УДК 519.2

ОЦЕНКА ВКЛАДА КОМПОНЕНТЫ В ОБЩИЙ РИСК ПО ПОРТФЕЛЮ, ЗАДАННОМУ МНОГОМЕРНЫМ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ

Румянцева О.И., Хохлов Ю.С.
Кафедра математической статистики
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва
Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российский университет дружбы народов, Москва

Поступила в редакцию 00.00.0000, после переработки 00.00.0000.

Предлагается представление портфеля ценных бумаг в виде дважды стохастического пуассоновского процесса. Найдена оценка вклада компоненты в общий риск по портфелю.

The representation of securities portfolio in the form of twice stochastic Poisson process is considered. Tail Conditional Expectation estimate for a Portfolio components is obtained.

Ключевые слова: Дважды стохастический пуассоновский процесс, оценка средних потерь по портфелю.
Keywords: Twice stochastic Poisson process, Portfolio Tail Conditional Expectation.

1. Введение

В наше время огромное внимание оказывается разработке стандартной схемы для осуществления оценки риска. Самые надёжные методы оценки риска основаны на портфельном подходе, то есть предполагают восприятие активов и пассивов предприятия, как элементов единого целого – портфеля, сообщающих ему характеристики риска и доходности. В рамках решения задачи оценки риска портфеля ценных бумаг, для количественной оценки инвестиций существуют различные характеристики. Одной из них является TCE [1] – статистика, позволяющая оценить средние потери по портфелю, выходящие за пределы VaR. TCE представляет собой условное среднее количество потерь, которое может быть понесено в данный период, при условии, что потеря превышает указанное значение. Она определяется по правилу:

$$TCE_X(x) := E(X|X > x),$$

и называется условным математическим ожиданием хвоста распределения. Интерес к этой статистике обусловлен тем, что благодаря свойству когерентности, TCE очень удобна в случае, когда надо определить, какую часть от общего риска составляет риск по k-й компоненте портфеля. Трудность этой задачи связана с тем, что многие вероятностные модели в прикладных исследованиях являются многомерными, а их компоненты оказываются зависимыми по существу. Мы можем наблюдать это на примере задач из экономики, социологии, психологии, биологии, медицины и многих других. Данная работа посвящена проблеме построения адекватной многомерной модели и оценке риска, порожденного одной из компонент портфеля.

2. Описание модели

Рассмотрим многомерный пуассоновский процесс $N(t) = (N_1(t), ..., N_m(t))^T$ с независимыми компонентами, каждая из которых является стандартным процессом Пуассона, а также некоторый случайный процесс $\Lambda(t) = (\Lambda_1(t), ...\Lambda_m(t))^T$ с вообще говоря зависимыми компонентами, траектории которого являются неубывающими функциями, причём

$$E(\Lambda_k(t)) = l_k \cdot t,\ Cov(\Lambda_k(t), \Lambda_j(t)) = S_{kj} \cdot t,\ D(\Lambda_k(t)) = {S_k}^2 \cdot t.$$

Рассмотрим далее последовательность случайных векторов $X_j = (X_{j1}, ...X_{jn})^T$, с конечными моментами второго порядка, таких, что $E(X_j) = a_j = (a_{j1}, ..., a_{jn})^T$,

$$Cov(X_{ji}, X_{jk}) = \sigma_{ik}$$

Определим многомерный обобщенный процесс Кокса: $C(t) = (C_1(t), \dots, C_m(t))$, где

$$C_k(t) = \sum_{j=1}^{N_k(\Lambda_k(t))} X_{jk}.$$

Тогда общий риск портфеля имеет величину

$$S(t) := C_1(t) + ... + C_m(t)\ .$$

Целью данной работы является оценка вклада k-й компоненты $C_k(t)$ в общий риск по портфелю $C(t) = (C_1(t), ..., C_m(t))$:

$$TCE_{C_k(t)|S(t)}(s) := E(C_k(t)|S(t) > s)\ .$$

Всюду далее символом "$\Rightarrow$"мы будем обозначать слабую сходимость распределений или сходимость по распределению соответствующих случайных величин.

3. Оценка вклада компоненты портфеля в общий риск

В работе [4] было найдено необходимое и достаточное условие сходимости распределения многомерного дважды стохастического процесса (процесса Кокса) при неслучайном центрировании и нормировке к смеси многомерного нормального распределения, что обобщает аналогичный результат из [2], полученный в одномерном случае.

Теорема 1. *Сходимость*

$$C^*(t) = \frac{C(t) - A(t)}{\sqrt{t}} \Rightarrow Z \ , \ t \to \infty \ , \tag{1}$$

имеет место для некоторого случайного вектора Z, *где* $A_k(t) = a_k \cdot l_k \cdot t$, *тогда и только тогда, когда имеет место сходимость*

$$\frac{\Lambda(t) - \tilde{A}(t)}{\sqrt{t}} \Rightarrow V \ , \ t \to \infty \ , \tag{2}$$

для некоторого случайного вектора V, *где* $\tilde{A}_k(t) = l_k \cdot t$. *Причем*

$$Z_k \stackrel{d}{=} W_k + a_k \cdot V_k \ , \tag{3}$$

где $W = (W_1, \ldots, W_m)$ *имеет многомерное нормальное распределение со средним* 0 *и ковариациями* $min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq})$, δ_{pq} *– символ Кронекера,* W *и* V *– независимы.*

Таким образом, при больших t из (1) и (3) следует, что $C_k(t)$ можно представить в следующем виде:

$$C_k(t) \stackrel{d}{\approx} W_k \cdot \sqrt{t} + a_k \cdot \sqrt{t} \cdot V_k + a_k \cdot l_k \cdot t \ .$$

Зафиксируем все V_k. Тогда при больших t вектор $C(t)$ имеет приближенно многомерное нормальное распределение, причём

$$E(C_k(t)|V) = a_k \cdot l_k \cdot t + a_k \cdot \sqrt{t} \cdot V_k =: \mu_k(t) \ ,$$

$$D(C_k(t)|V) = D(W_k|V) \cdot t = ({\sigma_k}^2 + {a_k}^2) \cdot l_k \cdot t =: d_k^2 \cdot t \ ,$$

$$Cov(C_p(t), C_q(t)|V) = Cov(W_p, W_q) \cdot t = \min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq}) \cdot t \ .$$

Тогда

$$E(S(t)|V) = \sum_k \mu_k(t) \ ,$$

$$D(S(t)|V) = \sum_{k=1}^m D(C_k(t)) + \sum_{p \neq q} Cov(C_p(t), C_q(t)) =$$

$$= \sum_{k=1}^m d_k^2 \cdot t + \sum_{p \neq q} t \cdot E(W_p \cdot W_q) =$$

$$= \sum_{k=1}^m d_k^2 \cdot t + \sum_{p \neq q} \min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq}) \cdot t =: d^2 \cdot t \ ,$$

$$Cov(C_k(t), S(t)|V) = \sum_{j=1}^m Cov(C_k(t), C_j(t)|V) = \sum_{j=1}^m t \cdot E(W_k \cdot W_j|V) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} t \cdot \min(l_k, l_j) \cdot (\sigma_{kj} + {a_k}^2 \cdot \delta_{kj}) \ .$$

Обозначим через

$$\lambda(x) = \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)}$$

функцию риска для стандартного нормального распределения. В работе [3] представлены важные результаты об оценке риска для случая, когда совокупность рисков имеет многомерное нормальное распределение. В частности, получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть случайный вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ имеет многомерное нормальное распределение с вектором средних $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ и матрицей ковариаций $\Sigma = (b_{kj})$, обозначим через S сумму компонент вектора Y: $S = Y_1 + \ldots + Y_m$. Тогда*

$$E(X_k|S > x) = \mu_k + \lambda((x - \mu_S)/\sigma_S) \cdot \frac{Cov(X_k, S)}{\sigma_S} \ , \tag{4}$$

где $\mu_S = E(S), \sigma_S^2 = D(S)$.

Далее, в рамках рассматриваемой нами модели, мы применяем теорему 2 при фиксированном V, а затем, используя формулу полного математического ожидания, усредняем по V. Окончательно получаем:

$$E(C_k(t)|S(t) > x) = E_V(E(C_k(t)|S(t) > x, V)) \approx a_k \cdot l_k \cdot t + a_k\sqrt{t}E_V(V_k) +$$

$$+E_V \left[\lambda \left(\left(x - \sum_{k=1}^{m} a_k l_k t - \sum_{k=1}^{m} a_k V_k \sqrt{t} \right) /(d\sqrt{t}) \right) \right] \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \min(l_k, l_j) \cdot (\sigma_{kj} + {a_k}^2 \cdot \delta_{kj})}{d} \cdot \sqrt{t} \ .$$

Так как V_k центрировано, то $E_V(V_k) = 0$. Таким образом доказан следующий результат.

Теорема 3. *Вклад k-й компоненты $C_k(t)$ в общий риск по портфелю $C(t) = (C_1(t), ..., C_m(t))$ можно представить в следующем виде:*

$$TCE_{C_k(t)|S(t)}(x) \approx a_k l_k t + E_V \left[\lambda \left(A(x,t) - \sum_{k=1}^{m} a_k V_k/(d\sqrt{t}) \right) \right] \times$$

$$\times \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m} min(l_k, l_j) \cdot (\sigma_{kj} + {a_k}^2 \cdot \delta_{kj})}{d} \right) \cdot \sqrt{t} \ ,$$

где

$$A(x,t) = \frac{x - (\sum\limits_{k} a_k l_k) \cdot t}{d \cdot \sqrt{t}}.$$

Нетрудно показать, что рассмотренный выше управляющий процесс $\Lambda(t)$ имеют некоррелированные приращения. Если, более того, он имеет независимые приращения, то применима центральная предельная теорема и случайный вектор V имеет многомерное нормальное распределение со средним ноль и матрицей ковариаций $\Sigma_V = (S_{kj})$. Тогда случайный вектор $C(t)$ при больших t имеет асимптотически многомерное нормальное распределение, компоненты которого имеют средние $a_k l_k t$ и матрицу ковариаций Σ_C с элементами

$$(\min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq}) + a_p \cdot a_q \cdot S_{pq}) \cdot t \ .$$

Аналогично тому, как это сделано выше, получаем:

$$\mu_S = \left(\sum_k a_k l_k \right) \cdot t \ ,$$

$$\sigma_S^2 \ = \ \left[\sum_{k=1}^{m} \left((\sigma_k^2 + a_k^2) \cdot l_k + a_k^2 \cdot S_k^2 \right) + \sum_{p \neq q} \left(\min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq}) + a_p \cdot a_q \cdot S_{pq} \right) \right] \cdot t \ ,$$

$$Cov(C_k(t), S(t)) = \left[\sum_j \left(\min(l_k, l_j)(\sigma_{kj} + a_k^2 \cdot \delta_{kj}) + a_k \cdot a_j \cdot S_{kj} \right) \right] \cdot t \ .$$

Далее расчет производится по формуле (4):

$$E(C_k(t)|S(t) > x) \approx a_k \cdot l_k \cdot t +$$

$$+\lambda \left(\frac{x - \left(\sum\limits_j a_j l_j \right) \cdot t}{\sqrt{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} (\sigma_j^2 + a_j^2) \cdot l_j + a_j^2 \cdot S_j^2 + \sum\limits_{p \neq q} \min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq}) + a_p \cdot a_q \cdot S_{pq} \right) t}} \right) \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_j \left(\min(l_k, l_j)(\sigma_{kj} + a_k^2 \cdot \delta_{kj}) + a_k \cdot a_j \cdot S_{kj} \right)}{\sqrt{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} (\sigma_j^2 + a_j^2) \cdot l_j + a_j^2 \cdot S_j^2 + \sum\limits_{p \neq q} \min(l_p, l_q) \cdot (\sigma_{pq} + {a_p}^2 \delta_{pq}) + a_p \cdot a_q \cdot S_{pq} \right)}} \cdot \sqrt{t} \ .$$

4. Заключение.

Полученное представление для оценки компоненты портфеля, заданного с помощью многомерного дважды стохастического пуассоновского процесса, позволяет осуществить расчет данной величины и её дальнейшее применение. Кроме того, полученный результат позволяет оценить распределение хвоста математического ожидания случайного процесса, определяющего портфель.

Список литературы

[1] Landsman Z., Valdes E.A., Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions, University of Technical Report 02-04, October 2002.

[2] В.Ю. Королёв, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин Математические основы теории риска. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007 г.

[3] Panjer, H.H., Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital within Financial Conglomerates, Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo Research Report 01-15, 2002.

[4] Румянцева О.И., Хохлов Ю.С. Предельное распределение для многомерного обобщенного процесса Кокса. -– Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2014, № 1. С. 35-43.