

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

ГОРНИЦКИЙ АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

СУЩЕСТВЕННЫЕ СИГНАТУРЫ И МОНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ
НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Тимашев Дмитрий Андреевич**,
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Фейгин Евгений Борисович**,
доктор физико-математических наук,
НИУ "Высшая школа экономики", профессор
факультета математики
Панов Александр Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО "Самарский национальный исследо-
вательский университет имени академика
С.П. Королева", заведующий кафедрой алгебры
и геометрии
Петухов Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, ФГБУН
"Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН" (ИППИ РАН),
и.о. старшего научного сотрудника

Защита состоится 24 мая 2019 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08. E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС "ИСТИНА": <http://istina.msu.ru/dissertations/184633228/>

Автореферат разослан 24 апреля 2019 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
член-корреспондент РАН

Шафаревич А.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории представлений групп и алгебр Ли. В теории представлений простых комплексных групп и алгебр Ли важной задачей является построение "хороших" базисов в неприводимых конечномерных представлениях. Однако здесь возникает вопрос, какие базисы считать хорошими. Примером "хороших" базисов (хоть и не для простой, а для редуктивной группы Ли) могут служить базисы Гельфанда-Цейтлина (см, например, у Желобенко¹).

Как известно, неприводимые рациональные представления группы $GL_n(\mathbb{C})$ задаются наборами из n целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n)$. При ограничении такого представления на подгруппу $GL_{n-1}(\mathbb{C})$, вложенную уголком в $GL_n(\mathbb{C})$, представление распадается в сумму неприводимых представлений $GL_{n-1}(\mathbb{C})$, каждое из которых встречается в разложении однократно. Продолжая этот процесс, то есть ограничивая полученные неприводимые представления для $GL_{n-1}(\mathbb{C})$ на $GL_{n-2}(\mathbb{C})$ и т.д., мы получим разложение пространства представления в сумму неприводимых представлений $GL_1(\mathbb{C})$, то есть одномерных подпространств. Выбирая в каждом таком подпространстве по вектору, мы получаем *базис Гельфанда-Цейтлина* для представления, задаваемого набором λ . В результате все базисные векторы являются собственными для максимального тора $T \subset GL_n(\mathbb{C})$ и параметризуются таблицами целых чисел, которые называются *таблицами Гельфанда-Цейтлина* и имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,n} & & & \\ & \lambda_{n-1,1} & \dots & \lambda_{n-1,n-1} & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & & \\ & & & & \lambda_{1,1} & & \end{array}$$

где на числа в таблице наложены следующие условия:

$$\lambda_{k,i} \geq \lambda_{k-1,i} \geq \lambda_{k,i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Здесь набор $(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,k})$, $k = 1, \dots, n$, задает неприводимое представление группы $GL_k(\mathbb{C})$, в котором лежит соответствующий этой таблице вектор. В частности, $\lambda = (\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n})$.

¹Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, Москва, 1970.

Стоит отметить, что базисы неприводимых представлений простой группы Ли $SL_n(\mathbb{C})$ тоже можно получить с помощью конструкции Гельфанда-Цейтлина. Каждое неприводимое представление $SL_n(\mathbb{C})$ получается ограничением на эту подгруппу некоторого неприводимого представления $GL_n(\mathbb{C})$. Представления $GL_n(\mathbb{C})$, которые задаются наборами λ и λ' , приводят к одному представлению группы $SL_n(\mathbb{C})$, если наборы λ и λ' отличаются друг от друга сдвигом на целое число, т.е. $\lambda_i = \lambda'_i + k$, $i = 1, \dots, n$; $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом неприводимые представления $SL_n(\mathbb{C})$ взаимно однозначно соответствуют, например, наборам λ с $\lambda_n = 0$.

Укажем некоторые "хорошие" свойства базисов Гельфанда-Цейтлина. Во-первых, таблицы Гельфанда-Цейтлина, параметризующие базисные векторы, образуют полугруппу Σ относительно сложения таблиц. Более того, ограничиваясь полиномиальными представлениями $GL_n(\mathbb{C})$, т.е. представлениями с $\lambda_i \geq 0$, мы получаем, что любая таблица Гельфанда-Цейтлина представления, задаваемого набором $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, представляется в виде суммы таблиц представлений весов $\omega_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$, которые являются фундаментальными весами при ограничении на подгруппу $SL_n(\mathbb{C})$. То есть полугруппа Σ порождена таблицами, отвечающими векторам базисов "фундаментальных" представлений.

Во-вторых, рациональный конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$, натянутый на полугруппу Σ , задается линейными неравенствами с коэффициентами ± 1 перед координатами.

В-третьих, полугруппа Σ насыщена, то есть любая целая точка, лежащая в конусе $\Sigma_{\mathbb{Q}}$, отвечает базисному вектору некоторого представления.

В итоге базис любого неприводимого представления, задаваемого набором

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n), \quad \lambda_i \geq 0,$$

параметризуется целыми точками некоторого сечения конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}$.

Следует отметить, что базисы Гельфанда-Цейтлина не являются *мономиальными*, т.е. они не получаются применением к старшему вектору представления мономов из универсальной обертывающей алгебры, составленных из понижающих операторов. Возникает естественный вопрос о существовании мономиальных базисов, обладающих схожими свойствами.

Существуют различные подходы к построению мономиальных базисов в неприводимых представлениях простых алгебр Ли. В работе Фанга-Фурье-Литтельмана² дается обзор этих подходов и формулируются известные результаты. Например, в работе Литтельмана³ для любого приведенного разложения самого длинного элемента группы Вейля строится базис в каждом неприводимом представлении. Базисные векторы получаются применением к старшему вектору понижающих опе-

²X. Fang, G. Fourier, P. Littelmann, *Essential bases and toric degenerations arising from generating sequences*, Adv. Math. **312** (2017), 107-149.

³P. Littelmann, *Cones, crystals, and patterns*, Transformation Groups **3** (1998), no. 2, 145-179.

раторов, соответствующих простым корням. Порядок, в котором применяются эти понижающие операторы, определяется по приведенному разложению. Такие базисы, которые мы называем *струнными базисами*, параметризуются целыми точками в рациональном полиэдральном конусе, называемом *струнным конусом*. Таким образом, полугруппа целых точек струнного конуса является конечно порожденной и насыщенной. Однако явное описание полугруппы здесь неизвестно.

Другим частным случаем мономиальных базисов являются *базисы ПБВ-типа*. Вообще, базис ПБВ-типа получается при применении к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих положительным корням, пронумерованным в определенном порядке, причём, в отличие от струнных базисов, понижающие операторы, отвечающие одному и тому же корню, могут повторяться только подряд. Векторы, полученные таким образом, порождают пространство неприводимого представления в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта, но они линейно зависимы, и из них нужно выбрать базис. Это достигается с помощью введения линейного мономиального порядка на множестве мономов от понижающих операторов и выбора тех векторов, которые не выражаются линейно через векторы, отвечающие более младшим мономам. Следовательно, нумерация положительных корней и выбор мономиального порядка задают в каждом неприводимом представлении некоторый базис. Такие базисы параметризуются *существенными сигнатурами* $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N)$, где λ обозначает старший вес представления, а целое число p_i (*экспонента*) показывает сколько раз нужно применять понижающий оператор, отвечающий i -ому корню, к старшему вектору. Известно, что существенные сигнатуры всегда образуют полугруппу.

Базисы ПБВ-типа, обладающие некоторыми хорошими свойствами, получены в работе Люстига⁴. Они тесно связаны с понятием канонического базиса в квантованной обертывающей алгебре. Каждое приведенное разложение самого длинного элемента группы Вейля определяет нумерацию положительных корней. Эта нумерация, а также некоторый взвешенный обратный правый лексикографический порядок на $\mathbb{Z}^N$, определяют множество существенных сигнатур, которое параметризует базис ПБВ-типа. Мы называем этот базис *базисом Люстига ПБВ-типа*. Известно, что полугруппа существенных сигнатур в этом случае является конечно порожденной и насыщенной, но явного описания этой полугруппы нет.

Естественным требованием для мономиального порядка на сигнатурах является согласованность с фильтрацией Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ-фильтрацией) на универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли. Согласованность с ПБВ-фильтрацией означает, что сперва сигнатуры сравниваются по суммарной степени $\sum p_i$, поэтому этим свойством обладают в точности однородные мономиальные порядки.

⁴G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 447-498.

В 2005 г. Э.Б. Винберг⁵ поставил задачу нахождения "хорошего" базиса ПБВ-типа, отвечающего какому-нибудь *однородному* порядку на множестве сигнатур. Мы называем такие базисы *однородными базисами ПБВ-типа*. Им были сформулированы три гипотезы о существовании таких базисов, для которых полугруппа существенных сигнатур будет, во-первых, насыщенной, во-вторых, порождаться сигнатурами фундаментальных весов и, в-третьих, задаваться хорошими неравенствами. В дальнейшем такие базисы исследовались в работах Фейгина-Фурье-Литтельмана^{6,7}, Бакхауса-Куса⁸ и автора⁹. В этих работах было доказано существование таких "хороших" базисов для алгебр Ли типов A_n, C_n, B_3, D_4 .

Кажется правдоподобным, что для почти всех остальных простых алгебр Ли таких базисов не существует. Поэтому имеет смысл ослабить некоторые требования к "хорошему" базису. В работе Махлина¹⁰ строятся базисы ПБВ-типа для *неоднородного* мономиального порядка на множестве сигнатур в каждом неприводимом представлении для всех алгебр Ли типа B_n и явно описываются полугруппы существенных сигнатур. Для полученных базисов доказываются аналоги гипотез Винберга. Эти результаты получены также в диссертации, причем независимо и совершенно другим методом.

Цель работы

В каждом конечномерном неприводимом представлении простых алгебр Ли типов B_n, D_n, G_2 построить базис ПБВ-типа так, чтобы выполнялись гипотезы Винберга или их обобщения.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. На защиту выносятся следующие положения:

1. Общий критерий того, когда полугруппа существенных сигнатур Σ порождается сигнатурами фундаментальных старших весов. А также обобщение этого

⁵E. B. Vinberg, *On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras*, Conference Talk, Bielefeld, 2005.

⁶E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n* , Transformation Groups **165** (2011), no. 1, 71-89.

⁷E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras*, Int. Math. Res. Not. 2011, no. 24, 5760-5784.

⁸T. Backhaus, D. Kus, *The PBW filtration and convex polytopes in type B*, J. Pure Appl. Algebra **223** (2019), no. 1, 245-276.

⁹A. A. Gornitskii, *Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of D_4* , preprint, 2015, arXiv:1507.07498.

¹⁰I. Makhlin, *FFLV-type monomial bases for type B*, preprint, 2016, arXiv:1610.07984.

критерия для проверки порожденности этой полугруппы сигнатурами со старшими весами из фиксированного набора. Достаточные условия для выполнения этого критерия, которые удобно проверять. Эти достаточные условия выполнены во всех известных случаях.

2. Однородный базис ПБВ-типа, для которого верны все гипотезы Винберга, существует в каждом неприводимом представлении алгебры Ли типа G_2 . Полугруппа Σ , во-первых, насыщена, во-вторых, порождена сигнатурами фундаментальных старших весов и, в-третьих, задается явными неравенствами.
3. Базисы ПБВ-типа, для которых верны обобщенные гипотезы Винберга, существуют во всех неприводимых представлениях алгебр Ли типов B_n и D_n . Полугруппы Σ , во-первых, насыщены, а во-вторых, порождены сигнатурами старших весов, "близких" к фундаментальным. Эти полугруппы задаются явными неравенствами.

Основные методы исследования

В работе используются методы структурной теории полупростых групп и алгебр Ли, теории представлений, алгебраической геометрии и коммутативной алгебры, выпуклой геометрии и комбинаторики.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории групп и алгебр Ли, теории представлений и алгебраической геометрии.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах механико-математического факультета МГУ, всероссийских и международных конференциях:

- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» (2015-2018 гг., неоднократно)
- Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры (2019 г.)
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017», Москва, 10-14 апреля 2017 г.
- Четвертая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 27 января - 1 февраля 2014 г.

- Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 30 января - 4 февраля 2017 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в шести работах [1]-[6], список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Библиография включает 19 наименований. Общий объем диссертации составляет 51 страницу.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации кратко изложена история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты, описаны структура и краткое содержание диссертации.

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли. Обозначим пространство неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ старшего веса λ через $V(\lambda)$. В главе 1 мы объясняем подход Э.Б. Винберга к построению базисов ПБВ-типа в $V(\lambda)$. Зафиксируем некоторую нумерацию положительных корней $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Мы вводим понятие сигнатуры, предложенное Винбергом:

Определение 1. Пусть λ — доминантный вес. *Сигнатурой* старшего веса λ назовем набор

$$\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N), \text{ где } p_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Положим

$$v(\sigma) = \frac{e_{-\alpha_1}^{p_1}}{p_1!} \cdot \dots \cdot \frac{e_{-\alpha_N}^{p_N}}{p_N!} \cdot v_\lambda.$$

Будем называть числа $(p_1, \dots, p_N)$ *экспонентами* сигнатуры σ .

Здесь $e_{-\alpha_i}$ — понижающий оператор, отвечающий корню α_i , а v_λ — старший вектор в пространстве $V(\lambda)$. Векторы $v(\sigma)$, где σ пробегает все сигнатуры старшего веса λ , линейно порождают пространство $V(\lambda)$ в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Чтобы получить базис в пространстве $V(\lambda)$, нужно выбрать систему линейно независимых векторов вида $v(\sigma)$. Для этого мы зафиксируем некоторый мономиальный порядок на $\mathbb{Z}^N$ (на наборах экспонент) и будем сравнивать две сигнатуры фиксированного старшего веса, сравнивая наборы экспонент этих сигнатур. Мы вводим понятие существенной сигнатуры:

Определение 2. Сигнатура σ называется *существенной*, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau < \sigma \rangle$.

Очевидно, что существенные сигнатуры старшего веса λ параметризуют базис в представлении $V(\lambda)$. Ключевым фактом является следующее предложение, доказанное Винбергом:

Предложение 3. Существенные сигнатуры образуют полугруппу Σ .

Таким образом возникает полугруппа существенных сигнатур, элементы которой параметризуют базисы во всех конечномерных неприводимых представлениях $V(\lambda)$. Винберг выдвинул предположение (три гипотезы) о том, что можно так выбрать нумерацию положительных корней и мономиальный порядок на $\mathbb{Z}^N$, чтобы выполнялись некоторые хорошие свойства.

Первая гипотеза Винберга звучит так:

Гипотеза 1. Существуют такие нумерация положительных корней и однородный мономиальный линейный порядок на $\mathbb{Z}^N$, что полугруппа Σ порождается существенными сигнатурами фундаментальных старших весов.

Мы рассматриваем обобщение этой гипотезы для некоторого зафиксированного набора доминантных весов $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, содержащего все фундаментальные веса:

Гипотеза 1'. Полугруппа Σ (для выбранных нумерации положительных корней и мономиального порядка на сигнатурах) порождена существенными сигнатурами со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

Пусть $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ — рациональный выпуклый конус, натянутый на Σ , а $t_{\mathbb{Z}}^*$ — решетка весов.

Гипотеза 2. Полугруппа Σ насыщена, то есть $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap (t_{\mathbb{Z}}^* \oplus \mathbb{Z}^N)$.

Третья гипотеза Винберга относится к явному виду неравенств, которыми задается полугруппа Σ .

Гипотеза 3. Существуют такой набор подмножеств $M_i \subset \{1, \dots, N\}$ и такой набор элементов картановской подалгебры $l_i \in t_{\mathbb{Z}}$, что множество существенных сигнатур $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N)$ задается неравенствами:

$$\sum_{j \in M_i} p_j \leq \lambda(l_i),$$

По аналогии с неравенствами, которыми задаются таблицы Гельфанда-Цейтлина, можно рассматривать обобщение этой гипотезы, разрешая коэффициенты ± 1 перед $p_1, \dots, p_N$.

Таким образом возникает задача найти такие нумерацию положительных корней и мономиальный порядок на $\mathbb{Z}^N$, чтобы для полугруппы существенных сигнатур Σ были верны гипотезы Винберга или их обобщения.

Важнейшей из гипотез Винберга является гипотеза 1 (или ее обобщение — гипотеза 1') о конечной порожденности полугруппы существенных сигнатур. В **главе 2** мы находим необходимое и достаточное условие для того, чтобы эта гипотеза или ее обобщение были верны.

Пусть G — простая односвязная комплексная алгебраическая группа с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Зафиксируем набор доминантных весов $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Положим

$$X = \overline{G(v_{\lambda_1} + \dots + v_{\lambda_m})} \subseteq V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m) = V.$$

Пусть $I \triangleleft \mathbb{C}[V]$ — идеал нулей X , а x_i — координаты на V , отвечающие базису

$$\{v(\sigma_i) \mid \sigma_i \text{ существенна}\}.$$

Здесь σ_i пробегает все существенные сигнатуры старших весов $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Рассмотрим произвольный моном $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ в $\mathbb{C}[V]$. Введем обозначение $\text{sign}(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \sigma_{i_1} + \dots + \sigma_{i_k} = \sigma$. Мы называем σ *сигнатурой монома* $x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Таким образом мы получаем градуировку алгебры $\mathbb{C}[V]$ существенными сигнатурами. Обозначим младший член многочлена f по отношению к этой градуировке через $\text{lt}(f)$. Пусть $\text{lt}(I)$ — идеал, порожденный $\text{lt}(f)$, $f \in I$. Обозначим через J идеал в $\mathbb{C}[V]$, порожденный биномами

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} - x_{j_1} \dots x_{j_l} \quad \text{где} \quad \text{sign}(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \text{sign}(x_{j_1} \dots x_{j_l}).$$

Предложение 4. *Полугруппа существенных сигнатур Σ порождается существенными сигнатурами со старшими весами из $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ тогда и только тогда, когда $\text{lt}(I) = J$.*

Мы находим достаточное условие для выполнения этого критерия, которое удобно проверять. Существенная сигнатура σ может многими способами представляться в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами из $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Пусть $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$ — такое представление.

Рассмотрим следующие операции:

- (1) замена пары сигнатур σ_i, σ_j на такую пару существенных сигнатур σ'_i, σ'_j со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, что $\sigma_i + \sigma_j = \sigma'_i + \sigma'_j$;
- (2) замена пары сигнатур σ_i, σ_j на такую существенную сигнатуру σ'_s со старшим весом в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, что $\sigma_i + \sigma_j = \sigma'_s$;
- (3) замена сигнатуры σ_s на такую пару существенных сигнатур σ'_i, σ'_j со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, что $\sigma_s = \sigma'_i + \sigma'_j$.

Мы называем эти операции *допустимыми*. Они позволяют из одного разложения сигнатуры σ получать другие, меняя одно или два слагаемых в разложении.

Теорема 5. *Предположим, что следующие два условия выполнены:*

- (*) *любые два представления любой сигнатуры σ в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами из $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ получаются друг из друга с помощью допустимых операций;*
- (**) *для любых двух весов λ_i, λ_j любая существенная сигнатура старшего веса $\lambda_i + \lambda_j$ представима в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.*

Тогда полугруппа Σ порождается существенными сигнатурами со старшими весами из $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

Эта теорема (при некоторых предположениях) позволяет в вопросе о конечной порожденности ограничиваться представлениями "высоты" 2, то есть представлениями со старшими весами $\lambda_i + \lambda_j$.

В главе 3 мы строим базисы ПБВ-типа для всех неприводимых представлений алгебр Ли $\mathfrak{g}$ типов B_n и D_n по некоторому неоднородному мономиальному порядку на $\mathbb{Z}^N$, пользуясь результатами главы 2.

Пусть $\pm \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, n$) — ненулевые веса тавтологического представления алгебры Ли D_n или B_n . Тогда положительные корни D_n суть

$$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad i < j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

а положительные корни B_n суть

$$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad i < j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$\varepsilon_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Положительные корни мы упорядочиваем следующим образом:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 - \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_1 + \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{для } D_n,$$

$$\text{корни } D_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \quad \text{для } B_n.$$

Мы сравниваем две сигнатуры алгебры D_n с одинаковым старшим весом следующим образом (мы переходим к следующему шагу, если на предыдущем шаге наборы экспонент совпадают):

1. сравниваем экспоненты, отвечающие корням $(\varepsilon_1 + \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)$, используя степенной лексикографический порядок,

2. сравниваем экспоненты, отвечающие корням $(\varepsilon_1 - \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$, используя степенной лексикографический порядок,
3. сравниваем экспоненты, отвечающие корням $(\varepsilon_1 + \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1})$, используя степенной лексикографический порядок,
4. сравниваем наборы экспонент, отвечающие корням $(\varepsilon_1 - \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-1})$, используя степенной лексикографический порядок,
-

2n-3. сравниваем экспоненты, отвечающие корню $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$,

2n-2. сравниваем экспоненты, отвечающие корню $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Мы сравниваем две сигнатуры алгебры B_n с одинаковым старшим весом следующим образом (мы переходим к следующему шагу, если на предыдущем шаге наборы экспонент совпадают):

1. сравниваем наборы экспонент, отвечающие корням $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, используя степенной лексикографический порядок,
2. сравниваем наборы экспонент, отвечающих длинным корням, по описанному выше правилу для D_n .

Теорема 6. Следующие утверждения верны для алгебр Ли типов D_n, B_n ($n \geq 2$):

Для выбранных нумерации положительных корней и мономиального порядка на сигнатурах полугруппа существенных сигнатур Σ насыщена и порождена существенными сигнатурами со старшими весами в

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n, 2\omega_{n-1}, 2\omega_n, \omega_{n-1} + \omega_n\} \quad \text{для } D_n$$

и в

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n, 2\omega_n\} \quad \text{для } B_n, \text{ соответственно.}$$

Здесь мы использовали стандартную нумерацию фундаментальных весов, описанную в главе 3. Таким образом, доказаны гипотезы о конечной порожденности и насыщенности полугруппы существенных сигнатур по отношению к выбранной нумерации и (неоднородному) мономиальному порядку.

Кроме того, мы явно находим неравенства, задающие полугруппы существенных сигнатур для алгебр Ли D_n и B_n . Пусть $p_{i,j}^\pm$ ($i < j$) — экспоненты сигнатуры D_n или B_n , отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, соответственно, $\sum k_i \omega_i$ — доминантный вес.

Теорема 7. Полугруппа существенных сигнатур Σ для алгебры Ли типа D_n задается неравенствами:

1. $p_{i,j}^{\pm} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, j \in \{i+1, \dots, n\},$
2. $p_{i,j}^+ + \sum_{k=j+1}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+1,k}^+ - p_{i+1,k}^-) \leq k_i,$
 $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\},$
3. $p_{i+1,j}^- + \sum_{k=j}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+1,k}^+ - p_{i+1,k}^-) \leq k_i,$
 $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\},$
4. $p_{i,i+1}^- + \sum_{k=i+2}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+1,k}^+ - p_{i+1,k}^-) \leq k_i,$
 $i \in \{1, \dots, n-1\},$
5. $p_{i,i+2}^- + p_{i,i+2}^+ + p_{i+1,i+2}^- + \sum_{k=i+3}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+2,k}^+ - p_{i+2,k}^-) \leq k_i + k_{i+1},$
 $i \in \{1, \dots, n-2\},$
6. $p_{i,i+1}^+ + \sum_{k=i+2}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- + p_{i+1,k}^+ + p_{i+1,k}^-) \leq k_i + k_{n-1} + k_n + 2 \sum_{j=i+1}^{n-2} k_j,$
 $i \in \{1, \dots, n-2\},$
7. $p_{n-1,n}^+ \leq k_n.$

Пусть s_i — экспоненты сигнатуры B_n , отвечающие корням ε_i . Положим $p_{i,i}^{\pm} := \frac{1}{2}s_i$.

Теорема 8. Полугруппа существенных сигнатур Σ для алгебры Ли типа B_n задается неравенствами:

1. $s_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, n\},$
2. $p_{i,j}^{\pm} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, j \in \{i+1, \dots, n\},$
3. $s_i - s_{i+1} + p_{i,j}^+ + \sum_{k=j+1}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+1,k}^+ - p_{i+1,k}^-) \leq k_i,$
 $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\},$
4. $s_i - s_{i+1} + p_{i+1,j}^- + \sum_{k=j}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+1,k}^+ - p_{i+1,k}^-) \leq k_i,$
 $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\},$
5. $s_i - s_{i+1} + p_{i,i+1}^- + \sum_{k=i+2}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+1,k}^+ - p_{i+1,k}^-) \leq k_i,$
 $i \in \{1, \dots, n-1\},$
6. $s_i + p_{i+1,i+2}^- + \sum_{k=i+2}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- - p_{i+2,k}^+ - p_{i+2,k}^-) \leq k_i + k_{i+1},$
 $i \in \{1, \dots, n-2\},$
7. $s_i - p_{i,i+1}^- + \sum_{k=i+1}^n (p_{i,k}^+ + p_{i,k}^- + p_{i+1,k}^+ + p_{i+1,k}^-) \leq k_i + k_n + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} k_j,$
 $i \in \{1, \dots, n-1\},$
8. $s_i \leq k_i, i \in \{1, \dots, n\}.$

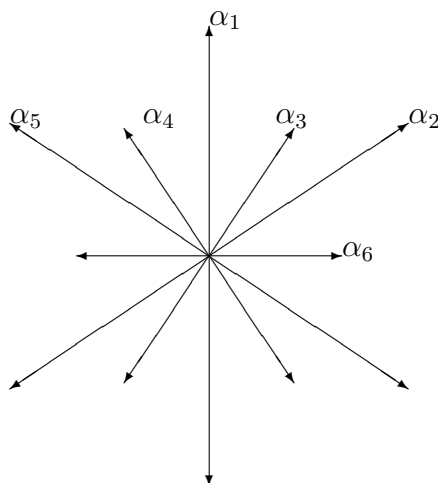
Следствие 9. Полугруппы существенных сигнатур для алгебр Ли типов D_n , B_n ($n \geq 2$) задаются явными неравенствами с коэффициентами ± 1 (или 0) перед экспонентами сигнатур.

Таким образом доказано обобщение гипотезы Винберга о явном виде неравенств, которыми задается полугруппа Σ .

Построение мономиальных базисов ПБВ-типа и доказательство этих теорем проводится методом математической индукции. Основная идея доказательства состоит в использовании стандартных регулярных вложений $SO_{2n} \subset SO_{2n+1}$ и $SO_{2n} \subset SO_{2n+2}$. Такие вложения позволяют рассматривать корни D_n как корни B_n и D_{n+1} . Это, в свою очередь, позволяет "продлить" нумерацию корней и порядок на сигнатурах с D_n на D_{n+1} и B_n так, что утверждения теорем остаются верными, если они были таковыми для D_n . Базой индукции является случай $D_2 = A_1 + A_1$.

Наконец, **глава 4** посвящена алгебре Ли типа G_2 . Мы строим однородные базисы ПБВ-типа для всех неприводимых представлений алгебры Ли типа G_2 .

Пронумеруем положительные корни G_2 , как показано на рисунке:



Мы сравниваем сигнатуры $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_6)$ и $\sigma' = (\lambda; p'_1, \dots, p'_6)$ фиксированного старшего веса, сравнивая лексикографически наборы $(q_1, \dots, q_6)$ и $(q'_1, \dots, q'_6)$, где

$$q_i = \sum_{j=1}^{7-i} p_j, \quad q'_i = \sum_{j=1}^{7-i} p'_j.$$

Для выбранных нумерации положительных корней и однородного мономиального порядка на сигнатурах мы доказываем следующую теорему:

Теорема 10. Полугруппа существенных сигнатур Σ для алгебры Ли типа G_2 насыщена и порождена существенными сигнатурами фундаментальных старших весов.

Кроме того, мы явно находим неравенства, задающие полугруппу существенных сигнатур.

Теорема 11. Полугруппа Σ для алгебры Ли типа G_2 задается неравенствами ($\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$):

1. $p_i \geq 0$
2. $p_5 \leq l$
3. $p_6 \leq k$
4. $p_2 + p_3 + p_6 \leq k + l$
5. $p_3 + p_4 + p_6 \leq k + l$
6. $p_4 + p_5 + p_6 \leq k + l$
7. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \leq k + 2l$
8. $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \leq k + 2l$

Здесь мы использовали стандартную нумерацию фундаментальных весов, при которой представление старшего веса ω_2 — это присоединенное представление. Таким образом доказаны все гипотезы Винберга для алгебры Ли типа G_2 .

Мы пользуемся результатами главы 2, доказывая, что полугруппа существенных сигнатур порождена сигнатурами фундаментальных старших весов. После этого мы находим неравенства, задающие рациональный конус, порожденный этими сигнатурами. Для этого мы находим образующие двойственного конуса с помощью стандартного алгоритма. Наконец, мы доказываем насыщенность полугруппы существенных сигнатур, используя явное описание существенных сигнатур фундаментальных весов.

Заключение

В диссертации рассмотрен вопрос построения базисов ПБВ-типа в конечномерных неприводимых представлениях простых алгебр Ли, для которых справедливы гипотезы Винберга или их обобщения. Базисы ПБВ-типа параметризуются полугруппами существенных сигнатур Σ . Существенные сигнатуры со старшим весом λ параметризуют базис в неприводимом представлении старшего веса λ . Важнейшей из гипотез Винберга является гипотеза о конечной порожденности полугруппы Σ .

В диссертации получены следующие основные результаты.

Получен общий критерий того, когда полугруппа Σ порождается сигнатурами фундаментальных старших весов, а также обобщение этого критерия для проверки порожденности этой полугруппы сигнатурами со старшими весами из фиксированного набора. Кроме того, найдены достаточные условия для выполнения этого критерия, которые удобно проверять.

С помощью этого критерия построен однородный базис ПБВ-типа в каждом неприводимом представлении алгебры Ли типа G_2 , и доказаны все гипотезы Винберга. А именно, доказано, что полугруппа Σ , во-первых, насыщена, во-вторых, порождена сигнатурами фундаментальных старших весов и, в-третьих, задается неравенствами определенного вида, которые явно указаны в диссертации.

С помощью обобщенного критерия построены базисы ПБВ-типа во всех неприводимых представлениях алгебр Ли типов B_n и D_n , и доказаны обобщенные гипотезы Винберга. А именно, доказано, что полугруппы Σ , во-первых, насыщены, а во-вторых, порождены сигнатурами старших весов, "близких" к фундаментальным. Кроме того, явно найдены неравенства, задающие эти полугруппы.

Таким образом, для простых алгебр Ли типов G_2 , B_n и D_n явно найдены неравенства, задающие многогранники, целые точки которых параметризуют базисы в каждом неприводимом конечномерном представлении. Для этих базисов выполнены свойства, аналогичные свойствам базисов Гельфанда-Цейтлина, описанным в начале автореферата.

Дальнейшая разработка тематики, которой посвящена диссертация, включает в себя разбор случаев простых алгебр Ли типов B_n , F_4 . Для этих алгебр Ли нужно понять, существует ли однородный базис ПБВ-типа, для которого верны все гипотезы Винберга. Если такой базис существует, то возникает задача его построения. Для этого удобно использовать критерий, полученный в диссертации. Если однородного базиса ПБВ-типа не существует, то возникает задача построения неоднородных базисов ПБВ-типа, для которых будут верны обобщенные гипотезы Винберга. Последняя задача актуальна также для простых алгебр Ли типа E_n ($n = 6, 7, 8$).

Благодарности

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Дмитрию Андреевичу Тимашеву за постановку задачи, научные идеи, постоянную поддержку и внимание к работе.

Автор выражает благодарность профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу и профессору Ивану Владимировичу Аржанцеву за замечательные лекции и семинары, пробудившие интерес автора к выбранной тематике.

Автор благодарен сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова за создание творческой атмосферы, способствующей научной и учебной деятельности.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы G_2* , тезисы докладов Четвертой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 19-21, Издательство Московского университета, Москва, 2014.
- [2] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы G_2* , Матем. заметки **97** (2015), № 1, 35-47.
- [3] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений B_n и D_n* , материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017», МАКС Пресс, Москва, 2017, https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10841/uid146879_report.pdf.
- [4] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений простых алгебр Ли*, УМН **73** (2018), № 5, 187-188.
- [5] А. А. Gornitskii, *Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of D_4* , preprint, 2015, arXiv:1507.07498.
- [6] А. А. Gornitskii, *Essential signatures and monomial bases for B_n and D_n* , Journal of Lie Theory **29** (2019), 277-302.