УДК 539.3

Е.Ю. МИХАЙЛОВА, Г.В. ФЕДОТЕНКОВ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ (НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ)

Исследуется сверхзвуковой этап (скорость расширения области контакта не меньше скорости волн расширения-сжатия в полупространстве) взаимодействия сферической оболочки типа Тимошенко (ударник) и упругого полупространства (основание). С помощью разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и их производным построена система разрешающих уравнений. Разработан и реализован численно-аналитический алгоритм ее решения. Подобная задача рассматривалась в работе [1], где исходная задача заменялась задачей с периодической системой ударников.

Ключевые слова: нестационарная контактная задача, функция влияния, сферическая оболочка типа Тимошенко, упругое полупространство.

1. Постановка задачи. В начальный момент времени тонкая линейно упругая сферическая оболочка типа Тимошенко (ударник), двигаясь с начальной скоростью V_0, под действием направленной по оси симметрии ударника внешней результирующей силы R_e входит в контакт с однородным изотропным линейно упругим полупространством. Векторы начальной скорости и внешней силы направлены нормально к невозмущенной поверхности полупространства. Первоначально оболочка и полупространство находятся в недеформированном состоянии.

Движение ударника рассматривается в сферической системе координат $r_0, \theta, \tilde{\vartheta}$, причем начало радиус-вектора r_0 совпадает с центром масс оболочки O_0. Для описания движения полупространства используется цилиндрическая система координат $z, r_1, \tilde{\vartheta}$ с началом в точке O_1, принадлежащей его границе, и осью z, проходящей через точку O_0 и направленной вглубь полупространства (Фиг. 1).

Все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрих соответствует безразмерным величинам; величины с индексом $k=1$ относятся к полупространству, а с $k=0$ - к оболочке):

$$\varphi' = \frac{\varphi}{R^2},\ \psi' = \frac{\psi}{R^2},\ \eta_i = \frac{c_{11}}{c_{i1}}\ (i=1,2),\ z' = \frac{z}{R},\ \tau' = \frac{c_{11}\tau}{R},\ u_k' = \frac{u_k}{R}$$

$$w_k' = \frac{w_k}{R},\ \sigma_{\alpha\beta}' = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\lambda_1 + 2\mu_1}\ (\alpha, \beta = r_1, \vartheta, z),\ \alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k}$$

$$\beta_k = \frac{\mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k},\ r' = \frac{r}{R},\ u_c' = \frac{u_c}{R},\ h' = \frac{h}{R},\ V_0' = \frac{V_0}{C_{11}},\ b' = \frac{b}{R}$$

$$p' = \frac{p}{\lambda_0 + 2\mu_0},\ \gamma^2 = \frac{{c_{11}}^2}{{c_{10}}^2},\ c_{1k}^2 = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k},\ c_{2k}^2 = \frac{\mu_k}{\rho_k},\ a' = \frac{h^2}{12R^2}$$

$$m_0' = \frac{m_0}{\rho_1 R^3},\ R_e' = \frac{R_e}{\rho_1 c_{11}^2 R^2},\ R_a' = \frac{R_a}{\rho_1 c_{11}^2 R^2},\ \tilde{\gamma} = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_1 + 2\mu_1}$$

$$M'_{\alpha\alpha}=\frac{M_{\alpha\alpha}}{Rh(\lambda_0+2\mu_0)},\ \ \tilde{T}'_{\alpha\alpha}=\frac{\tilde{T}_{\alpha\alpha}}{h(\lambda_0+2\mu_0)}\quad(\alpha=\theta,\vartheta)$$

$$T'_{\alpha\alpha}=\frac{T_{\alpha\alpha}}{h(\lambda_0+2\mu_0)},\ Q'=\frac{Q}{h(\lambda_0+2\mu_0)},\ \kappa'_{\alpha\alpha}=\kappa_{\alpha\alpha}R$$

Здесь R - радиус оболочки; c_{1k} и c_{2k} - скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; φ,ψ - скалярный и векторный потенциалы упругих смещений полупространства; $\sigma_{\alpha\beta}$ - компоненты тензора напряжений полупространства; ρ_k - плотность; $b(\tau)$ - радиус области контакта; t - время; h - толщина оболочки; λ_k,μ_k - упругие постоянные Ляме; w_k,u_k - нормальные и тангенциальные перемещения; p - нормальное контактное напряжение; m_0 - масса оболочки; R_a - результирующая и контактная сила; $T_{\alpha\alpha},\tilde{T}_{\alpha\alpha},M_{\alpha\alpha},\kappa_{\alpha\alpha}$ - ненулевые компоненты тензоров тангенциальных усилий, их составляющих, изгибающих моментов, изменения кривизны; Q - перерезывающая сила. Далее везде штрихи опущены.

Осесимметричное движение полупространства описывается известными соотношениями теории упругости (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ), в которые входят уравнения движения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\ddot{\varphi},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r^2}=\eta_2^2\ddot{\psi}\qquad(1.1)$$

связь перемещений и потенциалов

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z},\ w_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\psi + r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{1.2}$$

связь компонентов тензора напряжений и перемещений

$$\begin{gathered}\sigma_{rz} = \beta_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\right),\ \sigma_{rr} = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \alpha_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{u_1}{r}\right)\\ \sigma_{zz} = \frac{\partial w_1}{\partial z} + \alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r}\right),\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_1}{r} + \alpha_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\right)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Соответствующие соотношения для оболочки включают в себя [2] уравнения движения

$$\gamma^2\ddot{u}_0 = \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \left(T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta}\right)\mathrm{ctg}\theta + Q$$

$$\gamma^2\ddot{w}_0 = -T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial Q}{\partial\theta} + Q\mathrm{ctg}\theta + \frac{p}{h} \tag{1.4}$$

$$\gamma^2 a\ddot{\chi} = \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta} - \left(M_{\vartheta\vartheta} - M_{\theta\theta}\right)\mathrm{ctg}\theta - Q$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0,\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = u_0\mathrm{ctg}\theta + w_0, \beta = \chi - \xi,\ -\xi = \frac{\partial w_0}{\partial\theta} - u_0\\ \kappa_{\theta\theta} = \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{\partial u_0}{\partial\theta} - w_0,\ \kappa_{\vartheta\vartheta} = \mathrm{ctg}\theta\left(\chi - u_0\right) - w_0\end{gathered} \tag{1.5}$$

физические соотношения

$$\tilde{T}_{\vartheta\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0\varepsilon_{\theta\theta},\ \tilde{T}_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} + \alpha_0\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$$

$$M_{\theta\theta} = a\left(\kappa_{\theta\theta} + \alpha_0\kappa_{\vartheta\vartheta}\right),\ M_{\vartheta\vartheta} = a\left(\kappa_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0\kappa_{\theta\theta}\right) \tag{1.6}$$

$$T_{\theta\theta} = \tilde{T}_{\theta\theta} - M_{\theta\theta},\ T_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} - M_{\vartheta\vartheta},\ Q = \beta_0 k^2\beta,\ k^2 = 5/6$$

Здесь $\varepsilon_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$ - ненулевые компоненты тензоров деформаций; χ - угол поворота нормального к срединной поверхности оболочки волокна.

К этим соотношения добавляется уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела

$$m_0\ddot{u}_c = R_e + R_a,\ R_a(\tau) = 2\pi\tilde{\gamma}\int\limits_0^{b(\tau)} p(r,\tau)r\ dr \tag{1.7}$$

где u_c - глубина проникания оболочки как абсолютно твердого тела.

Начальные условия в рассматриваемой задаче имеют следующий вид:

$$u_c\big|_{\tau=0} = 0,\ \dot{u}_c\big|_{\tau=0} = V_0,\ u_0\big|_{\tau=0} = 0,\ w_0\big|_{\tau=0} = 0,\ \dot{u}_0\big|_{\tau=0} = -V_0\sin\theta \tag{1.8}$$

$$\dot{w}_0\big|_{\tau=0} = V_0\cos\theta,\ \varphi\big|_{\tau=0} = 0,\ \dot{\varphi}\big|_{\tau=0} = 0,\ \psi\big|_{\tau=0} = 0,\ \dot{\psi}\big|_{\tau=0} = 0$$

В бесконечно удаленной точке полупространства возмущения отсутствуют.

Линеаризация граничных условий заключается в снесении их на недеформированные граничные поверхности и учете малости области контакта. Полагая, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания (отсутствует трение между взаимодействующими поверхностями) и вне зоны взаимодействия поверхности полупространства и оболочки свободны от напряжений, приходим к следующим условиям:

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = \tilde{\gamma}p \quad (|r| \le b(\tau)),\ \ \sigma_{zz}\big|_{z=0} = 0 \quad (|r| > b(\tau))$$

$$\sigma_{z\vartheta}\big|_{z=0} = 0 \quad (r \in (-\infty,\infty)),\ \ w_1 = (w_0+1)\cos\theta - 1 \approx w_0 \quad (|r| \le b(\tau)) \tag{1.9}$$

Пренебрегая деформацией свободных поверхностей ударника и полупространства, получаем, что область контакта является кругом с радиусом

$$b(\tau) = \sqrt{u_c(2 - u_c)} \tag{1.10}$$

Соотношения (1.1) - (1.10) образуют замкнутую начально-краевую задачу.

2. Система разрешающих уравнений. Ограничимся начальным (сверхзвуковым) этапом взаимодействия, на котором в силу выпуклости ударника скорость расширения области контакта не меньше скорости волн расширения-сжатия в упругой среде [3]. Поэтому перемещения граничных поверхностей ударника и полупространства не выходят за границу области контакта. При этом справедливо интегральное представление контактного напряжения в виде двумерной свертки по времени и радиусу производной функции влияния $\mathit{\Gamma}$ для полупространства со скоростью нормальных перемещений оболочки [3]:

$$p = \tilde{\gamma}^{-1}\dot{w}_0 ** \dot{\mathit{\Gamma}} \tag{2.1}$$

Учитывая осевую симметрию задачи, равенство (2.1) запишем следующим образом:

$$p(r,\tau) = \frac{1}{\tilde{\gamma}}\left[p_1(r,\tau) + p_2(r,\tau) + p_3(r,\tau)\right],\ p_1(r,\tau) = -\dot{w}_0 H(\tau) H\left[b(\tau) - r\right]$$

$$p_2(r,\tau) = \int_0^{\tau} \dot{w}_0\left[b(\tau), t\right] \vartheta\left[r, b(\tau), \tau - t\right] dt \tag{2.2}$$

$$p_3(r,\tau) = -\int_0^\tau dt \int_0^{b(\tau)} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \rho} \vartheta\left(r,\rho,\tau - t\right) d\rho$$

$$\vartheta(r,\rho,\tau) = \sum_{q=1}^{2} \vartheta_{rq}(r,\rho,\tau) + \frac{1}{\tau}\vartheta_s(r,\rho,\tau) \qquad (2.3)$$

где слагаемые в (2.3) имеют вид при $r > 0$

$$\vartheta_{rq}(r,\rho,\tau) = \frac{1}{r-\rho}\vartheta_{rq1}(r,\rho,\tau) + \frac{1}{(r-\rho)^3}\vartheta_{rq2}(r,\rho,\tau) + \frac{1}{\tau}\frac{1}{r-\rho}\vartheta_{rq3}(r,\rho,\tau) \qquad (2.4)$$

$$\vartheta_{rq1}(r,\rho,\tau) = \frac{d_q}{\pi\eta^4}\left[F(\delta_q,m)H(\varphi_{1q}(r,\rho,\tau)) + K(m)H(\varphi_{2q}(r,\rho,\tau))\right]H(\varphi_q(r,\rho,\tau))$$

$$\vartheta_{rq2}(r,\rho,\tau) = \frac{b_q}{\pi\eta^4}\left[E(\delta_q,m)H(\varphi_{1q}(r,\rho,\tau)) + E(m)H(\varphi_{2q}(r,\rho,\tau))\right]H(\varphi_q(r,\rho,\tau))$$

$$\vartheta_{rq3}(r,\rho,\tau) = \frac{1}{\pi\eta^4}c_q H(\varphi_{1q}(r,\rho,\tau))H(\varphi_q(r,\rho,\tau))$$

$$\vartheta_s(r,\rho,\tau) = \vartheta_{s0}(r,\rho,\tau)H(\varphi_{s1}(r,\rho,\tau))H(\varphi_{s2}(r,\rho,\tau))$$

$$\vartheta_{s0}(r,\rho,\tau) = -\frac{(\eta^2-2)^2}{\pi\eta^4}\frac{c_0}{\sqrt{r+\rho-\tau}\sqrt{\tau^2-(r-\rho)^2}}$$

$$c_0 = \frac{r^2-\rho^2-\tau^2}{\sqrt{r+\rho+\tau}}, m = \frac{4r\rho}{\left(r+\rho\right)^2}, \sin^2\delta_q = \frac{\left(r+\rho\right)^2\left[\left(\tau/\eta_q\right)^2-(r-\rho)^2\right]}{4r\rho\left(\tau/\eta_q\right)^2}$$

$$\varphi_q(r,\rho,\tau) = \tau - \eta_q\left|r-\rho\right|, \varphi_{1q}(r,\rho,\tau) = \eta_q(r+\rho) - \tau, \varphi_{2q}(r,\rho,\tau) = \tau - \eta_q(r+\rho)$$

$$\varphi_{s1}(r,\rho,\tau) = r+\rho-\tau, \varphi_{s2}(r,\rho,\tau) = \tau - \left|r-\rho\right|$$

$$d_1 = \frac{2}{r+\rho}\left[\frac{\tau^2}{r+\rho} - \left(r-\rho\right)\left(2\eta^2-1\right)\right], d_2 = \frac{2}{r+\rho}\left[(r-\rho)\eta^2 - \frac{\tau^2}{r+\rho}\right]$$

$$c_1 = -2\frac{\sqrt{(r+\rho)^2-\tau^2}\sqrt{\tau^2-(r-\rho)^2}}{r+\rho}$$

$$c_2=-2\eta\frac{\sqrt{\eta^2(r+\rho)^2-\tau^2}\sqrt{\tau^2-\eta^2(r-\rho)^2}}{r+\rho}$$

$$b_1=2\left\{\tau^2\left[\frac{3(r-\rho)}{r+\rho}-\frac{2(r-\rho)^2}{(r+\rho)^2}-2\right]+(2\eta^2-1)(r-\rho)^2\right\}$$

$$b_2=2\left\{\tau^2\left[-\frac{3(r-\rho)}{r+\rho}+\frac{2(r-\rho)^2}{(r+\rho)^2}+2\right]-\eta^2(r-\rho)^2\right\}$$

и при $r=0$

$$\vartheta_{r1}(0,\rho,\tau)=\frac{2}{\eta^4\rho^3}\left[3\tau^2-(2\eta^2-1)\rho^2\right],\ \vartheta_{r2}(0,\rho,\tau)=-\frac{2}{\eta^4\rho^3}\left[(3\tau^2-\eta^2\rho^2\right]$$

$$\vartheta_s(0,\rho,\tau)=\frac{(\eta^2-2)^2}{\eta^4}\delta(\tau-\rho) \qquad (2.5)$$

В последних равенствах $H(x)$ - функция Хевисайда, $F(\delta,m),E(\delta,m),K(m),E(m)$ - неполные и полные эллиптические интегралы первого и второго рода [4].

При таком подходе система разрешающих уравнений включает в себя соотношения (2.1) и (1.4)-(1.10). Для ее решения искомые функции раскладываем по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и их производным:

$$\begin{Vmatrix} w_0(\theta,\tau) \\ p(\theta,\tau) \\ \vartheta(\theta,\theta_*,\tau-t) \end{Vmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Vmatrix} w_{0n}(\tau) \\ p_n(\tau) \\ \vartheta_n(\theta_*,\tau-t) \end{Vmatrix}P_n(\cos\theta)$$

$$\begin{Vmatrix} u_0(\theta,\tau) \\ \chi(\theta,\tau) \end{Vmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Vmatrix} u_{0n}(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{Vmatrix}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \qquad (2.6)$$

Здесь и далее учитывается малость угла θ и используются приближенные равенства $r\approx\sin\theta$, $\rho\approx\sin\theta_*$.

Подстановка рядов (2.6) в (1.5), (1.6), а затем в (1.4) приводит к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов этих рядов:

$$\gamma^2 \ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{U}_n + \mathbf{P}_n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$\mathbf{L}_n = \left\| L_{ijn} \right\|_{3\times 3}, \mathbf{U}_n = \left\| u_{0n}, w_{0n}, \chi_n \right\|^T, \; h\tilde{\gamma}\mathbf{P}_n = \left\| 0, \sum_{i=1}^{3} p_{in}, 0 \right\|^T \tag{2.7}$$

$$L_{11n} = (1+a)\left[(1-\alpha_0) - n(n+1)\right] - \beta_0 k^2, \; L_{12} = (1+\alpha_0)(1+a) + \beta_0 k^2$$

$$L_{13n} = a\left[\alpha_0 - 1 + n(n+1)\right] + \beta_0 k^2, \; L_{21n} = n(n+1)\left[(1+a)(1+\alpha_0) + \beta_0 k^2\right]$$

$$L_{22n} = -\left[2(1+\alpha_0)(1+a) + \beta_0 k^2 n(n+1)\right] \tag{2.8}$$

$$L_{23n} = -n(n+1)\left[(\alpha_0+1)a + \beta_0 k^2\right], \; L_{32n} = -2 - a^{-1}\beta_0 k^2$$

$$L_{31n} = -L_{33n} = n(n+1) - 1 + \alpha_0 + a^{-1}\beta_0 k^2$$

При этом коэффициенты разложения в ряд составляющих контактного напряжения принимают следующий вид:

$$p_{1n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} H(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \dot{w}_{ok}(\tau) \int_0^{b(\tau)} P_k(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$p_{2n}(\tau) = \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_{ok}(t) P_k(\cos b(t)) dt \int_0^{\pi} \vartheta(\theta, b(t), \tau - t) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{2.9}$$

$$p_{3n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_{ok}(t) dt \int_0^{b(t)} \frac{dP_k(\cos\theta_*)}{d\theta_*} d\theta_* \int_0^{\pi} \vartheta(\theta, \theta_*, \tau - t) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Из формул (2.3) и (2.4) следует, что $p_{2n}(\tau)$и $p_{3n}(\tau)$ содержат интегралы с сингулярными особенностями порядка -1 и -3, а также с интегрируемыми особенностями порядка $-1/2$.

С учетом (2.6) уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела запишется так:

$$m_0 \ddot{u}_c = R_e + \pi \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=0}^{\infty} p_{in}(\tau) \int\limits_{0}^{b(\tau)} P_n\left(\cos\theta\right) \sin(2\theta) d\theta \tag{2.10}$$

3. Метод и алгоритм решения. Для решения системы уравнений (2.7)-(2.10) используем модифицированный метод Рунге-Кутта четвертого порядка и принцип усечения бесконечной системы уравнений [5].

Ряды (2.6) заменяем конечными суммами с верхним пределом суммирования, равным N. Сводя систему уравнений (2.7)-(2.10) к системе первого порядка, получаем систему, содержащую $6\;\;N+1\;\;+2$ обыкновенных дифференциальных уравнений, которая дополняется алгебраическим уравнением (1.10). Первые $6\;\;N+1$ уравнений можно представить в матричной форме, имеющей блочную структуру:

$$\gamma^2 \dot{\mathbf{W}} = \mathbf{MW} + \mathbf{Q} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{W} = \left\| \mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, ..., \mathbf{W}_N, \right\|^T, \ \mathbf{W}_n = \left\| u_{0n}, w_{0n}, \chi_n, \tilde{u}_{0n}, \tilde{w}_{0n}, \tilde{\chi}_n \right\|^T$$

$$\tilde{u}_{0n} = \dot{u}_{0n}, \ \tilde{w}_{0n} = \dot{w}_{0n}, \ \tilde{\chi}_{0n} = \dot{\chi}_{0n}$$

$$\mathbf{Q} = \left\| \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_N \right\|^T, \ \mathbf{Q}_n = \frac{1}{h\tilde{\gamma}} \left\| 0,0,0,0, \sum_{i=1}^{3} p_{in}, 0 \right\|^T$$

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \mathbf{M}_0 & & & & \\ & \mathbf{M}_1 & & \mathbf{0} & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & \mathbf{0} & & & \cdot & \\ & & & & & \mathbf{M}_N \end{Vmatrix}, \ \mathbf{M}_n = \left\| M_{ijn} \right\|_{6\times 6} = \begin{Vmatrix} & \mathbf{0} & & | & 1 & 0 & 0 \\ & & & | & 0 & 1 & 0 \\ & & & | & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ L_{11n} & L_{12n} & L_{13n} & | & & & \\ L_{21n} & L_{22n} & L_{23n} & | & & \mathbf{0} & \\ L_{31n} & L_{32n} & L_{33n} & | & & & \end{Vmatrix}$$

К ним добавляется вытекающая из (2.10) система уравнений движения оболочки как абсолютно твердого тела:

$$\dot{u}_c = \tilde{u}_c, \quad \dot{\tilde{u}}_c = \frac{1}{m_0}\left(R_e + \pi \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=0}^{N} p_{in}(\tau) \int_0^{b(\tau)} P_n\left(\cos\theta\right)\sin(2\theta) d\theta \right) \qquad (3.2)$$

и уравнение для определения радиуса области контакта (1.10).

Пятое уравнение системы (3.1) в каждом блоке с номером n является интегро-дифференциальным, так как в его правую часть входят неизвестные функции $\tilde{w}_{0n}(\tau) = \dot{w}_{0n}(\tau)$ под знаком интеграла (см. (2.9)). При этом правая часть содержит все $N+1$ функцию $\tilde{w}_{0n}(\tau)$, $n = \overline{0,N}$, поэтому система решается совместно для всех $6(N+1)+3$ уравнений.

Отличие модифицированного метода от классического заключается в том, что наряду с применением классической схемы [5] необходимо построение и использование квадратурных формул для вычисления интегралов в интегро-дифференциальных уравнениях системы (3.1), (3.2). При построении квадратурных формул используется явное представление для полиномов Лежандра [4] :

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} . \tag{3.3}$$

Временной координате τ ставятся в соответствие дискретные моменты времени $\tau_m = \delta_m m$, где δ_m - шаг по времени. Искомые коэффициенты рядов перемещений и их скоростей, радиус границы области контакта, глубина погружения ударника как абсолютно твердого тела и ее скорость заменяются дискретными аналогами – значениями в дискретных моментах времени: $u_{0nm} = u_{0n}(\tau_m)$, $w_{0nm} = w_{0n}(\tau_m)$, $\chi_{nm} = \chi_n(\tau_m)$, $\tilde{u}_{0nm} = \tilde{u}_{0n}(\tau_m)$, $\tilde{w}_{0nm} = \tilde{w}_{0n}(\tau_m)$, $\tilde{\chi}_{nm} = \tilde{\chi}_n(\tau_m)$, $b_m = b(\tau_m)$, $u_{cm} = u_c(\tau_m)$, $\tilde{u}_{cm} = \tilde{u}_c(\tau_m)$.

Квадратурные формулы для интегралов, входящих в правые части уравнений (3.1) и (3.2) строятся с использованием представления (3.3), метода весовых коэффициентов и канонической регуляризации [6] для получения конечных значений сингулярных интегралов (см. (2.3), (2.4)):

$$\begin{aligned} p_{1nm} = p_{1n}(\tau_m) \approx -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{N} \dot{w}_{0_{km}} 2^{-n-k} \sum_{m_3=0}^{[k/2]} \sum_{m_2=0}^{[n/2]} (-1)^{m_2+m3} \frac{(2k-2m_3)!}{m_3!(k-m_3)!(k-2m_3)!} \times \\ \times \frac{(2n-2m_2)!}{m_2!(n-m_2)!(n-2m_2)!} \left[\frac{1-(\cos b_m)^{k+n-2(m_2+m_3)+1}}{k+n-2(m_2+m_3)+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2nm} = p_{2n}(\tau_m) \approx \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{w}_{0_{ki}} P_k(\cos b_i) \sum_{j=1}^{l} P_n(\cos\theta_j) \sin\theta_j \times \\ \times \Big[\delta_m \left\{ \omega_{1j}(b_i) f_1(\theta_j, b_i, \tau - t_i) + \omega_{3j}(b_i) f_2(\theta_j, b_i, \tau - t_i) \right\} + \\ + \tilde{\omega}_i \left\{ \omega_{1j}(b_i) f_3(\theta_j, b_i, \tau - t_i) + \delta_l f_4(\theta_j, b_i, \tau - t_i) \right\} \Big] \end{aligned}$$

$$p_{3nm}=p_{3n}(\tau_m)\approx-\frac{2n+1}{2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{m-1}\dot{w}_{0_{ki}}\sum_{i_1=1}^{m_1}\Big(P_k(\cos\theta_{*i_1})-P_k(\cos\theta_{*i_1-1})\Big)\sum_{j=1}^{l}P_n(\cos\theta_j)\sin\theta_j\times$$

$$\times\Big[\delta_m\left\{\omega_{1j}(\theta_{*i_1})\,f_1(\theta_j,\theta_{*i_1},\tau-t_i)+\omega_{3j}(\theta_{*i_1})\,f_2(\theta_j,\theta_{*i_1},\tau-t_i)\right\}+$$

$$+\tilde{\omega}_i\left\{\omega_{1j}(\theta_{*i_1})\,f_3(\theta_j,\theta_{*i_1},\tau-t_i)+\delta_l\;f_4(\theta_j,\theta_{*i_1},\tau-t_i)\Big)\right\}\Big]$$

$$\delta_l=\frac{\pi}{l},\delta_{m_1}=\frac{b_i}{m_1},\theta_j=j\delta_l,t_i=i\delta_m,\tau_m=m\delta_m,\theta_{*i_1}=i_1\delta_{m_1}$$

$$f_1(\theta_j,x,\tau-t_i)=\sum_{q=1}^{2}\vartheta_{rq1}(\theta_j,x,\tau-t_i)$$

$$f_2(\theta_j,x,\tau-t_i)=\sum_{q=1}^{2}\vartheta_{rq2}(\theta_j,x,\tau-t_i)$$

$$f_3(\theta_j,x,\tau-t_i)=\sum_{q=1}^{2}\vartheta_{rq3}(\theta_j,x,\tau-t_i)$$

$$f_4(\theta_j,x,\tau-t_i)=\vartheta_s(\theta_j,x,\tau-t_i)$$

Весовые коэффициенты имеют следующий вид:

$$\omega_{n_1j}\left(x\right)=\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\frac{d\theta}{\left(\sin\theta-x\right)^{n_1}},\ n_1=1,3;\quad\tilde{\omega}_i=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{dt}{\tau_m-t}$$

К системе уравнений (3.1). (3.2), (1.10) добавляются начальные условия:

$$\mathbf{W}_n\left(0\right)=\begin{cases}\left\|0,0,0,0,0,0\right\|^T,\ n\neq1\\ \left\|0,0,0,V_0,V_0,0\right\|^T,\ n=1\end{cases},\ u_c\left(0\right)=0,\ \tilde{u}_c\left(0\right)=V_0,\ b\left(0\right)=0.\qquad(3.4)$$

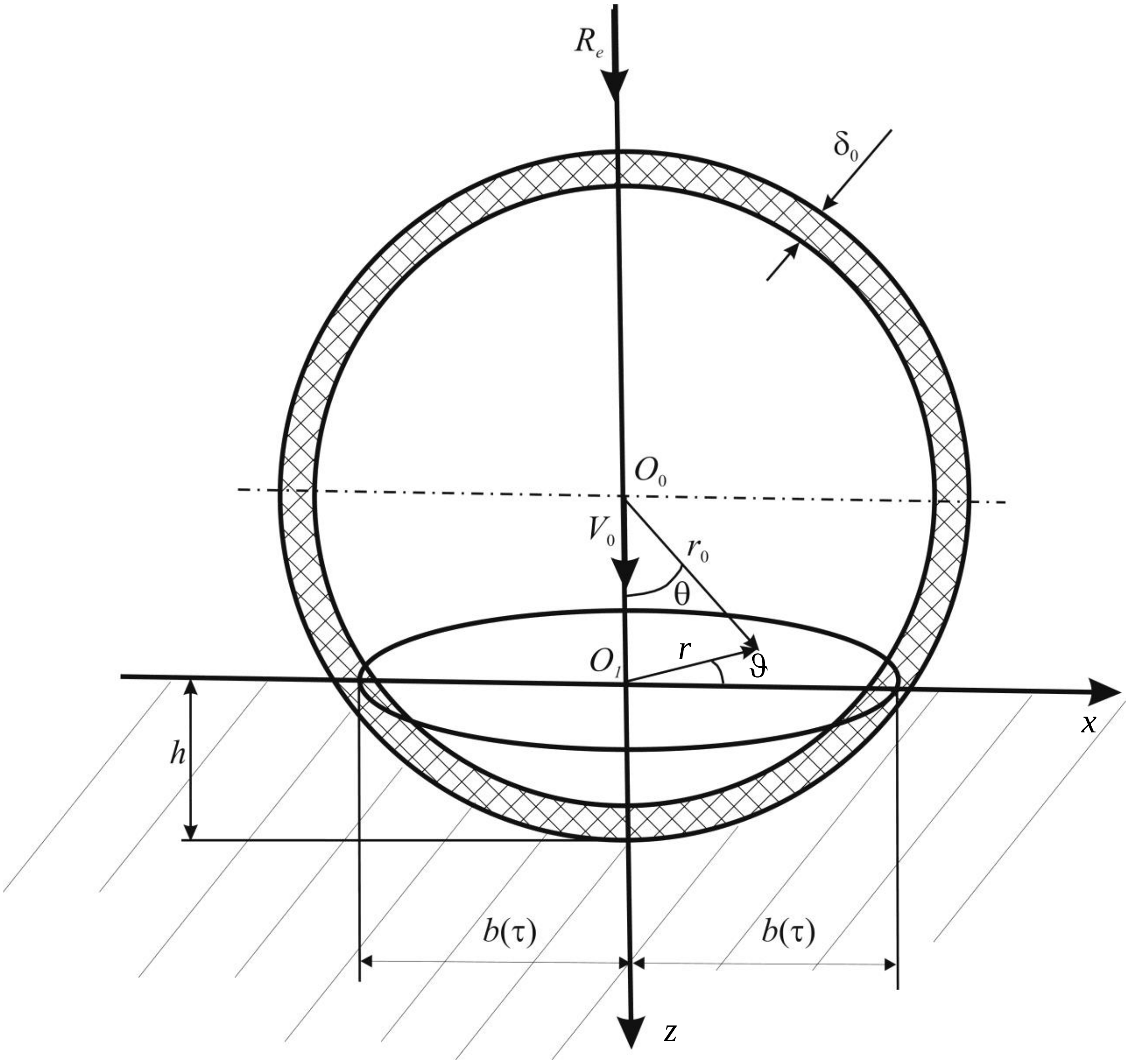
Предложенный алгоритм расчета реализован в среде Delphi. При этом значения полных эллиптических интегралов вычисляются с помощью аппроксимации их многочленами ($|\varepsilon(m)| \le 2\cdot 10^{-8}$, $0 \le m < 1, m_1 = 1 - m$):

$$K(m) = \left[a_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_4 m_1^4\right] + \left[b_0 + b_1 m_1 + \ldots + b_4 m_1^4\right]\ln(1/m_1) + \varepsilon(m),$$

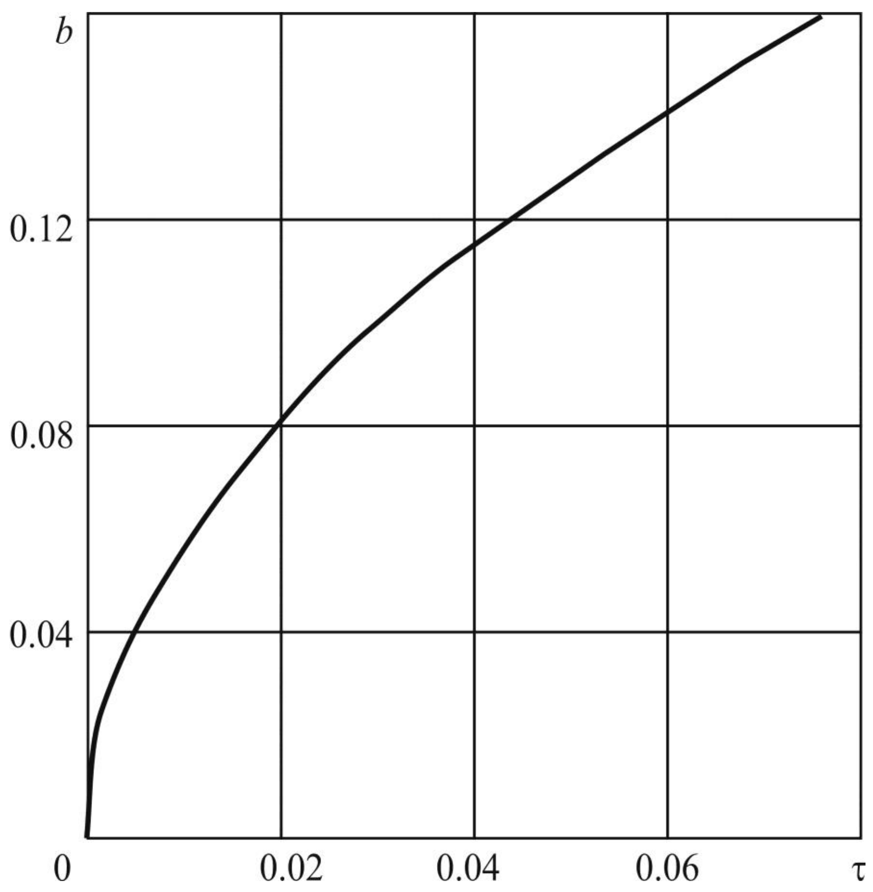
$$E(m) = \left[1 + a_1 m_1 + \ldots + a_4 m_1^4\right] + \left[b_1 m_1 + \ldots + b_4 m_1^4\right]\ln(1/m_1) + \varepsilon(m)$$

Значения коэффициентов этих аппроксимаций приведены в [4]. Для вычисления неполных эллиптических интегралов используется метод Симпсона [5].

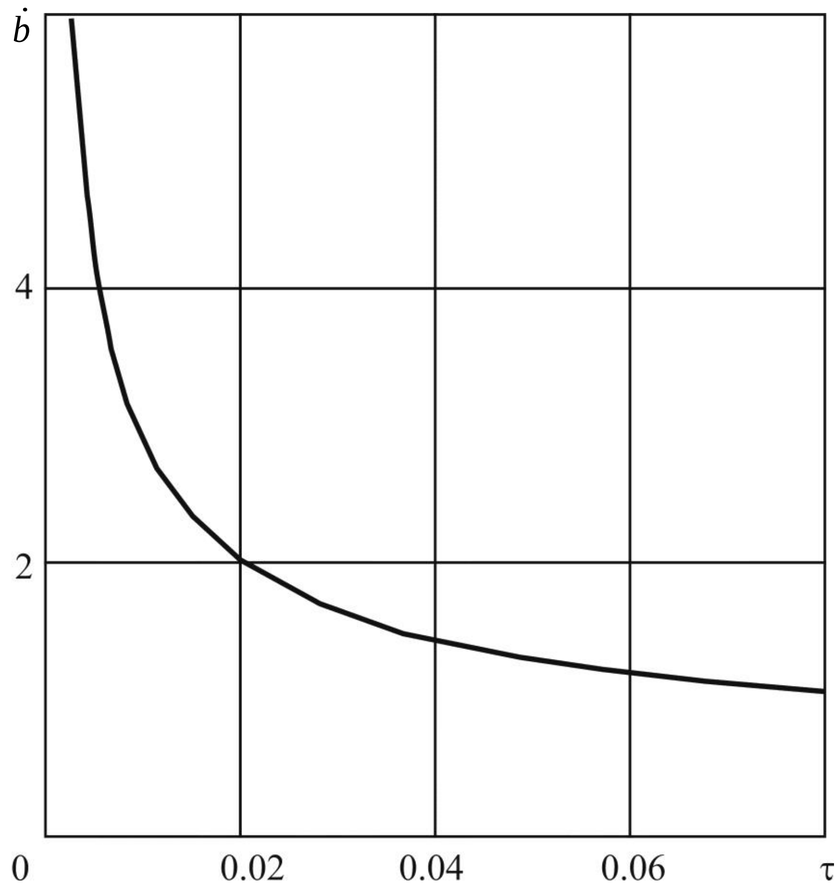
3. Пример. В качестве примера рассмотрена задача со следующими значениями безразмерных параметров (материалы оболочки и полупространства одинаковы): $m_0 = 0.62832$, $h = 0.05$, $V_0 = 0{,}01$, $R_e = 0.1$, $\gamma^2 = 1$, $\lambda/\mu = 2$, $\tilde{\gamma} = 1$. На Фиг. 2 - 5 представлены графики изменения во времени соответственно радиуса области контакта $b(\tau)$ и его производной $\dot{b}(\tau)$, нормального контактного напряжения $p(\tau)$ в лобовой точке и перемещения ударника как абсолютно твердого тела $u_c(\tau)$; а на Фиг.6, 7 изображены зависимости от угла θ соответственно нормальных перемещений $w_0(\theta)$ и нормального контактного напряжения $p(\theta)$ в конечный момент времени сверхзвукового этапа взаимодействия $\tau = 0.076$. В расчетах удерживалось четыре члена ряда в разложениях по полиномам Лежандра и их производным, так как учет большего числа членов дает незначительное уточнение результатов.



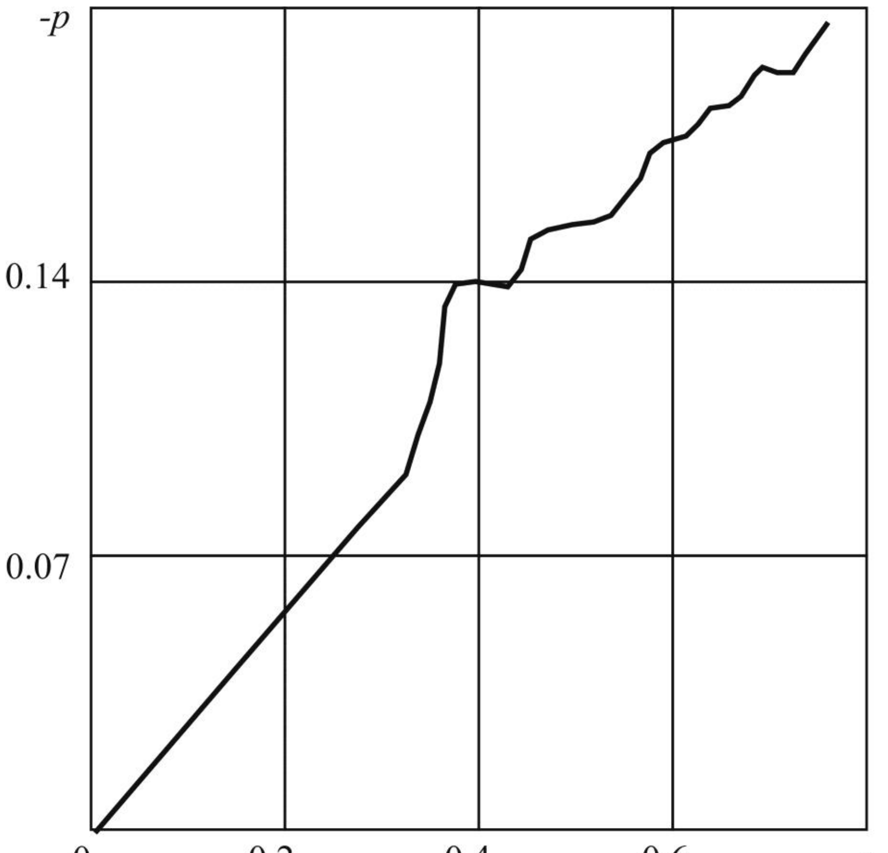
Фиг.1



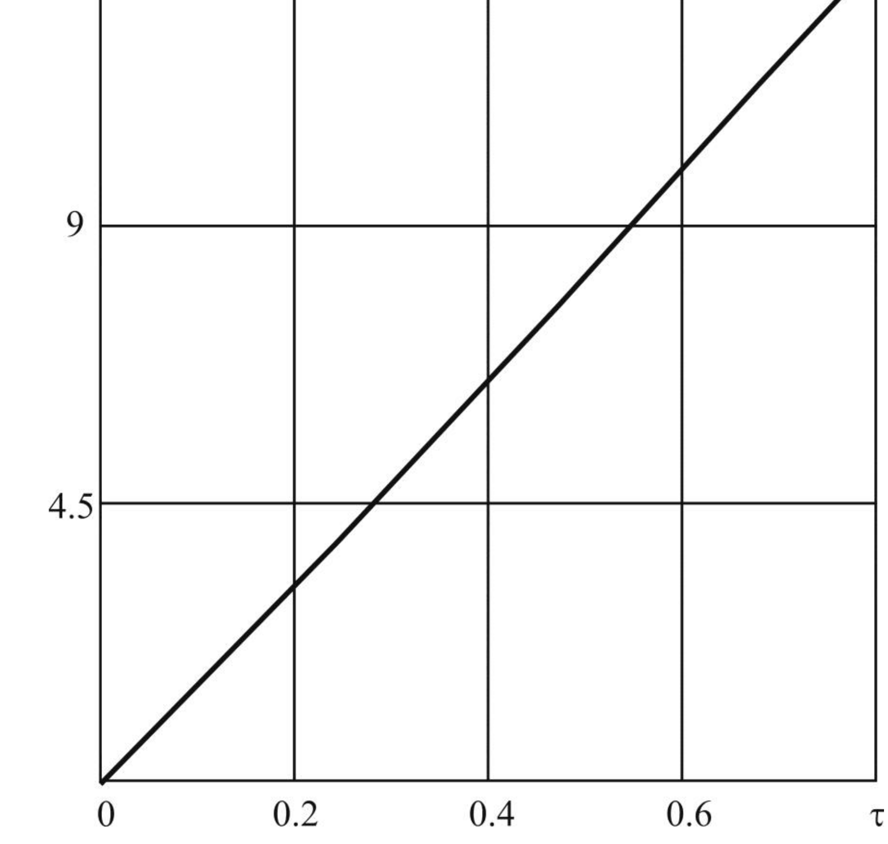
Фиг. 2



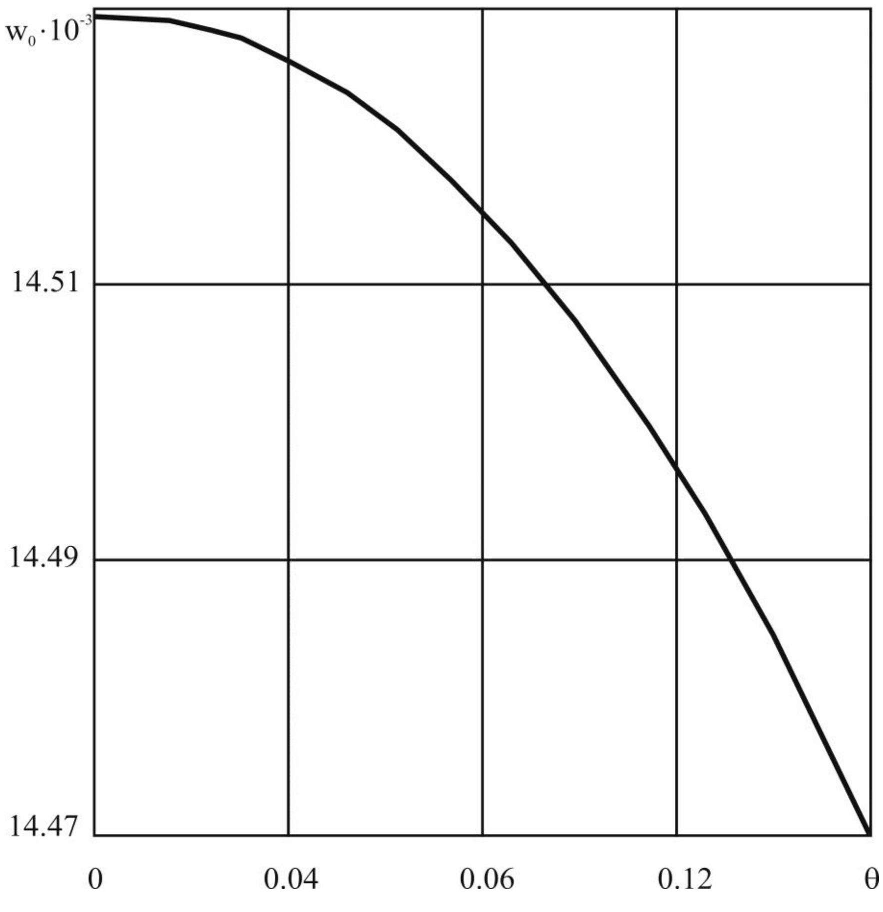
Фиг. 3



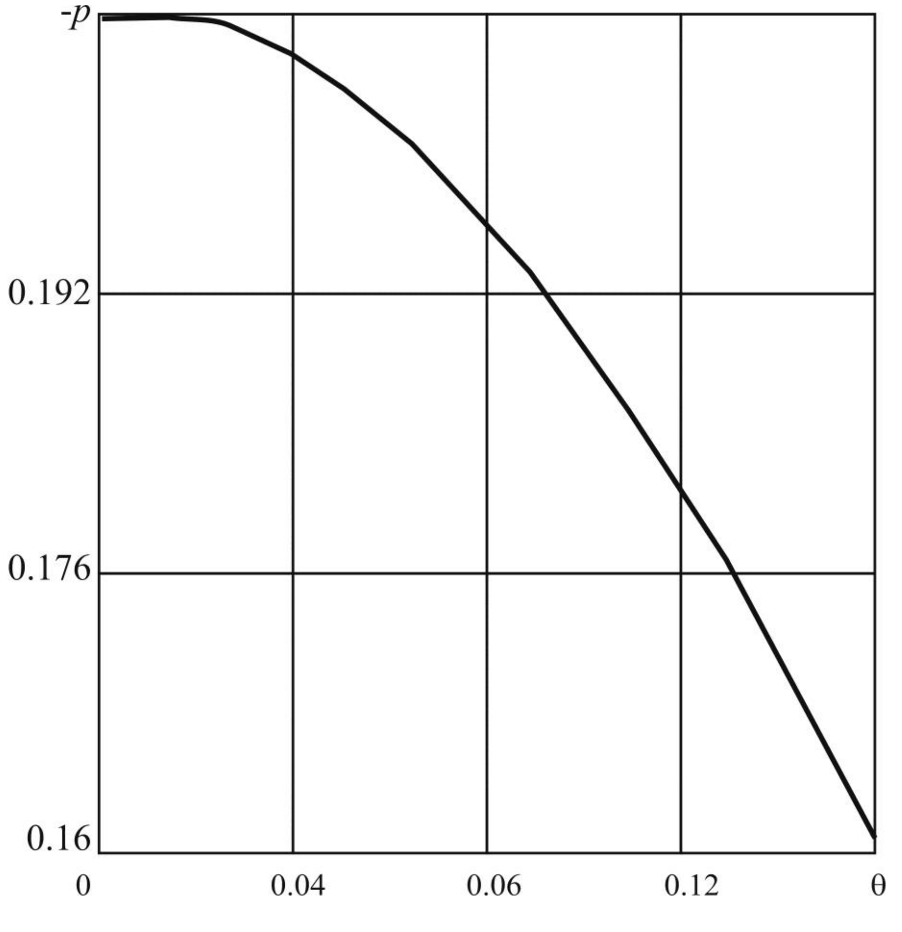
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Заключение. С использованием принципа суперпозиции получена разрешающая задачу система функциональных уравнений относительно коэффициентов рядов разложений перемещений оболочки, глубины погружения ударника и радиуса границы области контакта. В каждый дискретный момент времени с помощью специально разработанных квадратурных формул, учитывающих сингулярные и интегрируемые особенности ядер интегральных представлений, определено распределение контактного давления по области взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-08-90031, 10-08-90410).

Список литературы

1. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Осесимметричная задача удара оболочки об упругое полупространство// Прикл. механика. 1995. Т. 31. № 10. С. 56-63.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 467 с.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 351 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/ Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

5. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.1. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 631 с.
6. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.: Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

Поступила в редакцию
6.12.2010

Сведения об авторах

Михайлова Елена Юрьевна

Московский авиационный институт (технический университет)

Старший преподаватель

Сл. адрес: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: aet@mai.ru

тел. 8(499)158-43-06

Федотенков Григорий Валерьевич

Московский авиационный институт (технический университет)

Доцент

Сл. адрес: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: aet@mai.ru

тел. 8(499)158-43-06