совпадают с внешними.* □

A.2.3. Пространства H_r. Относительная форма второй леммы Кемера

Пусть Γ – T-идеал в алгебре A. Определим для него *относительные* экстремальные диаграммы, диаграммы Кемера, параметры b, d и k и все остальные конструкции из начала раздела 2.

Если $\Gamma \subseteq \bigcap R_i'$, то в силу неассоциативного аналога первой леммы Кемера A.3 $b(A,\Gamma) = b$. Нас интересуют такие T-идеалы прежде всего.

Пусть S_r есть оператор альтернирования, связанный с диаграммой D_r, содержащей r больших столбцов и хотя бы $k+2$ малых. Причем $r \leq d(A)$.

Определение A.16. Пространство H_r есть максимальный T-идеал Γ такой, что $d(\Gamma, A) = r$ и $b(\Gamma, A) = b(A)$. Положим $H_r' = H_r \cap S_{D_r}(A)$.

$S_{D_r}(A)$ есть T-идеал, порожденный многочленами вида $S_{\Lambda_r}(f)$, где Λ_r есть набор переменных, отвечающих диаграмме D_r.

Иными словами, альтернация по набору, отвечающему диаграмме с бо́льшим, чем у D_r, числом больших столбцов и хотя бы $k+2$ малыми, примененная к элементу пространства H_r, равна нулю.

Легко видеть, что данное определение корректно, поскольку объединение любого семейства идеалов с таким свойством его сохраняет.

Из предложения A.13 вытекает важное

Следствие A.12. *Если $r_1 < r_2$, то $H_{r_1} \cap S_{D_{r_2}}(A) = 0$.* □

Пространства H'_r обладают теми же свойствами, что и экстремальный идеал I, и справедливы аналоги результатов предыдущего раздела, которые мы здесь приведем.

Напоминаем, что пространство $S \subset B$ *представимо в алгебре* B, если имеется морфизм B в алгебру нетерового типа, ограничение которого на S является вложением.

Предложение А.16. *а) Пространство H'_r представимо в алгебре $A/S_{D_{r+1}}(A)$.*

б) В пространстве H'_r нет препятствия к представимости алгебры $A/S_{D_{r+1}}(A)$.

Доказательство. П.б) есть переформулировка п.а). Докажем п.а). Пусть $\widehat{A}'$ есть фактор $\widehat{A}$ по идеалу, порожденному $(\delta(a) - \delta_e(a))(f)$, где $f \in H'_r$ для некоторого r. Тогда, в силу сказанного выше, естественный морфизм $A \to \widehat{A}'$ также является вложением и выполняется аналог предложения А.14.

Отметим, что пространство H'_r и его образ в алгебре $A/S_{D_{r+1}}(A)$ изоморфны. То же верно и в расширенных алгебрах. $\square$

Для относительного случая точно так же доказываются основные леммы. Суммируем их в виде предложения:

Предложение А.17. *а) Пространства H'_r замкнуты относительно умножения на внутренние следы.*

б) Если $b(A, \Gamma) = b$, то $\Gamma \subseteq \bigoplus H'_r$.

в) Пусть T-идеал $\Gamma \subseteq H'_r$ и $b(A, \Gamma) = b$. Тогда $d(A, \Gamma) = r$.

г) Для любого ненулевого T-идеала $\Gamma \subseteq H'_r$ существует замкнутый T-идеал $0 \neq \Gamma' \subseteq \Gamma$. Существует также многочлен $h \in \Gamma'$ такой, что $S_{D_r}(h) \neq 0$.

д) Пусть $g \in H'_r$. Тогда любое значение g в алгебре A линейно представимо значениями буквенных альтернаторов, отвечающих диаграмме D_r, примененных к элементам из $\mathrm{T}(g) \in H'_r$. $\square$

Рассмотрим фактор–алгебру алгебры $\widehat{A}$ по идеалу, порожденному элементами вида $(\delta(a) - \delta_e(a))(f)$, где $f \in H'_r$ $(r = 1, \ldots, d(A))$. Получится алгебра $\widehat{A}'$. Алгебра A по-прежнему вкладывается в алгебру нетерового типа $\widehat{A}'$, порождающую (как алгебра с расширенной сигнатурой) структурируемое многообразие.

Сформулируем теперь относительный аналог второй леммы Кемера:

Лемма А.6 (Вторая лемма Кемера для H'_r). *Пусть проекция T-идеала Γ в алгебру $A(q-1)$ равна нулю, а проекция в $A(q)$ нулю не равна. Кроме того, $b(A, \Gamma) = b$. Тогда $\Gamma \subseteq H'_r$ и $d(A, \Gamma) = q$.* $\square$

Поскольку доказательство аналогично абсолютному случаю, мы его не приводим.

А.2.4. Тестовые алгебры

В данном разделе мы приводим конечномерную алгебру, задающую многообразие, к некоторому каноническому виду. Эта процедура родственна построению алгебры $\check{A}$ в доказательстве локальной представимости колец, а также в доказательстве алгоритмической разрешимости проблемы вывода тождеств.

Напомним основные конструкции. Рассмотрим алгебру

$$K_0(A, D) = A *_{\mathfrak{M}} < \{\xi_{ij}\} > /Q,$$

где идеал Q порожден неассоциативными мономами M_α, содержащими два вхождения любой из переменных ξ_{ij}, а также элементами вида $M(\xi_{ij_1}, \xi_{ij_2}) - M(\xi_{ij_2}, \xi_{ij_1})$. Алгебра $K(A, D)$ есть расширение A в многообразии $\mathfrak{M}$ системами сильно антикоммутирующих переменных, заданное диаграммой D. Диаграмма D, если не оговорено обратное, считается экстремальной.

Пусть J_{b+1} есть идеал в $K_0(A, D)$, порожденный значениями полиномов вида $f(u_1, \dots, u_{b+1}, \overrightarrow{y})$, где u_k – мономы от образующих A, f полилинейно и кососимметрично относительно u_i. Положим $K_1(A, D) = K_0(A, D)/J_{b+1}$; $K(A, D)$ есть пространство (идеал) в $K_1(A, D)$, порожденное мономами, полилинейными по всем переменным вида ξ_{ij}.

Следующее предложение, уточняющее результаты предложения 2.7 из раздела 2.2 для структурируемого случая, вытекает из результатов рассмотрений, сделанных выше:

Предложение А.18. *а) Если $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(A)$ – курошево многообразие, то пространство $K(A, D)$ представимо в любой фактор–алгебре $A' = A/J$. Если при этом рассмотреть естественный морфизм алгебры A' "в расширенную" алгебру $\widehat{A}/\widehat{J}$, то его ограничение на пространстве $K(A, D)$ будет вложением.*

б) $S_\Lambda(F(A)) \simeq S_\Lambda(F(K_1(A, D)))$, где $F(B)$ есть пространство значений многочленов на B. □

Пространство $K(A, D)$ естественным образом изоморфно пространству буквенных альтернаторов, отвечающих диаграмме D.

Предложение А.19. *Каждому замкнутому T-идеалу M отвечает замкнутый T-идеал $K(M)$ в $K_1(A, D)$, являющийся подпространством в $K(A, D)$. Данное соответствие сохраняет отношения включения и строгого включения. (Как вербальных идеалов в соответствующих алгебрах, вообще говоря, не как T-идеалов.)*

Данное предложение означает, что с точки зрения тестирования идеалов, обладающих некоторыми экстремальными свойствами, алгебра A эквивалентна алгебре $K(A, D)$. Отметим, что результаты раздела 2.2 (см. предложения 2.6, 2.7) означают, что пространство многочленов в относительно свободной алгебре с экстремальными альтернаторами представимо. С другой стороны, лемма А.4 о буквенном утончении дает возможность все время возвращаться к таким пространствам. И мы воспользуемся этим обстоятельством.

Доказательство. Первая часть предложения очевидна, так что достаточно показать сохранение строгого включения. Доказываемое утверждение означает, что если множества значений многочленов из двух T-идеалов M_1 и M_2 в алгебре $K_1(A, D)$ совпадают, то это же верно и для их значений в алгебре A.

Если язык носителей перевести на чисто комбинаторный язык, то совпадение множеств значений в алгебре $K_1(A, D)$ означает совпадение множеств значений буквенных альтернаторов, отвечающих набору Λ. А это уже доказано (см. предложения А.10 и А.13). □

Замечание. Только что доказанное предложение означает изоморфизм решеток вербальных идеалов в алгебре A и ее "расширении" $K_1(A, D)$. А именно. Если $\Gamma_i \subseteq \bigcap_j \mathrm{T}(A(j)) \cap J_{d(A)}$ то $(b(\Gamma_i, A), d(\Gamma_i, A)) = (b(A), d(A))$ и совпадение множеств значений в пространствах $K(A, D)$ (т.е. экстремальных буквенных альтернаторов элементов из Γ_i) влечет совпадение множеств значений соответствующих полиномов в A. Но это еще не означает автоматически совпадение в кольцах многочленов с коэффициентами в этих алгебрах, в частности, в относительно свободных алгебрах — алгебрах общих элементов.

Из данного предложения, а также леммы А.4 о буквенном утончении получается

Следствие А.13. *Пусть M есть замкнутый T-идеал в $S_\Lambda(A)$. Тогда в идеале $S_\Lambda(A)$ нет препятствия к представимости M.* □

А также следующее

Предложение А.20. *Пусть $b(A,\Gamma)=b(a)$, $d(A,\Gamma)<d(A)$. Тогда $\Gamma\cap S_\Lambda=0$ в A (и в расширенной алгебре $\widehat{A}$).*

Доказательство. Равенство нулю пересечения в алгебре $K(A,D)$ очевидно. Отсюда следует равенство нулю пересечения в $\widehat{A}$ максимального замкнутого T-идеала $\Gamma^0\subseteq\Gamma$ и идеала S_Λ. Перейдем к фактору по Γ^0, и дело завершает спуск. □

Из результатов данного раздела, а также второй леммы Кемера для относительного случая, вытекает следующая

Лемма А.7 (О каноническом носителе). [1] *Пусть $\mathfrak{M}=\mathrm{Var}(A)$ – удобное многообразие, $\bar{A}=A/J(A)$, $\{A_i\}$ – набор факторов $\bar{A}$ относительно всевозможных наборов первичных компонент. Тогда $\mathfrak{M}$ порождается конечным набором алгебр вида $K(A_i,D_i)$, где D_i есть прямоугольная диаграмма, составленная из $d(D_i)$ столбцов длины $\dim(A_i)+1$ каждый.*

Если $b(A,\Gamma)=b_0$, $d(A,\Gamma)=d_0$, то Γ не обращается в ноль в одной из алгебр $K(A_i,D_i)$, где $\dim(A_i)=b_0$ и $d(D_i)=d_0$. □

Можно построить и несколько другой удобный носитель, для которого внешние следы совпадают с внутренними. А именно. Пусть A – относительно свободная представимая алгебра из удобного многообразия $\mathfrak{M}$. Строим расширенную алгебру $A'=A[\mathrm{Tr}]/\,\mathrm{id}(S_\Lambda(A)\cdot(\delta(a)-\mathrm{Tr}(a)))$, $c(A)=d(\Lambda)$. Тогда $\mathrm{Var}(A')=\mathrm{Var}(A)$ и, кроме того, фактор–алгебра $A^1=A'/S_\Lambda(A)$ имеет ме́ньшие сложностны́е характеристики: $(b(A^1),d(A^1))<(b(A),d(A))$, а в силу представимости A^1 относительно свободная алгебра $A^{(1)}$ из $\mathrm{Var}(A^1)$ также представима. По алгебре $A^{(1)}$ строятся алгебры A^2 и $A^{(2)}$ и т.д. Искомая алгебра A_* есть $\oplus A^k$. Имеет место следующее

Предложение А.21. *В алгебре A_* внешние следы совпадают с внутренними.* □

А.2.5. Завершение доказательств

Пусть A – свободная представимая алгебра в хорошем структурируемом многообразии $\mathfrak{M}$. Представимость алгебры $A/S_\Lambda(A)$ легко выводится из второй леммы Кемера. В самом деле. Алгебру A можно интерпретировать как алгебру общих элементов в конечномерной алгебре, степень нильпотентности радикала которой равна $d(A)+1$. В этом случае в пространстве $S_\Lambda(A)$ внешние следы совпадают с внутренними и само оно будет замкнуто относительно внутренних следов. Поэтому идеал $S_\Lambda(A)$ представим.

Покажем, как из этого утверждения вывести основную теорему. Прежде всего, представимость замкнутых идеалов очевидна, поскольку расширение операторами вида $\delta(a)$ дает алгебру нетерова типа.

Пусть Γ – T-идеал. Если $\Gamma\cap S_\Lambda(A)=0$, то можно перейти к фактору $A/S_\Lambda(A)$ и дело завершает спуск по сложностным параметрам.

[1] Ср. с основной теоремой 6.5 раздела 6.3.4.

Если $J = \Gamma \cap S_\Lambda(A) \neq 0$, то существует ненулевой замкнутый T-идеал $J^0 \subseteq J$. Он представим и, в предположении условия конечной базируемости для T-идеалов, дело опять завершает спуск. Тем самым мы научились выводить локальную представимость из локальной шпехтовости.

Чтобы избавиться от условия локальной шпехтовости (и, наоборот, доказать это свойство), будем рассуждать, как в разделе 5.8. Возьмем в качестве J^0 *максимальный замкнутый T-идеал, содержащийся в J.*

Рассмотрим фактор–алгебру $A' = A/J^0$ и определим в ней пространства $S'_\Lambda(A')$, а также J. Ясно (соображения спуска), что достаточно рассмотреть случай, когда $b(A') = b(A)$ и $d(A') = d(A)$.

Набор Λ' соответствует диаграмме Кемера D' алгебры A', которая может отличаться от D увеличением числа малых столбцов (чтобы при применении оператора S'_Λ произошло попадание в нужное пространство).

Замечание. Если взять фактор A' по элементам δ-кручения (т.е. имеющим нетривиальный аннулятор в кольце, порожденном элементами вида $\delta(a)$), то диаграмма Кемера для получившейся алгебры A'' будет содержаться в D. С другой стороны, для идеала кручения $\mathrm{Tor}_\delta(A')$ выполняется неравенство $b(A', \mathrm{Tor}_\delta(A')) < b(A)$. Поэтому можно не увеличивать диаграмму Кемера, а работать в алгебре A''. Похожие рассуждения используются при доказательстве локальной шпехтовости для произвольного поля (см. раздел 5.7.1, лемма 5.20).

Нам достаточно показать, что в алгебре A' пересечение проекции $\pi(\Gamma)$ с $S'_\Lambda(A')$ нулевое. Но иначе это пересечение содержит ненулевой замкнутый T-идеал, прообраз которого есть замкнутый T-идеал, строго содержащий прообраз 0, т.е. J^0. Это невозможно, поскольку противоречит максимальности J^0. Итак,

$$(b(A/J^0, J), d(A/J^0, J)) < (b(A, J), d(A, J)) = (b(A), d(A)).$$

Доказательство основной теоремы (в предположении представимости алгебры $A/S_\Lambda(A)$) завершено.

С другой стороны, представимость $A/S_\Lambda(A)$ вытекает из замкнутости идеала $S_\Lambda(A)$.

Замечание. Рассуждения, связанные с измельчением и замкнутостью T-идеалов, а также с пространствами $K_{\mathfrak{M}}(A, D)$, проходят на полилинейном уровне в положительной характеристике.

Выше, путем рассмотрения замкнутых идеалов и перехода к факторам по ним, мы сводили ситуацию к случаю, когда $b(A, \Gamma) < b(A)$ либо $b(A, \Gamma) = b(A)$ и $d(A, \Gamma) < d(A)$. Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

Итак, мы имеем: $S_\Lambda(\Gamma) = 0$. И, кроме того, в силу индукционных соображений алгебру $A' = A/(S_\Lambda(A) + \Gamma)$ (здесь $b(A') \leq b(A)$ и если $b(A') = b(A)$, то $d(A') < d(A)$) можно считать представимой. Таким образом, у нас есть морфизм h_1 фактора A/Γ в представимую алгебру, ядро которого содержится в $S_\Lambda(A/\Gamma)$.

Таким образом, для доказательства представимости A/Γ достаточно построить другой морфизм этой алгебры h_2 в некоторую представимую алгебру, ядро которого не пересекается с $S_\Lambda(A/\Gamma)$. Тогда сумма морфизмов $h_1 \oplus h_2$ будет искомым вложением.

Пусть H есть сумма T-идеалов Γ_i таких, что $b(A, \Gamma_i) < b(A)$ либо $b(A, \Gamma_i) = b(A)$ и $d(A, \Gamma_i) < d(A)$. Поскольку $H \cap S_\Lambda(A) = 0$ и $H \supseteq \Gamma$ (ибо $S_\Lambda(\Gamma) = 0$), достаточно показать представимость A/H. Таким образом, можно считать, что $H = \Gamma$.

Далее, идеалы H_r замкнуты и, следовательно, представимы. Перейдем к фактор–алгебре A_1 по сумме идеалов

$$\bigoplus_{r<d(A)} H_r.$$

Для этой новой алгебры $b(A_1, H) < b(A_1) = b(A)$.

Но тогда для алгебры A_1, в силу неассоциативного аналога первой леммы Кемера, множество значений многочленов из H не пересекается с идеалом, порожденном всеми первичными компонентами R_i алгебры A_1. Рассмотрим морфизмы $\varphi_i : A_1 \to A_1/R_i$ и морфизм $\varphi = \bigoplus_i \varphi_i$. Ядро этого морфизма не пересекается со значениями полиномов из H, и ему соответствует вложение соответствующих пространств некоммутативных многочленов.

Пусть Q есть пространство в алгебре A_1, порожденное такими однородными элементами z_i, что идеал, порожденный каждым таким z_i, не пересекается с R -компонентой A_1, порожденной мономами, в которые входят элементы из каждого R_i. Тогда Q и R – идеалы в A_1, и A_1 вкладывается в сумму $A_1/Q \oplus A_1/R$. Следовательно, в силу неассоциативного аналога первой леммы Кемера, множество значений H лежит в Q, а множество значений $S_\Lambda(A_1)$ – в R. Теперь ясно, что если расширить кольцо многочленов с коэффициентами в A_1 следами операторов, то расширенные пространства H и $S_\Lambda(\widehat{A_1})$ не пересекутся.

Доказательство локальной конечной базируемости, локальной представимости для удобных структурируемых многообразий над полем нулевой характеристики, а вместе с тем — и рациональности рядов Гильберта для них завершено. $\square$

Замечание. Можно брать расширение алгебр системами абсолютно антикоммутирующих переменных (любой моном, содержащий две одинаковые новые переменные, нулевой), рассматривать каноническое алгебраическое представление подходящего порядка получившихся алгебр и с ними работать.

A.3. θ-техника для структурируемых колец

На случай структурируемых хороших многообразий также переносятся все основные конструкции и вся основная техника, относящиеся к θ-многочленам. Поскольку в общем случае у нас нет явных конструкций, связанных с теорией центральных полиномов, мы применим более абстрактный алгебро–геометрический подход (который и послужил для автора отправной точкой при доказательстве локальной конечной базируемости). Целью данного раздела является перенос техники, изложенной в разделе 5.1, на неассоциативный случай и развитие алгебро-геометрической техники работы с тождествами.

A.3.1. Первичные алгебры из хороших многообразий

Проективная нетеровость обеспечивается относительно операторов подстановок, действующих через резервные переменные ("хранители замен") t_α. Структура подстановок, по сравнению с ассоциативным случаем, будет несколько более сложной. Вместо подстановок вида $tZ_\mu \to t$, где Z_μ – центральный полином, мы будем работать с заменой $t \to \sum R_\alpha(t, \overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z})$, где

$$R_\alpha(t, \overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z}) = H_\alpha(t, U_\alpha(\overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z}_1), \overrightarrow{z}_2), \ \ \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{z}_1, \overrightarrow{z}_2),$$

причем многочлен R_α полилинеен и кососимметричен по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и линеен по переменной t. Пусть Q есть пространство, порожденное многочленами вида R_α. При этом переменная t фиксирована, а остальные переменные принимают значение в первичной алгебре A. В силу леммы 2.4 для любого $h \in D(A)$ имеет место равенство

$$\delta(h) R_\alpha(t, \overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z}) = \sum_{i=1}^{n} R_\alpha(t, \overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z})|_{x_i \to h(x_i)},$$

и в силу следствий 2.4, 2.5 операторы δ, введенные таким образом, корректно определены и коммутируют. Эти операторы в дальнейшем будут называться *внутренними следами* или просто *следами* элементов операторной алгебры. Кольцо таких следов мы обозначаем через $\mathbb{K}$.

Поэтому пространство, порожденное многочленами R_α, замкнуто относительно умножения на следы элементов операторной алгебры $D(A)$, над которыми образует нетеров модуль. Ему соответствует пучок на $\operatorname{Spec}(\mathbb{K})$, который мы обозначаем либо через N, либо $A(t)$.

Для доказательства конечной базируемости нам надо для любого T-пространства S установить существование числа $k(S) \in \mathbb{N}$ и конечного подмножества $\{s_1, \ldots, s_q\} \subset S$, из которого бы следовали все элементы пересечения $S \cap (C_n)^k$. Далее, действуя как в разделе 5.1, можно отсюда вывести конечную базируемость для T-пространств.

Иногда удобно пользоваться следующей конструкцией, позволяющей работать с многочленами, полилинейными и кососимметричными относительно нескольких наборов переменных. Их конструкция соответствует конструкциям слов W_i из раздела 5.1.5 или слов $W^\mu(\overrightarrow{x})$ из раздела 3.3.1. А именно,

$$W(\overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z}_i, \overrightarrow{b}) = M(\{R_\alpha(t_\alpha, \overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z}_\alpha)\}, \overrightarrow{\tau}),$$

здесь M – некоторый неассоциативный моном.

Определим замкнутые подсхемы $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_{ij}$ спектра кольца R следующим образом. Пусть n_i – ранг i-й первичной компоненты алгебры, K_i есть кольцо, порожденное формами Φ_{n_i} (т.е. детерминантами максимального для данной компоненты ранга) в соответствующей первичной компоненте, $R_i = \sqrt{K_i}$. Тогда подсхема $\mathcal{H}_i \subset \operatorname{Spec}(R)$ отвечает системе уравнений, задающихся элементами из R_i. Кольца K_i нетеровы, и они порождают нетерово кольцо $\mathbb{K}$.

Подсхемы $\mathcal{H}_{ij}$ задаются разностями внутренних следов, отвечающих специализациям в i-ю и j-ю первичные компоненты:

$$\operatorname{Tr}(\overrightarrow{a}_i) - \operatorname{Tr}(\overrightarrow{a}_j).$$

(Индексы i, j означают специализацию в соответствующую компоненту.) При этом обязательно нужно, чтобы соответствующие компоненты порождали изоморфные алгебры.

Замкнутая подсхема $\mathcal{H}$ в $\operatorname{Spec}(R)$ отвечает склейке “клеток–компонент” и уменьшению их размера, т.е. редукции. Она определяется так:

$$\mathcal{H} = \bigcup_i \mathcal{H}_i \cup \bigcup_{ij} \mathcal{H}_{ij}.$$

J есть идеал многочленов, обращающихся в ноль на $\mathcal{H}$. Схема $\mathcal{H}$, в отличие от схем $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_{ij}$, инвариантна относительно перестановок специализаций компонент, сохраняющих их типы.

Перейдем к работе с пучками над $\operatorname{Spec}(\mathbb{K})$. Алгебре $\hat{A}$ отвечает пучок $\widetilde{N}$ первичных алгебр. Рассмотрим когерентный пучок $\mathbb{K}$-модулей $\widetilde{Q}$, соответствующий пространству Q. Прежде всего, изучим его поведение в геометрических точках или точках максимального спектра.

Предложение А.22. *Пусть x – геометрическая точка* $\operatorname{Spec}(\mathbb{K})$. *Тогда для x справедливо следующее:*

1) *Если алгебра A_x порождает то же многообразие, что и A, то $N_x/Q_x = 0$ (A_x может разлагаться в прямую сумму).*

2) *Если алгебра A_x порождает меньшее многообразие, то $Q_x = 0$.*

3) *$N_x/Q_x \equiv \bigoplus M_\alpha$ (α отвечает факторам A, имеющим меньший сложностной тип).*

Существует такое k, что $(C_n)^k \cap N_x/Q_x = 0$ в любой геометрической точке x.

Доказательство. Алгебра A_x проста и конечномерна, а для таких алгебр утверждение данного предложения очевидно. □

Замечание. В этом месте используются свойства конечномерных алгебр из $\mathfrak{M}$. Для алгебр Ли, в силу плохой структурируемости, ситуация иная. Например, в разрешимом случае подстановка слова приводит к попаданию в собственное подпространство. И, в частности, для этого случая (в нулевой характеристике) вопросы конечной базируемости еще далеко не прояснены. Тем не менее, какая-то структурируемость есть и осуществить перенос техники А. Р. Кемера для многообразий алгебр Ли, в которых выполняются все тождества некоторой конечномерной алгебры, удалось. См. [47], [147], [49].

Теперь от геометрических точек надо перейти к сечениям. Нам потребуется следующий результат из коммутативной алгебры:

Предложение А.23. *Пусть $\widetilde{M}$ обращается в ноль вне замкнутой подсхемы $H' \triangleleft H$. Тогда существует такая константа $k \in \mathbb{N}$, что для любого f, лежащего в идеале $I_{H'}$, отвечающего подсхеме H', выполняется равенство $H'^k M = 0$.*

Доказательство. Данное предложение непосредственно следует из нильпотентности радикала $\mathbb{K}/\operatorname{Ann}(M)$. □

Пусть $\widehat{A}_t = \{\sum \lambda_i R_i(t, \widehat{A})\}$ есть подпространство полиномов из $\widehat{A}_{\mathrm{Var}(A)} < t >$, линейных по t. Соответственно,

$$A_t = \{\sum \lambda_i R_i(t, A)\} \subset \widehat{A}_t, \quad N = A_t.$$

Сформулируем теперь следствие из предыдущего предложения, нужное нам для дальнейшего:

Следствие А.14. *Существует конечный набор $\{q_i\}$ элементов из $\mathbb{K}$ и натуральное l такие, что*

1) $\operatorname{id}(\{q_i\}) \supset (C_n)^l$.

2) *При всех i выполняются включения $q_i \widehat{A}_t \subseteq Q$, $q_i \widehat{A} \subset A$.*

□

Данное следствие служит заменой теории размысловских полиномов. Пусть R есть идеал в кольце $\mathbb{K}$, порожденный элементами q_i. Воспользуемся свойствами проективной нетеровости. Суммируем полученные результаты.

Предложение A.24 (О покрытии спектра). *Существует такой идеал I в кольце $\mathbb{K}$, что*

1) *A/I^kA при всех k имеет строго меньший сложностно́й тип, чем алгебра A (свойство редукции).*

2) *$\widehat{A}_tI \subset A_t$ (свойство поглощения).*

3) *$Q_t \supset A_tI$ (возможность имитировать умножения на элементы кольца $\mathbb{K}$ с помощью подстановок).*

4) *Любое пространство $S \subseteq \widehat{A}_{\mathrm{Var}(A)} < t >$, состоящее из полиномов, линейных по переменной t и устойчивое относительно подстановок $tz \to t$ или подстановок $t \to tz$, является проективно нетеровым над I.*

$\square$

A.3.2. Доказательство конечной базируемости для обобщенных θ-многочленов

Пусть $\mathfrak{M}$ есть структурируемое многообразие алгебр с системой разреженных тождеств, для которых соответствующая операторная алгебра является PI. Рассмотрим семейство первичных алгебр A_i из $\mathfrak{M}$ и их прямую сумму $\bigoplus A_i$. Определим систему θ-квазимногочленов. Положим

$$\widehat{A}(n) = \bigoplus A_i *_{\mathfrak{M}} \mathbb{F}<\Theta> /\Theta^{n+1},$$

где Θ^{n+1} есть идеал, порожденный мономами, имеющими $n+1$ вхождение переменных из множества Θ.

Аналогично предложению A.6 доказывается следующее утверждение:

Предложение A.25. *Пусть $\mathfrak{M}$ – хорошее многообразие. Тогда для каждого n определена константа $c(n)$ такая, что $\widehat{A}(n)$ линейно представима мономами степени не выше $c(n)$ от элементов из A_i и $\theta_i \in \Theta$.* $\square$

Пусть A – относительно свободная s-порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. Поставим соответствие каждой образующей $a_i \in A$ элемент $\sum_j a_{ij} + \theta_i$ и определим морфизм (не обязательно вложение)

$$A \to \bigoplus A_i *_{\mathrm{Var}(A)} \mathbb{F} <\Theta> /\Theta^{n+1}.$$

Действие подстановок и связанная с этим T-структура определяются так же, как и для ассоциативного случая. Получится алгебра *обобщенных квазимногочленов*.

Как и в ассоциативном случае, мы имеем дело с наборами алгебр $\{A_i\}$ (среди которых могут быть одинаковые), связанных посредством радикала, т.е. со *сложностными типами.* Два *сложностных типа* T_1 и T_2 для таких *наборов* будем сравнивать так, как это сделано на странице 370 после определения A.9).)

Первичные идеалы в многообразиях алгебр, в которых выполняются системы тождеств Капелли, представимы ограниченного порядка. Поэтому цепочки первичных идеалов в таких многообразиях удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей и любая убывающая цепочка сложностных типов также стабилизируется.

Пусть Q есть произвольный неассоциативный многочлен. *Вербальные операторы* и *символическая степень* $S_{a_i,t}$ определяются так же, как и для ассоциативного случая. Нужное число вхождений переменной a_i выбирается, через них осуществляется подстановка, и результаты складываются. Все результаты и конструкции раздела 0.2.2, за исключением леммы 0.5, непосредственно переносятся в неассоциативную ситуацию, причем для алгебр произвольной сигнатуры.

Например, $A^n_{\mathfrak{M}} = A_{\mathfrak{M}} < \theta > /\theta^n$. Алгебра A отображается в $\widehat{A}^n$ с помощью соответствия $a_i \to \sum_j \bar{a}_{ij} + \theta_i$, при этом $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Var}(A)$.

Аналогичны и функториальные свойства конструкции обобщенных квазимногочленов, позволяющие производить сложностной спуск. Теорема 5.5 о расширении морфизма переносится дословно. Сформулируем только следующее утверждение:

Теорема А.17 (О морфизмах систем квазимногочленов). *Пусть* $\{\varphi_j : A_j \to A'_j\}$ *– набор гомоморфизмов. Тогда имеется естественный морфизм*

$$\widehat{\varphi} : \widehat{A} = (\bigoplus_i A_i) *_{\mathfrak{M}} \mathbb{K} <\theta> /(\theta^{(n)} + J) \to \hat{A}',$$
$$\hat{A}' = (\bigoplus_i A'_i) *_{\mathfrak{M}} \mathbb{K} <\theta> /(\theta^{(n)} + J),$$

где $A_i \to A'_i; \theta_i \mapsto \theta'_i$.

Если при этом сами A_j, A'_j *наделены* T*-структурами (в частности, являются относительно свободными алгебрами) и морфизмы* φ_j *их сохраняют, то на алгебре* $\hat{A}$ *также возникает* T*-структура, согласованная с действием* $\widehat{\varphi}$. □

Точно так же, как и в ассоциативном случае, получается

Следствие А.15 (О сложно́стном спуске). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– структурируемое хорошее многообразие,* T_j *– собственные* T*-идеалы в* A_j*; и пусть конечно базируемы все системы квазимногочленов:*

1) *для всех меньших сложно́стных типов,*

2) *такие, что каждая* A_i*-компонента* P_{ij} *в обобщенных полиномах лежит внутри* T_i.

Тогда в системе $\widehat{A}$ *все системы полиномов конечно базируемы.*

Доказательство. Пусть $\varphi_j : A_j \to A'_j = A_j/T_j$ суть естественные проекции, $\hat{\varphi}_j = (\mathrm{id}, \dots, \varphi_j, \mathrm{id}, \dots, \mathrm{id})$ – соответствующие морфизмы систем квазимногочленов. Тогда образы всех $\hat{\varphi}_j$ конечно базируемы, а ядро $\ker \bigoplus_j \hat{\varphi}_j = \bigcap_j \hat{\varphi}_j$ конечно базируемо в силу второго условия леммы. □

В ассоциативном случае мы имели дело с произведениями элементов из полупростых компонент и радикальных "прокладок". В силу предложения А.25 мы можем работать с неассоциативными мономами ограниченной степени от элементов алгебр A_i и переменных θ_j. Рассуждения, связанные с понижением ширины, не используют свойства ассоциативности.

Отметим только один очень важный момент. В ассоциативном случае теорема Ж. Левина 3.1 (вместе с нильпотентностью радикала) обеспечивает стартовые условия. А именно, что все тождества некоторой алгебры $A < \Theta > /\Theta^n$ выполняются в многообразии *PI*-алгебр $\mathfrak{M}$. Однако в неассоциативном случае это не так, и, возможно, это свойство не выполняется даже для структурируемых алгебр из хороших многообразий. Поэтому нам придется потребовать следующее:

Многообразие $\mathfrak{M}$ лежит в многообразии, порожденном конечномерной алгеброй из хорошего структурируемого многообразия.

Обозначим через $(C_n)^k$ T-идеал, порожденный многочленами, полилинейными и кососимметричными относительно k групп из n переменной в каждой. Равносильное определение: $(C_n)^k = H(D)$, где диаграмма Юнга D состоит из k столбцов длины n.

Фактор первичной алгебры по любому ненулевому T-идеалу, в частности по системе многочленов Капелли, ведет к понижению сложностного типа. Мы будем работать с проективной нетеровостью и вести спуск, используя следствие А.15 из теоремы о морфизмах T-структур.

Как и в ассоциативном случае, будут использоваться "хранители замен" — резервные переменные t_α (см. раздел 5.1). Все рассуждения, связанные с сортировкой членов, в которых переменная t_α попала в различные специализации, не используют ассоциативность. То же относится и к рассуждениям, связанным с понижением ширины.

Завершим доказательство конечной базируемости для T-пространств. Воспольземся предложением А.24, которое суммирует результаты раздела А.3.1. Отметим, что следующие утверждения из раздела 5.1.4 никак не используют специфику ассоциативности, носят абстрактный характер и относятся к общему случаю. Это лемма 5.1 об эквивалентности конечной базируемости конечной базируемости под действием повышающих операторов; лемма 5.4, утверждающая, что ширина максимально повышается при действии компоненты однородного оператора, не повышающей степени коэффициентов на старшей (по ширине) компоненте многочлена; леммы 5.2 и 5.3 (о понижении ширины), позволяющие сводить конечную базируемость под действием операторов замен к конечной базируемости компонент этих операторов, максимально повышающих ширину и не действующих на кольцо коэффициентов; предложение 5.9, позволяющее выводить проективную конечную базируемость из конечной базируемости под действием компонент операторов, не меняющих ширину и умножений на кольцо коэффициентов.

Поэтому все рассуждения раздела 5.1.2 проходят без изменений. Таким образом, локальная конечная базируемость для T-пространств немедленно следует из предложения А.24 с помощью соображений, связанных с сортировкой специализаций (шаг 2, пример 3, раздел 5.1.2), с проективной нетеровостью, и других рассуждений раздела 5.1.2.

Можно пойти дальше, развивая технику работы с обобщенными θ-многочленами, как это делается в разделе 5.1.5. Однако, как уже отмечалось в конце этого раздела, необходимые для доказательств рациональности рядов Гильберта и представимости усовершенствования приводят к замене рассуждений, связанных с понижением ширины, на технику "расталкивания" с применением леммы Артина–Рисса. Далее, для "расталкивания" в неассоциативном случае оказывается целесообразной техника многочленов Кемера, а также работа со словами типа $W(\overrightarrow{x}_\alpha, \overrightarrow{z}_i, \overrightarrow{b})$, введенными в настоящем разделе. Кроме того, для контроля над радикальными специализациями оказываются необходимыми рассуждения типа леммы о буквенном утончении. Все это вместе опять приводит к рассуждениям из разделов А.2.2, А.2.3, А.2.5, и мы поэтому ограничиваемся этим кратким упоминанием.

Замечания. 1. Работа в полупростой части ничем не отличается от ассоциативной ситуации. Специфика ассоциативного случая — в способах связи между первичными компонентами. С этой точки зрения можно рассматривать теорему Ж. Левина (теорема 3.1), а также результаты главы 4.

2. Почти все рассуждения, связанные с проективной нетеровостью и с обобщенными многочленами, непосредственно переносятся на положительную характеристику. Не работает только “унитарный трюк” (что имеет принципиальное значение). См. обсуждение положительной характеристики на стр.240.

3. Для алгебр из структурируемых многообразий, порожденных конечномерной алгеброй, ассоциативная θ-техника достаточно хорошо переносится. Вместе с тем хотелось бы получить формулировки теорем, аналогичных теореме Ж. Левина (теорема 3.1).

Б. Оценки степени нильпотентности радикала и теорема Нагаты-Хигмана

Данный раздел посвящен оценкам на индекс нильпотентности радикала. Кроме того, мы изучаем супериоризацию и тождества типа алгебраичности.

Пусть A есть k-порожденная ассоциативная PI-алгебра сложности n над полем $\mathbb{F}$. Под *сложностью* $\mathrm{PIdeg}(A)$ понимается такое максимальное n, что $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_n \subseteq \mathrm{Var}(A)$. $J(A)$ обозначает радикал Джекобсона алгебры A, $c(A)$ есть степень нильпотентности радикала $J(A)$, l – минимальная степень тождества сложности n, выполняющегося в A, I_α – препятствие к представимости матрицами порядка α.

Нам потребуется следующая техническая

Лемма Б.1. *Пусть I – идеал алгебры A индекса нильпотентности r. Тогда $c(A) \le rc(A/I)$.* □

Б.1. Оценка нильпотентности идеала матричных тождеств в случае выполнимости тождества Капелли

Из результатов раздела 2.1 (теорема 2.1) следует

Предложение Б.1. *Пусть в алгебре A выполняется система тождеств Капелли C_n. Тогда T-идеал $\mathbb{M}_n$ тождеств алгебры матриц порядка n имеет индекс нильпотентности не выше*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

□

Б.2. Нулевая характеристика. Супериоризация

Пусть в k-порожденной $\mathbb{F}$-алгебре A выполняется тождество f степени m и $\mathrm{ch}(\mathbb{F}) = 0$. Чтобы получить полиномиальную оценку на степень матричных тождеств, выполняющихся в A, надо либо получить полиномиальную оценку на степень Капелли, либо воспользоваться полиномиальными оценками на степени сильных разреженных тождеств и “супер–трюком”.

Лемма Б.2. *Пусть B есть относительно свободная k-порожденная алгебра из* $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G})$ *(алгебра общих матриц над алгеброй Грассмана). Тогда $c(A) \le kn^2$.*

Доказательство. С каждой матрицей можно связать n^2 величин, стоящих на пересечении строк и столбцов, а с k матрицами — kn^2 величин. Остается заметить, что индекс нильпотентности радикала в s-порожденной алгебре Грассмана равен $s-1$. □

Грассманова оболочка алгебры A лежит в $A \otimes \mathbb{G}$. Таким образом, в силу леммы Б.1, комбинируя предыдущую лемму, результаты раздела 0.2.4 (предложение 0.14), а также предложение Б.1, имеем следующее

Предложение Б.2. *Пусть* $\deg(\mathfrak{M}) = m$, *A – k-порожденная относительно свободная алгебра из $\mathfrak{M}$. Тогда индекс нильпотентности вербального идеала, порожденного тождествами алгебры матриц порядка $6m^4$, не превосходит величины*

$$k \cdot (6m^4)^2 \cdot \frac{12m^4(12m^4+1)(2 \cdot 12m^4+1)}{12} =$$
$$= 36km^{12}(12m^4+1)(24m^4+1) \sim 5184km^{20}.$$

$\square$

Кроме того, можно получить несколько более хорошие оценки на степень тождества Капелли, выполняющегося в алгебре из предыдущего предложения.

Предложение Б.3. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ и алгебра A удовлетворяют условиям предыдущего предложения. Тогда в A выполняется тождество Капелли порядка $12km^4$. И, кроме того, $A \in \mathfrak{M}'$, где $b(\mathfrak{M}') = 6m^4$, $d(\mathfrak{M}') = 12km^4$.* $\square$

Литература

1. *Адян С. И.* Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — *34*, б 4. — С. 715–734

2. *Ананьин А. З.* Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия алгебр // Алгебра и логика. — 1977. — *16*, б 1. — С. 3–23 (РЖМат, 1977, 11А304)

3. *Бадеев А. В.* Бесконечные неприводимые системы тождеств коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 и коммутативных луп Муфанг // Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, б 6. — С. 1252–1268

4. *Бадеев А. В.* О шпехтовости разрешимых многообразий коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук, — Москва, 1999. — 82 с.

5. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли // М.: НАУКА, 1985. — 448 с.

6. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли // Мат. сб. — 1975. — *96*, б 4. — С. 543–569

7. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождество // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1988 — *18*. — С. 117–240

8. *Бейдар К. Н.* К теоремам Мальцева о матричных представлениях алгебр // Успехи мат. наук. — 1986. — *41*, б 5. — С. 161–162

9. *Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Ассоциативные кольца // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНИТИ. — 1984. — *22*. — С. 3–115

10. *Белкин В. П.* О многообразиях правоальтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — *15*, б 5. — С. 491–508 (РЖМат, 1988, 8А264)

11. *Богданов И. И.* Теорема Нагаты–Хигмана для полуколец // Фунд. и прикл. матем. — 2001. — *7*, б 3. — С. 651–658

12. *Бокуть Л. А., Львов И. В., Харченко В. К.* Некоммутативные кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1988 — *18*. — С. 5–116

13. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1964. — 566 с. (РЖМат, 1965, 4А116К)

14. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра // Элементы математики — М.: 1971. — 708 с.

15. *Вайс А. Я.* О нормальных многообразиях алгебр Ли // *XIX* Всес. алгебр. конференция. — Львов, 9–11 сент. 1987 г.: 1987. — С. 48

16. *Вайс А. Я., Зельманов Е. И.* Теорема Кемера для конечно порожденных йордановых алгебр // Изв. Высш. уч. зав., Математика. — 1989. — б 6. — С. 63–72

17. *Воличенко И. Б.* Об одном многообразии алгебр Ли, связанных со стандартными тождествами //*I*, *II*. Весцi АН БССР.Математика, — 1980. — б 1. — С. 23–30 — б 2. — С. 22–29

18. *Генов Г. К.* Шпехтовость некоторых многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль // Докл. Болг. Акад. Наук. — 1976. — *29*, б 7. — С. 939–941

19. *Генов Г. К.* Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем // Алгебра и логика. — 1981. — *20*, б 4. — С. 365–388

20. *Генов Г. К., Сидеров П. Н.* Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем //*I*, *II*. Сердика. — 1982., б 8. — С. 313–323, 351–366

21. *Генов Г. К.* Некоторые шпехтовы многообразия ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981., б 2. — С. 30–40

22. *Голубчик М.З., Михалев А.В.* О многообразиях алгебр с полугрупповым тождеством // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1982. — *1* — б 2. — С. 8–11

23. *Григорчук Р. И.* К проблеме Милнора о групповом росте // Докл. АН СССР. — 1983. — *271*, б 1. — С. 53–54 (РЖМат, 1983, 11А249)

24. *Гришин А. В.* Асимптотические свойства свободных конечно порожденных алгебр некоторых многообразий // Алгебра и логика. — 1983. — *22*, б 6. — С. 608–625 (РЖМат, 1984, 11А172)

25. *Гришин А. В.* Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — *28*, б 5. — С. 536–557 (РЖМат, 1988, 8А264)

26. *Гришин А. В.* О конечной базируемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — *54*, б 5. — С. 899–927

27. *Гришин А. В.* Бесконечно базируемое T-пространство над полем характеристики 2 // Междунар. конфер. по алгебре и анализу, посв. 100-летию со дня рожд. Н. Г. Чеботарева. 5–11 июня 1994 г. Тез. докл. — Казань: НГУ, 1982. — С. 29

28. *Гришин А. В.* О конечной базируемости абстрактных T-пространств // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 3. — С. 669–700

29. *Гришин А. В.* О конечной базируемости T-пространств и T-идеалов над полем характеристики $p > 0$ // Междунар. конфер. по алгебре, посв. памяти А. Г. Куроша. 22–29 мая 1998 г. Тез. докл. — Москва: МГУ, 1998. — С. 165

30. *Гришин А. В.* Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фунд. и прикл. матем. — 1999. — *5*, б 1. — С. 101–118

31. *Гришин А. В.* Применения обобщенных многочленов к оценке кратности некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Мат. сб. — 2002. — *193*. — С. 25–36

32. *Гришин А. В.* Коммутативно–алгебраический подход к исследованию полиномиальных тождеств и T-пространств // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук — Москва, 2000. — 142 с.

33. Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник — 4-е изд. — Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993. — 73 с.

34. *Дренски В. С.* О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. — 1974. — *13*, б 3. — С. 265–290

35. *Дренски В. С.* Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Мат. сб. — 1981. — *115*. — С. 98–115

36. *Желваков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978. — 431 с.

37. *Зайцев М. В.* Стандартное тождество в специальных многообразиях алгебр Ли // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1993. — б 1. — С. 56–59

38. *Залесский А. Е.* Групповые кольца индуктивных пределов кососимметрических групп // Алгебра и Анализ — 1990. — б 6. — С. 132–149 Engl. Transl. Leningrad Mat.J. 2(1991), — б 6. — С. 1287–1303 Group rings of inductive limits of alternating groups.

39. *Зельманов Е. И.* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. ж. — 1982. — *23*, б 6. — С. 100–116 (РЖМат, 1983, 6А260)

40. *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990., б 1. — С. 42–59

41. *Зубков А. Н.* Об одном обобщении теоремы Размыслова–Прочези // Сиб. мат. ж. — 1996. — *17*, б 4. — С. 723–730

42. *Зубрилин К. А.* Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли // Мат. сб. — 1995. — *186*, б 3. — С. 53–64

43. *Зубрилин К. А.* О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 2. — С. 409–430

44. *Зубрилин К. А.* О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли // Мат. сб. — 1997. — *188*, б 8. — С. 93–102

45. *Зубрилин К. А.* Об идеале Бэра в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли // Мат. сб. — 1998. — *189*, б 12. — С. 73–82

46. *Ильтяков А. В.* Конечность базиса тождеств конечнопорожденной альтернативной *PI*-алгебры над полем характеристики 0 // Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, б 6. — С. 61–76

47. *Ильтяков А. В.* Шпехтовость многообразий *PI*-представлений конечнопорожденных алгебр Ли // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1991., б 10. — С.

48. *Исаев И. М.* Конечные правоальтернативные алгебры с бесконечными базисами тождеств // $XVII$ Всес. алг. конф. Тезисы сообщ.
Ч. *I*. 1985

49. *Ильтяков А. В.* Представимость алгебр и конечность базиса тождеств // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук — Новосибирск, 1990. — 126 с. ???

50. *Кемер А. Р.* Нематричные многообразия, многообразия со степенным ростом и конечно порожденные *PI*-алгебры // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук, — Новосибирск, 1981. — 105 с.

51. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, б 5. — С. 1042–1059

52. *Кемер А. Р.* Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — *26*, б 5. — С. 597–641

53. *Кемер А. Р.* Представимость приведенно–свободных алгебр // Алгебра и логика. — 1988. — *27*, б 3. — С. 274–294 (РЖМат, 1989, 5А166)

54. *Кемер А. Р.* Идеалы тождеств ассоциативных алгебр // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук — Барнаул, 1988. — 126 с.

55. *Кемер А. Р.* Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — *54*, б 4. — С. 726–753

56. *Клейман Ю. Г.* О некоторых вопросах теории многообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — *47*, б 1. — С. 37–74

57. *Клейман Ю. Г.* О тождествах в группах // Труды моск. мат. общ. — 1982. — *44*. — С. 62–108

58. *Колотов А. Г.* О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами // Сиб. мат. ж. — 1982. — *23*, б 1. — С. 187–189

59. *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986. — 232 с.

60. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп — 13-е изд. — Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1995. — 130 с.

61. *Красильников А. Н.* О тождествах алгебр Ли треугольных матриц над полем // Труды моск. мат. общ. — 1989. — *52*. — С. 229–245

62. *Красильников А. Н.* О тождествах алгебр Ли треугольных матриц над полем положительной характеристики // *VI* симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы. — Львов, 11–13 сент. 1990. — С. 76

63. *Кублановский С. И.* Локально финитно–аппроксимируемые и локально представимые многообразия ассоциативных колец и алгебр // Ленингр. педагогич. ин–т., — Л:, 1982, деп. в ВИНИТИ 14.12.82, б 6143. — 78 с.

64. *Кублановский С. И.* О многообразиях ассоциативных алгебр с локальными условиями конечности // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук, — СПБ, 1996. — 80 с.

65. *Курош А. Г.* Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах // Изв. АН СССРсер. мат., — 1941. — *5*. — С. 233–240

66. *Латышев В. Н.* Обобщение теоремы Гильберта о конечности базисов // Сиб. мат. ж. — 1966. — *7*, б 6. — С. 1422–1424

67. *Латышев В. Н.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1969. — *8*, б 6. — С. 660–673

68. *Латышев В. Н.* К теореме Регева о тождествах тензорного произведения *PI*-алгебр // Успехи мат. наук. — 1972. — *27*, б 4. — С. 213–214

69. *Латышев В. Н.* О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — *37*, б 5. — С. 1010–1037 (РЖМат, 1974, 2А272); English transl.: Math. USSR. Izvestija. — 1973. — *7*. — С. 1011–1038

70. *Латышев В. Н.* Конечная базируемость некоторых колец // Успехи мат. наук. — 1977. — *32*, б 4. — С. 259–262

71. *Латышев В. Н.* Нематричные многообразия ассоциативных алгебр // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук, — Москва, 1977. — 150 с.

72. *Львов И. В.* О многообразиях ассоциативных колец //*I*, *II*. Алгебра и логика. — 1973. — *12*, б 3. — С. 269–297 ; , б 6. — С. 667–689

73. *Львов И. В.* К теореме Ширшова о высоте // Всес. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск: НГУ, 1982. — С. 57

74. *Львов И. В.* Условия максимальности в алгебрах с тождественными соотношениями // Алгебра и логика. — 1969. — *8*, б 4

75. *Львов И. В.* Локально слабо нетеровы многообразия алгебр над нетеровыми кольцами // 3 Всес. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. — Тарту, 1976. — С. 67

76. *Львов И. В.* Конечномерные алгебры с бесконечным базисом тождеств // Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*, б 19. — С. 91–99

77. *Львов И. В.* О многообразиях, порожденных конечными альтернативными кольцами // Алгебра и логика. — 1978. — *17*, б 3. — С. 286–296

78. *Львов И. В.* О представимости нильпотентных алгебр матрицами // Сиб. мат. ж. — 1980. — *21*. — С. 158–161

79. *Мальцев А. И.* О представлении бесконечномерных алгебр // Мат. сб. — 1943. — *13*, б 2-3. — С. 263–285

80. *Мальцев А. И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Международный конгресс по математике. (Москва, 1966), — М.: 1968. — С. 217–231

81. *Мальцев А. И.* Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Мат. сб. — 1950. — *26*, б 3. — С. 19–33

82. *Мальцев Ю. Н.* О представимости конечных колец матрицами над коммутативным кольцом // Мат. сб. — 1985. — *128(170)*, б 3. — С. 284–288

83. *Мальцев Ю. Н., Панферов В. А.* Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств // Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, б 6. — С. 1420–1421

84. *Мальцев Ю. Н.* О многообразиях ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — *15*, б 5. — С. 579–584

85. *Мальцев Ю. Н., Кузьмин Е. Н.* Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем // Алгебра и логика. — 1978. — *17*, б 1. — С. 28–32

86. *Марков В. Т.* О системах образующих T-идеалов конечно порожденных свободных алгебр // Алгебра и логика. — 1979. — *18*, б 5. — С. 587–598 (РЖМат, 1980, 9А268); English transl.: Algebra and Logic. — 1980. — *18*. — С. 371–378

87. *Марков В. Т.* О представимости матрицами конечно порожденных *PI*-алгебр // Вестн. МГУ. Серия 1. — 1989. — б 2. — С. 17–20

88. *Медведев Ю. А.* Ниль–радикалы конечно порожденных йордановых *PI*-алгебр // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1985, — б 24.. — 30 с. (РЖМат1986, 6А398)

89. *Медведев Ю. А.* Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющего конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. — 1980. — *19*, б 3. — С. 300–313

90. *Мекей А.* О представимости кольца эндоморфизмов конечной абелевой группы матрицами над коммутативным кольцом // Науч. Отчет. Инф. Цен. МНР. 1991 — *02–910004*. — С. 3–15

91. *Мищенко С. П.* Рост многообразий алгебр Ли // Успехи матем. наук. — 1990. — *45*, б 6(276). — С. 25–45

92. *Мищенко С. П.* Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли // Мат. заметки. — 1990. — *47*, б 4. — С. 83–89 (РЖМат, 1991,

93. *Ольшанский А. Ю.* О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР. Сер. мат.. — 1970. — *34*, б 2. — С. 376–384

94. *Охитин С. В.* Об устойчивых T-идеалах и центральных полиномах // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1986. — б 3. — С. 85–89

95. *Пихтильков С. А.* О многообразии, порожденном n-мерными алгебрами // Тульский политех. ин–т. — Тула, 1980, деп. в ВИНИТИ 12.04.80, б 1213. — 58 с.

96. *Пихтильков С. А.* Полиномиальные тождества алгебр, близких к конечномерным // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук, — Москва, 1980. — 99 с.

97. *Поликарпов С. В., Шестаков И. П.* Неассоциативные аффинные алгебры // Алгебра и логика. — 1990. — *29*, б 6. — С. 709–703

98. *Поликарпов С. В.* Свободные аффинные алгебры Алберта // Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, б 6

99. *Полин С. В.* О тождествах конечных алгебр // Сиб. мат. ж. — 1976. — *17*, б 6. — С. 1356–1366

100. *Попов А. П.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981., б 2. — С. 41–53

101. *Пчелинцев С. В.* Теорема о высоте для альтернативных алгебр // Мат. сб. — 1984. — *124*, б 4. — С. 557–567 (РЖМат, 1984, 12А315)

102. *Пчелинцев С. В.* Структура слабых тождеств на грассмановых оболочках центрально-метабелевых альтернативных супералгебр суперранга 1 над полем характеристики 3 // Фунд. и прикл. матем. — 2001. — *7*, б 3. — С. 849–871

103. *Пчелинцев С. В.* О кручении свободного альтернативного кольца // Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, б 6. — С. 142–149

104. *Размыслов Ю. П.* О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. — 1973. — *12*, б 1. — С. 83–113

105. *Размыслов Ю. П.* О радикале Джекобсона в *PI*-алгебрах // Алгебра и логика. — 1974. — *13*, б 3. — С. 337–360 (РЖМат, 1975, 4А299)

106. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — *38*, б 4. — С. 723–756

107. *Размыслов Ю. П.* Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — *45*, б 1. — С. 143–166

108. *Размыслов Ю. П.* Тождества алгебр и их представлений // — М.: Наука, 1989. — 432 с.

109. *Рябухин Ю. М., Захарова Е.Н.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных колец // В кн. Исследования по алгебре и топологии.— Кишинев. 1983. — С. 122–130

110. *Скосырский В. Г.* Йордановы алгебры с условием минимальности для двусторонних идеалов // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1985. — б 21

111. *Стовба В. В.* О конечной базируемости некоторых многообразий алгебр Ли и ассоциативных колец // Вестн. МГУ. Сер 1. — 1982. — б 2. — С. 54–58

112. *Умирбаев У. У.* Шпехтовость многообразия разрешимых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1985. — *24*, б 2. — С. 226–239

113. *Уфнаровский В. А.* О росте алгебр // Вестн. МГУ. Сер 1. — 1978. — б 4. — С. 59–65 (РЖМат, 1979, 1А331)

114. *Уфнаровский В. А.* Теорема о независимости и ее следствия // Мат. сб. — 1985. — *128*, б 1. — С. 124–132 (РЖМат, 1986, 1А419)

115. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1990 — *57*. — С. 5–177 (РЖМат, 1990, 7А338)

116. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца.— М.: Мир, 1972. — 191 с.

117. *Чекану Г. П.* О локальной конечности алгебр // Мат. исслед. (Кишинев). — 1988. — б 105. — С. 153–171 (РЖМат, 1988, 12А245)

118. *Чекану Г. П.* Независимость и квазирегулярность в алгебрах // 3 Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова. — Красноярск, 1993. — С. 357 (РЖМат, 1994, 9А191)

119. *Чекану Г. П.* К теореме Ширшова о высоте // XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 306

120. *Шестаков И. П.* Конечно порожденные специальные йордановы и альтернативные *PI*-алгебры // Мат. сб. — 1983. — *122*, б 1. — С. 31–40 (РЖМат, 1984, 1А223)

121. *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. ж. — 1991. — *30*, б 6. — С. 187–196

122. *Щиголев В. В.* Примеры бесконечно-базируемых T-пространств // Мат. сб. — 2000. — *191*, б 3. — С. 143–160

123. *Щиголев В. В.* Примеры бесконечно-базируемых T-идеалов // Фунд. и прикл. матем. — 1999. — *5*, б 1. — С. 307–312

124. *Ширшов А. И.* О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Мат. сб. — 1957. — *41*, б 3. — С. 381–394 (РЖМат, 1958, 164)

125. *Ширшов А. И.* О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. — 1957. — *43*, б 2. — С. 277–283 (РЖМат, 1958, 7544)

126. *Amitzur S.* The T-ideals of the free rings // Jour. Lond. Math. Soc. — 1955. — *30*. — С. 470–475

127. *Amitzur S.* A generalisation of Hilbert's Nullstensaltz // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — *8*, б 4. — С. 649–656

128. *Amitzur S.* Rational identities and applications to algebra and geometry // J. of Algebra. — 1966. — *3*, б 3. — С. 304–359

129. *Amitzur S.* The sequence of codimensions of *PI*-algebras // Israel J. Math. — 1984. — *47*, б 1. — С. 1–22

130. *Amitzur S., Small L.* Finite dimentional representation of *PI*-algebra // J. of Algebra. — 1990. — *133*. — С. 244–248

131. *Beidar K. I., Martindale W. S., Michalev A. V.* Rings whith Generalized Polinomial Identities // NY, Marsel Dekker. 1995

132. *Birkhoff G.* On the structure of abstract algebras // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1935. — *37*, б 2. — С. 433–454

133. *L. A. Bokut' and I. P. Shestakov.* Some Results by A. I. Shirshov and His School // Cont. Math. — 1995. — *184*. — С. 1–12

134. *Braun A.* The radical in a finitely generated *PI*-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — *7*, б 2. — С. 385–386 (РЖМат, 1983, 3А248)

135. *Bryant R. M., Vaughan–Lee M. R.* Solvable varieties of Lie algebras // Quart. J. Math. — 1972. — *23*, б 89. — С. 107–112

136. *Giambruno A., Zaicev M.* Exponential Codimentional Growth of *PI*-algebras: an exact estimate // Preprint *б* 62. Marso–Aprile. 1998

137. *Giambruno A., Zaicev M.* Exponential Codimentional Growth of *PI*-algebras: an exact estimate // Adv.in Math. — 1999. — *142*. — С. 221–243

138. *Giambruno A., Zaicev M.* Minimal varieties of exponential growth // Adv.in Math.142, — 1999. — *142*. — С. 221–243

139. *Dehn M.* Über die Grundlagen der projectiven geometric und allgemeine zahlsisteme // Math. Ann. — 1922. — *85*. — С. 184–194

140. *Drensky V.* On the Hilbert series of relatively free algebras // Comm. in Algebra. — 1984. — *12*, б 19. — С. 2335–2347

141. *Drensky V.* Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras // J. Algebra. — 1984. — *91*, б 1. — С. 1–17 (РЖМат, 1985, 5А262)

142. *Drensky V.* Free algebras and *PI*-algebras // Springer — 2000.. — 271 с.

143. *Grishin A. V.* On the finite basis property of T-spaces over field of finite characteristic // Proceedings of Taivan–Moscow Algebra Workshop. — 1994.. — С. 225–227

144. *Formanek E.* Central polynomials for matrix rings // J. Algebra. — 1972. — *23*. — С. 129–133

145. *Formanek E.* Invariants and the Ring of Generic Matrices // J. of Algebra. — 1984. — *89*. — С. 178–223

146. *Formanek E., Halpin P. W., Li C. W.* The Poincare series of the ring of 2×2 generic matrices // Abstr. of paper, presented to AMS — 1980. — *1*. — С. 775–A7

147. *Iltiakov A. V.* On finite basis of identities of Lie algebra representations // Nova Journ. Algebra Geometry. — 1992. — *1*, б 3

148. *Kemer A. R.* Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p // Intern. J. of Algebra and Computations. — 1995. — *5*, б 2. — С. 189–197

149. *Kemer A. R.* On the multilinear Components of the Regular Prime Varieties // Methods in ring theory. Lect. Notes in pure and appl. math.v 198, (M. Dekker, 1998). — С. 171–183

150. *Kruse R.* Identities satisfied by a finite rings // J. Algebra. — 1973. — *26*, б 2. — С. 298–318

151. *Lewin J.* A matrix representation for associative algebras. *I*, *II* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — *188*, б 2. — С. 293–308 . — С. 308–317 (РЖМат, 1974, 11А317)

152. *Macdonald I. G.* Symmetric Functions and Hall Polinomials // Clarendon Press, (Oxford, 1979) (Пер. на рус. яз.: *И. Макдональд* Симметрические функции и многочлены Холла. — М.: Мир, 1985. . — 222 с.

153. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties // Israel J. Math. — 1996. — *96*, б 2. — С. 511–522

154. *Plotkin B.* Some notions of algebraic geometry in universal algebra // Algebra and Analisys. — 1997. — *9*, б 4. — С. 224–248 St.Peterburg Math. Journal — 1998. — *9*, б 4. — С. 859–879

155. *Berzinsh A., Plotkin B., Plotkin E.* Algebraic geometry in varieties of algebras with the prescribed algebra of constants // J. Math. Sci. (New York). — 2000. — *102*, б 3. — С. 4039–4070

156. *Plotkin B.* Seven Lectures in Universal Algebraic Geometry // Preprint, Institute of Mathematics, Jerusalem, (2000). — 122 с.

157. *Procesi C.* Rings with polynomial identities, N.Y., 1973. — 189 с.

158. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. Math. — 1967. — *19*. — С. 306–381

159. *Rowen L. H.* Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Acad. Press, 1980. — 365 с.

160. *Small L. W.* Localization in *PI*-rings // J. Algebra. — 1971. — *19*, б 2. — С. 181–183

161. *Specht W.* Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — *52*. — С. 557–589

162. *Vaughan–Lee M. R.* Varietes of Lie algebras // Quart. J. of Math. — 1970. — *21*, б 83. — С. 297–308

163. *Zelmanov E.* On the nilpotency of nilalgebras // Lect. Notes Math. — 1988. — *1352*. — С. 227–240 (РЖМат, 1989, 7А188)

Работы автора по теме диссертации

164. *Belov A., Borisenko V., Latyshev V.* Monomial algebras // NY, Plenum. 1998. — С. 1–173

165. *Белов А. Я.* О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n // Мат. сб. — 1988. — *135*, б 31. — С. 373–384 (РЖМат, 1988, 7А252)

166. *Белов А. Я.* Классификация слабо нетеровых мономиальных алгебр // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 4. — С. 1085–1089

167. *Belov A.* Some estimations for nilpotence of nil-algebras over field of an arbitrary characteristics and height theorem // Comm. in Algebra. — 1992. — *20*, б 10. — С. 2919–2922

168. *Belov A.* About height theorem // Comm. in Algebra. — 1995. — *23*, б 9. — С. 3551–3553

169. *Белов А. Я.* Теорема Нагаты–Хигмана для полуколец // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 2. — С. 523–527

170. *Belov A., Gateva T.* Radicals of monomial algebras // Proceedings of Taivan-Moscow Algebra Workshop. — С. 159–169

171. *Белов А. Я.* О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр // Успехи мат. наук. — 1997. — *52*, б 2. — С. 153–154

172. *Белов А. Я.* О нешпехтовых многообразиях // Фунд. и прикл. матем. — 1999. — *5*, б 1. — С. 47–66

173. *Белов А. Я.* Контрпримеры к проблеме Шпехта // Мат. сб. — 2000. — *191*, б 3. — С. 13–24

174. *Белов А. Я.* Проблема Куроша, теорема о высоте и тождество алгебраичности // Фунд. и прикл. матем. (в печати)

Работы автора, примыкающие к теме диссертации

175. *Белов А. Я., Кондаков Г. В.* Обратные задачи символической динамики // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 1. — С. 71–79

176. *Белов А. Я., Охитин С. В.* Об одной комбинаторной задаче // Успехи мат. наук. — 1994. — *48*, б 2(290). — С. 169–170

177. *Белов А. Я.* Оценка для высоты и размерности Гельфанда—Кириллова ассоциативных *PI*-алгебр // Международная конф. по алгебре памяти А. И. Мальцева. Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск, 1989. — С. 21

178. *Белов А. Я.* Теорема о высоте для йордановых и лиевых *PI*-алгебр // Сиб. школа по многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Барнаул, 1988. — С. 12–13

179. *Белов А. Я.* О рациональности ряда Гильберта свободных алгебр в многообразиях сложности 1 // *VI* Всесоюзн. школа по теории многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Магнитогорск, 1990. — С. 7–8

180. *Белов А. Я.* Локальная представимость относительно свободных ассоциативных алгебр // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), посвященный памяти С. Л. Соболева. Тезисы докладов. — Новосибирск, ИМСОРАН, 1998 — *5*. — С. 4–5

181. *Белов А. Я.* Об относительно свободных и критических кольцах // Комбинаторные и вычислительные методы в математике. Тезисы докладов международной конференции (28–31 августа 1998 г.). — Омск, 1998. — С. 27–28

182. *Белов А. Я.* Локальная представимость относительно свободных ассоциативных алгебр // в кн.: Kurosh Algebraic Conference-98. Abstracts of talks. Ed.by Y. A. Bachturin, A. I. Kostrikin, A. Yu. Olshansky — М.: 1998. — С. 143–144

183. *Belov A. J.* Solution of one Maltzev problem // в кн.: *II* международная конференция “Полугруппы: теория и приложения” в честь профессора Е. С. Ляпина. Тезисы докл.— СПБ.: 1999. — С. 9–9

184. *Belov A. J.* Specht type problems and related questions // в кн.: Formal power series and algebraic combinatorics. 12^{th} international conference, FPSAC’00, Moscow, June 2000. Abstracts. — С. 9–10

185. *Belov A. J.* Specht type problems and noncommutative algebraic geometry // Annual meeting of Israel Math. Union. 2000. — С. 12

.