

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Волкова Виктория Евгеньевна

**Космологические решения и их устойчивость в
скалярно-тензорных теориях гравитации со
старшими производными**

01.04.02 — теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
академик РАН Рубаков В.А.

Москва – 2019

Содержание

Введение	2
1 Устойчивость решений в расширенной теории Хорндески	20
1.1 Возмущения в теории Хорндески и ее расширении	20
1.2 Запрещающая теорема в общей теории Хорндески	24
1.3 Космологический отскок: пример	29
1.4 Генезис: пример	39
1.5 Космологический отскок и γ -кроссинг	45
1.5.1 Поведение возмущений в унитарной калибровке	47
1.5.2 Космологический отскок с γ -кроссингом: пример	49
2 Возмущения в теории Хорндески и ее расширении	60
2.1 Метод DPSV в кубической теории Хорндески	62
2.1.1 Квадратичное действие в общей калибровке	62
2.1.2 Анализ метода DPSV	65
2.1.3 Сравнение методов KYU и DPSV	69
2.2 Метод DPSV в общей теории Хорндески	71
2.3 Метод DPSV в расширенной теории Хорндески	75
2.3.1 Применение метода DPSV в расширенной теории Хорндески	76
2.3.2 Функции хода и сдвига в расширенной теории Хорндески .	82
Заключение	85
Приложение А. Выражения для коэффициентов A_i и B_i в квадратичном действии для возмущений	88
Приложение Б. Выражения для коэффициентов в линеаризованных уравнениях общей теории Хорндески	90
Приложение В. Выражения для коэффициентов в линеаризованных уравнениях расширенной теории Хорндески	94

Введение

Актуальность темы исследования.

Современные экспериментальные данные физики частиц и результаты теоретических исследований в области космологии позволяют многое сказать о самых ранних этапах развития Вселенной. Так, теория горячего Большого Взрыва является одной из наиболее подробно разработанных моделей, которая описывает процессы, происходившие в ранней Вселенной, вплоть до самых высоких температур. Однако, сама по себе теория горячего Большого Взрыва имеет ряд недостатков, требующих существенного дополнения модели. Например, характерным свойством теории является проблема начальных условий, которые приходится задавать явным образом, чтобы предсказания модели согласовались с наблюдаемыми данными. Классическими вопросами в теории горячего Большого Взрыва являются проблемы горизонта, плоскостности и энтропии, а также проблема первичных неоднородностей. Проблема горизонта заключается в том, что наивный анализ приводит к выводу, что современная видимая часть Вселенной состоит из $\sim 10^{89}$ областей, которые были причинно не связаны в начале классической эволюции. Таким образом, высокая степень однородности и изотропии современной Вселенной необъяснимы с точки зрения модели. Под проблемой плоскостности понимается необходимость искусственно заложить в модель начальное значение вклада кривизны в уравнение Фридмана на уровне $\sim 10^{-60}$, чтобы модель согласовалась с современными ограничениями на степень кривизны пространства. Оценки энтропии видимой части Вселенной приводят к значению $\sim 10^{88}$, но, поскольку в рамках модели горячего Большого Взрыва эволюция Вселенной с хорошей точностью описывается равновесными процессами, необходимо считать, что энтропия уже в начальный момент времени имела такое гигантское значение. В этом заключается проблема энтропии. Наконец, проблема первичных неоднородностей сводится к отсутствию источ-

ников малых возмущений плотности энергии вещества во Вселенной с необходимыми свойствами. Существование таких первичных возмущений необходимо для формирования видимых структур всех масштабов от звезд до сверхскоплений галактик. При этом наблюдаемая анизотропия реликтового излучения накладывает определенные ограничения на характеристики начальных возмущений плотности: малая амплитуда на уровне $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$, практически плоский спектр Гаррисона-Зельдовича (с небольшим сдвигом в красную часть спектра) и отсутствие существенной негауссовости [1]. В стандартной теории Большого Взрыва механизма образования указанных неоднородностей с перечисленными свойствами нет.

Одним из наиболее элегантных и широко используемых способов решения перечисленных проблем теории горячего Большого Взрыва является предположение о наличии специфического этапа эволюции, предшествовавшего горячей стадии – эпохи инфляции [2, 3, 4]. Существенно, что концепция инфляции естественным образом решает вопрос возникновения первичных возмущений плотности [5, 6, 7, 8]. Одним из недостатков концепции является невозможность решить проблему наличия сингулярности в начальный момент времени [9, 10]. Действительно, расширяющаяся Вселенная описывается однородной и изотропной метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1)$$

где γ_{ij} – метрика единичной трехмерной сферы, трехмерного плоского пространства или единичного трехмерного гиперболоида. Форма метрики предполагает, что существует начальный момент времени, когда масштабный фактор $a(t)$ равен нулю, а значения плотности энергии и давления стремятся к бесконечности. При этом наличие начальной сингулярности не является следствием выбора симметричной метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (1): в общей теории относительности было показано, что начальная сингулярность является характерным свойством расширяющихся космологических решений [11]. Кроме этого, несмотря на общепринятость теории инфляции, возможности современных экспериментов не позволяют однозначно утверждать, что инфляци-

онная эпоха действительно имела место. Тем более не представляется возможным указать, какая из многочисленных инфляционных моделей является единственно верной [12]. В сложившейся ситуации возможен иной подход: если нет возможности явно подтвердить концепцию инфляции, возможно попытаться исключить ее альтернативы, которые наравне с инфляцией позволяют воспроизвести наблюдательные данные. Последнее предполагает детальное изучение таких альтернативных сценариев.

Так, решение части проблем теории горячего Большого Взрыва было найдено в рамках модели со стадией сжатия – экпирозисом [13, 14, 15, 16, 17]. Данный класс моделей предполагает наличие стадии классического сжатия, предшествующей горячему Большому Взрыву. Позднее на базе сценария с экпирозисом была предложена модель, в которой отсутствовала начальная сингулярность – новый экпирозис или классический космологический отскок [18, 19, 20]. В моделях Вселенной с космологическим отскоком не только отсутствует начальная сингулярность, но также предложены механизмы генерации первичных возмущений без использования инфляции [21, 22, 23, 24, 25]. Не менее любопытной альтернативой инфляции служит модель генезиса [26, 27]: сценарий описывает Вселенную, которая расширяется из пустого пространства Минковского по мере роста плотности энергии заполняющей ее специфической формы материи, и в результате происходит переход на горячую стадию.

Характерной особенностью указанных космологических сценариев без начальной сингулярности является нарушение теоремы Пенроуза [28], справедливой в общей теории относительности. Теорема опирается на два условия: 1) выполнение изотропного условия энергодоминантности (англ. Null Energy Condition или NEC), 2) наличие некомпактной поверхности Коши. Если материя удовлетворяет изотропному условию энергодоминантности, то ее тензор энергии-импульса подчиняется следующему условию:

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0, \quad (2)$$

где n^μ – произвольный изотропный вектор, т.е. $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. Теорема Пенроуза утверждает, что если в пространстве есть ловушечная поверхность, то про-

странство геодезически неполно, т.е. в нем есть сингулярная точка. Примером такой ловушечной поверхности в случае пространственно плоской, сжимающейся, однородной и изотропной Вселенной является сфера с радиусом больше H^{-1} , где H – параметр Хаббла. Таким образом, если вещество во Вселенной подчиняется NEC, то в сжимающейся Вселенной есть сингулярность в будущем (при условии пренебрежимости вклада пространственной кривизны) и, соответственно, в расширяющейся Вселенной есть сингулярность в прошлом.

Как следствие теоремы Пенроуза сценарий с космологическим отскоком практически запрещен в общей теории относительности. Этот факт следует из вида уравнения Фридмана для однородной изотропной Вселенной с метрикой (1), заполненной однородным и изотропным веществом с плотностью энергии ρ и эффективным давлением p :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi Gp - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (4)$$

Линейная комбинация уравнений Фридмана (3)-(4) определяет эволюцию параметра Хаббла H во времени

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{\kappa}{a^2}. \quad (5)$$

Выбирая вектор n^μ в виде $n^\mu = (1, a^{-1}\nu^i)$, где $\gamma_{ij}\nu^i\nu^j = 1$, условие NEC (2) для космологического фона примет вид

$$p + \rho > 0. \quad (6)$$

При условии выполнения NEC (6) из закона эволюции параметра Хаббла (5) в пространственно плоской ($\kappa = 0$) и открытой ($\kappa = -1$) Вселенной следует, что $\dot{H} < 0$, т.е. если Вселенная сжималась в прошлом ($H < 0$), она продолжит сжиматься. Последнее фактически не допускает сценария с космологическим отскоком: сценарий предполагает смену знака параметра Хаббла, иными словами, смену сжатия расширением в момент отскока ¹.

¹Рассуждение не относится к случаю закрытой Вселенной ($\kappa = +1$), где отскок возможен,

Другое космологическое следствие выполнения NEC получается из закона ковариантного сохранения тензора энергии-импульса $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, записанного в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p). \quad (7)$$

Так, NEC (6) подразумевает, что плотность энергии всегда убывает в расширяющейся Вселенной. Иными словами, согласно теореме Пенроуза, эволюция Вселенной началась с сингулярности – бесконечно большой плотности энергии и бесконечного темпа расширения. Кроме этого, монотонное убывание плотности энергии исключает сценарий генезиса, который подразумевает расширение из пустого пространства за счет растущей плотности энергии вещества, определяющего в этот период динамику Вселенной.

До недавнего времени считалось, что нарушение NEC неизбежно приводит к возникновению различных патологий в теории. Так, теории скалярного поля, минимально связанного с гравитацией, с лагранжианом первого порядка по производным либо удовлетворяют NEC, либо сталкиваются с различными типами неустойчивостей [30, 31]. В рамках исследования теорий скалярного поля, допускающих безопасное (в смысле возникновения неустойчивостей) нарушение NEC, возможно рассмотреть класс теорий, лагранжианы которых выше первого порядка по производным. Принято считать, однако, что теории с лагранжианом, содержащим производные выше первой, не имеют физического применения², поскольку соответствующие уравнения движения содержат производные выше второй, что приводит к возникновению духов Остроградского [32, 33, 34]. Тем не менее, существует класс теорий скалярного поля с лагранжианами, включающими в себя вторые производные, для которых уравнения движения при этом оказываются второго порядка по производным. Указанные

если плотность энергии и давление при сжатии растут медленнее, чем a^{-2} [29]. Кроме того, теорема Пенроуза неприменима в случае сферической Вселенной, т.к. поверхность Коши компактна и соответствует 3-сфере.

²Отдельным случаем является ситуация, когда старшие производные считаются поправками в смысле эффективной низкоэнергетической теории.

теории были описаны в работе [35] и называются теориями Хорндески.

Теории Хорндески – это наиболее общие теории модифицированной гравитации со скалярным полем, наличие вторых производных в лагранжиане которых не приводит к возникновению в уравнении поля слагаемых с производными старше второй. В общем случае лагранжиан теории Хорндески имеет вид ³:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X)\square\pi, \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X) [(\square\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}], \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X)G^{\mu\nu}\pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3}G_{5X} [(\square\pi)^3 - 3\square\pi\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} + 2\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\rho}\pi_{;\rho}{}^{\nu}], \quad (12)$$

где π – это скалярное поле, иногда называемое галилеонным, $X = g^{\mu\nu}\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}$, $\pi_{;\mu} = \partial_\mu\pi$, $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $\square\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $G_{4X} = \partial G_4/\partial X$ и т.д.; R в (11) и $G^{\mu\nu}$ в (12) – скаляр кривизны и тензор Эйнштейна, соответственно. В наиболее общий вид лагранжиана теории Хорндески (8) входят 4 независимые функции $F(\pi, X)$, $K(\pi, X)$, $G_4(\pi, X)$ и $G_5(\pi, X)$. Лагранжиан (8) уже содержит в себе гравитационную часть действия с функциями $G_4(\pi, X)$ в (11) и $G_5(\pi, X)$ в (12), в случае специального выбора которых восстанавливается стандартное действие Эйнштейна–Гильберта: $G_5(\pi, X) = 0$, $G_4(\pi, X) = 1/(2\kappa)$, где $\kappa = 8\pi G$. В случае нетривиального вида функции $G_4(\pi, X)$ теория имеет неминимальную связь с гравитацией, что позволяет, например, считать теории с модифицированной гравитацией вида $f(\phi)R$ частными случаями общей теории Хорндески. Кроме этого, теория Хорндески включает в себя как частные случаи практически все известные теории инфляции со скалярным полем, такие как инфляция с медленным скатыванием [3, 36, 37], к-инфляция [30], Хиггс-инфляция [38, 39, 40], инфляционные модели с квадратом кривизны и ее более

³Здесь и далее в работе используется следующая сигнатура метрики: $(+, -, -, -)$. Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; латинские индексы обозначают пространственные компоненты соответствующих объектов.

общий случай $f(R)$ [41, 42]⁴ и т.д.

Исходная работа [35] была практически не замечена, однако подклассы теории Хорндески были повторно найдены в контексте другой задачи [43, 44, 45]. Среди частных случаев теории, помимо перечисленных выше, которые получили сравнительно широкое распространение, отметим, например, модели Двали–Габададзе–Поратти [46, 47, 48], модели "к-муфляжа" [49], модели кинетического "переплетения" с гравитацией [50, 51, 52] и т.д. Теория галилеонов [53] является частным случаем теории Хорндески, для которого характерно наличие галилеевой симметрии в теории

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + b_\mu. \quad (13)$$

В работах [54, 55] теория галилеонов была обобщена на случай искривленного пространства, где галилеева симметрия уже отсутствовала. Обобщенная теория галилеонов обсуждалась в работах [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. Таким образом, теория Хорндески является обобщением большого класса скалярно-тензорных теорий.

Далее наиболее общими теориями Хорндески будем называть теории с лагранжианом вида (8). В литературе также принято называть кубическими теориями Хорндески подкласс теорий с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{cub} = -\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3. \quad (14)$$

Кроме этого, мы иногда будем называть скалярное поле теории Хорндески π галилеонным полем вне зависимости от наличия галилеевой симметрии в соответствующей теории.

Отметим, что безопасное с точки зрения устойчивости нарушение NEC еще не гарантирует полного отсутствия неустойчивостей в решении. Возможные патологии в теории скалярного поля π , если такие возникают в решении, обнаруживают себя в поведении малых возмущений над этим фоновым решением,

⁴Указанные теории не содержат скалярного поля, но могут быть приведены к виду (8) с помощью введения вспомогательного поля $\phi = df/dR$.

$\pi = \pi_c + \chi$. Для описания типов возможных неустойчивостей, рассмотрим квадратичное действие для возмущений χ в теории скалярного поля в пространстве Минковского:

$$\mathcal{L}_\chi^{(2)} = \frac{1}{2}\mathcal{K}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}\mathcal{G}(\partial_i\chi)^2 - \frac{1}{2}\mathcal{M}\chi^2, \quad (15)$$

где из соображений простоты было сделано предположение, что соответствующие уравнения линеаризованной теории имеют второй порядок по производным. В предположении, что фоновое скалярное поле π_c однородно, коэффициенты $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{M}$ являются функциями времени. Ограничимся исследованием высокоэнергетического режима, в котором пространственные и временные изменения χ характеризуются временными масштабами, существенно меньшими, чем характерный временной масштаб изменения однородного фонового поля $\pi_c(t)$. В таком приближении коэффициенты $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{M}$ можно считать постоянными, т.е. независимыми от времени. Тогда возможны следующие случаи:

$$(1) \text{ Устойчивое решение: } \mathcal{K} > 0, \quad \mathcal{G} > 0, \quad \mathcal{M} \geq 0.$$

Соответствующее дисперсионное соотношение имеет стандартную форму

$$\mathcal{K}\omega^2 = \mathcal{G}\vec{p}^2 + \mathcal{M}, \quad (16)$$

а плотность энергии везде положительна

$$T_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}\mathcal{K}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G}(\partial_i\chi)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{M}\chi^2. \quad (17)$$

Соотношение величин коэффициентов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{G}$ определяет величину квадрата скорости распространения возмущений ($\mathcal{K} \geq \mathcal{G}$ – распространение со скоростью меньшей или равной скорости света, $\mathcal{K} < \mathcal{G}$ – распространение со сверхсветовой скоростью). Хотя в рамках исследований, изложенных в данной работе далее, не затрагивается вопрос ультрафиолетовой полноты моделей, где сверхсветовые моды послужили бы потенциальным источником трудностей [64, 65], в контексте устойчивости решения предпочтение будет отдаваться случаю скоростей звука, не превышающих скорости света.

(2) Решение с тахионами: $\mathcal{K} > 0$, $\mathcal{G} > 0$, $\mathcal{M} < 0$.

Формально, из дисперсионного соотношения (16) следует, что для достаточно малых импульсов $\mathcal{G}\vec{p}^2 < |\mathcal{M}|$ частоты ω оказываются мнимыми, и появляются растущие моды $\chi \propto \exp(\int |\omega| dt)$, где $|\omega| < |\mathcal{M}|^{1/2}$. Данный случай действительно патологичен, если характерный временной масштаб $|\mathcal{M}|^{-1/2}$ оказывается меньше характерного времени изменения фонового решения π_c .

(3) Решение с градиентными неустойчивостями:

$$\mathcal{K} > 0, \quad \mathcal{G} < 0, \quad \text{или} \quad \mathcal{K} < 0, \quad \mathcal{G} > 0.$$

В этом случае, согласно (16), частоты ω оказываются мнимыми, в результате чего в системе появляются быстро растущие моды. Последнее означает, что фон π_c оказывается нестабильным.

(4) Решение с духами: $\mathcal{K} < 0$, $\mathcal{G} < 0$.

Согласно (17), для данного случая характерна проблема отрицательных энергий для высокоэнергетических мод, что при условии квантования теории приводит к возникновению духов.

Здесь и далее устойчивость космологического решения будет означать отсутствие духов и градиентных неустойчивостей в соответствующей линеаризованной теории ⁵.

В контексте построения устойчивых космологических решений одним из наиболее важных свойств теории Хорндески является тот факт, что нарушение NEC не влияет на наличие или отсутствие патологий в космологических решениях, построенных в данном классе теорий [27]. Таким образом, теории Хорндески являются подходящим кандидатом для изучения решений, требующих нарушения NEC. Как следствие, был предложен ряд моделей с безопасным нарушением NEC, которые описывают космологическое решение с генезисом [27, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73] и Вселенную с отскоком [74, 75, 76,

⁵В данной работе мы не исследуем проблему тахионов в линеаризованной теории из-за специфики выбранной калибровки.

77, 78, 79, 80, 81, 82] (также см. обзор [83]). В предложенных космологических решениях действительно отсутствовали патологические степени свободы (духи и градиентные неустойчивости) вблизи момента отскока или генезиса. Однако, вопрос о возможности построить в теории Хорндески космологические решения, устойчивые на протяжении *всей* эволюции, оставался открытым: при изучении эволюции, например, отскокового решения на протяжении достаточно длинного промежутка времени неизбежно возникали градиентные (или, возможно, духовые) неустойчивости. То же справедливо для "полных" моделей генезиса.

Было предложено несколько способов обойти проблему градиентных неустойчивостей. Один из них заключается в построении модели таким образом, чтобы слагаемое в действии, квадратичное по пространственному градиенту и имеющее неправильный знак, было мало настолько, что слагаемые со старшими производными восстанавливали бы устойчивость при достаточно больших значениях импульса [26, 72]. Другой метод заключается в возможности сделать масштаб сильной связи в теории достаточно низким [84]. В обоих случаях экспоненциальный рост возмущений не приводит к катастрофическим последствиям, если промежуток времени, когда присутствуют неустойчивости в системе, короткий.

Неизбежное возникновение градиентных неустойчивостей на линеаризованном уровне в кубическом подклассе теории обобщенных галилеонов (14) было доказано и сформулировано в виде запрещающей теоремы в работе [85]. Аналогичная теорема была доказана для случая, когда кроме поля галилеона присутствует дополнительное скалярное поле, для которого NEC выполняется [86]. Позднее запрещающая теорема была обобщена на наиболее общий случай теории Хорндески [87], а также для системы с несколькими полями галилеонного типа [88]. Таким образом, было сформулировано общее утверждение о невозможности построить космологическое решение без начальной сингулярности в рамках теории Хорндески, которое было бы свободно от градиентных неустойчивостей на протяжении всей эволюции. В работе [87] было, однако, отмечено, что сценарий с устойчивым отскоком или генезисом может быть построен при условии, что в асимптотическом прошлом или асимптотическом будущем тео-

рия переходит в режим сильной связи. Пример такого решения был впоследствии найден [89]. В дальнейшем мы будем избегать теорий с сильной связью и считать возникновение такого режима нежелательным.

Задача о полностью устойчивом классическом решении с отскоком в теориях типа Хорндески получила свое дальнейшее развитие, когда было предложено расширение данного класса скалярно-тензорных теорий [90, 91, 92] (см. также обзор [93]) – "расширенные" теории Хорндески (англ. *beyond Horndeski*):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{BH}} = \mathcal{L}_{\mathcal{H}} + F_4(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'} + \\ + F_5(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'}\pi_{;\sigma\sigma'},\end{aligned}\quad (18)$$

где $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ соответствует наиболее общей теории Хорндески (8). Принципиальным отличием расширенной теории Хорндески является тот факт, что в результате добавления двух новых функций $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$ в лагранжиан теории в соответствующих уравнениях поля появляются слагаемые с третьими производными. Однако, гамильтонов анализ показал, что повышение порядка уравнений движения не приводит к возникновению дополнительных степеней свободы [94, 95], т.е. число степеней свободы в теории Хорндески и расширенной теории Хорндески совпадает. Кроме этого, расширенная теория оказалась связана с общей теорией Хорндески через дисформное преобразование метрики [90, 91, 92, 96, 97, 98, 99, 100]

$$g_{\mu\nu} \rightarrow A(\pi, X)g_{\mu\nu} + B(\pi, X)\partial_{\mu}\pi\partial_{\nu}\pi, \quad (19)$$

при условии ненулевого значения только одной из функций $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$. Было выдвинуто предположение, что дополнительные слагаемые в лагранжиане расширенной теории Хорндески могут оказать существенное влияние на анализ стабильности космологических решений. Предположение получило свое подтверждение в рамках подхода эффективной теории поля [101, 102], где было показано, что расширение теории Хорндески позволяет обойти запрещающую теорему [87].

Цели и задачи работы.

Целью данной работы является изучение классических космологических решений без начальной сингулярности в скалярно-тензорных теориях гравитации со старшими производными (теории Хорндески и ее расширении) и исследование устойчивости указанного типа решений.

Задачи данной работы формулируются в рамках расширенной теории Хорндески в ковариантном виде. Так одной из задач является доказательство на языке ковариантной теории, что дополнительные слагаемые в действии, характерные для расширенной теории Хорндески, действительно позволяют обойти запрещающую теорему [87]. В результате, построены явные примеры лагранжианов расширенной теории Хорндески, которые допускают решения в виде космологического отскока и генезиса, устойчивые в любой момент времени. Кроме этого, показано существование особого примера полностью устойчивого отскокового решения в расширенной теории Хорндески: асимптотики теории при $t \rightarrow \pm\infty$ описываются общей теорией относительности и стандартным безмассовым скалярным полем. Такое отскоковое решение представляет особый интерес с точки зрения построения полных моделей ранней Вселенной.

Отдельной группой задач является анализ различных способов вычисления квадратичного действия для возмущений при изучении теории Хорндески и ее расширения на линеаризованном уровне. В частности проводится сравнительный анализ двух различных методов вычисления квадратичного действия для возмущений в теории Хорндески, который доказывает соответствие каждого из методов определенному выбору калибровки теории. Один из методов сводится к явному выбору унитарной калибровки и является одним из стандартных способов вычисления квадратичного действия. Другой подход, так называемый метод DPSV, предложенный для кубической теории галилеонов в работе [50], явно не предполагает фиксации калибровки, и в некоторых случаях существенно упрощает вычисление квадратичного действия. Несмотря на технический характер задачи проведенное исследование позволило убедиться в корректности используемых методов вычисления квадратичного действия теории возму-

щений, которое является необходимой составляющей при анализе устойчивости конструируемых космологических решений. Одной из задач является обобщение метода DPSV на случай расширенной теории Хорндески.

Научная новизна работы.

Над решением задач по моделированию процессов, протекавших на самых ранних этапах эволюции Вселенной, работают высококвалифицированные коллективы по всему миру. Новизна и актуальность всестороннего исследования космологической эпохи, предшествовавшей горячей стадии, подтверждается существенным количеством новых работ в указанной области. В основу данной работы легли принципиально новые результаты, полученные в рамках исследования космологических решений и их устойчивости в (расширенной) теории Хорндески. Постановка задачи по исследованию методов получения квадратичного действия для возмущений в теории Хорндески и ее расширении является оригинальной, а решение позволило глубже понять структуру рассматриваемых скалярно-тензорных теорий.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Предложенные устойчивые космологические решения без начальной сингулярности позволяют в будущем построить реалистичные модели ранней Вселенной с использованием сценариев с отскоком или генезисом. Благодаря простому асимптотическому поведению одного из построенных отскоковых решений в расширенной теории Хорндески, указанный сценарий допускает, например, естественный выход на горячую стадию после фазы отскока, что делает данное решение интересным с точки зрения построения полной модели Вселенной.

Методология диссертационного исследования.

В данной работе используется стандартный формализм теории возмущений, а также многократно апробированные методы вычисления действия линеаризованной теории. Глава 2 посвящена анализу нового, альтернативного способа вычисления квадратичного действия для возмущений. В рамках исследования данного подхода используются классические методы работы с космологическими возмущениями в линейном режиме. Корректность нового метода устанавли-

ливается путем сопоставления результатов, полученных в рамках данного подхода, с известными результатами, которые получены с помощью ранее проверенных, достоверных методов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Устойчивые на протяжении всего времени эволюции космологические решения без начальной сингулярности могут быть построены в рамках ковариантного формализма в расширенной теории Хорндески.
2. Существуют примеры лагранжианов расширенной теории Хорндески, допускающие решения типа космологического отскока или генезиса, в которых на протяжении всего времени эволюции не возникает градиентных неустойчивостей.
3. Существует полностью устойчивое решение в виде отскока в расширенной теории Хорндески, для которого скалярное поле теории и в асимптотическом прошлом, и в асимптотическом будущем становится безмассовым скалярным полем со стандартным кинетическим членом, а гравитация описывается общей теорией относительности.
4. В контексте исследования устойчивости космологических решений в теории Хорндески два различных метода вычисления квадратичного действия для возмущений – метод унитарной калибровки и так называемый метод DPSV – являются альтернативными и соответствуют различному выбору калибровки в теории.
5. Метод DPSV может корректно применяться для вычисления квадратичного действия для возмущений в случае наиболее общей теории Хорндески при условии однородности фона.
6. Метод DPSV требует существенной модификации для своей корректной работы в расширенной теории Хорндески. Предложенный алгоритм модификации метода соответствует явному использованию уравнений связи теории.

Достоверность и обоснованность результатов.

Достоверность и обоснованность результатов, изложенных в диссертации, подтверждаются проверкой согласованности предлагаемых моделей с известными результатами, представляющими частные случаи указанных моделей. Помимо этого, исследования, аналогичные или тесно связанные с изложенными в данной работе, в различные моменты времени проводились другими научными группами, в результате чего был возможен сравнительный анализ результатов. Наконец, результаты работы были опубликованы в рецензируемых научных изданиях, а также обсуждались в рамках докладов на международных конференциях.

Апробация результатов.

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях:

1. Международная конференция 6th International Conference on New Frontiers in Physics 2017 (ICNFP-2017), о.Крит, Греция, 17 – 29 августа 2017 года.
2. Международный семинар “XXth International Seminar on High Energy Physics (QUARKS-2018)”, Валдай, Россия, 27 мая - 2 июня 2018 года.

Результаты также были представлены 14 февраля 2019 г. на семинаре отдела теоретической физики Института ядерных исследований Российской академии наук.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. R. Kolevaton, S. Mironov, N. Sukhov and V. Volkova. Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2017. — Vol. 1708. — no.08. — 038.
2. R. Kolevaton, S. Mironov, V. Rubakov, N. Sukhov and V. Volkova. Perturbations in generalized Galileon theories // Physical Review D. — 2017. — Vol. 96. — no.12. — 125012.

3. S. Mironov and V. Volkova. Properties of perturbations in beyond Horndeski theories // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33. — no.27. — 1850155.
4. S. Mironov, V. Rubakov and V. Volkova. Bounce beyond Horndeski with GR asymptotics and γ -crossing // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2018. — Vol. 1810. — no.10. — 050.

а также в тезисах докладов:

1. V. Volkova. On perturbations in Horndeski theories // EPJ Web Conferences. — 2018. — Vol. 182. — 02127.
2. R. Kolevatov, S. Mironov, V. Rubakov, N. Sukhov and V. Volkova. Cosmological bounce in Horndeski theory and beyond // EPJ Web Conferences. — 2018. — Vol. 191. — 07013.

Личный вклад автора.

Вклад автора в исследования, результаты которых изложены в данной работе, является определяющим.

Структура, объем и краткое содержание работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, трех приложений и списка литературы. Общий объем работы 108 страниц. Диссертация содержит 13 рисунков. Список литературы включает 113 наименований.

В главе 1 мы рассматриваем линеаризованную теорию возмущений над однородным фоном для расширенной теории Хорндески с целью анализа устойчивости космологических решений в виде отскока и генезиса. В параграфе 1.1 приведено квадратичное действие для возмущений в унитарной калибровке, и получен явный вид условий отсутствия духов и градиентных неустойчивостей, а также сверхсветовых мод. С использованием полученных условий устойчивости в параграфе 1.2 показано, что благодаря дополнительным слагаемым, характерным для расширенной теории Хорндески, запрещающая теорема неприменима

к указанному классу скалярно-тензорных теорий. В качестве иллюстрации последнего утверждения на базе найденных условий устойчивости построены два различных решения с нетривиальными асимптотиками: в виде космологического отскока (параграф 1.3) и решения, подобного генезису (параграф 1.4). Предложенные решения устойчивы на протяжении всего времени эволюции и геодезически полны. В параграфе 1.5 обсуждается возможность построить решение в виде космологического отскока, которое было бы не только устойчиво на протяжении всей эволюции, но и имело бы простые асимптотики, описываемые общей теорией относительности в присутствии безмассового скалярного поля. В пункте 1.5.1 приведен анализ поведения скалярных возмущений в унитарной калибровке, и показано, что возмущения ведут себя регулярным образом, несмотря на кажущиеся расходимости в линеаризованных уравнениях при определенном поведении коэффициентов уравнения. Пример лагранжиана на расширенной теории Хорндески, который допускает устойчивое отскоковое решение с простыми асимптотиками, приведен в пункте 1.5.2.

Глава 2 полностью посвящена изучению двух методов вычисления квадратичного действия в теории Хорндески и ее расширении. В параграфе 2.1 проводится сравнительный анализ двух подходов в рамках кубической теории Хорндески (14). Пункт 2.1.1 содержит вывод квадратичного действия для возмущений без фиксации калибровки. В пункте 2.1.2 проведен подробный анализ метода DPSV, и показано, что он соответствует специальному выбору калибровки. Соответствие получаемых результатов методом DPSV и в условиях выбора унитарной калибровки проверено в пункте 2.1.3. В параграфе 2.2 показано, что метод DPSV применим в случае наиболее общего лагранжиана теории Хорндески (8), но требует наложения условий однородности на фоновое решение. Применимость подхода DPSV к расширенной теории Хорндески (18) исследуется в пункте 2.3.1, где явно показано, что метод в своей исходной форме работает некорректно и приводит к неверному результату. В пункте 2.3.2 предложен способ модифицировать метод, чтобы получаемый результат совпадал с результатом в случае выбора унитарной калибровки.

Заключение содержит краткую формулировку результатов исследований, представленных в диссертации.

Приложение А содержит явные выражения для коэффициентов в квадратичном действии для возмущений в случае расширенной теории Хорндески, а также квадратичное действие, записанное в терминах калибровочно-инвариантной комбинации возмущений скалярного сектора.

В Приложении Б и Приложении В приведены явные выражения для коэффициентов, введенных для упрощения формы записи линеаризованных уравнений Эйнштейна и уравнения поля галилеона в теории Хорндески и ее расширении.

1 Устойчивость решений в расширенной теории Хорндески

1.1 Возмущения в теории Хорндески и ее расширении

В общем случае лагранжиан расширенной теории Хорндески имеет вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{\mathcal{BH}}, \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X)\square\pi, \quad (22)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X) [(\square\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}], \quad (23)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X)G^{\mu\nu}\pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3}G_{5X} [(\square\pi)^3 - 3\square\pi\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} + 2\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\rho}\pi_{;\rho}{}^{\nu}], \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{BH}} = & F_4(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'} + \\ & + F_5(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'}\pi_{;\sigma\sigma'}, \end{aligned} \quad (25)$$

где π – это галилеонное поле, $X = g^{\mu\nu}\pi_{,\mu}\pi_{,\nu}$, $\pi_{,\mu} = \partial_\mu\pi$, $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $\square\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\pi$, $G_{4X} = \partial G_4/\partial X$ и т.д. Вклады (21)-(24) описывают общую теорию Хорндески, в то время как слагаемые в (25) относятся к расширенной теории Хорндески. Отметим, что действие (20) уже содержит гравитационную часть действия (см. (23) и (24)): действие Эйнштейна-Гильберта восстанавливается в пределе $G_4(\pi, X) = \frac{1}{2\kappa}$ и $G_5(\pi, X) = 0$, где $\kappa = 8\pi G$, а G – гравитационная постоянная.

Рассмотрим пространственно-плоскую метрику Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (26)$$

Уравнения Эйнштейна в теории с лагранжианом (20) имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta g^{00} : \quad & F - 2F_X X - 6HK_X X \dot{\pi} + K_\pi X + 6H^2 G_4 + 6HG_{4\pi} \dot{\pi} \\ & - 24H^2 X(G_{4X} + G_{4XX} X) + 12HG_{4\pi X} X \dot{\pi} \\ & - 2H^3 X \dot{\pi}(5G_{5X} + 2G_{5XX} X) + 3H^2 X(3G_{5\pi} + 2G_{5\pi X} X) \\ & - 6H^2 X^2(5F_4 + 2F_{4X} X) - 6H^3 X^2 \dot{\pi}(7F_5 + 2F_{5X} X) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \delta g^{ii} : \quad & F - X(2K_X \ddot{\pi} + K_\pi) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 - 12H^2 G_{4X} X \\ & - 8\dot{H}G_{4X} X - 8HG_{4X} \ddot{\pi} \dot{\pi} - 16HG_{4XX} X \ddot{\pi} \dot{\pi} \\ & + 2(\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi})G_{4\pi} + 4XG_{4\pi X}(\ddot{\pi} - 2H\dot{\pi}) + 2XG_{4\pi\pi} \\ & - 2XG_{5X}(2H^3 \dot{\pi} + 2H\dot{H}\dot{\pi} + 3H^2 \ddot{\pi}) - 4H^2 G_{5XX} X^2 \ddot{\pi} \\ & + G_{5\pi}(3H^2 X + 2\dot{H}X + 4H\ddot{\pi}\dot{\pi}) + 2HG_{5\pi X} X(2\ddot{\pi}\dot{\pi} - HX) \\ & + 2HG_{5\pi\pi} X \dot{\pi} - 2F_4 X(3H^2 X + 2\dot{H}X + 8H\ddot{\pi}\dot{\pi}) - 8HF_{4X} X^2 \ddot{\pi} \dot{\pi} \\ & - 4HF_{4\pi} X^2 \dot{\pi} - 6HF_5 X^2(2H^2 \dot{\pi} - 2\dot{H}\dot{\pi} - 5H\ddot{\pi}) \\ & - 12H^2 F_{5X} X^3 \ddot{\pi} - 6H^2 F_{5\pi} X^3 = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где точка обозначает производную по времени t , а $H = \dot{a}/a$ – параметр Хаббла. В линеаризованной теории мы рассматриваем как возмущения метрики (26), так и возмущения скалярного поля π . В дальнейшем удобно работать в терминах ADM разложения метрики. Введем следующие обозначения для компонент полной метрики с учетом малых возмущений:

$$g_{00} = 1 + 2\alpha, \quad g_{0i} = -\partial_i \beta, \quad g_{ij} = -a^2 (2\zeta \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E + h_{ij}^T), \quad (29)$$

где α , β , ζ и E – скалярные возмущения, h_{ij}^T – тензорные возмущения, для которых выполняются условия бесследовости ($h_{ii}^T = 0$) и поперечности ($\partial_i h_{ij}^T = 0$). В данной работе мы не анализируем поведение векторных мод (ожидается, что в спектре возмущений будут присутствовать только константная и падающая векторные моды). Возмущения над однородным фоновым полем галилеона π также учитываются в скалярном секторе:

$$\pi \rightarrow \pi(t) + \chi(t, r). \quad (30)$$

В общем случае линеаризованная теория инвариантна относительно инфинитезимальных преобразований координат вида:

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \xi_\mu, \quad (31)$$

где ξ_μ – малый параметр. В терминах введенной параметризации возмущений в (29) и (30) преобразования (31) скалярных мод сводятся к следующему виду:

$$\chi \rightarrow \chi + \xi_0 \dot{\pi}, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \dot{\xi}_0, \quad \beta \rightarrow \beta - \xi_0, \quad \zeta \rightarrow \zeta + \xi_0 \frac{\dot{a}}{a}, \quad (32)$$

где мы сразу использовали часть калибровочной свободы, чтобы избавиться от продольной компоненты E . Зафиксируем калибровку таким образом, чтобы в скалярном секторе нетривиальными были только величины α , β и ζ (унитарная калибровка). Тогда квадратичное действие для возмущений в теории с лагранжианом (20) имеет вид:

$$S = \int dt d^3x a^3 \left[\left(\frac{\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}}{8} \left(\dot{h}_{ij}^T \right)^2 - \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{8a^2} \left(\partial_k h_{ij}^T \right)^2 \right) + \left(-3\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} \dot{\zeta}^2 + \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \frac{(\nabla \zeta)^2}{a^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \alpha \frac{\Delta \zeta}{a^2} + 2\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} \dot{\zeta} \frac{\Delta \beta}{a^2} + 6\Theta \alpha \dot{\zeta} - 2\Theta \alpha \frac{\Delta \beta}{a^2} + \Sigma \alpha^2 \right) \right], \quad (33)$$

где коэффициенты $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$, Θ и Σ выражаются через функции лагранжиана:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = 2G_4 - 4G_{4X}X + G_{5\pi}X - 2HG_{5X}X\dot{\pi}, \quad (34)$$

$$\mathcal{D} = 2F_4X\dot{\pi} + 6HF_5X^2, \quad (35)$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} = \mathcal{G}_{\mathcal{T}} - \mathcal{D}\dot{\pi}, \quad (36)$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = 2G_4 - 2G_{5X}X\ddot{\pi} - G_{5\pi}X, \quad (37)$$

$$\Theta = -K_X X\dot{\pi} + 2G_4 H - 8HG_{4X}X - 8HG_{4XX}X^2 + G_{4\pi}\dot{\pi} + 2G_{4\pi X}X\dot{\pi} \\ - 5H^2G_{5X}X\dot{\pi} - 2H^2G_{5XX}X^2\dot{\pi} + 3HG_{5\pi}X + 2HG_{5\pi X}X^2 \\ - 10HF_4X^2 - 4HF_{4X}X^3 - 21H^2F_5X^2\dot{\pi} - 6H^2F_{5X}X^3\dot{\pi}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma = & F_X X + 2F_{XX} X^2 + 12HK_X X\dot{\pi} + 6HK_{XX} X^2\dot{\pi} - K_\pi X - K_{\pi X} X^2 \quad (39) \\
& -6H^2 G_4 + 42H^2 G_{4X} X + 96H^2 G_{4XX} X^2 + 24H^2 G_{4XXX} X^3 \\
& -6HG_{4\pi}\dot{\pi} - 30HG_{4\pi X} X\dot{\pi} - 12HG_{4\pi XX} X^2\dot{\pi} + 30H^3 G_{5X} X\dot{\pi} \\
& +26H^3 G_{5XX} X^2\dot{\pi} + 4H^3 G_{5XXX} X^3\dot{\pi} - 18H^2 G_{5\pi} X - 27H^2 G_{5\pi X} X^2 \\
& -6H^2 G_{5\pi XX} X^3 + 90H^2 F_4 X^2 + 78H^2 F_{4X} X^3 + 12H^2 F_{4XX} X^4 \\
& +168H^3 F_{5X} X^2\dot{\pi} + 102H^3 F_{5XX} X^3\dot{\pi} + 12H^3 F_{5XXX} X^4\dot{\pi}.
\end{aligned}$$

Из структуры квадратичного действия (33) видно, что α и β – нединамические степени свободы. Варьируя действие (33) по α и β , получим два уравнения связи, соответственно:

$$\frac{\Delta\beta}{a^2} = \frac{1}{\Theta} \left(3\Theta\dot{\zeta} - \mathcal{G}_\mathcal{T} \frac{\Delta\zeta}{a^2} + \Sigma\alpha \right), \quad (40)$$

$$\alpha = \frac{\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}\dot{\zeta}}{\Theta}. \quad (41)$$

Используя связи (40) и (41), действие (33) можно записать в терминах только динамических степеней свободы:

$$S = \int dt d^3x a^3 \left[\frac{\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}}{8} \left(\dot{h}_{ij}^T \right)^2 - \frac{\mathcal{F}_\mathcal{T}}{8a^2} \left(\partial_k h_{ij}^T \right)^2 + \mathcal{G}_S \dot{\zeta}^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\nabla\zeta)^2}{a^2} \right], \quad (42)$$

где введены следующие обозначения

$$\mathcal{G}_S = \frac{\Sigma\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}^2}{\Theta^2} + 3\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}, \quad (43)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} - \mathcal{F}_\mathcal{T}, \quad (44)$$

$$\xi = \frac{a\mathcal{G}_\mathcal{T}\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}}{\Theta} = \frac{a \left(\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T} + \mathcal{D}\dot{\pi} \right) \hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}}{\Theta}. \quad (45)$$

Таким образом, действие (42) содержит одну скалярную (ζ) и две тензорных (h_{ij}^T) степени свободы. Квадраты скоростей звука для скалярных и тензорных мод имеют следующий вид, соответственно:

$$c_\mathcal{T}^2 = \frac{\mathcal{F}_\mathcal{T}}{\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}}, \quad c_S^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S}. \quad (46)$$

Отсутствие духовых и градиентных неустойчивостей на фоне однородного решения, требует выполнения следующих ограничений, наложенных на коэффициенты квадратичного действия (42):

$$\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} > \mathcal{F}_{\mathcal{T}} > 0, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{S}} > \mathcal{F}_{\mathcal{S}} > 0. \quad (47)$$

Выполнение неравенств (47) также обеспечивает распространение и скалярных, и тензорных возмущений со скоростями меньшими скорости света. Таким образом, для того, чтобы в однородном решении в рамках теории с лагранжианом (20) не возникало духовых степеней свободы и градиентных неустойчивостей на протяжении всего времени эволюции, необходимо выполнение условий (47).

Ранее было показано, что выполнение условий устойчивости (47) в течение всей эволюции невозможно в рамках общей теории Хорндески, в которой $F_4(\pi, X) = F_5(\pi, X) = 0$. Была сформулирована теорема, запрещающая существование в общей теории Хорндески несингулярных космологических решений, которые были бы устойчивы в любой момент времени [87]. Ниже мы приводим доказательство запрещающей теоремы, чтобы явно продемонстрировать, что добавление слагаемых (25) в лагранжиан теории принципиально меняет ситуацию в вопросе устойчивости космологических решений.

1.2 Запрещающая теорема в общей теории Хорндески

Рассмотрим квадратичное действие (42) в случае общей теории Хорндески. Доказательство теоремы, запрещающей существование устойчивых космологических решений без начальной сингулярности в общей теории Хорндески, строится на условии отсутствия градиентных неустойчивостей в скалярном секторе:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} - \mathcal{F}_{\mathcal{T}} > 0. \quad (48)$$

Согласно выражениям (34)-(36)

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}, \quad (49)$$

и поэтому соотношение для ξ в (45) и (48) преобразуется к виду

$$\xi = \frac{a\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2}{\Theta}. \quad (50)$$

Требование отсутствия градиентных неустойчивостей (48) фактически сводится к тому, что $\xi(t)$ должна быть монотонно растущей функцией:

$$\dot{\xi} > a\mathcal{F}_{\mathcal{T}} > 0, \quad (51)$$

где мы предполагаем, что рассматриваемое космологическое решение несингулярно ($a > \text{const} > 0$) и является расширяющимся при $t \rightarrow +\infty$, а величина $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} > 0$ отвечает за отсутствие градиентных неустойчивостей в тензорном секторе. Перепишем условие (51) в отынтегрированном виде:

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) > \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathcal{F}_{\mathcal{T}} dt. \quad (52)$$

Интеграл в правой части неравенства (52) при увеличении области интегрирования может быть сходящимся или расходящимся в зависимости от асимптотического поведения $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ (в случае $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} \rightarrow 0$ при $t_{1,2} \rightarrow \pm\infty$ интеграл будет сходящимся). Предположим, что интеграл (52) при $t_{1,2} \rightarrow \pm\infty$ сходящимся не является. Кроме этого, рассмотрим случай, когда ξ несингулярно, т.е. коэффициент Θ , определенный в (38), не пересекает нуля как функция времени t .

Предположим, что $\xi(t_1) < 0$. Переписывая (52) в виде

$$-\xi(t_2) < |\xi(t_1)| - \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathcal{F}_{\mathcal{T}} dt, \quad (53)$$

и учитывая, что интеграл в правой части является растущей функцией t_2 , правая часть неравенства (53) становится отрицательной при достаточно больших t_2 . Таким образом, $\xi(t_2) > 0$, что означает, что ξ меняет знак. Согласно определению (50) ξ не может пересекать нуль в случае несингулярного космологического сценария ($a \neq 0$). Значит, наше предположение, что $\xi(t_1) < 0$ неверно и

$\xi(t) > 0$ для любого t . Тогда из (52) следует, что

$$-\xi(t_1) > -\xi(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathcal{F}_T dt, \quad (54)$$

но при $t_1 \rightarrow -\infty$ правая часть неравенства (54) становится положительной, и, следовательно, $\xi(t_1) < 0$, что противоречит нашему предположению, что $\xi(t) > 0$.

Таким образом, $\xi(t)$ обязательно пересекает нуль в некоторый момент времени t_0 . Как уже было отмечено, при условии конечного ξ в (50), $\xi(t) \neq 0$ при любом значении t , поскольку $\mathcal{G}_T > 0$ из требований отсутствия духов в тензорном секторе (см. (42)), а $\Theta \rightarrow \infty$ соответствует сингулярному коэффициенту в квадратичном действии. Значит, в случае общей теории Хорндески невозможно построить несингулярное космологическое решение, которое удовлетворяло бы условию отсутствия градиентных неустойчивостей в скалярном секторе (48) на протяжении всей эволюции.

Сделаем несколько замечаний касательно способов обойти сформулированную теорему. Одна из возможностей состоит в рассмотрении расходящегося ξ при $\Theta = 0$ в (50), например, при $\xi \sim 1/t$. Однако, такое поведение ξ не позволяет удовлетворить требованию $\dot{\xi} > \text{const} > 0$, и только за счет выбора поведения Θ исправить это невозможно. Другая возможность состоит в одновременном стремлении $\mathcal{G}_T$ и Θ к нулю, так что $\xi = 0$ [89]. Однако, на первый взгляд кажется, что такая теория должна перейти в режим сильной связи. Последние работы показали, что в случае решения в виде генезиса сильной связи при определенных условиях можно избежать [109]. Еще один способ попытаться обойти теорему заключается в выборе $\mathcal{F}_T \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ в (53), так чтобы интеграл сходилась на нижнем пределе [87, 89]. Данный способ, однако, снова приводит к наивной сильной связи в теории. Для данной работы интерес представляет построение решений, в которых гарантированно не возникает режима сильной связи, поскольку конечной целью является использование данных решений при построении полных моделей ранней Вселенной. Стоит отметить, что запрещает

ющая теорема применима к любому космологическому решению без начальной сингулярности.

В расширенной теории Хорндески ситуация принципиально иная: в определении ξ (45) входит $\mathcal{D} \neq 0$, которое зависит от новых функций $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$, и $\mathcal{G}_T \neq \hat{\mathcal{G}}_T$. Теперь коэффициент $\hat{\mathcal{G}}_T$ определяет устойчивость тензорного сектора и должен быть всегда положительным, а $\mathcal{G}_T$ не имеет определенного физического значения и может принимать отрицательные значения при $t \rightarrow -\infty$. Именно за счет нетривиального вклада $\mathcal{D}$ становится возможно добиться того, чтобы ξ пересекало нуль в некоторый момент времени, и тем самым обойти запрещающую теорему. Таким образом, изменение структуры условий устойчивости (47) в расширенной теории Хорндески указывает на возможность построить решения в виде космологического отскока и генезиса, которые были бы свободны от духовых и градиентных неустойчивостей в течение всей эволюции системы.

Квадратичное действие для возмущений в расширенной теории Хорндески также было получено независимо в рамках подхода эффективной теории (EFT) [101, 102], где был найден набор коэффициентов, аналогичный введенным выше (см. (34)-(39)). В работах [101, 102] был предложен такой же способ обхода запрещающей теоремы, как и изложенный выше. Однако, у подхода, использующего эффективную теорию поля есть существенный недостаток: невозможно явно выписать соответствующий четырехмерный лагранжиан, а так же проверить, что уравнения движения (27) и (28) выполняются. Подход, изложенный в данной работе не имеет указанных недостатков.

Прежде чем перейти к конкретному примеру устойчивого космологического решения в виде отскока, сделаем еще одно замечание относительно выбора поведения коэффициентов в условии устойчивости (44). Как было отмечено выше, ξ может быть как регулярным, так и сингулярным в зависимости от выбора поведения коэффициента Θ . Далее мы будем рассматривать случай, когда $\Theta(t) \neq 0$ при любом t , т.е. $\xi(t)$ всюду конечно. Такой выбор накладывает определенные ограничения на асимптотики решений: галилеонное поле π не может переходить

доть в стандартное безмассовое поле на фоне общей теории относительности и в асимптотическом прошлом, и в асимптотическом будущем. Иными словами, либо асимптотическое прошлое, либо асимптотическое будущее теории с решением в виде отскока будет описываться нетривиальной теорией скалярного поля с модифицированной гравитацией. Указанное свойство асимптотик непосредственно следует из определения Θ в (38), а именно того факта, что Θ пропорционально параметру Хаббла, $\Theta = 2G_4H$, где G_4 – гравитационная постоянная. Концепция космологического отскока подразумевает наличие двух стадий: стадии сжатия ($H < 0$) и стадии расширения ($H > 0$), что означает необходимое прохождение через нуль и, следовательно, смену знака для Θ . В следующем параграфе мы приведем пример отскокового решения с нетривиальным поведением скалярного поля π в асимптотическом прошлом, которое трансформируется в стандартное безмассовое скалярное поле на асимптотически больших временах.

Аналогичное утверждение про форму асимптотик верно и для случая решения в виде генезиса: невозможно построить генезис, в котором галилеонное поле превращается в безмассовое скалярное поле на фоне эйнштейновской гравитации как в далеком прошлом, так и далеком будущем, если потребовать $\Theta(t) \neq 0$. Приведем более строгое обоснование этого утверждения. Потребуем, чтобы гравитация в асимптотическом прошлом описывалась действием Эйнштейна-Гильберта, тогда

$$G_4(\pi, X) = \frac{1}{2\kappa}, \quad G_5(\pi, X) = 0.$$

При этом для $t \rightarrow 0\infty$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = 2G_4 - 4G_{4X}X + G_{5\pi}X - 2HG_{5X}X\dot{\pi} = \frac{1}{\kappa}. \quad (55)$$

Но, как указано выше, чтобы обойти запрещающую теорему, $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ должно быть отрицательно на малых временах и менять знак в некоторый момент времени, что противоречит (55). Однако, у данного рассуждения есть тонкость: мы неявно предположили, что $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ пересекает нуль только один раз. Чтобы убедиться,

что реализуется именно этот случай, напомним, что, согласно (44), ξ является монотонно растущей функцией, а значит она пересекает нуль один раз. Как обсуждалось выше, пересечение ξ нуля происходит именно за счет $\mathcal{G}_T$. Поэтому $\mathcal{G}_T$ действительно может пересекать нуль только однократно. Данное обоснование утверждения о нетривиальности одной из асимптотик в равной степени применимо для случая космологического отскока.

1.3 Космологический отскок: пример

Приведем конкретный пример функций лагранжиана в расширенной теории Хорндески, которые допускают решение полевых уравнений, соответствующее классическому, полностью устойчивому отскоку.

Далее в параграфе все вычисления проводятся в терминах планковских величин:

$$\kappa = 8\pi G = 1.$$

Перед тем как представить явный вид лагранжиана теории, напомним основные свойства сценария с космологическим отскоком. Одним из условий, наложенных на решение, является простое асимптотическое поведение теории в будущем, а именно поле галилеона должна переходить в безмассовое скалярное поле с уравнением состояния $p = \rho$, где p и ρ – это давление и плотность энергии, соответственно. В этом случае асимптотика параметра Хаббла на поздних временах имеет вид:

$$t \rightarrow +\infty : \quad H(t) = \frac{1}{3t}.$$

Мы применяем так называемый метод реконструкции решения: для выбранного поведения параметра Хаббла, соответствующего Вселенной с отскоком, мы из соображений удобства выбираем временную зависимость *некоторых* функций лагранжиана, зависящих от фона, и восстанавливаем остальные функции путем решения фоновых уравнений поля. Подобная реконструкция широко используется в других работах, например, [82, 85, 87]. Выберем следующую зависимость

от времени для параметра Хаббла

$$H(t) = \frac{t}{3(1+t^2)}, \quad (56)$$

так что отскок происходит при $t = 0$, а масштабный фактор равен

$$a(t) = (1+t^2)^{\frac{1}{6}}. \quad (57)$$

Выбранный параметр Хаббла и его производная изображены на Рис. 1. Для

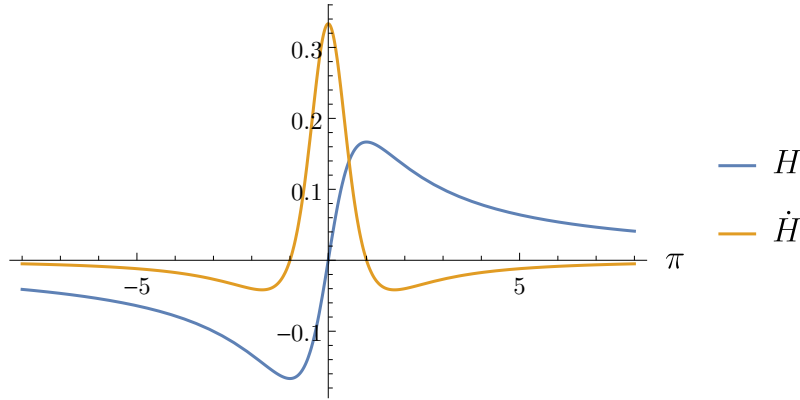


Рис. 1: Параметр Хаббла H и его производная $\dot{H}$, соответствующие Вселенной с отскоком.

реконструкции примера расширенной теории Хорндески, имеющей устойчивое отскоковое решение, выберем следующий вид функций лагранжиана:

$$\begin{aligned} F(\pi, X) &= f_0(\pi) + f_1(\pi)X + f_2(\pi)X^2, \\ K(\pi, X) &= k_1(\pi)X, \\ G_4(\pi, X) &= \frac{1}{2} + g_{40}(\pi) + g_{41}(\pi)X, \\ G_5(\pi, X) &= 0, \\ F_4(\pi, X) &= f_{40}(\pi), \\ F_5(\pi, X) &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Отметим, что нет необходимости использовать весь доступный набор функций в лагранжиане, поэтому для упрощения процедуры реконструкции мы считаем $G_5(\pi, X) = F_5(\pi, X) = 0$. Зависимость от времени однородного фонового значения скалярного поля π всегда может быть выбрана линейной с помощью преобразования полей:

$$\pi(t) = t, \quad X = (\partial\pi)^2 = 1. \quad (59)$$

Кратко опишем процедуру последующего выбора функций $k_1(t)$, $g_{4j}(t)$, $f_{4j}(t)$ и $f_i(t)$, входящих в выбор функций лагранжиана (58): 1) выбираем из соображений удобства функции $k_1(t)$, $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$ и $f_{40}(t)$, 2) решая уравнения Эйнштейна, выражаем функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ через уже заданные $k_1(t)$, $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$ и $f_{40}(t)$, 3) наконец, подбираем оставшуюся функцию $f_0(t)$ так, чтобы выполнялось условие отсутствия духовых неустойчивостей, а скорость распространения скалярных мод не превышала скорость света.

Начнем с определения вида функций $k_1(t)$, $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$ и $f_{40}(t)$. Поскольку одним из наших требований является соответствие искомого лагранжиана теории безмассового скалярного поля на фоне немодифицированной гравитации при $t \rightarrow +\infty$, необходимо обеспечить следующее асимптотическое поведение функций в лагранжиане (20):

$$t \rightarrow +\infty : \quad K(\pi, X) = 0, \quad G_4(\pi, X) = \frac{1}{2}, \quad F_4(\pi, X) = 0. \quad (60)$$

С другой стороны, как было отмечено в параграфе 1.2, в силу выбора $\Theta \neq 0$, асимптотика при $t \rightarrow -\infty$ окажется в данном случае нетривиальной, и, как следствие, на нее накладывается менее строгое ограничение. Выберем одну из возможных форм асимптотики на ранних временах:

$$t \rightarrow -\infty : \quad G_4(\pi, X) = \text{const}, \quad F_4(\pi, X) = \text{const}. \quad (61)$$

С учетом указанного вида асимптотик, выберем $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$ и $f_{40}(t)$:

$$g_{40}(t) = c_2 (1 - \text{th}(t)), \quad g_{41}(t) = c_3 (1 - \text{th}(t)), \quad (62)$$

$$f_{40}(t) = c_4 (1 - \text{th}(t)), \quad (63)$$

где c_2 , c_3 и c_4 – константы. Таким образом, мы полностью восстановили функции $G_4(\pi, X)$ и $F_4(\pi, X)$ в (58), исходя из выбранных асимптотик теории.

Определим поведение $k_1(t)$. Удобно связать поведение функции K при $t \rightarrow -\infty$ с поведением коэффициента Θ , который для выбора функций лагранжиана (58) зависит только от функций K , G_4 , F_4 и параметра Хаббла:

$$\Theta = -k_1 + \dot{g}_{40} + 3\dot{g}_{41} - 8g_{41}H + 2\left(\frac{1}{2} + g_{40} + g_{41}\right)H + 10f_{40}H. \quad (64)$$

С учетом выбранных асимптотик для G_4 и F_4 на ранних временах в (61), выберем $k_1(t)$ пропорциональной параметру Хаббла (56), чтобы получить простое степенное поведение Θ :

$$k_1(t) = c_1 \frac{t}{1+t^2} (1 - \text{th}(t)), \quad (65)$$

где $c_1 = \text{const}$. Выбор (65) полностью определяет искомую функцию $K(\pi, X)$.

Перейдем к определению зависимости от времени функций $f_0(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Заметим, что в асимптотическом будущем нетривиальной должна оставаться только функция $f_1(t)$, поскольку она соответствует стандартному кинетическому члену скалярного поля:

$$t \rightarrow +\infty : \quad f_0(t) = f_2(t) = 0. \quad (66)$$

Определим $f_1(t)$ как сумму двух вспомогательных функций

$$f_1(t) = f_{10}(t) + f_{11}(t) \quad (67)$$

со следующим асимптотическим поведением:

$$t \rightarrow +\infty : \quad f_{10}(t) = \frac{p}{t^2}, \quad f_{11}(t) = O(t^{-3}), \quad (68)$$

где p – константа. Значение константы p найдем из асимптотики уравнений Эйнштейна на поздних временах: при $t \rightarrow +\infty$ ненулевыми остаются только $H(t)$, $\dot{H}(t)$ и $f_{10}(t)$. Используя заданное асимптотическое поведение $H(t) = 1/3t$ и $f_{10}(t) = p/t^2$, получим из уравнений движения (27)-(28), что $p = 1/3$. Данное

значение p является ожидаемым результатом для линейной зависимости $\pi = t$, и позволяет выбрать $f_{10}(t)$ в виде

$$f_{10}(t) = \frac{1}{3(1+t^2)}. \quad (69)$$

Обеспечив правильное поведение $f_1(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ за счет выбора $f_{10}(t)$, найдем второй вклад $f_{11}(t)$, а также $f_2(t)$ из уравнений Эйнштейна: подставляя выбор функций лагранжиана (58) и (67) в уравнения (27)-(28), можно выразить $f_{11}(t)$ и $f_2(t)$ через уже найденные функции f_{10} , g_{4i} , f_{40} и пока произвольную f_0 :

$$f_{11}(t) = -2f_0 - f_{10} + \dot{k}_1 - 3\ddot{g}_{40} - 3\ddot{g}_{41} + 3H \left(k_1 - 3\dot{g}_{40} - \dot{g}_{41} - 2\dot{f}_{40} \right) - 6H^2 (1 + 2g_{40} - 3g_{41} + 4f_{40}) - 3\dot{H} (1 + 2g_{40} - 2g_{41} + 2f_{40}), \quad (70)$$

$$f_2(t) = f_0 + \ddot{g}_{40} + \ddot{g}_{41} - H \left(3k_1 - 5\dot{g}_{40} - 7\dot{g}_{41} - 2\dot{f}_{40} \right) + 3H^2 (1 + 2g_{40} - 4g_{41} + 6f_{40}) + \dot{H} (1 + 2g_{40} - 2g_{41} + 2f_{40}). \quad (71)$$

Таким образом, осталась единственная неизвестная функция $f_0(t)$, которая входит в определение коэффициента Σ (39). Из соображений удобства потребуем, чтобы $f_0(t)$ удовлетворяло следующему уравнению:

$$\Sigma = q(1 - \text{th}(t))\Theta^2, \quad (72)$$

где $q = \text{const}$. Подставляя выбор функций лагранжиана (58) в уравнение (72) и решая его относительно $f_0(t)$, получим:

$$f_0(t) = \frac{1}{4} \left[\dot{k}_1 - 3\ddot{g}_{40} - 3\ddot{g}_{41} + 3H \left(k_1 - 5\dot{g}_{40} - \dot{g}_{41} - 2\dot{f}_{40} \right) - 3H^2 (3 + 6g_{40} - 6g_{41} - 2f_{40}) - 3\dot{H} (1 + 2f_{40} + 2g_{40} - 2g_{41}) + q(1 - \text{th}(t)) (-k_1 + \dot{g}_{40} + 3\dot{g}_{41} + H(1 + 2g_{40} - 6g_{41} + 10f_{40}))^2 \right]. \quad (73)$$

Используя выражения для функций $k_1(t)$, $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$, $f_{40}(t)$ в (65), (62) и (63) и параметр Хаббла из (56), можно убедиться, что $f_{10}(t)$, $f_{11}(t)$ и $f_2(t)$ являются гладкими функциями времени и быстро убывают при $t \rightarrow +\infty$. Для окончательного определения функций лагранжиана необходимо найти допустимые

значения использованных констант c_1, c_2, c_3, c_4 и q так, что все условия устойчивости, а также условие субсветового распространения возмущений (47) были выполнены.

Прежде чем перейти к непосредственному анализу условий устойчивости напомним, что в данном параграфе рассматривается случай $\Theta(t) > 0$ для всех t . Из (64) с учетом выбранных выше асимптотик функций лагранжиана следует, что $\Theta|_{t=+\infty} = H$. Иными словами, в асимптотическом будущем найденная теория описывает безмассовое скалярное поле на фоне эйнштейновской гравитации, т.е. $G_4(\pi, X) = \frac{1}{2}$, и, как следствие, $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}|_{t=+\infty} = 1$ (см. (34)). При этом на ранних временах по-прежнему

$$\Theta|_{t=-\infty} > 0, \quad (74)$$

а $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ должно поменять знак:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}|_{t=-\infty} < 0. \quad (75)$$

Именно за счет смены знака $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ в течение эволюции, как обсуждалось в параграфе 1.2, удается обойти запрещающую теорему и добиться полной устойчивости решения.

Рассмотрим условия устойчивости тензорного сектора. Как уже было отмечено ранее, за счет выбора функций G_4 и F_4 в (62) и (63) так, что гравитация при $t \rightarrow +\infty$ описывается общей теорией относительности, мы автоматически имеем корректное поведение $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ на поздних временах:

$$\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}|_{t=+\infty} = \mathcal{F}_{\mathcal{T}}|_{t=+\infty} = 1. \quad (76)$$

Необходимо выбрать параметры c_i так, чтобы гладкие, монотонные функции $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(t)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(t)$ в асимптотическом прошлом удовлетворяли следующим неравенствам

$$\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}|_{t=-\infty} > \mathcal{F}_{\mathcal{T}}|_{t=-\infty} > 0. \quad (77)$$

Одновременное выполнение условий (76) и (77) будет означать, что $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(t)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(t)$ положительны на протяжении всей эволюции, а соответствующий квад-

рат скорости распространения тензорных мод

$$c_{\mathcal{T}}^2 = \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(t)}{\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(t)} \leq 1. \quad (78)$$

Обратимся к условиям устойчивости для скалярных возмущений. Можно убедиться, что неравенство $\mathcal{F}_S|_{t=+\infty} > 0$ равносильно условию $\dot{H}|_{t=+\infty} < 0$ (см. (44)) и выполняется для параметра Хаббла (56). На ранних временах для отсутствия градиентных неустойчивостей необходимо потребовать

$$\mathcal{F}_S|_{t=-\infty} > 0. \quad (79)$$

Для того чтобы решение было также свободно от духовых неустойчивостей, обратимся к $\mathcal{G}_S$ в (43) и запишем его в терминах выбранных функций лагранжиана, подставив Σ из (72):

$$\mathcal{G}_S = q(1 - \text{th}(t))\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}^2 + 3\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}, \quad (80)$$

где $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} > 0$, а $\mathcal{G}_S$ всюду положительно автоматически. С помощью специального выбора параметра q регулируется соотношение между $\mathcal{G}_S$ и $\mathcal{F}_S$ так, что скорость распространения скалярных возмущений меньше скорости света:

$$c_S^2 = \frac{\mathcal{F}_S(t)}{\mathcal{G}_S(t)} < 1. \quad (81)$$

Приведем один из возможных наборов параметров c_i , $i = 1, \dots, 4$ и q , для которых выполняются условия (74), (75), (77) и (79), а также (78) и (81):

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{4}, \quad c_3 = \frac{1}{32}, \quad c_4 = \frac{1}{4}, \quad q = 20. \quad (82)$$

Таким образом, выбирая значения параметров (82), мы получаем решение, соответствующее Вселенной с отскоком, в котором на протяжении *всей* эволюции не возникают духи и градиентные неустойчивости. Графики зависимости $\mathcal{G}_S(t)$, $\mathcal{F}_S(t)$, $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(t)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(t)$ от времени t , а также соответствующие скорости скалярных и тензорных мод, приведены на Рис. 2.

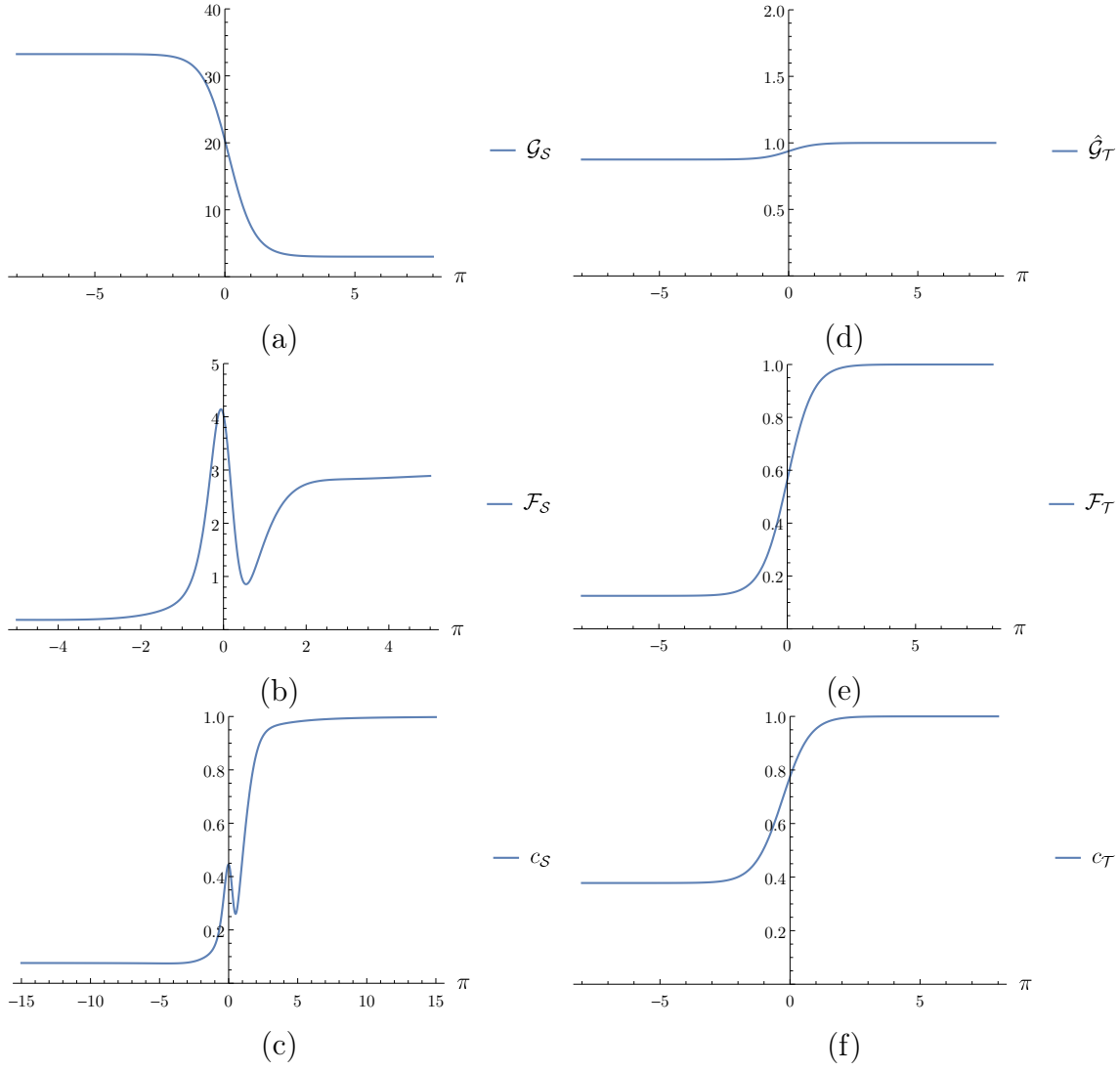


Рис. 2: Кинетический и градиентный коэффициенты для скалярного ($\mathcal{G}_S$ (a) и $\mathcal{F}_S$ (b)) и тензорного ($\hat{\mathcal{G}}_T$ (d) и $\mathcal{F}_T$ (e)) сектора, а также скорости распространения скалярных c_S (c) и тензорных c_T (f) мод для решения в виде отскока.

Отметим, что ξ и $\mathcal{G}_T$ меняют знак одновременно при $\pi = t = \text{artanh}(\frac{7}{9}) \approx -1$, в то время как $\hat{\mathcal{G}}_T$ остается положительным для любого t , т.е. предложенный в параграфе 1.2 способ обойти запрещающую теорему действительно рабо-

тает, и полученное решение не имеет патологий на протяжении всей эволюции. Зависимость от времени для ξ и $\mathcal{G}_T$ приведена на Рис. 3. Для полноты изло-

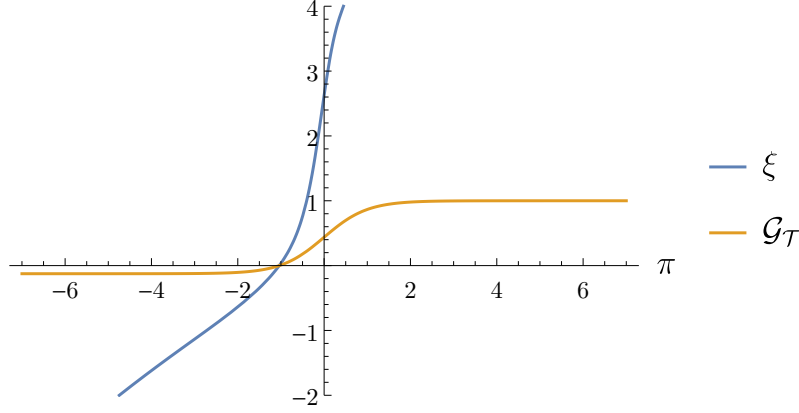


Рис. 3: ξ и $\mathcal{G}_T$ как функции времени для решения в виде отскока. $\xi = \mathcal{G}_T = 0$ при $\pi = t = \text{artanh} \left[\frac{7}{9} \right] \approx -1$.

жения на Рис. 4 приведем графики для функций $f_0(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$, аналитические выражения для которых менее тривиальны, чем для остальных функций лагранжиана (см. (69)-(71) и (73)).

Рассмотрим явный вид асимптотик в найденной нами теории с отскоком. Перепишем набор функций лагранжиана (58) с учетом конкретного выбора $k_1(t)$, $g_{4j}(t)$, $f_{4j}(t)$ и $f_i(t)$ в (62), (63), (65), (69)-(71) и (73) для асимптотически малых времен, где мы восстановим зависимость от π :

$$\begin{aligned}
 t \rightarrow -\infty : \quad F(\pi, X) &= \mathcal{C}_0 \cdot \frac{1}{\pi^2} + \left(\frac{1}{3} + \mathcal{C}_1 \right) \frac{(\partial\pi)^2}{\pi^2} + \mathcal{C}_2 \frac{(\partial\pi)^4}{\pi^2}, \\
 K(\pi, X) &= 2c_1 \frac{(\partial\pi)^2}{\pi}, \\
 G_4(\pi, X) &= \frac{1}{2} + 2c_2 + 2c_3(\partial\pi)^2, \\
 F_4(\pi, X) &= 2c_4,
 \end{aligned} \tag{83}$$

где коэффициенты $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ имеют вид

$$\mathcal{C}_0 = \frac{q}{18} (1 - 6c_1 + 4c_2 - 12c_3 + 20c_4)^2 + \frac{4}{3}c_4,$$

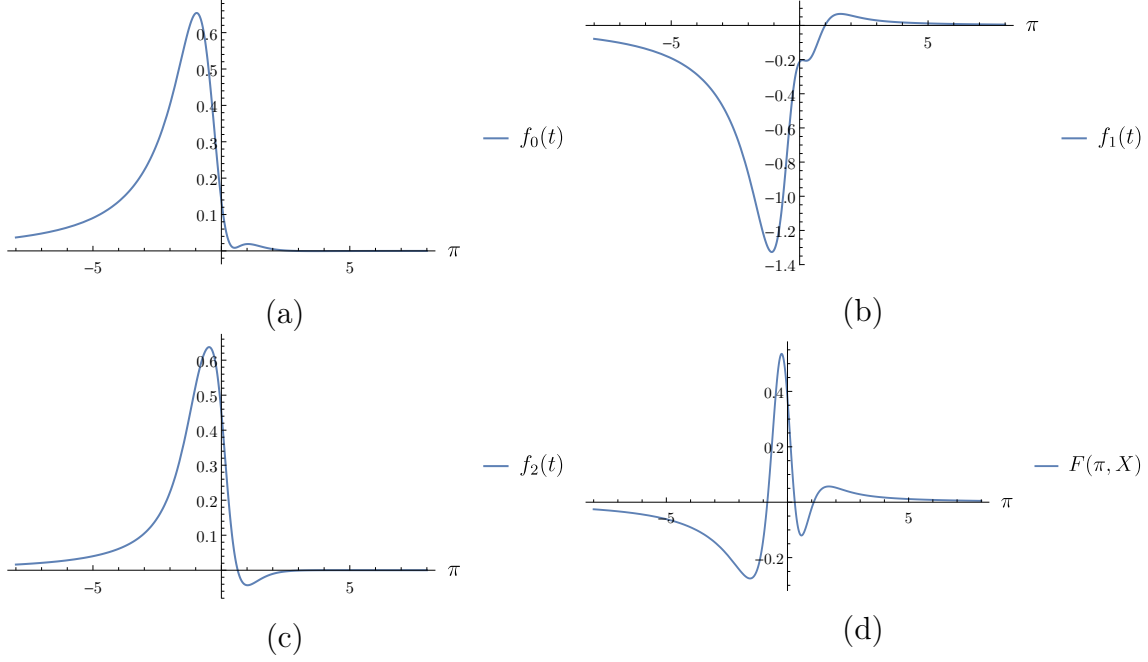


Рис. 4: $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $F(\pi, X) \equiv F(t)$, входящие в (58) с учетом линейной зависимости галилеонного поля от времени $\dot{\pi} = 1$. Параметры c_i , $i = 1, \dots, 4$ и q выбраны в соответствии с (82).

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \frac{4}{3}(c_2 - c_4) - 2\mathcal{C}_0, \\ \mathcal{C}_2 &= -\frac{2}{3}(3c_1 + 2c_3 - 4c_4) + \mathcal{C}_0. \end{aligned} \quad (84)$$

Тогда лагранжиан теории в асимптотическом прошлом имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{t=-\infty} &= \mathcal{C}_0 \cdot \frac{1}{\pi^2} + \left(\frac{1}{3} + \mathcal{C}_1 \right) \frac{(\partial\pi)^2}{\pi^2} + \mathcal{C}_2 \frac{(\partial\pi)^4}{\pi^2} \\ &+ 2c_1 \frac{(\partial\pi)^2}{\pi} \square\pi - \left(\frac{1}{2} + 2c_2 + 2c_3(\partial\pi)^2 \right) R + 4c_3 [(\square\pi)^2 - \nabla^{\mu\nu}\pi \nabla_{\mu\nu}\pi] \\ &+ 2c_4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'}{}_{\sigma} \nabla_{\mu}\pi \nabla'_{\mu}\pi \nabla_{\nu\nu'}\pi \nabla_{\rho\rho'}\pi. \end{aligned} \quad (85)$$

Отметим, что при $t \rightarrow -\infty$ теория (85) соответствует расширенной теории Хорндески. В то же время на поздних временах функции лагранжиана име-

ют следующее поведение:

$$\begin{aligned}
t \rightarrow +\infty : \quad & F(\pi, X) = \frac{1}{3} \frac{(\partial\pi)^2}{\pi^2}, \\
& K(\pi, X) = 0, \\
& G_4(\pi, X) = \frac{1}{2}, \\
& F_4(\pi, X) = 0.
\end{aligned} \tag{86}$$

Полный лагранжиан теории при $t = +\infty$, как и предполагалось при построении, соответствует теории безмассового скалярного поля на фоне немодифицированной гравитации:

$$\mathcal{L}|_{t=+\infty} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{3} \frac{(\partial\pi)^2}{\pi^2} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}(\partial\phi)^2, \tag{87}$$

где $\phi = \ln(\pi)$.

Таким образом, в расширенной теории Хорндески действительно возможно построить решение в виде космологического отскока, в котором на протяжении всего времени эволюции отсутствуют духовые и градиентные неустойчивости как в скалярном, так и в тензорном секторе линеаризованной теории. Кроме этого, все моды распространяются со скоростями меньшими (или равными) скорости света. Специфическим свойством построенного решения является нетривиальная асимптотика предложенной теории на ранних временах, что, как обсуждалось ранее, является следствием требования $\Theta > 0$. В параграфе 1.5 будет рассмотрен случай произвольного Θ , что позволит построить отскоковое решение с простыми асимптотиками как на больших, так и на малых временах.

1.4 Генезис: пример

Применим изложенную выше методику построения устойчивого решения в случае космологического сценария с генезисом. Как и ранее, целью является получить явный вид теории, которая допускает устойчивое, геодезически полное решение, соответствующее генезису с наперед заданным параметром Хаббла.

Единственным существенным отличием по сравнению с процедурой, изложенной для случая отскока, является выбор формы зависимости от времени для параметра Хаббла H , соответствующего Вселенной со стадией генезиса, а также функции $k_1(t)$, которая на ранних временах пропорциональна параметру Хаббла.

Напомним, что при условии $\Theta > 0$ для любого t , как и в случае отскока, невозможно построить расширенную теорию Хорндески с генезисом без патологий, которая и в асимптотическом прошлом, и асимптотическом будущем описывала бы безмассовое скалярное поле на фоне немодифицированной гравитации. Поэтому для искомого решения в виде генезиса мы накладываем условие простого асимптотического поведения теории только при $t \rightarrow +\infty$, что для параметра Хаббла означает следующее поведение на больших временах ⁶:

$$t \rightarrow +\infty : \quad H(t) = \frac{1}{3t}.$$

Выберем зависимость параметра Хаббла от времени в следующей форме:

$$H(t) = \frac{1}{3\sqrt{1+t^2}}, \quad (88)$$

с соответствующей формой для масштабного фактора $a(t)$

$$a(t) = \left[t + \sqrt{1+t^2} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (89)$$

Зависимость от времени параметра Хаббла и его производной изображены на Рис. 5. Как было отмечено ранее, принципиальным отличием от случая космологического отскока является выбор функции $k_1(t)$. Для устойчивого отскока $k_1(t)$ было выбрано так, что

$$k_1(t)|_{t \rightarrow -\infty} \propto H, \quad k_1(t)|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (90)$$

Для искомого решения в виде генезиса воспользуемся выбором функций лагранжиана (58), и выберем функции G_4 и F_4 такими же, как и в случае отскока

⁶ Далее все вычисления вновь проводятся в терминах планковских величин: $\kappa = 8\pi G = 1$.

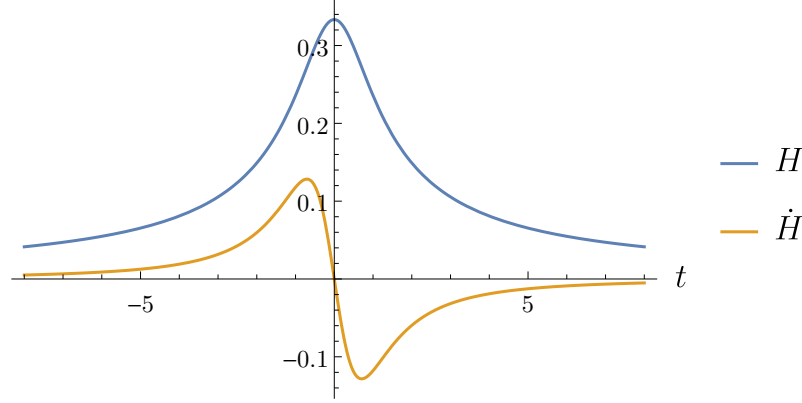


Рис. 5: Параметр Хаббла H и его производная $\dot{H}$, соответствующие Вселенной с генозисом.

(см. (62) и (63)). Функцию $k_1(t)$ выберем в виде

$$k_1(t) = c_1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} (1 - \text{th}(t)). \quad (91)$$

Снова потребуем, чтобы функция f_0 удовлетворяла уравнению (72), а f_{10} зададим в форме (69). Тогда для f_{11} , f_2 и f_0 будут справедливы те же аналитические выражения (70), (71) и (73), что и в случае отскока. Остается выбрать значение констант c_i , $i = 1, \dots, 4$ и q . Приведем один из возможных наборов параметров, которые удовлетворяют всем условиям устойчивости:

$$c_1 = \frac{31}{8}, \quad c_2 = -\frac{3}{8}, \quad c_3 = \frac{5}{32}, \quad c_4 = \frac{21}{16}, \quad q = 6. \quad (92)$$

Указанный набор параметров позволяет написать лагранжиан теории, допускающий решение в виде генозиса, в котором нет духов и градиентных неустойчивостей. Поведение функций $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{F}_S$, $\hat{\mathcal{G}}_T$ и $\mathcal{F}_T$, а также соответствующих скоростей c_S и c_T приведены на Рис. 6. На Рис. 7 изображены ξ и $\mathcal{G}_T$, форма зависимости от времени которых позволила обойти запрещающую теорему (сравни с Рис.3 для случая отскока). Функции $\xi(t)$ и $\mathcal{G}_T$ пересекают нуль при $\pi = t = \text{artanh} \left[\frac{1}{17} \right] \approx 0.06$. Функции f_0 , f_1 , f_2 приведены на Рис. 8, где выбор

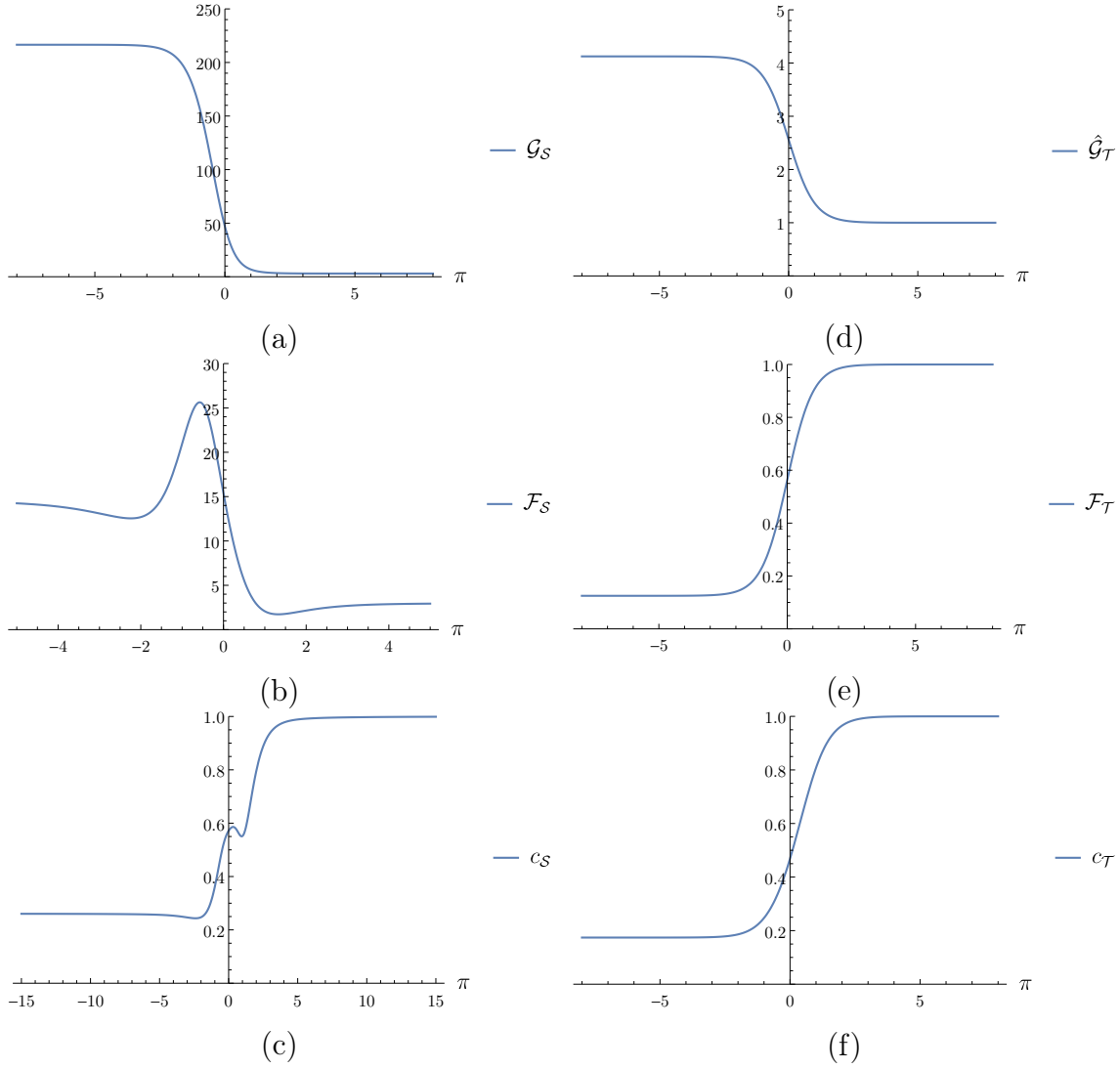


Рис. 6: Кинетический и градиентный коэффициенты для скалярного ($\mathcal{G}_S$ (a) и $\mathcal{F}_S$ (b)) и тензорного ($\hat{\mathcal{G}}_T$ (d) и $\mathcal{F}_T$ (e)) сектора, а также скорости распространения скалярных c_S (c) и тензорных c_T (f) мод для решения в виде генезиса.

значений постоянных параметров соответствует (92). Таким образом, предложенное решение в виде генезиса полностью устойчиво, а функции лагранжиана соответствующей теории являются гладкими для любого значения поля π .

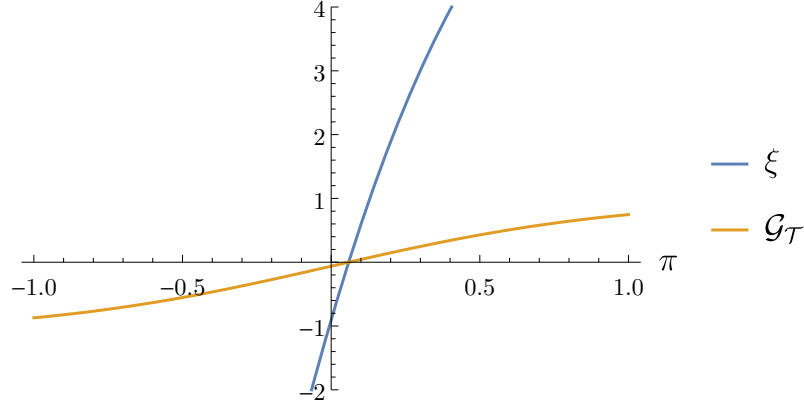


Рис. 7: ξ и $\mathcal{G}_T$ как функции времени для решения в виде генезиса. $\xi = \mathcal{G}_T = 0$ при $\pi = t = \operatorname{artanh} \left[\frac{1}{17} \right] \approx 0.06$.

Наконец, рассмотрим геодезическую полноту найденного решения в виде генезиса. Напомним, что масштабный фактор ведет себя в рамках рассматриваемого сценария следующим образом:

$$a(t) = \left[t + \sqrt{1 + t^2} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (93)$$

На ранних временах ($t \rightarrow -\infty$), асимптотика масштабного фактора имеет форму

$$a(t) = \frac{1}{(-2t)^{\frac{1}{3}}}. \quad (94)$$

Рассмотрим нулевые и изотропные геодезические

$$t'^2 = a(t)^2 x'^2, \quad (95)$$

$$t'^2 = a(t)^2 x'^2 + 1, \quad (96)$$

где штрих означает производную по аффинному параметру τ . Здесь и далее мы работаем в терминах единственной координаты x , поскольку геодезическая в данном случае является прямой. Одно из двух уравнений геодезической принимает вид:

$$(a(t)^2 x')' = 0, \quad (97)$$

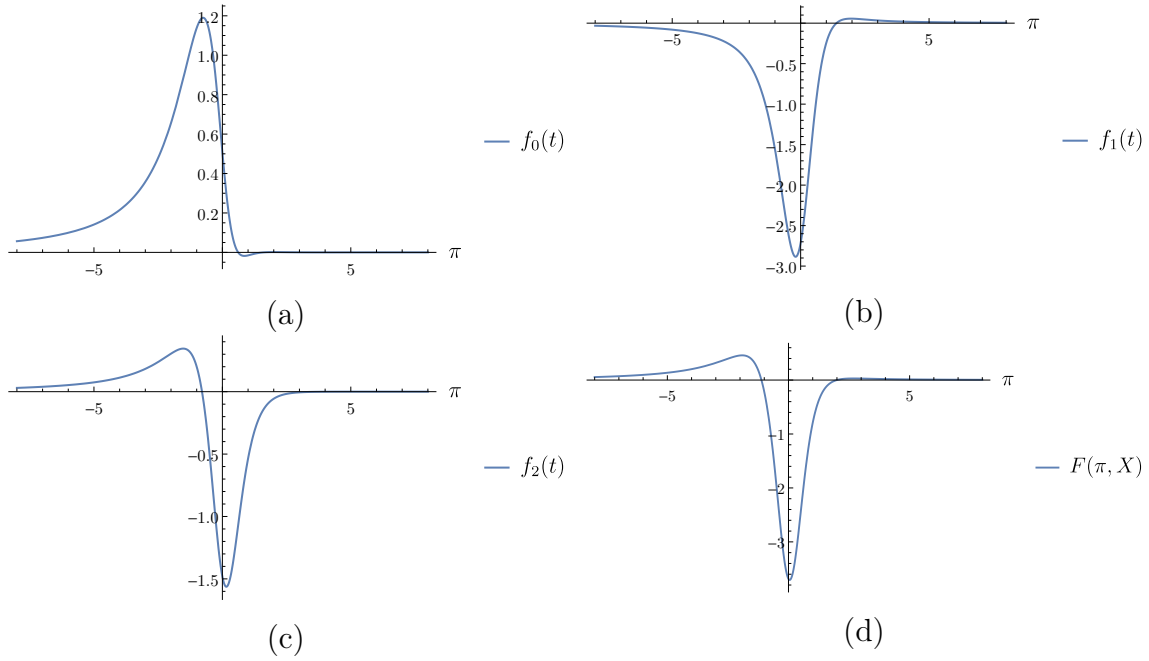


Рис. 8: $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $F(\pi, X) \equiv F(t)$, входящие в (58) с учетом линейной зависимости галилеонного поля от времени $\dot{\pi} = 1$. Параметры c_i , $i = 1, \dots, 4$ и q выбраны в соответствии с (92).

что подразумевает

$$a(t)^2 x' = \text{const} = C, \quad (98)$$

где возможно положить $C = 1$ без потери общности. Из уравнения (98), а также уравнений (95)-(96), получается следующие выражения для нулевой геодезической

$$\tau = \int a(t) dt, \quad (99)$$

$$x = \int \frac{1}{a(t)} dt, \quad (100)$$

и для изотропной

$$\tau = \int \frac{a(t)}{\sqrt{1+a(t)^2}} dt, \quad (101)$$

$$x = \int \frac{\sqrt{1+a(t)^2}}{a(t)} dt. \quad (102)$$

Мы получили, что асимптотика уравнений (101) и (102) совпадает с асимптотикой уравнений (99) и (100), поскольку $a(t) \rightarrow 0$ и поэтому $\sqrt{1 + a(t)^2} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow -\infty$. Таким образом, можно работать с более простым набором уравнений (99) и (100). Из уравнений (94), (99) и (100) получим, что

$$-\tau \sim (-t)^{\frac{2}{3}}, \quad (103)$$

$$-x \sim (-t)^{\frac{4}{3}}. \quad (104)$$

Двигаясь в прошлое вдоль геодезической ($t \rightarrow -\infty$), аффинный параметр стремится к бесконечности ($\tau \rightarrow -\infty$), и то же справедливо для координаты ($x \rightarrow -\infty$). Так, ни при одном значении аффинного параметра мы не покидаем FLRW координатной области. Значит, предложенная модель генезиса является геодезически полной.

1.5 Космологический отскок и γ -кроссинг

Космологический отскок, предложенный в параграфе 1.3, является примером одной из первых ковариантных моделей (см. также [105]), в которой не возникает патологических степеней свободы. Однако, указанная модель имеет нетривиальную асимптотику либо в прошлом, либо в будущем, что, в некотором смысле, делает указанное решение менее привлекательным с точки зрения его использования в реалистичных моделях ранней Вселенной. Наиболее предпочтителен сценарий с отскоком, у которого обе асимптотики имеют простое поведение, в частности, с гравитацией, соответствующей общей теории относительности (ОТО). При этом разумно потребовать, чтобы галилеонное поле π трансформировалось в безмассовое скалярное поле в асимптотическом прошлом и асимптотическом будущем. Причина, по которой исходный отскок имел одну нетривиальную асимптотику, заключается в запрете в описанной ранее модели так называемого явления γ -кроссинга: момента t_0 , когда коэффициент Θ в квадратичном лагранжиане для возмущений в унитарной калибровке проходит через нуль. Тонкость состоит в том, что на первый взгляд кажется, будто в момент $\Theta(t_0) = 0$ оба уравнения связи (40) и (41) становятся сингулярными, тем самым

α и β оказываются неопределены. По этой причине пересечение коэффициентом Θ нуля считалось нежелательным, и решение строилось при условии строго положительного Θ , из-за чего одна из асимптотик обязательно описывалась модифицированной теорией гравитации ⁷. Описанная трудность с γ -кроссингом, в частности, была отмечена в работе [110]. В этой же работе был проведен анализ линеаризованной теории в ньютоновой калибровке, который показал, что в указанной калибровке аналогичные уравнения связи не имеют знаменателя и регулярны в любой момент времени. Таким образом, проблема γ -кроссинга в ньютоновой калибровке не возникает вовсе. Такое кажущееся различие результатов, полученных в различных калибровках, выглядит странным. С одной стороны, можно предположить, что анализ устойчивости вблизи γ -кроссинга нельзя проводить в унитарной калибровке, т.к. линеаризованные уравнения сингулярны в момент $\Theta(t_0) = 0$. С другой стороны, в калибровочно-инвариантных теориях, каковыми являются (расширенные) теории Хорндески, выбор калибровки не может влиять на физику процесса.

В следующем пункте мы явно покажем, что, несмотря на кажущиеся расходимости, возникающие в линеаризованной теории в унитарной калибровке при γ -кроссинге, решения для всех возмущений в унитарной калибровке регулярны для любых значений Θ в знаменателе, включая нуль. Иными словами, расходимости присутствуют только на уровне линеаризованных уравнений, но не их решений. В результате, нет необходимости избегать γ -кроссинг и накладывать условие $\Theta > 0$. Отсутствие проблем с γ -кроссингом делает возможным построение полного, устойчивого решения в виде пространственно-плоского отскока в расширенной теории Хорндески, чьи асимптотики как на малых, так и на больших временах описываются общей теорией относительности, а галилеонное поле π превращается в безмассовое скалярное поле. Пример решения в

⁷Напомним, что согласно (38) $\Theta \propto H$ в пределе ОТО. Но для сценария с отскоком параметр Хаббла H обязательно меняет знак, что означает обязательное пересечение нуля для Θ , если требовать восстановления ОТО и в асимптотическом прошлом, и асимптотическом будущем. В параграфе 1.3 функции лагранжиана выбраны так, что за счет их нетривиального поведения при $t \rightarrow -\infty$ Θ остается положительной, несмотря на меняющийся знак H .

виде отскока с простыми асимптотиками приведен в пункте 1.5.2.

1.5.1 Поведение возмущений в унитарной калибровке

В данном пункте мы явно получим решения для α и β из линеаризованных уравнений (40) и (41), а также получим уравнение на ζ и его решение. Целью является доказательство того, что α , β и ζ всегда регулярны, несмотря на кажущуюся расходимость уравнений (40) и (41) при γ -кроссинге.

В качестве отправной точки, предположим, что α и β конечны и могут быть найдены из уравнений (40) и (41) при любом значении Θ , включая нуль (ниже мы явно покажем, что данное предположение действительно верно). Сделанное предположение делает правомерным стандартное отынтегрирование связей, что приводит квадратичное действие для возмущений к виду (42). Тогда линеаризованное уравнение на ζ имеет вид:

$$\mathcal{G}_S \cdot \ddot{\zeta} + \left(\dot{\mathcal{G}}_S + 3\mathcal{G}_S H \right) \cdot \dot{\zeta} - \mathcal{F}_S \cdot \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} = 0. \quad (105)$$

Используя выражения (43) и (44) и применяя Фурье преобразование, представим уравнение на ζ в виде

$$(1 + c_1 \cdot \Theta^2) \cdot \ddot{\zeta} + \left(c_2 + c_3 \cdot \Theta^2 - 2 \cdot \frac{\dot{\Theta}}{\Theta} \right) \dot{\zeta} + \frac{k^2}{a^2} \left(c_4 \cdot \dot{\Theta} + c_5 \cdot \Theta + c_6 \cdot \Theta^2 \right) \cdot \zeta = 0, \quad (106)$$

где c_i – это комбинации коэффициентов Σ , $\mathcal{G}_T$ и т.д., которые несингулярны при γ -кроссинге (здесь и далее существенными для рассуждения являются только коэффициент Θ и его производная). Поскольку для однородного фонового решения коэффициенты входящие в квадратичное действие (33) зависят только от времени t , то же справедливо для коэффициентов c_i в уравнении (106).

Для анализа поведения возмущений метрики вблизи и в момент γ -кроссинга будем считать, что γ -кроссинг происходит при $t = 0$, и представим

$$\Theta = C \cdot t + \dots, \quad (107)$$

где C – константа, а многоточие обозначает члены более высокого порядка по t .

Получим сначала решение уравнения (106) в лидирующем порядке по t . Удерживая только старшие по порядку слагаемые вблизи $t = 0$, уравнение (106) сводится к уравнению

$$\ddot{\zeta} - \frac{2}{t}\dot{\zeta} = 0, \quad (108)$$

у которого есть два решения:

$$\zeta = \lambda = \text{const}, \quad (109)$$

и

$$\zeta = \delta \cdot t^3, \quad \delta = \text{const}. \quad (110)$$

Заметим, что поправки к решению (109) начинаются с t^2 :

$$\zeta = \lambda \left(1 + \frac{C}{2} \frac{k^2}{a^2} c_4 \cdot t^2 + \dots \right), \quad (111)$$

где коэффициент c_4 выпишем явно

$$c_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{G}_T}{\hat{\mathcal{G}}_T \cdot \Sigma}. \quad (112)$$

Таким образом, несмотря на то, что линеаризованное уравнение на ζ (106) сингулярно при $t = 0$, решения (109) и (111) регулярны.

Убедимся, что α и β также имеют несингулярное поведение. Из вида уравнения (41) и решения для ζ (111) немедленно следует регулярность α . Соответствующее уравнение (40) для β перепишем, применяя Фурье преобразование

$$-\frac{k^2}{a^2}\beta = \frac{\mathcal{G}_T}{\Theta} \frac{k^2}{a^2} \cdot \zeta + \left(3 + \frac{\hat{\mathcal{G}}_T \Sigma}{\Theta^2} \right) \cdot \dot{\zeta}. \quad (113)$$

На первый взгляд, правая часть уравнения (113) имеет порядок t^{-1} . Однако, при строгом рассмотрении порядок t^{-1} сокращается: учитывая (107), (111) и (112), получим

$$\frac{\mathcal{G}_T}{\Theta} \frac{k^2}{a^2} \cdot \zeta - \left(3 + \frac{\hat{\mathcal{G}}_T \Sigma}{\Theta^2} \right) \cdot \dot{\zeta} = -\frac{1}{2\Theta} \left[-\mathcal{G}_T \frac{k^2}{a^2} \cdot \lambda + \frac{\hat{\mathcal{G}}_T \Sigma}{\Theta^2} \left(\frac{k^2}{a^2} c_4 \cdot Ct \right) \lambda + O(t) \right] = O(1).$$

Значит, β тоже имеет несингулярное поведение при $t = 0$. Более того, стало очевидно, что результаты, полученные в унитарной и ньютоновой калибровке, связаны с помощью несингулярного калибровочного преобразования. Действительно, переход из ньютоновой калибровки в унитарную сводится к исключению β с помощью преобразования и введению вместо него возмущения скалярного поля χ . Поскольку β регулярна, то и функция калибровочного преобразования тоже будет регулярна.

Таким образом, явно показано, что γ -кроссинг в действительности не приводит к расходимостям в линеаризованных уравнениях, и анализ устойчивости в рамках унитарной калибровки остается корректным.

1.5.2 Космологический отскок с γ -кроссингом: пример

Воспользуемся доказанным выше утверждением, что возмущения в унитарной калибровке при γ -кроссинге остаются регулярными, и построим пример устойчивого космологического отскока в расширенной теории Хорндески с простыми асимптотиками при $t \rightarrow \pm\infty$: галилеонное поле π становится безмассовым скалярным полем, а гравитация описывается ОТО.

Без потери общности, выберем следующую зависимость от времени для галилеонного поля:

$$\pi(t) = t, \quad X = 1. \quad (114)$$

Действительно, при условии, что скалярное поле монотонно растет, поведения (114) всегда можно добиться путем переопределения полей. Тогда асимптотики функций в лагранжиане (20) при $t \rightarrow \pm\infty$ имеют следующий вид (формулы приведены с учетом $M_{Pl}^2/(8\pi) = 1$):

$$F(\pi, X) = \frac{X}{3\pi^2} = \frac{1}{3t^2}, \quad (115)$$

$$G_4(\pi, X) = \frac{1}{2}, \quad (116)$$

$$G_5(\pi, X) = F_4(\pi, X) = F_5(\pi, X) = 0. \quad (117)$$

Асимптотическое поведение функций в (116) и (117) явно задает соответствие

гравитации общей теории относительности как в асимптотическом прошлом, так и в асимптотическом будущем. В то же время, поведение функции $F(\pi, X)$ в (115) предполагает, что $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \log(\pi)$ – обыкновенное безмассовое скалярное поле с уравнением состояния $p = \rho$ и, как следствие, с соответствующим поведением параметра Хаббла:

$$H = \frac{1}{3t}, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (118)$$

Отметим, что уравнение поля $\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = 0$ выполняется для $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \log(t)$. В полной аналогии с процедурой построения решений, использованной в параграфах 1.3 и 1.4, функции лагранжиана реконструируются по по выбранному параметру Хаббла $H(t)$ так, чтобы восстанавливался заданный вид асимптотик (115)-(117) и выполнялись условия устойчивости (47). Как и ранее, центральным вопросом при построении явного примера решения остается отсутствие градиентных неустойчивостей на протяжении всей эволюции.

Выберем параметр Хаббла в виде:

$$H(t) = \frac{t}{3(\tau^2 + t^2)}, \quad (119)$$

с масштабным фактором

$$a(t) = (\tau^2 + t^2)^{\frac{1}{6}}, \quad (120)$$

где отскок происходит при $t = 0$. Параметр τ в (119) определяет длительность стадии отскока; далее мы выбираем $\tau \gg 1$, что делает характерный временной масштаб решения значительно больше планковского. Для реконструкции теории, допускающей решение (119), используется следующая форма функций лагранжиана:

$$F(\pi, X) = f_0(\pi) + f_1(\pi) \cdot X + f_2(\pi) \cdot X^2, \quad (121)$$

$$G_4(\pi, X) = \frac{1}{2} + g_{40}(\pi) + g_{41}(\pi) \cdot X, \quad (122)$$

$$F_4(\pi, X) = f_{40}(\pi) + f_{41}(\pi) \cdot X, \quad (123)$$

$$K(\pi, X) = 0, \quad G_5(\pi, X) = 0, \quad F_5(\pi, X) = 0. \quad (124)$$

В полной аналогии с ранее рассмотренными примерами космологических решений, нет необходимости использовать обе функции $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$, входящие в расширенную теорию Хорндески: нетривиального вклада $F_4(\pi, X)$, например, достаточно, чтобы обойти запрещающую теорему.

Таким образом, план построения отскока с простыми асимптотиками предполагает выбор $G_4(\pi, X)$, $F_4(\pi, X)$, в (122) и (123), а также $f_2(\pi)$ в (121) такими, что условия устойчивости (47) выполнялись бы для любого t . Оставшиеся функции $f_0(\pi)$ и $f_1(\pi)$ выбираются из условия выполнения фоновых уравнений Эйнштейна (27) и (28). Действительно, есть два независимых уравнения поля, в качестве которых могут быть выбраны (00)- и (ij)-компоненты уравнений Эйнштейна. Эти уравнения могут быть использованы для поиска $f_0(\pi)$ и $f_1(\pi)$ в терминах остальных функций лагранжиана. Как только $G_4(\pi, X)$ и $F_4(\pi, X)$ имеют асимптотики (116)-(117), а параметр Хаббла асимптотически ведет себя как в выражении (118), функция $F(\pi, X)$ автоматически имеет асимптотики (115).

Опишем процедуру построения космологического отскока с простыми асимптотиками (115)-(117), свободного от духовых и градиентных неустойчивостей. Используя выбор функций (121)-(123), представим коэффициенты $\mathcal{F}_T$, Σ , Θ , $\hat{\mathcal{G}}_T$ и $\mathcal{G}_T$ (см. (34)-(39)) в следующей форме:

$$\mathcal{F}_T = 2 \left(\frac{1}{2} + g_{40}(t) + g_{41}(t) \right), \quad (125)$$

$$\Sigma = f_1(t) + 6f_2(t) - 3H^2 \cdot [1 + 30f_{40}(t) + 56f_{41}(t) + 2g_{40}(t) - 12g_{41}(t)] - 6H \cdot [\dot{g}_{40}(t) + 6\dot{g}_{41}(t)], \quad (126)$$

$$\Theta = H(t) \cdot [1 + 2g_{40}(t) - 6g_{41}(t) + 10f_{40}(t) + 14f_{41}(t)] + \dot{g}_{40}(t) + 3\dot{g}_{41}(t), \quad (127)$$

$$\hat{\mathcal{G}}_T = 2 \left(\frac{1}{2} + g_{40}(t) + g_{41}(t) \right) - 4g_{41}(t) + 2(f_{40}(t) + f_{41}(t)), \quad (128)$$

$$\mathcal{G}_T = 2 \left(\frac{1}{2} + g_{40}(t) + g_{41}(t) \right) - 4g_{41}(t). \quad (129)$$

Дальнейший выбор функций $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$, $f_{40}(t)$, $f_{41}(t)$ и $f_2(t)$ в значительной

степени продиктован приведенными выше соотношениями.

Сначала потребуем выполнения условия отсутствия духов и градиентных неустойчивостей в тензорном секторе, т.е. $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} > 0$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} > 0$. Согласно требованию асимптотического убывания $F_4(\pi, X)$ в (117), возможно выбрать $f_{40}(t)$ в (128) следующим образом:

$$f_{40}(t) = -f_{41}(t) + w \cdot \text{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right), \quad (130)$$

где u и w – константы, которые были введены, чтобы избежать тонкой подстройки параметров (fine-tuning). Ниже мы приведем подробное пояснение данного вопроса.

Для обеспечения отсутствия сверхсветовых тензорных мод выберем

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = 1, \quad \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} = 1, \quad (131)$$

и выразим $g_{41}(t)$ и $g_{40}(t)$, используя уравнения (128) и (125), соответственно,

$$g_{40}(t) = -g_{41}(t) = -\frac{w}{2} \text{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right). \quad (132)$$

Таким образом, функция $G_4(\pi, X)$ в (122) полностью определена.

Воспользуемся теперь условиями устойчивости для скалярного сектора в действии (42). Отсутствие градиентных неустойчивостей предполагает выполнение неравенства $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} > 0$. Согласно (44) и (45), последнее неравенство представимо в виде

$$\frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a(\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} + \mathcal{D}\dot{\pi}) \cdot \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}}{\Theta} \right] > \mathcal{F}_{\mathcal{T}}. \quad (133)$$

Поскольку $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} > 0$, ξ должна быть монотонно растущей функцией времени, а значит, ξ обязательно пересекает нуль в некоторый момент времени t_0 (отметим, что t_0 может быть не единственным). Выбрав $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = 1$ в (131), осталось определить поведение $\mathcal{D}$ и Θ . Напомним, что справедливо соотношение (см. (36))

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} + \mathcal{D}\dot{\pi}, \quad (134)$$

где $\mathcal{G}_T$ уже не ограничено условиями устойчивости, и его можно выбрать в виде

$$\mathcal{G}_T = 1 - 2w \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right). \quad (135)$$

Обратимся к коэффициенту Θ . Согласно выражению (127), на данном этапе единственной неизвестной в определении Θ осталась функция $f_{41}(t)$. Напомним, что галилеонное поле π должно становиться безмассовым скалярным полем на фоне ОТО как в асимптотическом будущем, так и асимптотическом прошлом. Как уже отмечалось ранее в параграфе 1.2, такие простые асимптотики возможны только если $\Theta = H$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Поэтому потребуем, чтобы поведение коэффициента Θ было достаточно близко к поведению параметра Хаббла в (119) для любого t , что может быть достигнуто за счет выбора $f_{41}(t)$ в виде, например,

$$f_{41}(t) = \frac{3w \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right)}{2t\tau} \cdot \left[t^2 \cdot \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} + u \right) + \tau^2 \cdot \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} \right) - t \cdot \tau \right]. \quad (136)$$

Данный шаг завершает реконструкцию функции $F_4(\pi, X)$ в (123).

Сделаем небольшое отступление и поясним проблему тонкой подстройки параметров, упоминавшуюся выше. Под тонкой подстройкой параметров мы понимаем ситуацию, когда Θ пересекает нуль в тот же момент времени t_* , когда коэффициент $\mathcal{G}_T$ *касается* нуля при $t = t_*$ и остается неотрицательным [82, 102]. Такая ситуация изображена на Рис. 9. При этом выполняется условие отсутствия неустойчивостей в скалярном секторе (133), а также $\mathcal{G}_S \neq \infty$ и $\mathcal{F}_S \neq \infty$. В свою очередь, мы стремимся избежать, в некотором смысле, искусственной ситуации с тонкой подстройки параметров с помощью введения параметров u и w в функции (130). Указанные константы выбираются таким образом, чтобы Θ и $\mathcal{G}_T$ обращались в нуль в различные моменты времени (см. Рис. ?? ниже).

Неопределенной остается функция $F(\pi, X)$ в (121). Подставляя разложение для $F(\pi, X)$ и уже найденные $G_4(\pi, X)$, $F_4(\pi, X)$ в (00)- и (ij) -компоненты уравнений Эйнштейна (27) и (28), получим два уравнения, связывающих $f_0(t)$, $f_1(t)$

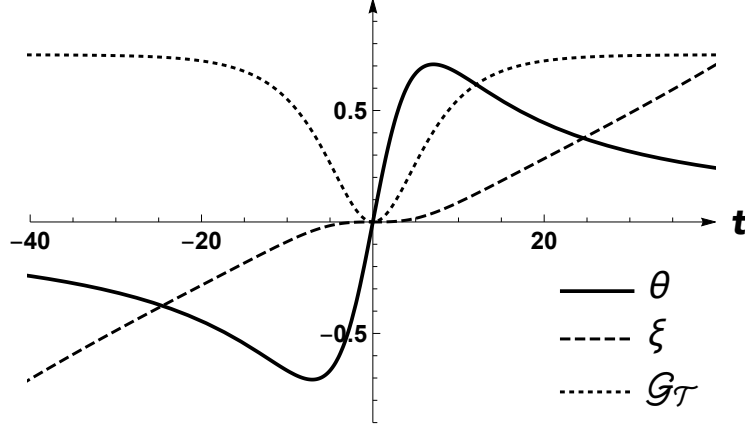


Рис. 9: Иллюстрация ситуации с тонкой подстройкой параметров (fine-tuning).

и $f_2(t)$:

$$f_0(t) - f_1(t) - 3f_2(t) + \frac{t}{3\tau \cdot (\tau^2 + t^2)^2} \left\{ t \cdot \tau \right. \quad (137)$$

$$\left. + 6w \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \left[\tau^2 \cdot \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} \right) - (2\tau^2 + t^2) \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \right] \right\} = 0,$$

$$3f_0(t) + 3f_1(t) + 3f_2(t) + \frac{2\tau^2 - t^2}{(\tau^2 + t^2)^2} = 0, \quad (138)$$

где мы воспользовались (130), (132) и (136). Уравнения (137)-(138) позволяют выразить $f_0(t)$ и $f_1(t)$ через функцию $f_2(t)$:

$$f_0(t) = \frac{1}{3\tau (t^2 + \tau^2)^2} \cdot \left[-\tau^3 + 3\tau (t^2 + \tau^2)^2 \cdot f_2(t) \right. \quad (139)$$

$$\left. - 3t\tau^2 w \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} \right) + 3t^3 w \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \right.$$

$$\left. + 6t\tau^2 w \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \operatorname{th} \left(\frac{t}{\tau} + u \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
f_1(t) = & \frac{1}{3\tau(t^2 + \tau^2)^2} \cdot \left[\tau^3 + t^2\tau + 3t\tau^2w \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau} + u\right) \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right. \\
& - 3t^3w \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau} + u\right) \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau} + u\right) - 6t\tau^2w \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau} + u\right) \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau} + u\right) \\
& \left. - 6\tau(t^2 + \tau^2)^2 \cdot f_2(t) \right]. \tag{140}
\end{aligned}$$

Заключительным шагом является определение функции $f_2(t)$ так, чтобы выполнялось условие отсутствия духов в скалярном секторе ($\mathcal{G}_S > 0$), а так же скорость распространения скалярных возмущений не превышала скорость света ($\mathcal{G}_S > \mathcal{F}_S$). Отметим, что искомая функция $f_2(t)$ входит в $\mathcal{G}_S$ в (43) через коэффициент Σ , определенный в (126). Для одновременного выполнения неравенств $\mathcal{G}_S > 0$ и $\mathcal{G}_S > \mathcal{F}_S$ выберем $f_2(t)$ так, чтобы вклад слагаемого с Σ в (43) всегда являлся доминирующим. Поскольку, согласно (131), $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} = 1$, достаточно выбрать Σ в следующем виде:

$$\Sigma = \left[1 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right]^{-2}, \tag{141}$$

для которого f_2 имеет вид

$$\begin{aligned}
f_2(t) = & \frac{1}{12\tau(t^2 + \tau^2)^2} \cdot \left\{ 4tw \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau} + u\right) \left[-4t\tau + 9\tau^2 \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3(t^2 - 2\tau^2) \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau} + u\right) \right] + \tau^3 + 3\tau^5 \right\}. \tag{142}
\end{aligned}$$

Таким образом, найдены все функции лагранжиана (121)-(123). Графики функций $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$, $f_{40}(t)$ и $f_{41}(t)$, соответствующих аналитическим выражениям (139), (140), (142), (132), (130) и (136), изображены на Рис. 10. Указанный набор функций имеет следующее асимптотическое поведение при $t \rightarrow \pm\infty$:

$$f_1(t) = \frac{1}{3t^2}, \quad f_0(t) = f_2(t) \propto \frac{1}{t^4}, \quad g_{40}(t) = f_{40}(t) = f_{41}(t) \propto e^{-2t/\tau}, \quad g_{41}(t) \propto t \cdot e^{-2t/\tau}. \tag{143}$$

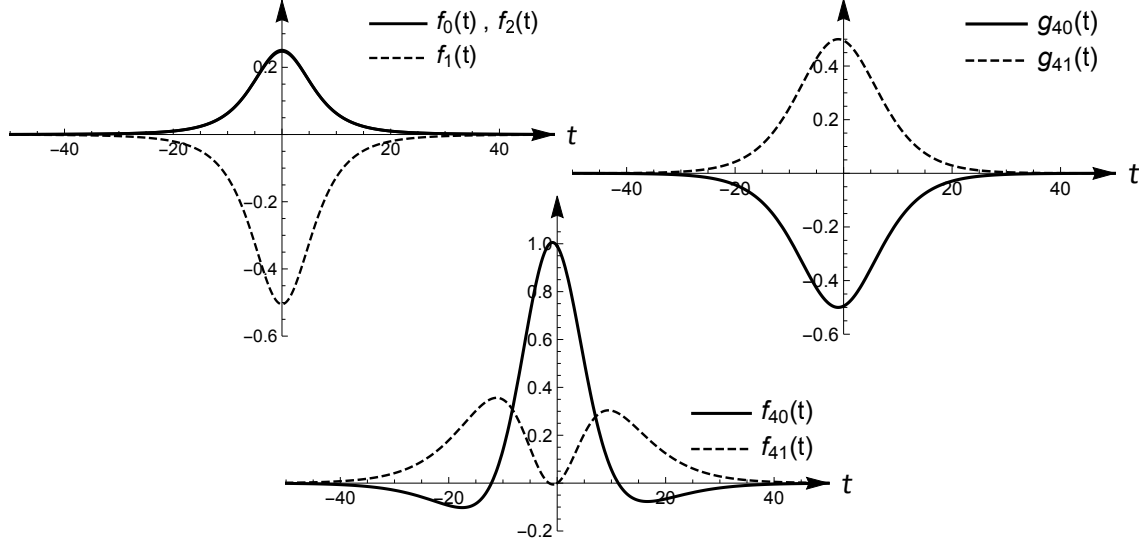


Рис. 10: Функции лагранжиана $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_{40}(t)$, $g_{41}(t)$, $f_{40}(t)$ and $f_{41}(t)$, где параметры в соответствующих аналитических выражениях имеют значения: $u = 1/10$, $w = 1$ and $\tau = 10$. Такой выбор значений параметров гарантирует отсутствие тонкой подстройки параметров в найденном решении, а также обеспечивает длительность эпохи отскока, которая превышает планковский масштаб времен. Отметим, что функции $f_0(t)$ и $f_2(t)$ практически совпадают для выбранных значений параметров.

Как и задумывалось, асимптотики функции $F(\pi, X)$, $G_4(\pi, X)$ и $F_4(\pi, X)$ соответствуют (115)-(117).

Из процедуры реконструкции лагранжиана теории непосредственно следует, что условия устойчивости (47) выполняются; зависимость коэффициентов $\mathcal{G}_S$ и $\mathcal{F}_S$ от времени изображена на Рис. 11: оба коэффициента всюду положительны и бесконечны в точке, которая соответствует моменту γ -кроссинга. Тем не менее, отношение коэффициентов $c_S^2 = \mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S$ (квадрат скорости звука) остается конечным и показано на Рис. 12. Напомним, что благодаря выбору функций $g_{40}(\pi)$, $g_{41}(\pi)$, $f_{40}(\pi)$ и $f_{41}(\pi)$ в (132), (130) и (136) скорость распространения

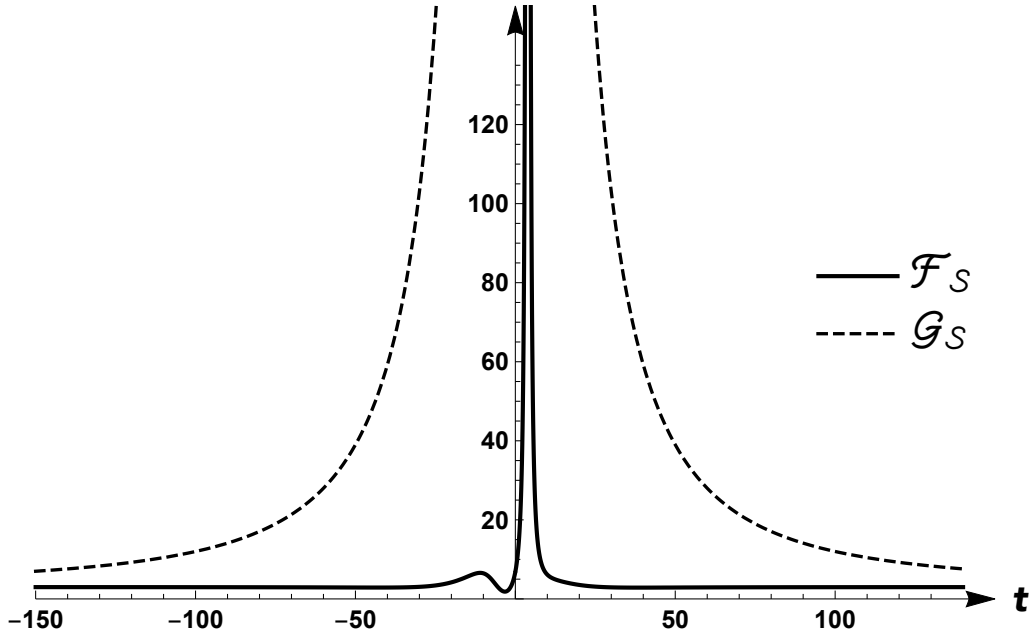


Рис. 11: Коэффициенты $\mathcal{G}_S$ and $\mathcal{F}_S$; значения параметров u , w и τ такие же, как на Рис. 10.

тензорных возмущений равна скорости света:

$$\hat{\mathcal{G}}_T = \mathcal{F}_T = 1, \quad c_T^2 = \mathcal{F}_T / \hat{\mathcal{G}}_T = 1. \quad (144)$$

Таким образом, условия отсутствия духов, градиентных неустойчивостей, а так же сверхсветовых мод в (47) выполнены как для скалярного, так и для тензорного сектора. Предложенный сценарий космологического отскока действительно имеет простые асимптотики функций лагранжиана (115)-(117), которые соответствуют теории обыкновенного скалярного поля на фоне ОТО при $t \rightarrow \pm\infty$.

В заключение сравним построенные модели космологического отскока при наличии (текущий пункт) и отсутствии γ -кроссинга (параграф 1.3). Требование отсутствия градиентных неустойчивостей в скалярном секторе (44), накладываемое на оба типа решения, предполагает монотонный рост $\xi(t)$ из (45). Отличие расширенной теории Хорндески от общей заключается в том, что на коэффи-

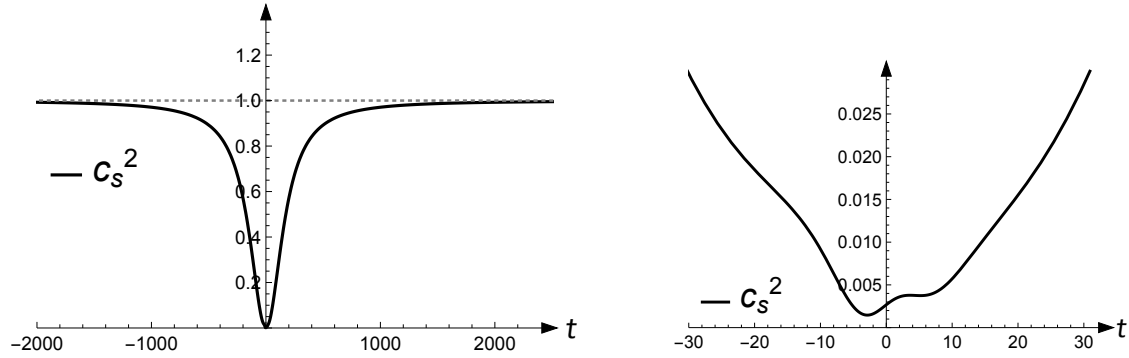


Рис. 12: Квадрат скорости звука скалярных возмущений неотрицателен в любой момент времени и асимптотически стремится к 1 как в бесконечном прошлом, так и в бесконечном будущем. На правом рисунке изображена окрестность момента отскока. Значения параметров u , w , τ такие же, как на Рис. 10.

циент $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} + \mathcal{D}\dot{\pi}$ больше не наложено никаких ограничений. В модели без γ -кроссинга Θ всегда больше нуля, поэтому $\xi(t)$ пересекает нуль благодаря пересекающему нуль $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Описанная ситуация изображена на Рис. 13 (верхняя часть). Тот факт, что коэффициент $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ отрицателен на ранних временах, в то время как $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}$ всегда положителен, согласно условию отсутствия духов в тензорном секторе (см. (42)), подчеркивает важность учета на ранних временах слагаемых, соответствующих расширенной теории Хорндески. В модели с γ -кроссингом, рассмотренной в данном пункте, $\xi(t)$ имеет расходимость в момент γ -кроссинга, и поэтому $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ пересекает нуль дважды. Данное обстоятельство позволяет добиться выполнения равенства $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} = 1$ как в асимптотическом прошлом, так и в асимптотическом будущем, что означает описание гравитации с помощью ОТО в обеих асимптотиках. Описанный случай показан на Рис. 13 (нижняя часть).

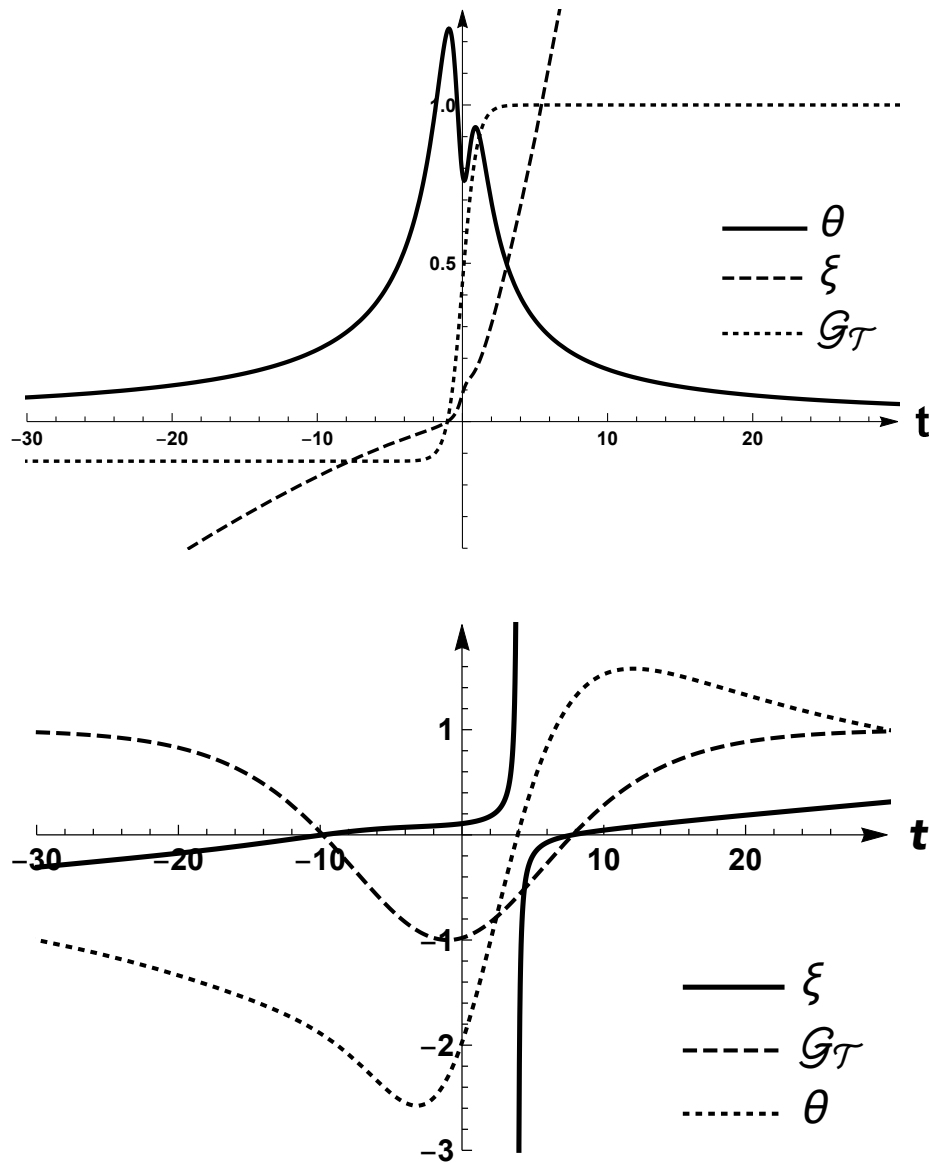


Рис. 13: Коэффициенты θ , G_T и ξ для сценария без γ -кроссинга (верхний график; данный сценарий был изучен в параграфе 1.3) и для сценария с γ -кроссингом (нижний график; этот сценарий обсуждается выше в данном пункте).

2 Возмущения в теории Хорндески и ее расширении

Одной из основных трудностей при построении космологических решений в рамках теории Хорндески является возможное возникновение патологических степеней свободы в скалярном секторе возмущений при условии, что рассматривается полное время жизни системы.

В скалярном секторе общей теории Хорндески есть одна динамическая степень свободы, описание которой зависит от выбранной калибровки. Наиболее широко распространен метод получения уравнений линеаризованной теории, подразумевающий непосредственное вычисление квадратичного действия для возмущений путем разложения до второго порядка. Значительного упрощения удастся добиться в унитарной калибровке, т.е. в отсутствие возмущений галилеонного поля π ($\chi = 0$). В унитарной калибровке квадратичное действие для единственной динамической степени свободы (возмущения кривизны ζ в данном случае) получается путем отынтегрирования связей в скалярном секторе. Для общей теории Хорндески квадратичное действие в унитарной калибровке было вычислено, например, в работе [61], так что далее для краткости мы будем называть описанный способ вычисления методом КУУ или методом унитарной калибровки.

Для кубического подкласса теории Хорндески был предложен и использован другой метод получения квадратичного действия для возмущений [50] (метод DPSV). Данный подход предполагает реконструкцию квадратичного действия из линеаризованных уравнений поля. Было замечено, что для лагранжиана вида (21)–(23) с $G_4(\pi, X) = 1/2\kappa$ ($\kappa = 8\pi G$)

$$\mathcal{L}_{cub} = -\frac{1}{2\kappa}R + F(\pi, X) + K(\pi, X)\Box\pi, \quad (145)$$

как уравнения поля галилеона π , так и уравнения Эйнштейна содержат вторые производные как поля π , так и метрики. Следовательно, соответствующие линеаризованные уравнения также будут содержать вторые производные и воз-

мущений метрики $h_{\mu\nu}$, и скалярного поля $\delta\pi = \chi$. Для реконструкции квадратичного действия линеаризованной теории в работе [50] было предложено использовать уравнения Эйнштейна для того, чтобы исключить вторые производные метрики из уравнения поля галилеона. В результате, получается уравнение, в котором присутствуют вторые производные только скалярного поля. После линеаризации полученного уравнения становится возможным выписать соответствующее квадратичное действие, где присутствует единственная динамическая степень свободы, которой, в данном подходе, является возмущение галилеонного поля χ . Важно отметить, что данный способ позволяет восстановить только часть квадратичного действия, в которую входят слагаемые с производными, поскольку слагаемые нулевого и первого порядка по производным обычно опускались в линеаризованных уравнениях. Последнее допущение корректно, поскольку интерес представляют высокоэнергетические моды, для которых члены с производными значительно превосходят массовые слагаемые. Привлекательность DPSV приема состоит в том, что в отличие от более традиционных методов он оперирует с линеаризованными уравнениями, что в некоторых ситуациях заметно упрощает вычисления [85].

В отличие от подхода KYY, прием DPSV явно не предполагает фиксацию калибровки теории. В оригинальной работе [50] авторы проверили, что прием действительно приводит к верным результатам в кубической теории Хорндески (145), однако объяснения, почему подход корректно работает, предложено не было. Учитывая, что в исходном варианте прием использовался на уровне невозмущенных уравнений поля, вопрос о соответствии подхода DPSV неявному выбору калибровки теории ранее не поднимался.

Однако, в подходе DPSV есть определенная тонкость: нединамические возмущения α (функция хода) и β (функция сдвига) входят в линеаризованные уравнения только в слагаемые с первыми производными, и, согласно исходному методу DPSV [50], должны были бы быть опущены. Последнее потенциально опасно, поскольку уравнения связи, которые получаются вариацией квадратичного действия по α и β и которые являются уравнениями на α и β , содержат

в себе первые производные возмущения галилеонного поля χ . Данное обстоятельство делает неоднозначным исключение из рассмотрения слагаемых с α и β .

Таким образом, как соотносятся результаты, полученные методом КYY и DPSV, не вполне понятно. Кроме этого, с учетом выше изложенных деталей, интерес вызывает принцип работы самого метода DPSV. Исследованию принципа работы метода DPSV посвящен следующий параграф, где мы детально изучаем механизм работы приема DPSV, сохраняя при этом все порядки возмущений метрики α и β в отличие от оригинального подхода.

2.1 Метод DPSV в кубической теории Хорндески

2.1.1 Квадратичное действие в общей калибровке

Рассмотрим квадратичное действие для скалярного сектора возмущений в кубическом подклассе теорий Хорндески (145), которое содержит как возмущения метрики, так и возмущение скалярного поля π . Частично зафиксируем калибровку, путем исключения продольной части возмущения пространственной компоненты метрики ($\partial_i \partial_j E = 0$), так что возмущения метрики имеют вид:

$$h_{00} = 2\alpha, \quad h_{0i} = -\partial_i \beta, \quad h_{ij} = -a^2 \cdot 2\zeta \delta_{ij}. \quad (146)$$

Как и ранее, χ обозначает возмущение скалярного поля над однородным фоновым значением $\pi(t)$. Поскольку в рамках анализа устойчивости наибольшую опасность представляют моды с большим импульсом, в квадратичном действии опущены слагаемые без производных от ζ и χ , а также члены линейные по производным. С другой стороны, мы удерживаем все слагаемые, включающие α и $\partial_i \beta$. Подробное пояснение такого подхода приведено ниже.

Действие второго порядка для возмущений метрики (146) и χ , с учетом

сделанных выше оговорок, имеет вид:

$$\begin{aligned}
S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \bigg(& -\frac{3}{\kappa} \dot{\zeta}^2 + \frac{1}{\kappa} \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} + \Sigma \alpha^2 - 2\Theta \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + \frac{2}{\kappa} \dot{\zeta} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + 6\Theta \alpha \dot{\zeta} \\
& - \frac{2}{\kappa} \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} + 2\alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} K_X \dot{\pi}^2 - 2\dot{\chi} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} K_X \dot{\pi}^2 - 6\chi \ddot{\chi} K_X \dot{\pi}^2 \\
& + 2\Gamma \alpha \dot{\chi} + 2\Lambda \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \chi + \mathcal{A} \dot{\chi}^2 - \mathcal{B} \frac{(\vec{\nabla} \chi)^2}{a^2} \bigg), \tag{147}
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A} = 2F_{XX} \dot{\pi}^2 + F_X - K_\pi - K_{\pi X} \dot{\pi}^2 + 6K_{XX} H \dot{\pi}^3 + 6K_X H \dot{\pi}, \tag{148}$$

$$\mathcal{B} = F_X - K_\pi + K_{\pi X} \dot{\pi}^2 + 2K_{XX} \ddot{\pi} \dot{\pi}^2 + 2K_X \ddot{\pi} + 4K_X H \dot{\pi}, \tag{149}$$

$$\Sigma = \mathcal{A} \dot{\pi}^2 + 6K_X H \dot{\pi}^3 - \frac{3}{\kappa} H^2, \tag{150}$$

$$\Theta = \frac{1}{\kappa} H - K_X \dot{\pi}^3, \tag{151}$$

$$\Gamma = -F_X \dot{\pi} - 2F_{XX} \dot{\pi}^3 + K_\pi \dot{\pi} + K_{\pi X} \dot{\pi}^3 - 9K_X H \dot{\pi}^2 - 6K_{XX} H \dot{\pi}^4, \tag{152}$$

$$\Lambda = F_X \dot{\pi} - K_\pi \dot{\pi} + 3K_X H \dot{\pi}^2. \tag{153}$$

Варьируя действие (147) по α и β , получим следующие уравнения связи:

$$\alpha = \frac{1}{\Theta} \left(\frac{1}{\kappa} \dot{\zeta} - \dot{\chi} K_X \dot{\pi}^2 + \Lambda \chi \right), \tag{154}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} = \frac{1}{\Theta} \bigg(& \frac{\Sigma}{\Theta} \frac{\dot{\zeta}}{\kappa} - \frac{\Sigma}{\Theta} \dot{\chi} K_X \dot{\pi}^2 + \frac{\Sigma}{\Theta} \Lambda \chi + 3\Theta \dot{\zeta} - \frac{1}{\kappa} \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} \\
& + \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} K_X \dot{\pi}^2 + \Gamma \dot{\chi} \bigg). \tag{155}
\end{aligned}$$

Как было отмечено ранее, из вида действия (147) может показаться, что α и $\vec{\nabla}^2 \beta$ следовало бы опустить, поскольку в действие они входят либо без производных, либо в линейном порядке по производным⁸. Однако, согласно виду

⁸Напомним, что в действии (147) предполагалось удерживать слагаемые *только второго порядка* по производным.

связей (154) и (155), последнее утверждение неверно: α и $\vec{\nabla}^2\beta$ имеют тот же порядок по производным, что и входящие в их выражения ζ и χ . Данное обстоятельство и является причиной того, что слагаемые с α и $\vec{\nabla}^2\beta$ необходимо учитывать в квадратичном действии (147). Таким образом, при нашем подсчете порядка производных мы считаем α и $\vec{\nabla}^2\beta$ объектами первого порядка по производным, а $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2\dot{\beta}$ – второго порядка по производным. Указанное свойство окажется существенным для дальнейшего анализа метода DPSV.

Используя связи (154) и (155) и интегрируя по частям, где это необходимо, перепишем часть действия (147), квадратичную по производным, в виде:

$$\begin{aligned}
S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 & \left[\left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{\Sigma}{\Theta^2} + \frac{3}{\kappa} \right) \dot{\zeta}^2 - \left(\frac{1}{a \cdot \kappa^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{a}{\Theta} \right] - \frac{1}{\kappa} \right) \frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} \right. \\
& + \left(\frac{2\Gamma}{\Theta} \frac{1}{\kappa} - \frac{2\Sigma}{\kappa\Theta^2} K_X \dot{\pi}^2 \right) \dot{\zeta}\dot{\chi} + \left(\frac{2}{a \cdot \kappa} \frac{d}{dt} \left[K_X \dot{\pi}^2 \frac{a}{\Theta} \right] + \frac{2\Lambda}{\kappa\Theta} \right) \\
& \times \frac{\vec{\nabla}\zeta \vec{\nabla}\chi}{a^2} + \left(\mathcal{A} - \frac{2\Gamma}{\Theta} K_X \dot{\pi}^2 + \frac{\Sigma}{\Theta^2} K_X^2 \dot{\pi}^4 \right) \dot{\chi}^2 \\
& \left. - \left(\mathcal{B} + \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[K_X^2 \dot{\pi}^4 \frac{a}{\Theta} \right] + \frac{2\Lambda}{\Theta} K_X \dot{\pi}^2 \right) \frac{(\vec{\nabla}\chi)^2}{a^2} \right].
\end{aligned} \tag{156}$$

Напомним, что на данном этапе калибровка фиксирована только частично, так что остается калибровочная свобода относительно инфинитезимальных преобразований вида $t \rightarrow t + \xi_0(x)$. В терминах χ , ζ , α и β преобразования имеют вид:

$$\chi \rightarrow \chi + \xi_0 \dot{\pi}, \quad \zeta \rightarrow \zeta + \xi_0 \frac{\dot{a}}{a}, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \dot{\xi}_0, \quad \beta \rightarrow \beta - \xi_0. \tag{157}$$

Действие (156) может быть представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned}
S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 & \left[\frac{1}{\dot{\pi}^2} \left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{\Sigma}{\Theta^2} + \frac{3}{\kappa} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \dot{\chi} - \dot{\zeta} \dot{\pi} \right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{\dot{\pi}^2} \left(\frac{1}{a \cdot \kappa^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{a}{\Theta} \right] - \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{\vec{\nabla}\chi}{a} - \frac{\vec{\nabla}\zeta}{a} \dot{\pi} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{158}$$

Входящая в это действие комбинация

$$\frac{\dot{a}}{a}\chi - \dot{\pi}\zeta, \quad (159)$$

инвариантна относительно остаточных калибровочных преобразований (157). Согласно оговорке, сделанной ранее, интерес представляют высокоэнергетические моды, поэтому при действии производных на инвариантную комбинацию (159), мы пренебрегаем производными от фоновых величин, так что действие (158) в контексте текущего анализа оказывается строго инвариантным. Такая форма квадратичного действия окажется полезной при сравнении методов DPSV и KYY далее.

2.1.2 Анализ метода DPSV

Обсудим принцип работы метода DPSV. Основная идея приема заключается в исключении вторых производных возмущений метрики, присутствующих в уравнении поля галилеона, с помощью уравнений Эйнштейна. Но, как указывалось ранее, ситуация с возмущениями метрики α и β неоднозначна. В данном пункте мы воспроизводим DPSV прием на линеаризованном уровне, но в отличие от оригинальной работы [50], слагаемые с $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2\beta$ удерживаются. В результате будет показано, что существует калибровка, в которой указанные слагаемые одновременно равны нулю.

Выпишем явно уравнение движения для галилеонного поля π , соответствующее действию с лагранжианом (145):

$$\begin{aligned} & -4\nabla_\mu\nabla_\nu\pi\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi F_{XX} - 2\Box\pi F_X + 2\Box\pi K_\pi - 2\Box\pi\nabla_\mu\pi\nabla^\mu\pi K_{\pi X} \\ & -4\Box\pi\nabla_\mu\nabla_\nu\pi\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi K_{XX} - 2\nabla_\mu\nabla^\mu\pi\nabla_\nu\nabla^\nu\pi K_X + 4\nabla_\mu\nabla_\nu\pi\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi K_{\pi X} \\ & +4\nabla_\rho\nabla_\nu\pi\nabla^\rho\nabla_\mu\pi\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi K_{XX} + 2\nabla^\mu\nabla_\nu\pi\nabla_\mu\nabla^\nu\pi K_X + 2R_{\mu\nu}\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi K_X = 0, \end{aligned} \quad (160)$$

где слагаемые без вторых производных были опущены. Согласно исходному методу, необходимо воспользоваться уравнениями Эйнштейна для теории (145), чтобы исключить вторые производные возмущений метрики в (160), которые

появятся после линеаризации слагаемого с $R_{\mu\nu}$. Тогда, на первый взгляд, в результате получится уравнение, содержащее только возмущение скалярного поля χ . Учитывая особенность поведения α и β , описанную выше, слагаемые с $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2\beta$ должны теперь так же удерживаться в линеаризованном уравнении, соответствующем (160).

Отметим, что в общей теории Хорндески в линеаризованном уравнении поля галилеона в принципе могут возникнуть следующие слагаемые со вторыми (или выше) производными:

$$\ddot{\chi}, \quad \vec{\nabla}^2\chi, \quad \ddot{\zeta}, \quad \vec{\nabla}^2\zeta, \quad \dot{\alpha}, \quad \ddot{\alpha}, \quad \vec{\nabla}^2\alpha, \quad \vec{\nabla}^2\beta, \quad \vec{\nabla}^2\dot{\beta}$$

(еще раз подчеркнем, что $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2\beta$ считаются членами второго порядка по производным). По сути, DPSV прием исключает слагаемые с $\ddot{\zeta}$, $\vec{\nabla}^2\zeta$, $\ddot{\alpha}$, $\vec{\nabla}^2\alpha$, $\vec{\nabla}^2\dot{\beta}$ из линеаризованного галилеонного уравнения. В результате получается уравнения поля для галилеона в терминах χ , α и β . Данное уравнение должно быть инвариантно относительно калибровочных преобразований (157). Есть только один возможный вид уравнения относительно χ , α и β , которое имело бы второй порядок по производным и было инвариантным⁹:

$$\mathcal{Q}(\ddot{\chi} - \dot{\alpha}\dot{\pi}) - \mathcal{P}(\vec{\nabla}^2\chi + \vec{\nabla}^2\beta\dot{\pi}) = 0, \quad (161)$$

где $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ зависят от времени как сложные функции фоновых величин. Уравнение (161) содержит два новых слагаемых по сравнению с исходным DPSV уравнением, а именно $\dot{\alpha}\dot{\pi}$ и $\vec{\nabla}^2\beta\dot{\pi}$. Покажем, что существует калибровка, в которой два новых слагаемых тождественно равны нулю.

Важным наблюдением в общей теории Хорндески является тот факт, что для возмущений метрики α и β в приближении старших производных выполняется соотношение, справедливое на уравнениях связи (154) и (155):

$$\alpha = -\dot{\beta}. \quad (162)$$

⁹С точностью до производных фоновых величин.

Ниже мы приводим краткое доказательство данного соотношения. Заметим, что соотношение (162) действительно выполняется в кубической теории Хорндески: в лидирующем порядке по производным из уравнений связи (154) и (155) следует, что $\alpha = \Theta^{-1} \left(\kappa^{-1} \dot{\zeta} - \dot{\chi} K_X \dot{\pi}^2 \right)$, $\vec{\nabla}^2 \beta = \Theta^{-1} \left(-\kappa^{-1} \vec{\nabla}^2 \zeta + \vec{\nabla}^2 \chi K_X \dot{\pi}^2 \right)$. Поскольку соотношение (162) выполняется, выбирая калибровку

$$\beta = 0, \quad (163)$$

автоматически получим $\alpha = 0$ в главном порядке по производным, т.е. калибровка является одновременно синхронной. В результате дополнительные слагаемые в уравнении (161) исчезают и мы возвращаемся к первоначальному методу DPSV. Таким образом, соотношение (162) является центральным для метода DPSV.

Для доказательства основного соотношения (162), перепишем квадратичное действие для возмущений (147), полученное для кубической теории (145), в виде:

$$\begin{aligned} S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \bigg(& A_1 \dot{\zeta}^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} + A_3 \alpha^2 + A_4 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_5 \dot{\zeta} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_6 \alpha \dot{\chi} + \\ & + A_7 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} + A_8 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + A_9 \dot{\chi} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_{10} \chi \ddot{\zeta} + A_{11} \alpha \dot{\chi} + \\ & + A_{12} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + \mathcal{A} \dot{\chi}^2 - \mathcal{B} \frac{(\vec{\nabla} \chi)^2}{a^2} \bigg), \end{aligned} \quad (164)$$

где значения A_i могут быть получены путем сравнения с соответствующими коэффициентами в действии (147)

$$\begin{aligned} A_1 &= -3\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}, \quad A_2 = \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, \quad A_3 = \Sigma, \quad A_4 = -2\Theta, \quad A_5 = 2\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}, \quad A_6 = 6\Theta, \\ A_7 &= -2\mathcal{G}_{\mathcal{T}}, \quad A_8 = -A_9 = -\frac{1}{3}A_{10} = 2K_X \dot{\pi}^2, \quad A_{11} = 2\Gamma, \quad A_{12} = 2\Lambda, \end{aligned} \quad (165)$$

и $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}} = \mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \mathcal{F}_{\mathcal{T}} = 1/\kappa$ в случае кубической теории Хорндески (см. определения (34)-(37)). Отметим, что форма квадратичного действия совпадает с (164)

и для случая общей теории Хорндески, включающей нетривиальные вклады $\mathcal{L}_4$ и $\mathcal{L}_5$ из (23) и (24). Единственным отличием общей теории Хорндески от кубической теории является наличие дополнительного нетривиального слагаемого $A_{13} \chi \vec{\nabla}^2 \zeta$ в действии (164). Коэффициенты A_i в терминах функций лагранжиана в случае общей теории Хорндески собраны в Приложении А¹⁰. Поскольку новое слагаемое $\chi \vec{\nabla}^2 \zeta$ не включает ни α , ни β , оно не влияет на форму уравнений связи. Поэтому доказательство, приведенное ниже, носит общий характер и применимо в случае общей теории Хорндески $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_5$.

Тот факт, что действие (164) и линеаризованные уравнения поля инвариантны относительно калибровочных преобразований (157), накладывает определенные ограничения на соотношения между коэффициентами A_i . Будем удерживать только те слагаемые в линеаризованных уравнения, которые при калибровочных преобразованиях (157) дают вклад в старший порядок по производным от параметра ξ_0 . Варьируя действие (164) по β и α , получим соответствующие слагаемые, входящие в уравнения связи:

$$\begin{aligned} A_4 \vec{\nabla}^2 \alpha + A_5 \vec{\nabla}^2 \dot{\zeta} + A_9 \vec{\nabla}^2 \dot{\chi} + \dots &= 0, \\ A_4 \vec{\nabla}^2 \beta + A_7 \vec{\nabla}^2 \zeta + A_8 \vec{\nabla}^2 \chi + \dots &= 0, \end{aligned} \tag{166}$$

где многоточия обозначают слагаемые, калибровочные преобразования которых содержат производные от ξ_0 ниже второй. Инвариантность этих уравнений относительно калибровочных преобразований (157) предполагает выполнение следующих соотношений между коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_5 \frac{\dot{a}}{a} + A_9 \dot{\pi} &= -A_4, \\ A_7 \frac{\dot{a}}{a} + A_8 \dot{\pi} &= A_4. \end{aligned} \tag{167}$$

Также уравнения, полученные путем вариации действия (164) по ζ и χ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_7 \vec{\nabla}^2 \alpha - A_5 \vec{\nabla}^2 \dot{\beta} + \dots &= 0, \\ A_8 \vec{\nabla}^2 \alpha - A_9 \vec{\nabla}^2 \dot{\beta} + \dots &= 0. \end{aligned} \tag{168}$$

¹⁰В приложении используются следующие обозначения: $\mathcal{A} = A_{14}$, $\mathcal{B} = -A_{15}$

Их калибровочная инвариантность подразумевает, что

$$A_7 = -A_5, \quad A_8 = -A_9. \quad (169)$$

Обратим внимание, что слагаемые, опущенные в уравнениях (166), на самом деле имеют меньший порядок по производным по сравнению с явно выписанными слагаемыми. Таким образом, из соотношений (169) с учетом уравнений (166) следует, что $\alpha = -\dot{\beta}$ в главном порядке по производным, как и предполагалось.

Следует отметить, что в справедливости соотношений (167) и (169) можно непосредственно убедиться, используя выражения для коэффициентов A_i в терминах функций лагранжиана, приведенных в Приложении А.

Соотношение (162) выполняется до тех пор, пока квадратичное действие имеет структуру (164), что может не иметь места в случае расширенной теории Хорндески.

Таким образом, исходя из достаточно общих соображений было показано, что дополнительные слагаемые с α и β , которые не были учтены в первоначальном DPSV приеме, но которые, как казалось, существенны в квадратичном действии для возмущений, исчезают при выборе калибровки $\beta = 0$. Указанная калибровка автоматически оказывается синхронной ($\alpha = 0$).

2.1.3 Сравнение методов KYY и DPSV

Покажем теперь явно, как согласуются результаты, полученные методом KYY и DPSV на примере кубической теории Хорндески (145). С учетом возмущений и метрики, и поля галилеона, линеаризация уравнения (160) приводит к следующему результату:

$$-2\mathcal{A}(\ddot{\chi} - \dot{\alpha}\dot{\pi}) + 2\mathcal{B}\left(\frac{\vec{\nabla}^2\chi}{a^2} + \frac{\vec{\nabla}^2\beta}{a^2}\dot{\pi}\right) + 2R_{00}^{(1)}K_X\dot{\pi}^2 = 0, \quad (170)$$

где $R_{00}^{(1)}$ линейно по возмущениям. Согласно процедуре DPSV [50], выразим $R_{00}^{(1)}$ из линеаризованного уравнения Эйнштейна,

$$R_{00}^{(1)} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T_{\mu}^{\mu} \right) = \kappa \left(-\frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} - 3\ddot{\chi} \right) K_X \dot{\pi}^2 + \kappa \left(3\dot{\alpha} - \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \right) K_X \dot{\pi}^3 + \dots, \quad (171)$$

где многоточие обозначает слагаемые без вторых производных. Подставляя выраженный таким образом $R_{00}^{(1)}$ в уравнение (170), получим следующее уравнение движения

$$(\mathcal{A} + 3\kappa K_X^2 \dot{\pi}^4) (\ddot{\chi} - \dot{\alpha} \dot{\pi}) - (\mathcal{B} - \kappa K_X^2 \dot{\pi}^4) \left(\frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} \dot{\pi} \right) = 0, \quad (172)$$

которое больше не содержит ζ и по форме совпадает с уравнением (161). Согласно рассуждениям приведенным выше, решения уравнений связи (154) и (155) для α и β подчиняются (162). Налагая калибровку $\alpha = \beta = 0$, получим уравнение на поле галилеона, содержащее только возмущение χ , которое в точности совпадает с уравнением, приведенным в работе [50]:

$$(\mathcal{A} + 3\kappa K_X^2 \dot{\pi}^4) \ddot{\chi} - (\mathcal{B} - \kappa K_X^2 \dot{\pi}^4) \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} = 0. \quad (173)$$

Таким образом, пренебрежение слагаемыми $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2 \beta$ в уравнении (172) эквивалентно выбору калибровки $\beta = 0$.

Уравнение поля (173) может быть получено вариацией по χ следующего действия:

$$S_{gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[(\mathcal{A} + 3\kappa K_X^2 \dot{\pi}^4) \dot{\chi}^2 - (\mathcal{B} - \kappa K_X^2 \dot{\pi}^4) \frac{(\vec{\nabla} \chi)^2}{a^2} \right], \quad (174)$$

с помощью которого мы теперь покажем эквивалентность подходов КYY и DPSV.

Используя определения (148)–(153), представим действие (174) в следующей форме

$$S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \cdot \frac{\kappa^2 \Theta^2}{\dot{\pi}^2} \left[\left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{\Sigma}{\Theta^2} + \frac{3}{\kappa} \right) \dot{\chi}^2 - \left(\frac{1}{a \cdot \kappa^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{a}{\Theta} \right] - \frac{1}{\kappa} \right) \frac{(\vec{\nabla} \chi)^2}{a^2} \right]. \quad (175)$$

Данная форма действия может быть получена из действия (158), если положить

$$\zeta = \kappa K_X \dot{\pi}^2 \chi. \quad (176)$$

Последнее соотношение фактически является следствием уравнений связи (154)–(155) в калибровке $\alpha = \beta = 0$ (в главном порядке по производным), что подтверждает самосогласованность всего подхода.

С другой стороны, результат, получаемый методом КҮҮ, соответствуют выбору $\chi = 0$ в действии (158) (унитарная калибровка):

$$S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{\Sigma}{\Theta^2} + \frac{3}{\kappa} \right) \dot{\zeta}^2 - \left(\frac{1}{a \cdot \kappa^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{a}{\Theta} \right] - \frac{1}{\kappa} \right) \frac{(\vec{\nabla} \zeta)^2}{a^2} \right]. \quad (177)$$

Квадратичное действие в таком виде было получено для кубической теории Хорндески (145) в работах [61, 111]. С точностью до переопределения поля и слагаемых без производных, действия (175) и (177) совпадают. Таким образом, результаты, полученные двумя способами эквивалентны, поскольку они могут быть получены из калибровочно-инвариантного действия (158) путем выбора соответствующей калибровки.

2.2 Метод DPSV в общей теории Хорндески

Показав на примере кубической теории Хорндески (145), что DPSV прием соответствует специальному выбору калибровки, естественно задать вопрос о применимости данного метода к другим подклассам теории Хорндески, а также общей теории Хорндески с лагранжианом, включающим (21)–(24).

Рассмотрим DPSV прием в случае общей теории Хорндески с лагранжианом $\mathcal{L}_{\mathcal{H}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5$. Наличие новых слагаемых в лагранжиане приводит к возникновению дополнительных членов в уравнении галилеона, которые включают вторые производные метрики. Уравнение поля для π и уравнения

Эйнштейна в данном случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
& R \left(\Omega^{(1)} + \Pi^{(1)} \right) + R_{\mu\nu} \left(\Omega^{(2)\mu\nu} + \Pi^{(2)\mu\nu} \right) + R_{\mu\nu\lambda\rho} \left(\Omega^{(3)\mu\nu\lambda\rho} + \Pi^{(3)\mu\nu\lambda\rho} \right) \\
& + 2R_{\mu}^{\rho} R_{\nu\rho} \nabla^{\mu} \pi \nabla^{\nu} \pi G_{5X} - R_{\mu\nu} R \nabla^{\mu} \pi \nabla^{\nu} \pi G_{5X} \\
& + 2R^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma} \nabla^{\mu} \pi \nabla^{\nu} \pi G_{5X} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{178}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mu\nu} = & R \left(\Omega_{\mu\nu}^{(4)} + \Pi_{\mu\nu}^{(4)} \right) + R_{\mu\nu} \left(\Omega^{(5)} + \Pi^{(5)} \right) + R_{\mu}^{\rho} \left(\Omega_{\rho\nu}^{(6)} + \Pi_{\rho\nu}^{(6)} \right) + R_{\nu}^{\rho} \left(\Omega_{\rho\mu}^{(7)} + \Pi_{\rho\mu}^{(7)} \right) \\
& + R_{\rho\sigma} \left(\Omega_{\mu\nu}^{(8)\rho\sigma} + \Pi_{\mu\nu}^{(8)\rho\sigma} \right) + R_{\mu\rho\nu\sigma} \left(\Omega^{(9)\rho\sigma} + \Pi^{(9)\rho\sigma} \right) + R_{\mu\rho\sigma\lambda} \Pi_{\nu}^{(10)\rho\sigma\lambda} \\
& + R_{\nu\rho\sigma\lambda} \Pi_{\mu}^{(11)\rho\sigma\lambda} + R_{\rho\sigma\lambda\kappa} \Pi_{\mu\nu}^{(12)\rho\sigma\lambda\kappa} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{179}$$

где многоточие обозначает слагаемые, в которые не входят вторые производные метрики, но входят вторые производные поля галилеона π . Явные выражения для коэффициентов $\Omega^{(i)}$, $\Pi^{(i)}$ собраны в Приложении Б.

В полной аналогии со случаем кубической теории Хорндески (145), уравнение галилеона (178) содержит вторые производные как метрики, так и поля галилеона π . Исходный метод DPSV предлагает использовать уравнения Эйнштейна (179), чтобы исключить вторые производные метрики из уравнения галилеона (178). В результате, получается уравнение для единственной скалярной степени свободы (включающее вторые производные). Вопрос заключается в том, возможно ли с помощью линеаризованного уравнения (179) исключить вторые производные метрики из линеаризованного уравнения (178). Ответ на данный вопрос отрицателен для случая произвольного фонового решения: слагаемые со вторыми производными метрики в линеаризованном уравнении (178) не являются линейной комбинацией слагаемых со вторыми производными, которые есть в линеаризованном уравнении (179). Последнее утверждение было явно проверено путем вычисления ранга соответствующей матрицы, составленной из уравнений, с фоновыми величинами $\nabla_{\mu} \pi$, $\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \pi$ и т.д., равными случайным численным значениям. Таким образом, прием DPSV не работает в общей теории Хорндески так, как это было в кубической теории Хорндески.

Однако, если предположить, что фоновое поле галилеона однородно, т.е. $\pi_c = \pi(t)$, а геометрия пространства описывается пространственно-плоской мет-

рикой FLRW, метод DPSV снова становится применим. Единственными ненулевыми производными от однородного поля галилеона $\pi(t)$ являются $\dot{\pi}$, $\ddot{\pi}$ and $\nabla_i \nabla_j \pi = g_{ij} \dot{\pi} H$.¹¹ Тогда в уравнение (178) входит меньшее количество нетривиальных компонент $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Действительно, с учетом сделанных предположений о фоновых метрике и поле галилеона уравнение (178) сводится к форме

$$g^{ij} R_{i0j0}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(1)} + N_{L5}^{(1)} \right) + g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(2)} + N_{L5}^{(2)} \right) + Z = 0, \quad (180)$$

где верхний индекс $\{1\}$ обозначает линеаризованный объект, а Z обозначает остальные слагаемые в уравнении, которые не содержат вторых производных возмущений метрики (но включают в себя слагаемые со вторыми производными χ). Отметим, что как и ранее, мы пренебрегаем слагаемыми с первыми производными и без производных как для возмущений метрики, так и поля галилеона, поскольку они не дают вклада в высокоэнергетические моды возмущений. Кроме этого, мы пренебрегаем слагаемыми типа $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla} \beta$ что, как отмечалось ранее, соответствует выбору калибровки $\beta = 0$. Рассуждения, приведенные в параграфе 2.1, применимы для случая общей теории Хорндески, поэтому, как и для кубической теории, калибровка $\beta = 0$ оказывается автоматически синхронной ($\alpha = 0$). Иными словами, исключая с помощью калибровочных преобразований β , мы автоматически получаем $\alpha = 0$. Явный вид коэффициентов $M_{L3+L4}^{(i)}$, $N_{L5}^{(i)}$ и Z также приведен в Приложении Б.

Из вида уравнения (180) следует, что для того, чтобы исключить вторые производные возмущений метрики, необходимо выразить два объекта в терминах возмущения поля галилеона: $g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}}$ и $g^{ij} R_{i0j0}^{\{1\}}$. Такие же объекты возникают в 00 – компоненте $\mathcal{E}_{00}^{\{1\}}$ и следе $(\mathcal{E}_{\mu\nu} g^{\mu\nu})^{\{1\}}$ линеаризованных уравнений Эйнштейна (179):

$$g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(3)} + N_{L5}^{(3)} \right) + Y_{00} = 0, \quad (181)$$

$$g^{ij} R_{i0j0}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(4)} + N_{L5}^{(4)} \right) + g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(5)} + N_{L5}^{(5)} \right) + g^{\mu\nu} Y_{\mu\nu} = 0, \quad (182)$$

¹¹Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

где в выражения Y_{00} и $g^{\mu\nu}Y_{\mu\nu}$ входят вторые производные возмущений галилеона, но не возмущений метрики (явный вид выражений Y_{00} и $g^{\mu\nu}Y_{\mu\nu}$ приведен в Приложении Б). Используя уравнения (181) и (182), чтобы выразить $g^{ij}g^{mn}R_{imjn}^{\{1\}}$ и $g^{ij}R_{i0j0}^{\{1\}}$ в терминах χ , и подставляя результат в уравнение (180), получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Y_{00} \left(M_{L3+L4}^{(5)} + N_{L5}^{(5)} \right)}{\left(M_{L3+L4}^{(3)} + N_{L5}^{(3)} \right) \left(M_{L3+L4}^{(4)} + N_{L5}^{(4)} \right)} - \frac{g^{\mu\nu}Y_{\mu\nu}}{M_{L3+L4}^{(4)} + N_{L5}^{(4)}} \right) \left(M_{L3+L4}^{(1)} + N_{L5}^{(1)} \right) \\ & - \left(M_{L3+L4}^{(2)} + N_{L5}^{(2)} \right) \frac{Y_{00}}{M_{L3+L4}^{(3)} + N_{L5}^{(3)}} + Z = 0. \end{aligned} \quad (183)$$

Единственной оставшейся скалярной степенью свободы в линеаризованном уравнении (183) является χ : с точностью до вторых производных, структура этого уравнения соответствует $2\mathcal{D}\chi = 0$, где $\mathcal{D}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Указанному уравнению соответствует действие вида $\int d^4x \chi \mathcal{D}\chi$. Интегрируя по частям и используя явный вид объектов Y_{00} , $g^{\mu\nu}Y_{\mu\nu}$, Z , а также $M_{L3+L4}^{(i)}$, $N_{L5}^{(i)}$ в (183), восстановим явный вид части квадратичного действия для χ , включающей производные:

$$S_{gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(\tilde{\mathcal{A}} \dot{\chi}^2 - \tilde{\mathcal{B}} \frac{(\vec{\nabla} \chi)^2}{a^2} \right), \quad (184)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ выражаются через известные коэффициенты $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$, Θ и Σ , использовавшиеся в рамках работы в унитарной калибровке, например, в параграфе 1.1:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \frac{\Theta^2}{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2 \dot{\pi}^2} \left(\frac{\Sigma \mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2}{\Theta^2} + 3\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \right), \quad \tilde{\mathcal{B}} = \frac{\Theta^2}{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2 \dot{\pi}^2} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a \mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2}{\Theta} \right] - \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \right). \quad (185)$$

Соответствующие выражения для коэффициентов в терминах функций лагранжиана были приведены ранее в (34), (37), (38) и (39) для расширенной теории Хорндески; для случая общей теории Хорндески необходимо положить $F_4(\pi, X) = F_5(\pi, X) = 0$. С точностью до общего положительного множителя $\Theta^{-2} \mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2 \dot{\pi}^2$ в интегрируемом выражении, действие (184) совпадает с квадра-

тичным действием, найденным в унитарной калибровке (42) (тензорную часть указанного действия мы в данном параграфе не рассматриваем).

Полученный результат показывает, что использование приема DPSV в общей теории Хорндески приводит к верному квадратичному действию для единственной скалярной степени свободы в части слагаемых с производными. Таким образом, DPSV метод вычисления квадратичного действия для возмущений является альтернативным выбором калибровки по сравнению с традиционным подходом KYY. Применение метода DPSV оправдано в случае, если основной интерес представляет часть квадратичного действия с производными.

2.3 Метод DPSV в расширенной теории Хорндески

Как было показано в параграфах 2.1 и 2.2, метод DPSV соответствует выбору калибровки $\beta = 0$, которая в случае общей теории Хорндески автоматически оказывается синхронной ($\alpha = 0$) благодаря определенному соотношению между коэффициентами квадратичного действия (169). Согласно изложенным в параграфе 2.2 результатам, в отличие от кубической теории Хорндески, где прием работал на уровне фоновых уравнений поля, в случае общей теории Хорндески метод DPSV применим только для линеаризованных уравнений и только в предположении однородности фона. Естественно задать вопрос о возможности пользоваться приемом DPSV в расширенной теории Хорндески, лагранжиан которой включает $\mathcal{L}_{BH}$ из (25). В качестве мотивации изучения применимости метода в расширенной теории Хорндески служат следующие два обстоятельства. Во-первых, если метод действительно позволяет получить правильные результаты для квадратичного действия в терминах возмущения поля галилеона χ , то он может быть использован в качестве независимой проверки результатов, полученных в унитарной калибровке. Во-вторых, что важно, метод DPSV позволил значительно упростить анализ стабильности кротовой норы в некоторых подклассах общей теории Хорндески [86, 112, 113] и может оказаться полезным в работе по обобщению данных результатов на другие, более общие подклассы теории.

Как будет показано ниже, в расширенной теории Хорндески прием DPSV, как и ранее, позволяет избавиться от вторых производных метрики в уравнении поля галилеона, однако, квадратичное действие для χ в результате получается неверным. Иными словами, метод DPSV не работает в расширенной теории Хорндески, по крайней мере в своей исходной форме. Объяснением данного обстоятельства, является тот факт, что ключевые соотношения между коэффициентами в квадратичном действии (169) перестают выполняться в расширенной теории Хорндески. Это означает, что слагаемые с $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}\beta$ не могут быть исключены одновременно путем выбора калибровки $\beta = 0$. Однако, метод можно модифицировать так, чтобы квадратичное действие для χ , получаемое в результате, было бы верным в расширенной теории Хорндески. Мы явно покажем, что, выбирая калибровку $\beta = 0$ и используя уравнение связи на α и β , возможно получить действие, согласующееся с результатом вычисления в унитарной калибровке. Для этого, оставаясь в рамках метода DPSV, при вычислении линейаризованного уравнения для поля галилеона необходимо будет удерживать первые производные $h_{00} = 2\alpha$ и $h_{0i} = -\partial_i\beta$, которые ранее были равны нулю благодаря выбору калибровки, и использовать уравнения связи, чтобы исключить их из уравнения. Таким образом, в расширенной теории Хорндески метод DPSV теряет свои преимущества по сравнению с методом унитарной калибровки, поскольку для своей корректной работы модифицированный метод требует явного вычисления квадратичного действия и уравнений связи до применения самого приема.

2.3.1 Применение метода DPSV в расширенной теории Хорндески

Покажем, что в расширенной теории Хорндески наивное использование метода DPSV приводит к неверному результату. Отметим два аспекта, связанные с использованием приема, которые, тем не менее, остались неизменными по сравнению с общей теорией Хорндески. Во-первых, (i) используя линейаризованные уравнения Эйнштейна все еще можно избавиться от вторых производных возмущений метрики в линейаризованном уравнении поля π при условии однород-

ного фона. Во-вторых, (ii) несмотря на кажущуюся возможность появления в уравнении поля галилеона производных выше второго порядка, что связано со спецификой $\mathcal{L}_{\mathcal{BH}}$ в (25), этого не происходит: в результате получается уравнение, которое имеет второй порядок по производным от χ и первый по производным от $h_{\mu\nu}$. Однако, (iii) если следовать методу DPSV и так же, как это было в общей теории Хорндески, пренебрегать всеми первыми производными от возмущений метрики, то в итоге получится *неверное* квадратичное действие для скалярной степени свободы с точностью до первых производных.

Описанные выше свойства являются нетривиальными и характерными для расширенной теории Хорндески. Далее мы явно получим соответствующие выражения и развернуто поясним природу свойств (i) и (ii). Анализу свойства (iii) посвящен отдельный пункт 2.3.2.

Для того чтобы упростить вид формул, рассмотрим теорию с $\mathcal{L}_5 = 0$, т.е.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{\mathcal{BH}}. \quad (186)$$

Кроме этого, выберем $F_5(\pi, X) = 0$ в $\mathcal{L}_{\mathcal{BH}}$, поскольку функции $F_4(\pi, X)$ достаточно для появления всех принципиально новых типов слагаемых. Даже с учетом этих упрощений некоторые формулы далее довольно громоздкие, поэтому там, где это не влияет на суть изложения, мы опускаем определение некоторых объектов. Вместо этого мы концентрируемся на описании пошагового применения метода и основное внимание уделяем описанию его специфических свойств. Мы полагаем, что такой подход к изложению оправдан, поскольку результат анализа свидетельствует в пользу того, что метод DPSV является не самым оптимальным подходом к изучению расширенной теории Хорндески.

Здесь мы постараемся сохранить последовательность изложения такой же, как и в случае общей теории Хорндески, и в первую очередь избавимся от старших производных возмущений метрики в линеаризованном уравнении поля галилеона, используя как и ранее возмущенные уравнения Эйнштейна.

Уравнение галилеона для действия с лагранжианом (186) имеет вид

$$R \Omega^{(1)} + R_{\mu\nu} (\Omega^{(2)\mu\nu} + \Psi^{(2)\mu\nu}) + R_{\mu\nu\lambda\rho} (\Omega^{(3)\mu\nu\lambda\rho} + \Psi^{(3)\mu\nu\lambda\rho}) - \nabla^\mu \pi \nabla_\mu \pi \nabla^\nu \pi (\nabla_\nu R) F_4 + 2 \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi \nabla^\rho \pi (\nabla_\rho R_{\mu\nu}) F_4 + \dots = 0, \quad (187)$$

где многоточие снова обозначает слагаемые без вторых или более старших производных метрики, но включающие вторые производные π . Коэффициенты $\Omega^{(i)}$ обозначают те же комбинации функций лагранжиана что в (178), а выражения для коэффициентов $\Psi^{(i)}$ приведены в Приложении В. Что изменилось по сравнению с общей теорией Хорндески, так это наличие ненулевых слагаемых типа $\nabla_\rho R_{\mu\nu}$ и $\nabla_\nu R$, которые содержат третьи производные метрики. Данное обстоятельство является свойством общего характера, присущим именно расширенной теории Хорндески, как и указывалось ранее (см. свойство (ii) выше).

Следуя стандартной процедуре, выпишем уравнения Эйнштейна, чтобы воспользоваться ими в дальнейшем. Приведем часть уравнений, включающую в себя вторые (или более старшие, если такие есть) производные метрики:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu\nu} = & R \Omega_{\mu\nu}^{(4)} + R_{\mu\nu} \Omega^{(5)} + R_\mu^\rho (\Omega_{\rho\nu}^{(6)} + \Psi_{\rho\nu}^{(6)}) + R_\nu^\rho (\Omega_{\rho\mu}^{(7)} + \Psi_{\rho\mu}^{(7)}) \\ & + R^{\rho\sigma} (\Omega_{\mu\nu\rho\sigma}^{(8)} + \Psi_{\mu\nu\rho\sigma}^{(8)}) + R_{\mu\rho\nu\sigma} \Omega^{(9)\rho\sigma} + 2 \nabla^\lambda \pi \nabla_\lambda \pi \nabla^\rho \pi (\nabla_\rho \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) F_4 \\ & - 2 \nabla_\nu \pi \nabla^\lambda \pi \nabla^\rho \pi (\nabla_\rho \nabla_\lambda \nabla_\mu \pi) F_4 - 2 \nabla_\mu \pi \nabla^\lambda \pi \nabla^\rho \pi (\nabla_\rho \nabla_\lambda \nabla_\nu \pi) F_4 \\ & + 2 g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \pi \nabla^\sigma \pi \nabla^\rho \pi (\nabla_\rho \nabla_\sigma \nabla_\lambda \pi) F_4 + 2 \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi \nabla^\rho \pi (\nabla_\sigma \nabla^\sigma \nabla_\rho \pi) F_4 \\ & - 2 g_{\mu\nu} \nabla_\rho \pi \nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\lambda \nabla^\lambda \nabla_\sigma \pi) F_4 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (188)$$

Можно заметить, что в отличие от уравнения галилеона (187), уравнения Эйнштейна (188) не содержат третьих производных метрики. Значит, в расширенной теории Хорндески для приема DPSV необходимо использовать некоторые дополнительные уравнения, в которые будут входить третьи производные метрики. В качестве таких дополнительных уравнений можно взять уравнения, соответствующие ковариантной производной от уравнений Эйнштейна, т.е. рассмотреть уравнения вида $\nabla_\rho \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$ (которые далее для краткости будем называть производными от уравнений Эйнштейна), и выразить с их помощью третьи

производные метрики. Мы увидим, что уравнения $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ и $\nabla_\rho \mathcal{E}_{\mu\nu}$ позволяют исключить вторые и более старшие производные метрики из линеаризованного уравнения галилеона, при условии, что фоновая геометрия описывается плоской FLRW метрикой, а фоновое поле галилеона однородно.

Заметим, что производные от уравнений Эйнштейна $\nabla_\rho \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$ содержат четвертые производные от π . Таким образом, предложенная выше процедура может привести к появлению четвертых и третьих производных π в уравнении галилеона. Однако, как мы убедимся позднее, эти слагаемые с четвертыми и третьими производными в результате сократятся и не войдут в конечный вид линеаризованного уравнения галилеона. Конечное уравнение будет уравнением второго порядка для единственной динамической степени свободы в скалярном секторе, что находится в полном согласии с основным свойством расширенной теории Хорндески.

Как и ранее, мы не учитываем первые и нулевые производные как возмущений метрики, так и возмущений галилеона во всех линеаризованных уравнениях. Это, в частности, означает, что мы опираемся на неверное предположение о том, что существует калибровка теории, которая позволяет одновременно избавиться от α и β , так что правомерно не учитывать слагаемые с $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2 \beta$. Далее мы убедимся, что такой калибровки *не существует* в расширенной теории Хорндески, а пока продолжим рассуждения, опираясь на неверное предположение.

С учетом однородности и изотропности фона, линеаризованное уравнение галилеона принимает вид

$$g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(2)} - 2F_4 H \dot{\pi}^3 \right) + g^{ij} R_{i0j0}^{\{1\}} \left(M_{L3+L4}^{(1)} + 20F_4 H \dot{\pi}^3 + 8F_{4X} H \dot{\pi}^5 \right) - \left[\nabla_0 \left(g^{ij} g^{mn} R_{imjn} \right) \right]^{\{1\}} F_4 \dot{\pi}^3 + \tilde{Z} = 0, \quad (189)$$

где в $\tilde{Z}$ входят только вторые производные χ . Выпишем 00 — компоненту и след

линеаризованных уравнений Эйнштейна:

$$\mathcal{E}_{00}^{\{1\}} = g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} M_{L3+L4}^{(3)} + \tilde{Y}_{00} = 0, \quad (190)$$

$$\begin{aligned} (g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu})^{\{1\}} &= g^{ij} R_{i0j0}^{\{1\}} M_{L3+L4}^{(4)} + g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} M_{L3+L4}^{(5)} \\ &- 4F_4 \dot{\pi}^3 \left((\nabla_0 \nabla_\rho \nabla^\rho \pi)^{\{1\}} - (\nabla_0 \nabla_0 \nabla_0 \pi)^{\{1\}} \right) + g^{\mu\nu} \tilde{Y}_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (191)$$

где $\tilde{Y}_{\mu\nu}$ и ее компонента $\tilde{Y}_{00}$ снова включают в себя только вторые производные от χ . Отметим, что слагаемые типа $(\nabla_0 \nabla_0 \nabla_0 \pi)^{\{1\}}$ содержат вторые производные возмущений метрики и третьи производные возмущений поля галилеона. Любопытно, что слагаемое $\mathcal{L}_{\mathcal{BH}}$, соответствующее расширенной теории Хорндески, дает вклад только в $\tilde{Y}_{00}$ в уравнении (190), но не в часть со вторыми производными метрики в уравнении (190).

Есть только одно слагаемое в уравнении (189), которое содержит третьи производные возмущений метрики, а именно $[\nabla_0 (g^{ij} g^{mn} R_{imjn})]^{\{1\}}$. Тогда в производных от уравнений Эйнштейна рассмотрим только компоненту $\nabla_0 \mathcal{E}_{00}$ (если быть точными, $\nabla_0 (\dot{\pi}^2 \mathcal{E}_{00}) = 0$), в которую входит указанная структура:

$$g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}} M_{L3+L4}^{(6)} + [\nabla_0 (g^{ij} g^{mn} R_{imjn})]^{\{1\}} \dot{\pi}^2 M_{L3+L4}^{(7)} + \tilde{W} = 0, \quad (192)$$

где в $\tilde{W}$ входят не только вторые производные и возмущений метрики, и возмущений галилеона, но и третьи производные χ . Заметим, что вторые производные возмущений метрики в $\tilde{W}$ не сворачиваются в тензоры Римана. Мы оставляем их в неизменном виде, но далее убеждаемся, что данные слагаемые сокращаются в конечном выражении для линеаризованного уравнения галилеона с соответствующими несвернутыми слагаемыми из $(\nabla \nabla \nabla \pi)^{\{1\}}$ в (191). Четвертые производные поля галилеона, которые, вообще говоря, есть, не возникают в уравнении (192).

Наконец, выражая $g^{ij} R_{i0j0}^{\{1\}}$, $g^{ij} g^{mn} R_{imjn}^{\{1\}}$ and $[\nabla_0 (g^{ij} g^{mn} R_{imjn})]^{\{1\}}$ из уравнений (190), (191) и (192), подставим их в (189). Получаемое в результате линеаризованное уравнение галилеона имеет громоздкое выражение, поэтому мы не приводим его здесь в явном виде. Вместо этого остановимся на его основных свойствах. Во-первых, в это уравнение не входят вторые производные от

возмущений метрики. Данный факт, вообще говоря, нетривиален: как было отмечено ранее, вторые производные от возмущений метрики возникают не только из компонент линеаризованного тензора Римана, но и из конструкций типа $(\nabla\nabla\nabla\pi)^{\{1\}}$. Во-вторых, конечное линеаризованное уравнение галилеона содержит только вторые производные от возмущения галилеона: третьи производные χ действительно сокращаются. Заметим, что сокращения вторых и третьих производных возмущений метрики были проверены независимым способом: слагаемые в линеаризованном уравнении (189), которые сокращаются в результате использования приема DPSV, действительно являются линейной комбинацией соответствующих членов в линеаризованных уравнениях (190), (191) и (192), в то время как третьи производные χ не возникают вовсе. Таким образом, на данном этапе аналогия со случаем общей теории Хорндески кажется убедительной: удалось получить линеаризованное уравнение галилеона, содержащее исключительно вторые производные возмущений галилеона.

Получив линеаризованное уравнение галилеона второго порядка, $2\mathcal{D}\chi = 0$, где $\mathcal{D}$ – дифференциальный оператор второго порядка, восстановим квадратичное действие $\int d^4x \chi \mathcal{D}\chi$. Действие обладает той же структурой, что и квадратичное действие (184), но с новыми функциями $\tilde{\mathcal{A}}(t)$ и $\tilde{\mathcal{B}}(t)$, которые мы также не приводим в явной форме. Ключевой шаг заключается в их сравнении с соответствующими коэффициентами, полученными в унитарной калибровке – это коэффициенты $\mathcal{G}_S$ и $\mathcal{F}_S$ в параграфе 1.1. Как уже было анонсировано, результат, полученный методом DPSV отличается от результата унитарной калибровки: коэффициенты $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ *не равны* соответствующим коэффициентам в унитарной калибровке.

Причина обнаруженного несовпадения результатов в следующем. Как отмечалось в пункте 2.1.1, кроме вторых производных возмущения поля галилеона, получаемое в результате применения приема линеаризованное уравнение поля галилеона включает в себя первые производные метрики, в том числе $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2\beta$. Инвариантность относительно калибровочных преобразований

$$\chi \rightarrow \chi + \xi_0 \dot{\pi}, \quad \zeta \rightarrow \zeta + \xi_0 \frac{\dot{a}}{a}, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \dot{\xi}_0, \quad \beta \rightarrow \beta - \xi_0, \quad (193)$$

диктует следующую структуру этого уравнения (как в общей, так и в расширенной теории Хорндески):

$$\mathcal{Q}(\ddot{\chi} - \dot{\alpha}\dot{\pi}) - \mathcal{P}(\vec{\nabla}^2\chi + \vec{\nabla}^2\beta\dot{\pi}) = 0, \quad (194)$$

где $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ выражаются в терминах функций лагранжиана. Теперь, несмотря на то что слагаемые с $\dot{\alpha}$ и $\vec{\nabla}^2\beta$ формально относятся к слагаемым первого порядка по производным, к ним следует относиться как к слагаемым второго порядка по производным из-за уравнений связи (154) и (155). В общей теории Хорндески оба эти слагаемых исключаются одновременно с помощью калибровки, но, как мы увидим из анализа в следующем пункте, сокращение с помощью калибровки не имеет места в случае расширенной теории Хорндески. В данном случае наличие нетривиального члена с $\dot{\alpha}$ в уравнении (194) в калибровке $\beta = 0$ является непреодолимым препятствием для DPSV метода в его исходном виде. С другой стороны, учитывая слагаемое с $\dot{\alpha}$ и выражая его в терминах $\partial^2\chi$ позволяет добиться согласия результата с уже известным результатом в унитарной калибровке.

2.3.2 Функции хода и сдвига в расширенной теории Хорндески

Покажем, что α и β не могут быть одновременно исключены с помощью калибровки в расширенной теории Хорндески. Рассуждения данного пункта в высокой степени аналогичны доказательству ключевого для DPSV приема соотношения $\alpha = -\dot{\beta}$ в пункте 2.1.2.

Рассмотрим квадратичное действие для возмущений в случае расширенной

теории Хорндески с лагранжианом (186):

$$\begin{aligned}
S_{gr+gal}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \Big(& A_1 \dot{\zeta}^2 + A_2 \frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} + A_3 \alpha^2 + A_4 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_5 \dot{\zeta} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_6 \alpha \dot{\zeta} \\
& + A_7 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} + A_8 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2 \chi}{a^2} + A_9 \dot{\chi} \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_{10} \chi \ddot{\zeta} + A_{11} \alpha \dot{\chi} \\
& + A_{12} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \beta}{a^2} + A_{13} \chi \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} + A_{14} \dot{\chi}^2 + A_{15} \frac{(\vec{\nabla}\chi)^2}{a^2} + B_{16} \dot{\chi} \frac{\vec{\nabla}^2 \zeta}{a^2} \Big),
\end{aligned} \tag{195}$$

где коэффициенты A_i и B_i выражаются через функции лагранжиана (формулы собраны в Приложении А), а слагаемые, которые не дают вклада в члены с производными в соответствующих уравнениях поля опущены. Слагаемые с коэффициентами A_i в квадратичном действии есть как в общей теории Хорндески, так и в ее расширении. С другой стороны, коэффициент B_{16} отличен от нуля только в расширенной теории Хорндески и является ключевым для дальнейших выводов.

Найдем аналог соотношений (169) для случая расширенной теории Хорндески. Следуя ходу рассуждений в пункте 2.1.2, воспользуемся инвариантностью действия (195) и соответствующих линеаризованных уравнений по отношению к калибровочным преобразованиям (193), и найдем соотношения, связывающие коэффициенты A_i и B_i . Обратимся к линеаризованным уравнениям, которые следуют из действия (195), и будем удерживать только члены, которые под действием калибровочных преобразований (193) преобразуются с использованием старших производных от параметра ξ_0 . Варьируя действие (195) по β и α , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
A_4 \vec{\nabla}^2 \alpha + A_5 \vec{\nabla}^2 \dot{\zeta} + A_9 \vec{\nabla}^2 \dot{\chi} + \dots &= 0, \\
A_4 \vec{\nabla}^2 \beta + A_7 \vec{\nabla}^2 \zeta + A_8 \vec{\nabla}^2 \chi + \dots &= 0,
\end{aligned} \tag{196}$$

где многоточие обозначает слагаемые, которые преобразуются с использованием младших производных от ξ_0 .

В полной аналогии, уравнения, получаемые вариацией действия (195) по

отношению к ζ и χ , имеют вид

$$\begin{aligned} A_7 \vec{\nabla}^2 \alpha - A_5 \vec{\nabla}^2 \dot{\beta} + B_{16} \vec{\nabla}^2 \dot{\chi} + \dots &= 0, \\ A_8 \vec{\nabla}^2 \alpha - A_9 \vec{\nabla}^2 \dot{\beta} - B_{16} \vec{\nabla}^2 \dot{\zeta} + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (197)$$

Их калибровочная инвариантность подразумевает выполнение следующих соотношений между коэффициентами

$$A_7 = -A_5 - B_{16}\dot{\pi}, \quad A_8 = -A_9 + B_{16}H. \quad (198)$$

Заметим, что по сравнению с ранее полученными результатами в общей теории Хорндески, соотношения (198) содержат коэффициент B_{16} . Поэтому вместо $\alpha = -\dot{\beta}$, уравнения (196) и (198) приводят к следующему соотношению:

$$\alpha = -\dot{\beta} - \frac{B_{16}}{A_4} (H\dot{\chi} - \dot{\pi}\dot{\zeta}). \quad (199)$$

Согласно полученной связи $\alpha = 0$ и $\dot{\beta} = 0$, из выбора $\beta = 0$ не следует автоматическое $\alpha = 0$. Таким образом, в расширенной теории Хорндески, формализм DPSV необходимо модифицировать путем удерживания слагаемых с $\dot{\alpha}$ и/или $\vec{\nabla}^2 \beta$ в линейризованном уравнении поля галилеона (194).

Реализация указанной модификации наиболее проста в калибровке $\beta = 0$; в этой калибровке необходимо учитывать ненулевые слагаемые с $\dot{\alpha}$. Вкратце опишем процедуру модификации метода. Мы можем избавиться от старших производных возмущений метрики в линейризованном уравнении галилеона (189) с помощью уравнений (190), (191) и (192) в полной аналогии, как это было сделано в пункте 2.3.1. Однако, на этот раз полученное уравнение галилеона (194) все еще содержит $\dot{\alpha}$. Используя уравнения связи (196) с учетом $\beta = 0$, выразим α через $\dot{\chi}$:

$$\alpha = \left(\frac{A_5 A_8}{A_4 A_7} - \frac{A_9}{A_4} \right) \dot{\chi}. \quad (200)$$

Подставляя соотношение (200) в слагаемые с $\dot{\alpha}$ в уравнении (194), получим линейризованное уравнение поля галилеона, в котором есть вторые производные только χ . Восстановленное квадратичное действие снова совпадает по форме

с (184) и теперь согласуется с результатами, полученными с использованием унитарной калибровки в работе [103]: с точностью до общего множителя, оба лагранжиана совпадают. Таким образом, в расширенной теории Хорндески метод DPSV приводит к верному результату, если удерживать слагаемые с функциями сдвига и хода и использовать уравнения связи на них. Учитывая сказанное, целесообразность использования приема становится неочевидной, поскольку метод существенно опирается на довольно громоздкие уравнения связи. Преимущества приема по отношению к методу унитарной калибровки в расширенной теории Хорндески исчезают, и использование унитарной калибровки с самого начала существенно упрощает вычисления.

Заключение

В работе изучались классические космологические решения без начальной сингулярности в рамках теории Хорндески и ее расширения. Центральным вопросом при исследовании указанных решений являлась устойчивость на всех этапах эволюции системы. Были получены следующие результаты:

1. В терминах ковариантных теорий показано, что полностью устойчивые космологические решения без начальной сингулярности могут быть построены в расширенной теории Хорндески. Так, явно продемонстрировано, что наличие в лагранжиане теории функций, характерных для расширенной теории Хорндески, существенно меняет форму условий устойчивости и позволяет обойти теорему, запрещающую существование полностью устойчивых решений без начальной сингулярности.
2. Впервые предложены конкретные примеры лагранжианов расширенной теории Хорндески, допускающие решения в виде космологического отскока и генезиса, в которых не возникает градиентных неустойчивостей на протяжении всего времени эволюции. Устойчивость построенных решений проверена явно. Особенностью предложенных решений является нетриви-

альность одной из асимптотик соответствующих теорий: в асимптотическом прошлом теория, описывающая систему, относится к классу расширенной теории Хорндески, в то время как в асимптотическом будущем поле галилеона трансформируется в стандартное безмассовое скалярное поле, а гравитация описывается общей теорией относительности. Иными словами, на больших положительных временах теория Хорндески переходит в теорию безмассового скалярного поля на фоне эйнштейновской гравитации.

3. Построено полностью устойчивое решение в виде отскока в расширенной теории Хорндески, для которого скалярное поле теории и в асимптотическом прошлом, и в асимптотическом будущем становится безмассовым скалярным полем со стандартным кинетическим членом, а гравитация описывается общей теорией относительности. Кроме этого, явно показано, что описание соответствующей линеаризованной теории в терминах унитарной калибровки корректно несмотря на кажущиеся расхожимости, присутствующие в линеаризованных уравнениях. Тем самым доказано, что γ -кроссинг не является источником патологий на линеаризованном уровне теории.
4. Изучены два метода вычисления квадратичного действия для возмущений в общей теории Хорндески: метод унитарной калибровки и метод DPSV. Проведен подробный анализ метода DPSV и установлено, что метод соответствует определенному выбору калибровки, хотя подход не предполагает ее явной фиксации. Показано, что в случае наиболее общей теории Хорндески калибровка $h_{0i} = 0$ одновременно является синхронной ($h_{00} = 0$). Данное свойство является характерной особенностью общих теорий Хорндески, и его справедливость является основой метода DPSV. Метод DPSV был явно применен в случае наиболее общей теории Хорндески. Показано, что для подклассов общей теории Хорндески старше кубического, метод работает при условии выполнения однородности и изо-

тропии фоновых метрики и поля галилеона. Явно проверено совпадение полученного квадратичного действия с результатом в унитарной калибровке, что подтверждает корректность метода DPSV.

5. Были проведены вычисления квадратичного действия методом DPSV в расширенной теории Хорндески. Установлено, что даже при условии однородности и изотропии фоновых объектов, метод DPSV приводит к неверному результату для квадратичного действия возмущений. Проведен анализ причины некорректной работы метода: в расширенной теории Хорндески сопутствующая калибровка не является автоматически синхронной. Предложен способ модифицировать метод DPSV, который предполагает явное использование уравнений связи линеаризованной теории. Предложенные модификации позволяют методом DPSV получить квадратичное действие, совпадающее с результатом применения метода унитарной калибровки.

В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю В.А. Рубакову за внимание к работе, ценные замечания и неизменную поддержку.

Автор признателен своим коллегам и соавторам С. Миронову, Р. Колеватову и Н. Сухову за плодотворную совместную работу.

Автор благодарен сотрудникам Отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

Приложение А. Выражения для коэффициентов A_i и B_i в квадратичном действии для возмущений

В данном приложении приведен аналог квадратичного действия (164), переписанный в терминах калибровочно-инвариантной комбинации (159), а также явный вид коэффициентов A_i и B_i , входящих в квадратичное действие в общей теории Хорндески (164) и квадратичное действие для возмущений в случае расширенной теории Хорндески (195).

Квадратичное действие после отынтегрирования уравнений связи и выраженное в терминах калибровочно-инвариантной комбинации χ и ζ :

$$S^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{A} \cdot \left(\frac{d}{dt} [\zeta \dot{\pi} - \chi H] \right)^2 + \mathcal{B} \cdot (\zeta \dot{\pi} - \chi H)^2 - \mathcal{C} \left(\frac{\vec{\nabla} \zeta}{a} \dot{\pi} - \frac{\vec{\nabla} \chi}{a} H \right)^2 \right), \quad (201)$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\dot{\pi}^2} \left(A_1 + \frac{A_3 \cdot A_5^2}{A_4^2} - \frac{A_5 \cdot A_6}{A_4} \right) \equiv \frac{1}{\dot{\pi}^2} \left(\frac{4}{9} \frac{A_1^2 \cdot A_3}{A_4^2} - A_1 \right), \quad (202)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{A} \ddot{\pi} + \dot{\mathcal{A}} \dot{\pi} + 3\mathcal{A} H \ddot{\pi}}{\dot{\pi}}, \quad (203)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\dot{\pi}^2} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a A_5 \cdot A_7}{2 A_4} \right] - A_2 \right). \quad (204)$$

Данное действие является обобщением (158) на случай расширенной теории Хорндески и учитывает слагаемые всех порядков по производной.

Выражения для коэффициентов A_i и B_i в терминах функций лагранжиана:

$$A_1 = 3 \left[-2G_4 + 4G_{4X} \dot{\pi}^2 - G_{5\pi} \dot{\pi}^2 + 2HG_{5X} \dot{\pi}^3 + 2F_4 \dot{\pi}^4 + 6HF_5 \dot{\pi}^5 \right],$$

$$A_2 = 2G_4 - 2G_{5X} \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - G_{5\pi} \dot{\pi}^2,$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= F_X \dot{\pi}^2 + 2F_{XX} \dot{\pi}^4 + 12HK_X \dot{\pi}^3 + 6HK_{XX} \dot{\pi}^5 - K_\pi \dot{\pi}^2 - K_{\pi X} \dot{\pi}^4 - 6H^2 G_4 \\
&\quad + 42H^2 G_{4X} \dot{\pi}^2 + 96H^2 G_{4XX} \dot{\pi}^4 + 24H^2 G_{4XXX} \dot{\pi}^6 - 6HG_{4\pi} \dot{\pi} - 30HG_{4\pi X} \dot{\pi}^3 \\
&\quad - 12HG_{4\pi XX} \dot{\pi}^5 + 30H^3 G_{5X} \dot{\pi}^3 + 26H^3 G_{5XX} \dot{\pi}^5 + 4H^3 G_{5XXX} \dot{\pi}^7 - 18H^2 G_{5\pi} \dot{\pi}^2 \\
&\quad - 27H^2 G_{5\pi X} \dot{\pi}^4 - 6H^2 G_{5\pi XX} \dot{\pi}^6 + 90H^2 F_4 \dot{\pi}^4 + 78H^2 F_{4X} \dot{\pi}^6 + 12H^2 F_{4XX} \dot{\pi}^8 \\
&\quad + 168H^3 F_5 \dot{\pi}^5 + 102H^3 F_{5X} \dot{\pi}^7 + 12H^3 F_{5XX} \dot{\pi}^9, \\
A_4 &= 2[K_X \dot{\pi}^3 - 2G_4 H + 8HG_{4X} \dot{\pi}^2 + 8HG_{4XX} \dot{\pi}^4 - G_{4\pi} \dot{\pi} - 2G_{4\pi X} \dot{\pi}^3 \\
&\quad + 5H^2 G_{5X} \dot{\pi}^3 + 2H^2 G_{5XX} \dot{\pi}^5 - 3HG_{5\pi} \dot{\pi}^2 - 2HG_{5\pi X} \dot{\pi}^4 \\
&\quad + 10HF_4 \dot{\pi}^4 + 4HF_{4X} \dot{\pi}^6 + 21H^2 F_5 \dot{\pi}^5 + 6H^2 F_{5X} \dot{\pi}^7], \\
A_5 &= -\frac{2}{3}A_1, \\
A_6 &= -3A_4, \\
A_7 &= -A_5 - B_{16} \dot{\pi}, \\
A_8 &= 2[K_X \dot{\pi}^2 - G_{4\pi} - 2G_{4\pi X} \dot{\pi}^2 + 4HG_{4X} \dot{\pi} + 8HG_{4XX} \dot{\pi}^3 - 2HG_{5\pi} \dot{\pi} \\
&\quad - 2HG_{5\pi X} \dot{\pi}^3 + 3H^2 G_{5X} \dot{\pi}^2 + 2H^2 G_{5XX} \dot{\pi}^4 + 10HF_4 \dot{\pi}^3 + 4HF_{4X} \dot{\pi}^5 \\
&\quad + 21H^2 F_5 \dot{\pi}^4 + 6H^2 F_{5X} \dot{\pi}^6], \\
A_9 &= -(A_8 - B_{16} H), \\
A_{10} &= -3(A_8 - B_{16} H), \\
A_{11} &= 2[-F_X \dot{\pi} - 2F_{XX} \dot{\pi}^3 + K_\pi \dot{\pi} - 6HK_{XX} \dot{\pi}^4 - 9HK_X \dot{\pi}^2 + K_{\pi X} \dot{\pi}^3 \\
&\quad + 3HG_{4\pi} + 24HG_{4\pi X} \dot{\pi}^2 + 12HG_{4\pi XX} \dot{\pi}^4 - 18H^2 G_{4X} \dot{\pi} - 72H^2 G_{4XX} \dot{\pi}^3 \\
&\quad - 24H^2 G_{4XXX} \dot{\pi}^5 + 9H^2 G_{5\pi} \dot{\pi} + 21H^2 G_{5\pi X} \dot{\pi}^3 + 6H^2 G_{5\pi XX} \dot{\pi}^5 \\
&\quad - 15H^3 G_{5X} \dot{\pi}^2 - 20H^3 G_{5XX} \dot{\pi}^4 - 4H^3 G_{5XXX} \dot{\pi}^6 - 60H^2 F_4 \dot{\pi}^3 - 66H^2 F_{4X} \dot{\pi}^5 \\
&\quad - 12H^2 F_{4XX} \dot{\pi}^7 - 105H^3 F_5 \dot{\pi}^4 - 84H^3 F_{5X} \dot{\pi}^6 - 12H^3 F_{5XX} \dot{\pi}^8], \\
A_{12} &= 2[F_X \dot{\pi} - K_\pi \dot{\pi} + 3HK_X \dot{\pi}^2 - HG_{4\pi} + G_{4\pi X} \dot{\pi} - 10HG_{4\pi X} \dot{\pi}^2 + 6H^2 G_{4X} \dot{\pi} \\
&\quad + 12H^2 G_{4XX} \dot{\pi}^3 - 3H^2 G_{5\pi} \dot{\pi} + HG_{5\pi X} \dot{\pi}^2 - 4H^2 G_{5\pi X} \dot{\pi}^3 + 3H^3 G_{5X} \dot{\pi}^2 \\
&\quad + 2H^3 G_{5XX} \dot{\pi}^4 + 12H^2 F_4 \dot{\pi}^3 + 6H^2 F_{4X} \dot{\pi}^5 - 2HF_{4\pi} \dot{\pi}^4 + 15H^3 F_5 \dot{\pi}^4 + 6H^3 F_{5X} \dot{\pi}^6 \\
&\quad - 3H^2 F_{5\pi} \dot{\pi}^5],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & 2[4HG_{4X}\dot{\pi} + 4G_{4X}\ddot{\pi} + 8G_{4XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 2G_{4\pi} + 4G_{4\pi X}\dot{\pi}^2 + 2H^2G_{5X}\dot{\pi}^2 \\
& + 2\dot{H}G_{5X}\dot{\pi}^2 + 4HG_{5X}\dot{\pi}\ddot{\pi} + 4HG_{5XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - 2HG_{5\pi}\dot{\pi} - 2G_{5\pi}\ddot{\pi} + 2HG_{5\pi X}\dot{\pi}^3 \\
& - 2G_{5\pi X}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - G_{5\pi\pi}\dot{\pi}^2 + 2HF_4\dot{\pi}^3 + 6F_4\ddot{\pi}\dot{\pi}^2 + 4F_{4X}\ddot{\pi}\dot{\pi}^4 + 2F_{4\pi}\dot{\pi}^4 + 24HF_5\ddot{\pi}\dot{\pi}^3 \\
& + 6H^2F_5\dot{\pi}^4 + 6\dot{H}F_5\dot{\pi}^4 + 12HF_{5X}\ddot{\pi}\dot{\pi}^5 + 6HF_{5\pi}\dot{\pi}^5], \\
A_{14} = & F_X + 2F_{XX}\dot{\pi}^2 - K_\pi + 6HK_X\dot{\pi} - K_{\pi X}\dot{\pi}^2 + 6HK_{XX}\dot{\pi}^3 + 6H^2G_{4X} \\
& - 18HG_{4\pi X}\dot{\pi} + 48H^2G_{4XX}\dot{\pi}^2 - 12HG_{4\pi XX}\dot{\pi}^3 + 24H^2G_{4XX}\dot{\pi}^4 + 6H^3G_{5X}\dot{\pi} \\
& - 3H^2G_{5\pi} - 15H^2G_{5\pi X}\dot{\pi}^2 + 14H^3G_{5XX}\dot{\pi}^3 + 4H^3G_{5XX}\dot{\pi}^5 - 6H^2G_{5\pi XX}\dot{\pi}^4 \\
& + 36H^2F_4\dot{\pi}^2 + 54H^2F_{4X}\dot{\pi}^4 + 12H^2F_{4XX}\dot{\pi}^6 + 60H^3F_5\dot{\pi}^3 + 66H^3F_{5X}\dot{\pi}^5 \\
& + 12H^3F_{5XX}\dot{\pi}^7, \\
A_{15} = & -F_X - 4HK_X\dot{\pi} - 2K_X\ddot{\pi} + K_\pi - K_{\pi X}\dot{\pi}^2 - 2K_{XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 6H^2G_{4X} \\
& - 4\dot{H}G_{4X} - 20H^2G_{4XX}\dot{\pi}^2 - 8\dot{H}G_{4XX}\dot{\pi}^2 - 24HG_{4XX}\dot{\pi}\ddot{\pi} + 12HG_{4\pi X}\dot{\pi} \\
& + 6G_{4\pi X}\ddot{\pi} - 16HG_{4XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - 8HG_{4\pi XX}\dot{\pi}^3 + 4G_{4\pi XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + 2G_{4\pi\pi X}\dot{\pi}^2 \\
& - 4H^3G_{5X}\dot{\pi} - 4H\dot{H}G_{5X}\dot{\pi} - 2H^2G_{5X}\ddot{\pi} + 3H^2G_{5\pi} + 2\dot{H}G_{5\pi} + 5H^2G_{5\pi X}\dot{\pi}^2 \\
& + 2\dot{H}G_{5\pi X}\dot{\pi}^2 + 8HG_{5\pi X}\dot{\pi}\ddot{\pi} - 4H^3G_{5XX}\dot{\pi}^3 - 4H\dot{H}G_{5XX}\dot{\pi}^3 - 10H^2G_{5XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& - 4H^2G_{5XX}\dot{\pi}^4\ddot{\pi} - 2H^2G_{5\pi XX}\dot{\pi}^4 + 4HG_{5\pi XX}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + 2HG_{5\pi\pi X}\dot{\pi}^3 - 20F_4H^2\dot{\pi}^2 \\
& - 10\dot{H}F_4\dot{\pi}^2 - 24HF_4\dot{\pi}\ddot{\pi} - 10H^2F_{4X}\dot{\pi}^4 - 4\dot{H}F_{4X}\dot{\pi}^4 - 36HF_{4X}\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - 6HF_{4\pi}\dot{\pi}^3 \\
& - 8HF_{4XX}\dot{\pi}^5\ddot{\pi} - 4HF_{4\pi X}\dot{\pi}^5 - 30H^3F_5\dot{\pi}^3 - 36H\dot{H}F_5\dot{\pi}^3 - 60H^2F_5\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 12H^3F_{5X}\dot{\pi}^5 \\
& - 12H\dot{H}F_{5X}\dot{\pi}^5 - 66H^2F_{5X}\dot{\pi}^4\ddot{\pi} - 12H^2F_{5\pi}\dot{\pi}^4 - 12H^2F_{5XX}\dot{\pi}^6\ddot{\pi} - 6H^2F_{5\pi X}\dot{\pi}^6, \\
B_{16} = & 4F_4\dot{\pi}^3 + 12HF_5\dot{\pi}^4.
\end{aligned}$$

Данные выражения позволяют убедиться явным образом в правильности ключевых для приема DPSV соотношений между коэффициентами, полученных из соображений калибровочной инвариантности уравнений поля, как в случае общей теории Хорндески (169), так и в случае расширенной теории Хорндески (198).

Приложение Б. Выражения для коэффициентов в линеаризованных уравнениях общей теории Хорндески

Данное приложение содержит явные выражения для коэффициентов, входящих в формулы параграфа 2.2. Группы коэффициентов $\Omega^{(i)}$ и $\Pi^{(i)}$ входят в уравнения Эйнштейна и уравнение поля галилеона (178), (179).

Коэффициенты $\Omega^{(i)}$ определяют вклад подклассов $\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$ теории Хорндески, и описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= 2\nabla_\mu \nabla^\mu \pi G_{4X} + 4\nabla^\mu \pi \nabla_\mu \nabla_\nu \pi \nabla^\nu \pi G_{4XX} - G_{4\pi} + 2\nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi G_{4\pi X}, \\
\Omega^{(2)\mu\nu} &= \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi (2K_X + 8\nabla_\rho \nabla^\rho \pi G_{4XX} - 8G_{4\pi X}) - 4\nabla^\mu \nabla^\nu \pi G_{4X} \\
&\quad - 16\nabla^\mu \pi \nabla^\nu \nabla_\rho \pi \nabla^\rho \pi G_{4XX}, \\
\Omega^{(3)\mu\nu\lambda\rho} &= -8\nabla^\mu \pi \nabla^\lambda \pi \nabla^\nu \nabla^\rho \pi G_{4XX}, \\
\Omega_{\mu\nu}^{(4)} &= -g_{\mu\nu} G_4 + 2\nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi G_{4X}, \\
\Omega^{(5)} &= 2 G_4, \\
\Omega_{\rho\nu}^{(6)} &= -4\nabla_\nu \pi \nabla_\rho \pi G_{4X}, \\
\Omega_{\rho\mu}^{(7)} &= -4\nabla_\mu \pi \nabla_\rho \pi G_{4X}, \\
\Omega_{\mu\nu}^{(8)\rho\sigma} &= 4g_{\mu\nu} \nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi G_{4X}, \\
\Omega^{(9)\rho\sigma} &= -4\nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi G_{4X}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $\Pi^{(i)}$ определяют вклад подкласса $\mathcal{L}_5$, и описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)} &= \nabla_\rho \nabla^\rho \pi \nabla_\lambda \nabla^\lambda \pi G_{5X} - \nabla_\lambda \nabla_\rho \pi \nabla^\lambda \nabla^\rho \pi G_{5X} + 2\nabla^\rho \pi \nabla_\lambda \nabla_\rho \pi \nabla^\lambda \pi \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi G_{5XX} \\
&\quad - 2\nabla^\rho \pi \nabla^\lambda \pi \nabla_\sigma \nabla_\lambda \pi \nabla^\sigma \nabla_\rho \pi G_{5XX} - \nabla_\rho \nabla^\rho \pi G_{5\pi} + \nabla_\rho \pi \nabla^\rho \pi \nabla_\lambda \nabla^\lambda \pi G_{5\pi X} \\
&\quad - 2\nabla^\rho \pi \nabla_\lambda \nabla_\rho \pi \nabla^\lambda \pi G_{5\pi X} - \frac{1}{2} \nabla_\rho \pi \nabla^\rho \pi G_{5\pi\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(2)\mu\nu} = & -4\nabla^\nu\nabla^\mu\pi\nabla_\rho\nabla^\rho\pi G_{5X} + 4\nabla_\rho\nabla^\nu\pi\nabla^\rho\nabla^\mu\pi G_{5X} + 4\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi\nabla^\mu\nabla_\rho\pi\nabla^\nu\nabla_\sigma\pi G_{5XX} \\
& - 4\nabla^\rho\pi\nabla_\sigma\nabla_\rho\pi\nabla^\sigma\pi\nabla^\nu\nabla^\mu\pi G_{5XX} - 8\nabla^\mu\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\nu\nabla_\rho\pi\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi G_{5XX} \\
& + 2\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi\nabla_\rho\nabla^\rho\pi\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi G_{5XX} + 8\nabla^\mu\pi\nabla^\rho\pi\nabla_\sigma\nabla^\nu\pi\nabla^\sigma\nabla_\rho\pi G_{5XX} \\
& - 2\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi\nabla_\sigma\nabla_\rho\pi\nabla^\sigma\nabla^\rho\pi G_{5XX} - 2\nabla_\rho\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\nu\nabla^\mu\pi G_{5\pi X} + 8\nabla^\mu\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\nu\nabla_\rho\pi G_{5\pi X} \\
& - 4\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi\nabla_\rho\nabla^\rho\pi G_{5\pi X} + \nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi G_{5\pi\pi} + 2\nabla^\nu\nabla^\mu\pi G_{5\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(3)\mu\nu\lambda\rho} = & 2\nabla^\lambda\nabla^\mu\pi\nabla^\rho\nabla^\nu\pi G_{5X} - 2\nabla^\mu\pi\nabla^\rho\nabla^\lambda\nabla^\nu\pi G_{5X} + 4\nabla^\mu\pi\nabla^\lambda\pi\nabla^\nu\nabla^\sigma\pi\nabla^\rho\nabla_\sigma\pi G_{5XX} \\
& - 4\nabla^\mu\pi\nabla^\lambda\pi\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi\nabla^\rho\nabla^\nu\pi G_{5XX} + 8\nabla^\sigma\pi\nabla^\mu\pi\nabla^\lambda\nabla_\sigma\pi\nabla^\rho\nabla^\nu\pi G_{5XX} \\
& + 4\nabla^\mu\pi\nabla^\lambda\pi\nabla^\rho\nabla^\nu\pi G_{5\pi X},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(4)} = & -\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi G_{5\pi} + \nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi\nabla_\rho\nabla^\rho\pi G_{5X} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\rho\pi\nabla^\rho\pi G_{5\pi} - \nabla_\nu\pi\nabla_\rho\nabla_\mu\pi\nabla^\rho\pi G_{5X} \\
& - \nabla_\mu\pi\nabla_\rho\nabla_\nu\pi\nabla^\rho\pi G_{5X} + g_{\mu\nu}\nabla^\rho\pi\nabla_\sigma\nabla_\rho\pi\nabla^\sigma\pi G_{5X},
\end{aligned}$$

$$\Pi^{(5)} = -\nabla_\rho\pi\nabla^\rho\pi G_{5\pi} - 2\nabla^\rho\pi\nabla_\sigma\nabla_\rho\pi\nabla^\sigma\pi G_{5X},$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\rho\nu}^{(6)} = & 2\nabla_\nu\pi\nabla_\rho\pi G_{5\pi} + 2\nabla_\nu\pi\nabla^\sigma\pi\nabla_\rho\nabla_\sigma\pi G_{5X} - 2\nabla_\nu\pi\nabla_\rho\pi\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi G_{5X} \\
& + 2\nabla_\rho\pi\nabla_\sigma\nabla_\nu\pi\nabla^\sigma\pi G_{5X},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\rho\mu}^{(7)} = & 2\nabla_\mu\pi\nabla_\rho\pi G_{5\pi} + 2\nabla_\mu\pi\nabla^\sigma\pi\nabla_\rho\nabla_\sigma\pi G_{5X} - 2\nabla_\mu\pi\nabla_\rho\pi\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi G_{5X} \\
& + 2\nabla_\rho\pi\nabla_\sigma\nabla_\mu\pi\nabla^\sigma\pi G_{5X},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(8)\rho\sigma} = & 2\nabla_\nu\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\nabla_\mu\pi G_{5X} + 2\nabla_\mu\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\nabla_\nu\pi G_{5X} - 2\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi\nabla^\sigma\nabla^\rho\pi G_{5X} \\
& - 2g_{\mu\nu}\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi G_{5\pi} - 2\nabla_\nu\nabla_\mu\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi G_{5X} - 4g_{\mu\nu}\nabla^\rho\pi\nabla^\lambda\pi\nabla^\sigma\nabla_\lambda\pi G_{5X} \\
& + 2g_{\mu\nu}\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\pi G_{5X},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(9)\rho\sigma} &= 2\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi G_{5\pi} - 2\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\pi G_{5X} + 2\nabla^\lambda\pi\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\nabla_\lambda\pi G_{5X} \\
&\quad + 2\nabla^\lambda\pi\nabla^\sigma\pi\nabla^\rho\nabla_\lambda\pi G_{5X}, \\
\Pi_\nu^{(10)\rho\sigma\lambda} &= -2\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi\nabla^\lambda\nabla_\nu\pi G_{5X} + 2\nabla_\nu\pi\nabla^\sigma\pi\nabla^\lambda\nabla^\rho\pi G_{5X}, \\
\Pi_\mu^{(11)\rho\sigma\lambda} &= -2\nabla^\rho\pi\nabla^\sigma\pi\nabla_\lambda\nabla_\mu\pi G_{5X} + 2\nabla_\mu\pi\nabla^\sigma\pi\nabla^\lambda\nabla^\rho\pi G_{5X}, \\
\Pi_{\mu\nu}^{(12)\rho\sigma\lambda\kappa} &= -2g_{\mu\nu}\nabla^\rho\pi\nabla^\lambda\pi\nabla^\kappa\nabla^\sigma\pi G_{5X},
\end{aligned}$$

Коэффициенты $M^{(i)}$ и $N^{(i)}$ присутствуют в линеаризованных уравнениях (180), (181) и (182) и соответствуют вкладам различных подклассов теории Хорн-дески, $\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$ и $\mathcal{L}_5$, соответственно:

$$\begin{aligned}
M_{L3+L4}^{(1)} &= -2 \left[G_{4\pi} - 4G_{4X}H\dot{\pi} + (2G_{4\pi X} - K_X)\dot{\pi}^2 - 8G_{4XX}H\dot{\pi}^3 \right], \\
M_{L3+L4}^{(2)} &= -G_{4\pi} + 2G_{4X}H\dot{\pi} + 2G_{4X}\ddot{\pi} + 2\dot{\pi}^2(G_{4\pi X} + 2G_{4XX}\ddot{\pi}), \\
M_{L3+L4}^{(3)} &= (2G_{4X}\dot{\pi}^2 - G_4), \\
M_{L3+L4}^{(4)} &= 4M_{L3+L4}^{(3)}, \\
M_{L3+L4}^{(5)} &= 2(G_{4X}\dot{\pi}^2 - G_4), \\
M_{L3+L4}^{(6)} &= -\dot{\pi} \left[2G_4\ddot{\pi} + \dot{\pi}^2(G_{4\pi} - 6G_{4X}\ddot{\pi}) - 2\dot{\pi}^4(G_{4\pi X} + 2G_{4XX}\ddot{\pi}) \right], \\
M_{L3+L4}^{(7)} &= M_{L3+L4}^{(3)}, \\
N_{L5}^{(1)} &= -4G_{5\pi}H\dot{\pi} + 6G_{5X}H^2\dot{\pi}^2 + 4G_{5XX}H^2\dot{\pi}^4 - 4G_{5\pi X}H\dot{\pi}^3, \\
N_{L5}^{(2)} &= G_{5\pi X}H\dot{\pi}^3 - G_{5\pi}H\dot{\pi} - G_{5\pi}\ddot{\pi} + 2G_{5X}H\dot{\pi}\ddot{\pi} + G_{5X}\dot{\pi}^2\frac{\ddot{a}}{a} - G_{5\pi X}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + \\
&\quad + 2G_{5XX}H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - \frac{1}{2}G_{5\pi\pi}\dot{\pi}^2, \\
N_{L5}^{(3)} &= -\frac{1}{2}\dot{\pi}^2(G_{5\pi} - 2G_{5X}H\dot{\pi}), \\
N_{L5}^{(4)} &= 4N_{L5}^{(3)}, \\
N_{L5}^{(5)} &= G_{5X}\dot{\pi}^2(H\dot{\pi} + \ddot{\pi}).
\end{aligned}$$

Явный вид Z , Y_{00} и $g^{\mu\nu}Y_{\mu\nu}$, входящих в линеаризованные уравнения (180), (181) и (182):

$$\begin{aligned}
Z = & 2\ddot{\chi} \left[-F_X - 2F_{XX}\dot{\pi}^2 + K_\pi - 6K_X H\dot{\pi} + K_{\pi X}\dot{\pi}^2 - 6K_{XX} H\dot{\pi}^3 - 6G_{4X} H^2 \right. \\
& + 18G_{4\pi X} H\dot{\pi} - 48G_{4XX} H^2\dot{\pi}^2 + 12G_{4\pi XX} H\dot{\pi}^3 - 24G_{4XXX} H^2\dot{\pi}^4 + 3G_{5\pi} H^2 \\
& \left. - 6G_{5X} H^3\dot{\pi} + 15G_{5\pi X} H^2\dot{\pi}^2 - 14G_{5XX} H^3\dot{\pi}^3 + 6G_{5\pi XX} H^2\dot{\pi}^4 - 4G_{5XXX} H^3\dot{\pi}^5 \right] \\
& + 2\frac{\vec{\nabla}^2\chi}{a^2} \left[F_X - K_\pi + 2K_X\ddot{\pi} + 4K_X H\dot{\pi} + K_{\pi X}\dot{\pi}^2 + 2K_{XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + 2G_{4X} H^2 \right. \\
& + 4G_{4X}\frac{\ddot{a}}{a} - 12G_{4\pi X} H\dot{\pi} - 6G_{4\pi X}\ddot{\pi} + 12G_{4XX} H^2\dot{\pi}^2 + 24G_{4XX} H\dot{\pi}\ddot{\pi} + 8G_{4XX}\dot{\pi}^2\frac{\ddot{a}}{a} \\
& - 2G_{4\pi\pi X}\dot{\pi}^2 + 8G_{4\pi XX} H\dot{\pi}^3 - 4G_{4\pi XX}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + 16G_{4XXX} H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} - G_{5\pi} H^2 - 2G_{5\pi}\frac{\ddot{a}}{a} \\
& + 2G_{5X} H^2\ddot{\pi} + 4G_{5X} H\dot{\pi}\frac{\ddot{a}}{a} - 8G_{5\pi X} H\dot{\pi}\ddot{\pi} - 3G_{5\pi X} H^2\dot{\pi}^2 - 2G_{5\pi X}\dot{\pi}^2\frac{\ddot{a}}{a} + 10G_{5XX} H^2\dot{\pi}^2\ddot{\pi} \\
& \left. + 4G_{5XX} H\dot{\pi}^3\frac{\ddot{a}}{a} - 2G_{5\pi\pi X} H\dot{\pi}^3 - 4G_{5\pi XX} H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + 2G_{5\pi XX} H^2\dot{\pi}^4 + 4G_{5XXX} H^2\dot{\pi}^4\ddot{\pi} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{00} = & 2\frac{\vec{\nabla}^2\chi}{a^2} \left[K_X\dot{\pi}^4 - G_{4\pi}\dot{\pi}^2 + 4G_{4X} H\dot{\pi}^3 - 2G_{4\pi X}\dot{\pi}^4 + 8G_{4XX} H\dot{\pi}^5 - 2G_{5\pi} H\dot{\pi}^3 \right. \\
& \left. + 3G_{5X} H^2\dot{\pi}^4 - 2G_{5\pi X} H\dot{\pi}^5 + 2G_{5XX} H^2\dot{\pi}^6 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} = & 2\ddot{\chi} \left[-3K_X\dot{\pi}^2 + 3G_{4\pi} - 12G_{4X} H\dot{\pi} + 6G_{4\pi X}\dot{\pi}^2 - 24G_{4XX} H\dot{\pi}^3 + 6G_{5\pi} H\dot{\pi} \right. \\
& \left. - 9G_{5X} H^2\dot{\pi}^2 + 6G_{5\pi X} H\dot{\pi}^3 - 6G_{5XX} H^2\dot{\pi}^4 \right] + 2\frac{\vec{\nabla}^2\chi}{a^2} \left[K_X\dot{\pi}^2 - 3G_{4\pi} + 8G_{4X} H\dot{\pi} \right. \\
& + 4G_{4X}\ddot{\pi} + 2G_{4\pi X}\dot{\pi}^2 + 8G_{4XX} H\dot{\pi}^3 + 8G_{4XX}\ddot{\pi}\dot{\pi}^2 - 2G_{5\pi}\ddot{\pi} - 4G_{5\pi} H\dot{\pi} + 4G_{5X} H\ddot{\pi}\dot{\pi} \\
& \left. + 3G_{5X} H^2\dot{\pi}^2 + 2G_{5X}\frac{\ddot{a}}{a}\dot{\pi}^2 - G_{5\pi\pi}\dot{\pi}^2 - 2G_{5\pi X}\ddot{\pi}\dot{\pi}^2 + 2G_{5XX} H^2\dot{\pi}^4 + 4G_{5XX} H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} \right].
\end{aligned}$$

Приложение В. Выражения для коэффициентов в линеаризованных уравнениях расширенной теории Хорндески

Данное приложение содержит явный вид коэффициентов, возникающих в линеаризованных уравнениях (187) и (188) в случае расширенной теории Хорндески в параграфе 2.3.1. Ниже мы приводим выражения для случая $F_5 = 0$ и $F_4 \neq 0$, рассматриваемого в параграфе 2.3.1:

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2)\mu\nu} &= \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi \left[10 \nabla_\rho \nabla^\rho \pi F_4 + 4 \nabla^\sigma \pi \nabla_\sigma \pi \nabla_\rho \nabla^\rho \pi F_{4X} + 4 \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi F_{4X} \right] - \\
&- 2 \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\rho \pi \nabla^\rho \pi F_4 - \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \nabla_\rho \pi \nabla^\rho \pi \left[8 F_4 + 8 \nabla^\lambda \pi \nabla_\lambda \pi F_{4X} \right], \\
\Psi^{(3)\mu\nu\lambda\rho} &= -\nabla^\mu \pi \nabla^\lambda \pi \nabla^\nu \nabla^\rho \pi \left(8 F_4 + 4 \nabla^\sigma \pi \nabla_\sigma \pi F_{4X} \right), \\
\Psi_{\rho\nu}^{(6)} &= -2 \nabla_\nu \pi \nabla_\rho \pi \nabla^\lambda \pi \nabla_\lambda \pi F_4, \\
\Psi_{\rho\mu}^{(7)} &= -2 \nabla_\mu \pi \nabla_\rho \pi \nabla^\lambda \pi \nabla_\lambda \pi F_4, \\
\Psi_{\mu\nu\rho\sigma}^{(8)} &= \nabla_\rho \pi \nabla_\sigma \pi \left(2 g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \pi \nabla_\lambda \pi F_4 + 2 \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi F_4 \right).
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Planck Collaboration, P. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. — 2014. — Vol. 571. — A16.
- [2] A. H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23. — p.347.
- [3] A. D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 108. — p.389.
- [4] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — p.1220.
- [5] S. W. Hawking. The Development Of Irregularities In A Single Bubble Inflationary Universe // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 115. — p.295.
- [6] A. A. Starobinsky. Dynamics Of Phase Transition In The New Inflationary Universe Scenario And Generation Of Perturbations // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 117. — p.175.
- [7] A. H. Guth and S. Y. Pi. Fluctuations In The New Inflationary Universe // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49. — p.1110.
- [8] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner. Spontaneous Creation Of Almost Scale - Free Density Perturbations In An Inflationary Universe // Phys. Rev. D. — 1983. — Vol. 28. — p.679.
- [9] A. Borde and A. Vilenkin. Eternal inflation and the initial singularity // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72. — p.3305, arXiv:gr-qc/9312022.

- [10] A. Borde, A. H. Guth, and A. Vilenkin. Inflationary space-times are incomplete in past directions // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — p.151301.
- [11] S. Hawking and G. Ellis. The Large scale structure of space-time // Cambridge University Press. — 1973.
- [12] Planck Collaboration, P. Ade et al. Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation // Astron.Astrophys. — 2014. — Vol. 571. — A22.
- [13] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok. The Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64 — p.123522, arXiv:hep-th/0103239.
- [14] R. Y. Donagi, J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok. Visible Branes with Negative Tension in Heterotic M-Theory // JHEP.. — 2001. — Vol. 041. — p.0111, arXiv:hep-th/0105199.
- [15] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt, and N. Turok. From Big Crunch to Big Bang // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 65. — p.086007, arXiv:hep-th/0108187.
- [16] P. J. Steinhardt and N. Turok. Cosmic Evolution in a Cyclic Universe // Phys.Rev. D. — 2002. — Vol. 65. — p.126003, arXiv:hep-th/0111098.
- [17] J.-L. Lehnert. Ekpyrotic and Cyclic Cosmology // Phys.Rept. — 2008. — Vol. 465. — p.223, arXiv:astro-ph/0806.1245
- [18] E. I. Buchbinder, J. Khoury, and B. A. Ovrut. New Ekpyrotic Cosmology // Phys.Rev. D. — 2007. — Vol. 76. — p.123503, arXiv:hep-th/0702154
- [19] P. Creminelli and L. Senatore. A smooth bouncing cosmology with scale invariant spectrum // JCAP. — 2007. — Vol. 0711. — 010, arXiv:hep-th/0702165.

- [20] M. Lilley and P. Peter. Bouncing alternatives to inflation // *Comptes Rendus Physique*. — 2015. — Vol. 16. — p.1038, arXiv:astro-ph/1503.06578.
- [21] A. M. Levy, A. Ijjas and P. J. Steinhardt. Scale-invariant perturbations in ekpyrotic cosmologies without fine-tuning of initial conditions // *Phys. Rev. D*. — 2015. — Vol. 92. — no.6. — p.063524, arXiv:astro-ph/1506.01011.
- [22] F. Finelli and R. Brandenberger. On the generation of a scale-invariant spectrum of adiabatic fluctuations in cosmological models with a contracting phase // *Phys. Rev. D*. — 2002. — Vol. 65. — p.103522, arXiv:hep-th/0112249.
- [23] R. H. Brandenberger. The Matter Bounce Alternative to Inflationary Cosmology // arXiv:astro-ph/1206.4196.
- [24] M. Novello and S. E. P. Bergliaffa. Bouncing Cosmologies // *Phys. Rept.* — 2008. — Vol. 463. — p.127, arXiv:astro-ph/0802.1634.
- [25] D. Battefeld and P. Peter. A Critical Review of Classical Bouncing Cosmologies // *Phys. Rept.* — 2015. — Vol. 571. — 1, arXiv:astro-ph/1406.2790.
- [26] P. Creminelli, M. A. Luty, A. Nicolis and L. Senatore. Starting the Universe: Stable Violation of the Null Energy Condition and Non-standard Cosmologies // *JHEP*. — 2006. — Vol. 0612. — 080, arXiv:hep-th/0606090.
- [27] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini. Galilean Genesis: An Alternative to inflation // *JCAP*. — 2010. — Vol. 1011. — 021, arXiv:hep-th/1007.0027.
- [28] R. Penrose. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities // *Phys. Rev. Lett.* — 1965. — Vol. 14. — p.57.
- [29] A. A. Starobinsky. On a nonsingular isotropic cosmological model // *Sov. Astron. Lett.* — 1978. — Vol. 4. — p.82-84.

- [30] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov. k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — p.209, arXiv:hep-th/9904075.
- [31] J. Garriga and V. F. Mukhanov. Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — p.219, arXiv:hep-th/9904176.
- [32] M. V. Ostrogradsky. Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres // Mem. Acad. St. Petersburg. — 1850. — Vol. 6. — 385.
- [33] R. P. Woodard. Avoiding Dark Energy with $1/R$ Modifications of Gravity // Lect.Notes Phys. — 2007. — Vol. 720. — p.403, arXiv:astro-ph/0601672.
- [34] H. Motohashi and T. Suyama. Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91. — no.8. — p.085009, arXiv:physics.class-ph/1411.3721 .
- [35] G. W. Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // Int. J. Theor. Phys. — 1974. — Vol. 10. — p.363.
- [36] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — p.1220.
- [37] A. D. Linde. Chaotic Inflation // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 129. — p.177.
- [38] C. Germani, A. Kehagias. New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — p.011302, arXiv:hep-ph/1003.2635.
- [39] C. Germani, A. Kehagias. Cosmological Perturbations in the New Higgs Inflation// JCAP. — 2010. — Vol. 1005. — 019, arXiv:astro-ph/1003.4285.
- [40] C. Germani, A. Kehagias. UV-Protected Inflation // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — p.161302, arXiv:hep-ph/1012.0853.

- [41] A. A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 91. — p.99.
- [42] M. B. Mijic, M. S. Morris, W. -M. Suen. Starobinsky model in Schrödinger description // Phys. Rev. D. — 1986. — Vol. 34. — p.2934.
- [43] D. B. Fairlie, J. Govaerts and A. Morozov. Universal Field Equations with Covariant Solutions // Nucl. Phys. B. — 1992. — Vol. 373. — p.214, arXiv:hep-th/9110022.
- [44] D. B. Fairlie and J. Govaerts. Universal Field Equations with Reparametrisation Invariance // Phys. Lett. B. — 1992. — Vol. 281. — p.49, arXiv:hep-th/9202056.
- [45] D. B. Fairlie and J. Govaerts. Euler Hierarchies and Universal Equations // J. Math. Phys. — 1992. — Vol. 33. — p.3543, arXiv:hep-th/9204074.
- [46] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati. 4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space // Phys. Lett. B. — 2000. — Vol. 485. — p.208, arXiv:hep-th/0005016.
- [47] M. A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi. Strong Interactions and Stability in the DGP Model // JHEP. — 2003. — Vol. 309. — 029, arXiv:hep-th/0303116.
- [48] A. Nicolis and R. Rattazzi. Classical and Quantum Consistency of the DGP Model // JHEP. — 2004. — Vol. 0406. — p.059, arXiv:hep-th/0404159.
- [49] E. Babichev, C. Deffayet and R. Ziour. k-Mouflage gravity // Int. J. Mod. Phys. D. — 2009. — Vol. 18. — p.2147, arXiv:hep-th/0905.2943.
- [50] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman. Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding // JCAP. — 2010. — Vol. 1010. — 026, arXiv:hep-th/1008.0048.

- [51] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. 'i. Yokoyama. G-inflation: inflation driven by the Galileon field // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — p.231302, arXiv:hep-th/1008.0603.
- [52] O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman. The Imperfect Fluid behind Kinetic Gravity Braiding // JHEP. — 2011. — Vol. 1111. — p.156, arXiv:hep-th/1103.5360.
- [53] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini. The galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. D. — 2009. — Vo. 79. — p.064036, arXiv:hep-th/0811.2197.
- [54] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman. Covariant Galileon // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — p.084003.
- [55] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade. From k-essence to generalised Galileons // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84. — p.064039, arXiv:hep-th/1103.3260.
- [56] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese. Arbitrary p -form Galileons // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 82. — p.061501, arXiv:gr-qc/1007.5278.
- [57] C. de Rham and A. J. Tolley. DBI and the Galileon reunited // JCAP. — 2010. — Vol. 1005. — 015, arXiv:hep-th/1003.5917.
- [58] G. Goon, K. Hinterbichler and M. Trodden. General Embedded Brane Effective Field Theories // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — p.231102, arXiv:hep-th/1103.6029.
- [59] G. Goon, K. Hinterbichler and M. Trodden. Symmetries for Galileons and DBI scalars on curved space // JCAP — 2011 — Vol. 1107 — 017, arXiv:hep-th/1103.5745.

- [60] K. Kamada, T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. 'i. Yokoyama. Higgs G-inflation // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 83. — p.083515, arXiv:astro-ph/1012.4238.
- [61] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations // Prog. Theor. Phys. — 2011. — Vol. 126. — p.511, arXiv:hep-th/1105.5723.
- [62] A. Padilla and V. Sivanesan. Covariant multi-galileons and their generalisation // JHEP. — 2013. — Vol. 1304. — 032, arXiv:gr-qc/1210.4026.
- [63] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and D. A. Steer. Counting the degrees of freedom of generalized Galileons // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92. — p.084013, arXiv:gr-qc/1506.01974.
- [64] A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis and R. Rattazzi. Causality, Analyticity and an IR Obstruction to UV Completion // JHEP. — 2006. — Vol. 0610. — 014, arXiv:hep-th/0602178.
- [65] C. de Rham, M. Fasiello and A. J. Tolley. Galileon Duality // Phys. Lett. B. — 2014. — Vol. 733. — pp.46-51, arXiv:hep-th/1308.2702.
- [66] P. Creminelli, K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Nicolis and E. Trincherini. Subluminal Galilean Genesis // JHEP. — 2013. — Vol. 1302. — 006, arXiv:hep-th/1209.3768.
- [67] K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury and G. E. J. Miller. DBI Realizations of the Pseudo-Conformal Universe and Galilean Genesis Scenarios // JCAP. — 2012. — Vol. 1212. — 030, arXiv:hep-th/1209.5742.
- [68] K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury and G. E. J. Miller. Dirac-Born-Infeld Genesis: An Improved Violation of the Null Energy Condition // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — no. 24. — p.241303, arXiv:hep-th/1212.3607.

- [69] D. A. Easson, I. Sawicki and A. Vikman. When Matter Matters // JCAP. — 2013. — Vol. 1307. — 014, arXiv:hep-th/1304.3903.
- [70] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama. Galilean Creation of the Inflationary Universe // JCAP. — 2015. — Vol. 1507. — no.07. — 017, arXiv:hep-th/1504.05710.
- [71] S. Nishi and T. Kobayashi. Generalized Galilean Genesis // JCAP. — 2015. — Vol. 1503. — no. 03. — 057, arXiv:hep-th/1501.02553.
- [72] D. Pirtskhalava, L. Santoni, E. Trincherini and P. Uttayarat. Inflation from Minkowski Space // JHEP. — 2014. — Vol. 1412. — p.151, arXiv:hep-th/1410.0882.
- [73] S. Nishi and T. Kobayashi. Reheating and Primordial Gravitational Waves in Generalized Galilean Genesis // JCAP. — 2016. — Vol. 1604. — no. 04. — 018, arXiv:hep-th/1601.06561.
- [74] T. Qiu, J. Evslin, Y. F. Cai, M. Li and X. Zhang. Bouncing Galileon Cosmologies // JCAP. — 2011. — Vol. 1110. — 036, arXiv:hep-th/1108.0593.
- [75] D. A. Easson, I. Sawicki and A. Vikman. G-Bounce // JCAP. — 2011. — Vol. 1111. — 021, arXiv:hep-th/1109.1047.
- [76] M. Osipov and V. Rubakov. Galileon bounce after ekpyrotic contraction // JCAP. — 2013. — Vol. 1311. — 031, arXiv:hep-th/1303.1221.
- [77] Y. F. Cai, D. A. Easson and R. Brandenberger. Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology // JCAP. — 2012. — Vol. 1208. — 020, arXiv:hep-th/1206.2382.
- [78] M. Koehn, J. L. Lehnert and B. A. Ovrut. Cosmological super-bounce // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 90. — no.2. — p.025005, arXiv:hep-th/1310.7577.

- [79] L. Battarra, M. Koehn, J. L. Lehnert and B. A. Ovrut. Cosmological Perturbations Through a Non-Singular Ghost-Condensate/Galileon Bounce // JCAP. — 2014. — Vol. 1407. — 007, arXiv:hep-th/1404.5067.
- [80] T. Qiu and Y. T. Wang. G-Bounce Inflation: Towards Nonsingular Inflation Cosmology with Galileon Field // JHEP. — 2015. — Vol. 1504. — 130, arXiv:astro-ph/1501.03568.
- [81] Y. Wan, T. Qiu, F. P. Huang, Y. F. Cai, H. Li and X. Zhang. Bounce Inflation Cosmology with Standard Model Higgs Boson // JCAP. — 2015. — Vol. 1512. — no.12. — 019, arXiv:gr-qc/1509.08772.
- [82] A. Ijjas and P. J. Steinhardt. Classically stable nonsingular cosmological bounces // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117. — no.12. — p.121304, arXiv:gr-qc/1606.08880.
- [83] V. A. Rubakov. The Null Energy Condition and its violation // Phys. Usp. — 2014 — Vol. 57 — 128 [Usp. Fiz. Nauk. — 2014. — Vol. 184. — no.2. — 137] [arXiv:1401.4024 [hep-th]].
- [84] M. Koehn, J. L. Lehnert and B. Ovrut. Nonsingular bouncing cosmology: Consistency of the effective description // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 93. — no.10. — p.103501, arXiv:hep-th/1512.03807.
- [85] M. Libanov, S. Mironov and V. Rubakov. Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis // JCAP. — 2016. — Vol. 1608. — no.08. — 037, arXiv:hep-th/1605.05992.
- [86] R. Kolevatov and S. Mironov. Cosmological bounces and Lorentzian wormholes in Galileon theories with an extra scalar field // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 94. — no.12. — p.123516, arXiv:hep-th/1607.04099.
- [87] T. Kobayashi. Generic instabilities of nonsingular cosmologies in Horndeski theory: A no-go theorem // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 94. — no.4. — p.043511, arXiv:1606.05831.

- [88] S. Akama and T. Kobayashi. Generalized multi-Galileons, covariantized new terms, and the no-go theorem for non-singular cosmologies // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95. — no.6. — p.064011, arXiv:hep-th/1701.02926.
- [89] A. Ijjas and P. J. Steinhardt. Fully stable cosmological solutions with a non-singular classical bounce // Phys. Lett. B. — 2017. — Vol. 764. — p.289, arXiv:gr-qc/1609.01253.
- [90] M. Zumalacregui and J. Garca-Bellido. Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 89. — p.064046, arXiv:gr-qc/1308.4685.
- [91] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi. Healthy theories beyond Horndeski // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114. — no.21. — p.211101, arXiv:hep-th/1404.6495.
- [92] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi. Exploring gravitational theories beyond Horndeski // JCAP. — 2015. — Vol. 1502. — 018, arXiv:astro-ph/1408.1952.
- [93] T. Kobayashi. Horndeski theory and beyond: a review // arXiv:gr-qc/1901.07183.
- [94] X. Gao. Unifying framework for scalar-tensor theories of gravity // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 90. — p.081501, arXiv:gr-qc/1406.0822.
- [95] C. Lin, S. Mukohyama, R. Namba and R. Saitou. Hamiltonian structure of scalar-tensor theories beyond Horndeski // JCAP. — 2014. — Vol. 1410. — no.10. — 071, arXiv:hep-th/1408.0670.
- [96] D. Bettoni and S. Liberati. Disformal invariance of second order scalar-tensor theories: Framing the Horndeski action // Phys. Rev. D. — 2013. — Vol. 88. — p.084020, arXiv:gr-qc/1306.6724.

- [97] G. Domènech, A. Naruko and M. Sasaki. Cosmological disformal invariance // JCAP. — 2015. — Vol. 1510. — no.10. — 067, arXiv:gr-qc/1505.00174.
- [98] S. Tsujikawa. Cosmological disformal transformations to the Einstein frame and gravitational couplings with matter perturbations // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92. — no.6. — p.064047, arXiv:gr-qc/1506.08561.
- [99] G. Domènech, S. Mukohyama, R. Namba, A. Naruko, R. Saitou and Y. Watanabe. Derivative-dependent metric transformation and physical degrees of freedom // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92. — no.8. — p.084027, arXiv:hep-th/1507.05390.
- [100] M. Crisostomi, M. Hull, K. Koyama and G. Tasinato. Horndeski: beyond, or not beyond? // JCAP. — 2016. — Vol. 1603. — no.03. — 038, arXiv:hep-th/1601.04658.
- [101] Y. Cai, Y. Wan, H. G. Li, T. Qiu and Y. S. Piao. The Effective Field Theory of nonsingular cosmology // JHEP. — 2017. — Vol. 1701. — 090, arXiv:gr-qc/1610.03400.
- [102] P. Creminelli, D. Pirtskhalava, L. Santoni and E. Trincherini. Stability of Geodesically Complete Cosmologies // JCAP. — 2016. — Vol. 1611. — no.11. — 047, arXiv:hep-th/1610.04207.
- [103] R. Kolevaton, S. Mironov, N. Sukhov and V. Volkova. Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski // JCAP. — 2017. — Vol. 1708. — no.08. — 038, arXiv:hep-th/1705.06626.
- [104] R. Kolevaton, S. Mironov, V. Rubakov, N. Sukhov and V. Volkova. Cosmological bounce in Horndeski theory and beyond // EPJ Web Conf. — 2018. — Vol. 191. — p.07013.
- [105] Y. Cai and Y. S. Piao. A covariant Lagrangian for stable nonsingular bounce // JHEP. — 2017. — Vol. 1709. — 027, arXiv:gr-qc/1705.03401.

- [106] S. Mironov, V. Rubakov and V. Volkova. Bounce beyond Horndeski with GR asymptotics and γ -crossing // JCAP. — 2018. — Vol. 1810. — no.10. — 050, arXiv:hep-th/1807.08361.
- [107] R. Kolevatov, S. Mironov, V. Rubakov, N. Sukhov and V. Volkova. Perturbations in generalized Galileon theories // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96. — no.12. — p.125012, arXiv:hep-th/1708.04262.
- [108] S. Mironov and V. Volkova. Properties of perturbations in beyond Horndeski theories // Int. J. Mod. Phys. A. — 2018. — Vol. 33. — no.27. — p.1850155, arXiv:hep-th/1712.09909.
- [109] Y. Ageeva, O. Evseev, O. Melichev and V. Rubakov. Horndeski Genesis: strong coupling and absence thereof // EPJ Web Conf. — 2018. — Vol. 191. — p.07010, arXiv:hep-th/1810.00465.
- [110] A. Ijjas. Space-time slicing in Horndeski theories and its implications for non-singular bouncing solutions // JCAP. — 2018. — Vol. 1802. — no.02. — 007, arXiv:gr-qc/1710.05990.
- [111] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama. G-inflation: Inflation driven by the Galileon field // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — p.231302, arXiv:hep-th/1008.0603.
- [112] V. A. Rubakov. More about wormholes in generalized Galileon theories // Theor. Math. Phys. — 2016. — Vol. 188. — no. 2. — p.1253, arXiv:hep-th/1601.06566.
- [113] O. A. Evseev and O. I. Melichev. Instability of static semiclosed worlds in generalized Galileon theories // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96. — no.2. — p.024030, arXiv:hep-th/1607.01721.