

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Научно-исследовательский вычислительный центр

На правах рукописи

Романов Сергей Юрьевич

**Разработка алгоритмов решения  
прямых и обратных задач томографии  
в скалярных волновых моделях**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2016

## Оглавление

Введение .....	6
Глава 1 Методы и алгоритмы решения задач томографии в моделях, учитывающих дифракционные эффекты. Дифференциальный подход .....	23
1.1 Базовая скалярная волновая модель. Постановка коэффициентной обратной задачи волновой томографии .....	27
1.2 Дифференциальный подход к решению задач волновой томографии, основанный на прямом вычислении производной Фреше функционала невязки.. .....	33
1.3 Численные методы в дифференциальном подходе к решению задач волновой томографии в 2.5D и 3D схемах. ....	42
1.4 Примеры модельных расчетов задач волновой томографии в 2.5D и 3D схемах. ....	48
1.5 Выводы. ....	64
Глава 2. Интегральный подход к решению коэффициентных обратных задач в скалярной волновой модели. ....	66
2.1 Интегральная постановка коэффициентной обратной задачи волновой томографии. ....	67
2.2 Методы и алгоритмы решения нелинейной обратной задачи волновой томографии в интегральной постановке. ....	69
2.2.1 Итерационные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии в интегральной постановке. Сравнение с дифференциальным подходом .....	69
2.2.2 Модельные расчеты обратных задач волновой томографии в интегральной постановке. ....	72
2.3 Линеаризованные модели в задачах волновой диагностики. Задачи с синтезированной апертурой. ....	75
2.3.1 Задача синтеза апертуры в 3D для широкополосного импульса.. .....	77

2.3.1.1	Метод прямого обращения в линеаризованных задачах волновой диагностики. . . . .	79
2.3.1.2	Модельные расчеты в задаче синтезирования апертуры в 3D для широкополосного импульса. . . . .	87
2.3.2	Задача РЛС с синтезированной апертурой для реконструкции изображения поверхности Земли. . . . .	89
2.3.2.1	Принципы синтезирования апертур для узкополосных импульсов зондирования. . . . .	90
2.3.2.2	Результаты реконструкции реальных данных РЛС с синтезированной апертурой. . . . .	97
2.4	Выводы. . . . .	98
Глава 3.	Методы и алгоритмы решения коэффициентных обратных задач волновой томографии в моделях с учетом поглощения . . . . .	100
3.1	Некоторые скалярные волновые модели распространения излучения в неоднородных средах во временной области с учетом поглощения. . . . .	104
3.1.1	Простейшая волновая модель с поглощением, не зависящим от частоты. . . . .	104
3.1.2	Стоксовская модель поглощения, квадратично зависящая от частоты. . . . .	106
3.2	Постановка задачи волновой томографии с поглощением, не зависящим от частоты. Вывод выражений для производной Фреше функционала невязки. . . . .	110
3.3	Постановка и итерационные методы решения задач волновой томографии в стоксовской модели поглощения . . . . .	124
3.4	Численные методы на основе явных разностных схем решения обратных задач волновой томографии с поглощением. . . . .	128
3.5	Численное моделирование по восстановлению функций, описывающих скорость и поглощение в 2.5D и 3D схемах. . . . .	132
3.6	Выводы. . . . .	148
Глава 4.	Математическое моделирование и вычислительный эксперимент в	

прямых и обратных задачах волновой томографии. . . . .	150
4.1 Исследование применимости послойных схем в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии. . . . .	151
4.1.1 Методы аналитического решения трёхмерной задачи рассеяния ультразвукового излучения на неоднородности в виде шара . . . . .	151
4.1.2 Модельная задача реконструкции трёхмерного шара в послойной томографической схеме. . . . .	157
4.2 Исследование влияния плотности в задачах ультразвуковой томографии в медицине. . . . .	162
4.2.1 Постановка и аналитическое решение прямой задачи рассеяния на цилиндре для скалярного уравнения линейной акустики. . . . .	163
4.2.2 Численный эксперимент по решению обратной задачи волновой томографии при слабо меняющейся плотности. . . . .	169
4.3 Сравнение различных томографических схем сбора экспериментальных данных . . . . .	172
4.3.1 Послойные томографические схемы с полными данными. . . . .	172
4.3.2 Послойные томографические схемы на прохождение. . . . .	175
4.3.3 Послойные томографические схемы на отражение. . . . .	176
4.3.4 Исследование томографических схем в 3D . . . . .	180
4.4 Оптимизация параметров медицинских ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы. . . . .	186
4.4.1 Разрешение ультразвукового томографа, длина волны. . . . .	187
4.4.2 Количество источников и приёмников. . . . .	189
4.4.3 Размер сетки, точность регистрации входных данных. . . . .	190
4.5 Выводы. . . . .	197
Глава 5. Суперкомпьютерные технологии в решении коэффициентных обратных задач волновой томографии. . . . .	199
5.1 Применение суперкомпьютеров общего назначения для решения задач волновой томографии в послойных моделях. . . . .	200
5.1.1 Описание комплекса программ решения прямой и обратной	

задачи ультразвуковой томографии для послойных 2.5D моделей на суперкомпьютерах общего назначения. . . . .	200
5.1.2 Особенности организации параллельных вычислений в послойных моделях. . . . .	210
5.1.3 Оптимизация процедуры параллельных вычислений на слое. . . . .	214
5.1.4 Исследование масштабируемости программы 2D волновой томографии. . . . .	215
5.1.5 Оптимизация программ реконструкции 2D изображений в волновой томографии. . . . .	219
5.1.6 Исследование эффективности и производительности программ на процессорах общего назначения. . . . .	225
5.1.7 Тестирование программы в конфигурации, обеспечивающей одновременную работу 20480 процессов. . . . .	229
5.2 Возможности GPU-кластеров для решения обратных задач волновой томографии. . . . .	232
5.2.1 Общее описание комплекса программ решения прямой и обратной 3D задачи ультразвуковой томографии на GPU суперкомпьютерах. . . . .	233
5.2.2 Архитектура и особенности программирования графических процессоров. . . . .	235
5.2.3 Первый уровень распараллеливания вычислений по источникам излучения. . . . .	237
5.2.4 Особенности второго уровня распараллеливание явной разностной схемы для одного источника. . . . .	239
5.2.5 Сравнение вычислительных возможностей кластеров на GPU и на процессорах общего назначения в задачах волновой томографии . . . . .	245
5.3 Выводы. . . . .	246
Заключение . . . . .	248
Список литературы . . . . .	252

**Актуальность темы исследования**

Томографические методы в медицине и промышленности являются в настоящее время очень актуальной темой исследований. Одной из важнейших задач является разработка принципиально новых томографов высокого разрешения, основанных на методах волновой томографии. Новые томографические методы можно использовать в инженерной сейсмике для исследования приповерхностных слоев Земли, в электромагнитном зондировании, в гидроакустике, в неразрушающем контроле промышленных изделий и т.п. Наиболее интересные результаты в ближайшем будущем можно ожидать от применения разрабатываемых ультразвуковых томографов в медицине.

Дифференциальная диагностика заболеваний молочной железы – одна из важнейших медицинских проблем современности. Если в смертности мужчин 1 место занимают сердечно-сосудистые заболевания, то у женщин – онкологические. Среди всех онкологических заболеваний, рак молочной железы является наиболее частой причиной смерти. Хотелось бы, чтобы регулярные обследования позволяли выявить заболевания раком на самой ранней стадии. К сожалению, это не так. Более 40 тысяч женщин России ежегодно заболевают раком молочной железы, при этом доля лиц с поздними стадиями заболевания (III – IV степени) среди первичных больных недопустимо высока и составляет более 40%.

Использование рентгеновских томографов для регулярных обследований недопустимо из-за высокой лучевой нагрузки. Магнитно-резонансные томографы (МРТ) наряду с рентгеновскими позволяют получать изображения с высоким разрешением. МРТ имеют свои ограничения, но они являются более безопасными для пациентов при многократных обследованиях, чем рентгеновские. Одним из недостатков МРТ является их высокая стоимость.

В настоящее время в медицине для регулярных обследований широко используется диагностика стандартными УЗИ аппаратами. УЗИ аппараты

используют линейные массивы трансдюсеров, которые зондируют внутренние органы человека с одного ракурса в узком диапазоне углов [142, 189, 192] и регистрируют только отраженные волны. По этой причине стандартные УЗИ аппараты не могут обладать высоким разрешением и, как правило, не выявляют новообразования, размер которых менее 3-5мм. Для этих целей очень привлекательной является идея использования ультразвуковых томографов. Возможность обследования объекта с разных сторон позволяет надеяться обеспечить диагностику высокого разрешения на ранних стадиях заболевания без ионизирующего излучения. В этой связи, разработка томографических ультразвуковых комплексов для диагностики заболеваний молочной железы является перспективной для современной медицины. Указанные обстоятельства определяют актуальность темы исследования.

### **Степень разработанности темы**

Интенсивные исследования по созданию ультразвуковых томографов проводятся в США [100, 103, 116, 156, 157, 214], Швеции [97], Германии [143, 171, 173, 174], России [19, 128, 130, 177]. Разрабатываются макеты ультразвуковых томографов. На макетах уже получены обнадеживающие результаты [19, 91, 117, 118, 123, 188, 214]. Зарегистрирован ряд патентов, относящихся к ультразвуковой томографии, что говорит об актуальности этой проблемы [35, 90, 104, 106, 115, 146, 147, 197].

Одной из основных проблем, которые необходимо решить для создания ультразвуковых томографов в медицине, является разработка эффективных алгоритмов решения обратных задач в рамках волновых моделей. Настоящая диссертация направлена на решение проблемы разработки и реализации методов, алгоритмов и масштабируемого программного обеспечения для решения нелинейных задач волновой томографии с учетом поглощения на суперкомпьютерах.

В последние годы появилось большое количество научных публикаций в отечественной и, в первую очередь, зарубежной литературе в области волновой

томографии посвященных как методам и алгоритмам, так и численной реализации. Обратные задачи волновой томографии чрезвычайно сложны. С математической точки зрения они относятся к нелинейным, трехмерными, некорректно поставленным обратным задачам.

Для решения обратных задач в волновой томографии используют разные математические модели, в том числе лучевые модели, в которых скоростной разрез восстанавливается по времени прихода волны [117, 118, 125, 126, 140, 141, 144]. Лучевые модели достаточно традиционное направление в томографии. Однако, лучевые модели являются лишь приближениями волновых моделей. В рамках лучевых подходов невозможно описать физические явления, связанные с волновым характером используемого излучения, такие как дифракция волн, рефракция, переотражение, а стало быть, получать высокое качество реконструкции при решении обратных задач.

Волновые процессы в простейшем случае описываются скалярным волновым уравнением – гиперболическим уравнением в частных производных второго порядка. В этом случае обратные задачи волновой томографии можно рассматривать как нелинейные коэффициентные обратные задачи. Коэффициентные обратные задачи как научное направление интенсивно исследовались с конца прошлого столетия [61, 62, 108, 184, 185].

С точки зрения математических методов существуют два основных подхода к решению коэффициентных обратных задач в рамках волновых моделей. Первый подход основан на интегральном представлении и базируется на аппарате функции Грина. Обратные задачи в этом случае можно свести к системе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода [92]. Полученные задачи является некорректно поставленными. Методы решения обратных задач, представляемых интегральными уравнениями, хорошо изучены [201]. Однако реализация численных алгоритмов решения нелинейных задач волновой томографии в интегральном представлении связана с большими вычислительными проблемами, преодолеть которые не под силу даже суперкомпьютерам. Естественным выходом в этом случае является линеаризация



уравнений (приближения Борна, Рытова и т.д. [44, 91, 140, 144, 198, 205]). Понятно, что возможности использования линейных приближений достаточно ограничены [44, 91, 145, 193, 215]. Их можно использовать для получения начальных приближений итерационных процедур решения нелинейных обратных задач.

Альтернативный подход решения задач волновой томографии - решение этих задач в дифференциальном представлении. Важные теоретические результаты в этом подходе получены в работах [99, 108, 167]. В работах Natterer F. предложен «propagation-backpropagation» итерационный алгоритм [165, 168]. Рассмотрены постановки как во временной области, так и в приближении уравнения Гельмгольца. В теоретических работах [99, 100], в рамках дифференциального представления предложен *s-глобальный* метод решения обратных задач для волновых уравнений или уравнения Гельмгольца. В работах [97, 98, 101] развит адаптивный конечно элементный метод, приведены адаптивные алгоритмы и результаты модельных расчетов. В приведенных работах, как правило, основная цель авторов состоит в получении только теоретических результатов, постановки задач содержат те или иные ограничения в методах зондирования и сбора данных, моделях. Численные расчеты проведены в основном для демонстрации принципиальных возможностей предлагаемых методов, как правило, на крупных сетках, не позволяющих получать изображения высокого разрешения.

Наиболее продвинутые прикладные работы в области волновой томографии связаны с разработкой ультразвуковых томографов в медицине. В этих работах проведено тестирование разрабатываемых методов в дифференциальном представлении не только на модельных задачах, но и на макете ультразвукового томографа. В работах [87, 213, 214] используется параболическое приближение уравнения Гельмгольца, которое достаточно хорошо работает лишь при небольших углах рефракции. В рамках параболической модели можно использовать только томографическую схему на прохождение, что приводит к необходимости решать поэтапно две задачи на отражение и на прохождение. В

работах [181, 193] задачи ультразвуковой томографии рассматриваются как в лучевой постановке, так и в рамках волновых моделей для уравнения Гельмгольца. Восстановление скоростного разреза осуществляется в томографической схеме нахождение. Одно из существенных упрощений предлагаемых методов состоит в том, что решение обратной задачи выполняется последовательно в нескольких диапазонах частот. В работе [153] рассмотрена задача реконструкции по экспериментальным данным отраженных волн при электромагнитном зондировании приповерхностных слоев Земли. Показана возможность локализации одиночных объектов и оценки их индекса рефракции. В приложении к сейсмике при решении задачи реконструкции слоев Земли популярен метод миграции и его модификации [215]. В этом методе используются отраженные от границ слоев волны. Поскольку по отраженным данным определение значений скорости проблематично, то, как правило, используется приближенный скоростной разрез, полученный из априорных данных.

В обратных задачах волновой томографии возможны две схемы томографического исследования внутренней структуры 3D объектов. В первом варианте используется послойная схема (схема 2.5D), в которой решаются двумерные обратные задачи на последовательности двумерных сечений 3D объекта, при этом источники и приемники располагаются последовательно в этих сечениях. Во втором варианте источники и приемники расположены на некоторой поверхности окружающей объект и решается трехмерная обратная задача (схема 3D). Томографическая 2.5D схема для 3D объектов является традиционной и теоретически оправданной в рентгеновской томографии, поскольку при сканировании 3D объекта рентгеновским лучом, принадлежащим плоскости, луч в ней и остается.

В волновой томографии с использованием, например, ультразвукового излучения ситуация совсем иная, поскольку эффекты дифракции, рефракции и переотражения являются значимыми. Тем не менее, большая часть работ и разрабатываемых устройств в задачах ультразвуковой томографии делается в

послойной 2.5D схеме [125, 126, 140, 155, 186, 193]. В работах [18, 20, 90, 106, 146] рассматривается кольцевая геометрия системы регистрации. Такая популярность послойного подхода связана с тем, что решение обратных задач в 3D схеме намного более сложная проблема, чем последовательное решение набора двумерных обратных задач в послойном подходе. Сложности в 3D схеме связаны как с построением методов и алгоритмов, так и с огромным объемом вычислений. Существует всего несколько публикаций, в которых сделана попытка решения задач волновой томографии в 3D схеме. В работе [211] обратная задача решается в приближенной параболической модели. В работе [167] решается задача в 3D постановке в приближении уравнения Гельмгольца при зондировании плоскими волнами на сетке небольшого размера. В этих работах в 3D схеме использование маломощных компьютеров позволяет ставить обратные задачи только в упрощенной постановке на небольших сетках.

В реальных задачах волновой томографии существует еще один фактор, который необходимо учитывать в математических моделях, это поглощение. Уровень сигнала из-за поглощения на рассматриваемых в диссертации частотах  $\sim 0.5$  МГц в мягких тканях толщиной 5-10 см уменьшается в несколько раз [134]. Поглощение, присутствует также в задачах сейсмоки, электромагнитного зондирования приповерхностных слоев Земли и т.п.

Как правило, в работах, рассматривающих задачи волновой томографии в моделях с поглощением, единая обратная задача поиска одновременно двух функций характеризующих скорость и поглощение искусственно разбиваются на две подзадачи поиска этих функций по отдельности. С математической точки зрения такой подход не состоятелен, однако широко используется, поскольку существенно упрощает задачу [117, 118]. Авторами предлагаются и другие упрощенные подходы с учетом поглощения: для параболической модели [87, 214], в лучевой постановке с поглощением вдоль лучей [183, 203], для не зависящего от частоты поглощения [181]. В отличие от этих работ в работе [166] для простейшей модели с поглощением, не зависящим от частоты, обратная задача рассмотрена как единая задача поиска одновременно двух функций

скорости и поглощения. На физическом уровне строгости получено выражение для градиента функционала невязки по скорости и поглощению. Численные расчеты в работе не проводились.

Резюмируя обзор работ по задачам волновой томографии, можно сказать, что, как правило, алгоритмы решения не ориентированы на использование высокопроизводительных суперкомпьютеров, что является основной причиной применения приближенных методов и упрощенных моделей. Большое количество публикаций в области волновой томографии говорит о большом внимании к этой проблеме со стороны научного сообщества, которое с нетерпением ждет новых томографических методов исследования и в первую очередь для диагностики рака молочной железы. Указанные обстоятельства определяют относительно высокую степень разработанности темы диссертационной работы.

### **Цели и задачи работы**

Целью диссертации является получение прорывных результатов в разработке и реализации методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения нелинейных 3D задач волновой томографии в моделях, учитывающих как дифракционные эффекты, так и поглощение. Задачами диссертации являются:

1. Выбор математической модели распространения акустических импульсов, учитывающей волновые эффекты и поглощение, проведение постановки задачи волновой томографии.

2. Разработка эффективных методов и алгоритмов решения прямых и обратных задач нелинейной волновой томографии 3D объектов. Исследование и сравнение дифференциального и интегрального подходов для численного решения обратных задач волновой томографии.

3. Разработка численных методов решения прямых и обратных задач волновой томографии с высоким потенциалом распараллеливания на суперкомпьютерах.

4. Создание комплекса программ, ориентированного на масштабируемое функционирование на суперкомпьютерах и небольших кластерах.

5. Проведение математического моделирования для выбора оптимальных параметров, томографических схем и проектирования ультразвуковых томографических комплексов в медицине с разрешением 2-3 мм.

### **Научная новизна работы**

Впервые проведено сравнение вычислительных возможностей интегрального и дифференциального подходов решения задач волновой томографии. Показано, что объем вычислений в дифференциальном подходе на несколько порядков меньше, чем в интегральном. В интегральном подходе даже использование суперкомпьютеров не позволяет на мелкой сетке решать за приемлемое время нелинейную 3D задачу волновой томографии.

Линеаризация в интегральном подходе позволяет значительно сократить объем вычислений, что дало возможность в линеаризованных обратных задачах волновой диагностики в постановке с синтезированной апертурой предложить и обосновать новые эффективные методы обращения и разработать программы решения задач на мелкой сетке.

Основные новые результаты получены в дифференциальном подходе. Впервые разработаны эффективные алгоритмы и численные методы решения прямых и обратных задач волновой томографии для суперкомпьютеров. Впервые в дифференциальном подходе для разных постановок задач нелинейной волновой томографии в моделях, учитывающих волновые эффекты и поглощение, получены точные представления для производной Фреше функционала невязки, доказаны теоремы. Предложены новые методы решения проблемы искусственных граничных условий.

Разработаны комплексы программ для высокопроизводительных суперкомпьютеров общего назначения и для GPU кластеров, что для задач волновой томографии реализуется впервые в мировой практике. Предложена архитектура программ с большим числом независимых параллельных процессов вычислений.

Впервые проведены масштабные модельные расчеты на 20480 ядрах суперкомпьютера по решению обратной задачи в послойной 2.5D схеме для реальных параметров ультразвуковой томографии в медицине. Впервые продемонстрирована возможность численного решения 3D задач волновой томографии на суперкомпьютерах с высоким разрешением и возможностью дифференциальной диагностики в медицине. На модельных расчетах показано, что в качестве начального приближения итерационного процесса решения в ультразвуковой томографии можно использовать константу.

Разработаны новые методы и алгоритмы решения задач волновой томографии в моделях, учитывающих поглощение. Впервые на модельных расчетах показана возможность одновременного определения двух неизвестных функций - скорости и поглощения.

Методами численного моделирования впервые исследована применимость послойных 2.5D схем в решении 3D задач ультразвуковой томографии. Результаты показали появление небольших артефактов в послойных схемах.

Методами вычислительного эксперимента впервые определены оптимальные значения параметров ультразвуковых томографов, проведено исследование и сравнение различных томографических схем, задач с неполными данными, стандартных медицинских УЗИ аппаратов и томографических методов.

### **Методология и методы исследования**

В диссертации в качестве математической модели, описывающей распространение волн в неоднородных средах, было использовано скалярное волновое уравнение. Хотя эта модель является скалярной (а потому упрощенной по отношению к векторным моделям), однако она хорошо описывает волновые явления, такие как дифракция, рефракция, переотражение волн и т. п. и является гораздо более точной по сравнению с лучевыми методами.

Задачи волновой томографии рассмотрены как коэффициентные обратные задачи для волнового уравнения, которые являются нелинейными, трехмерными и

построение методов их решения с высокой точностью является серьезной проблемой.

В диссертации рассмотрены как интегральный подход, связанный с интегральными представлениями функции Грина, так и дифференциальный подход, основанный на решении задач в дифференциальном представлении в виде уравнений в частных производных. Несмотря на некоторые достоинства интегрального подхода, в частности, отсутствие искусственных граничных условий, существенным недостатком этого подхода является большой объем вычислений. Число операций в трехмерном случае растет как  $\sim n^8$ , где  $n$  – размер сетки расчетов вдоль одной координаты. Это приводит к тому, что на мелкой сетке даже использование суперкомпьютеров не позволяет решать за приемлемое время эту нелинейную обратную задачу.

Линеаризованные приближения в интегральном подходе значительно сокращают объем вычислений, тем не менее, эти приближения имеют ограниченные возможности в решении обратных задач для сложных неоднородных сред. Однако в некоторых специальных задачах, рассмотренных в диссертации, позволяют получать неплохие результаты. В диссертации исследованы линеаризованные математические модели и интегральная постановка задачи реконструкции изображений поверхности Земли с помощью РЛС с синтезированной апертурой, проведена реконструкция по реальным данным зондирования со спутника. Рассмотрена также обратная задача в линеаризованной интегральной постановке для широкополосного импульса. Для этой задачи в 3D предложен эффективный метод обращения, позволивший решать задачу на мелкой сетке.

Наиболее значимые результаты в диссертации получены в дифференциальном подходе к решению нелинейных коэффициентных задач волновой томографии для волнового уравнения. Обратная задача ставится как задача минимизации функционала невязки для экспериментальных данных. Центральным моментом построения итерационных алгоритмов решения в рассматриваемом подходе является полученное в работе для разных постановок задач нелинейной волновой

томографии точное представление для производной Фреше функционала невязки, доказаны теоремы. Выражение получено на основе вариационных методов, для вычисления производной Фреше необходимо решать основную и «сопряженную» задачи для уравнений в частных производных. Для минимизации функционала невязки был использован градиентный итерационный метод. Для регуляризации решения некорректно поставленной задачи волновой томографии использовано правило останова итерационного процесса при достижении заданного уровня погрешности. Для численного решения задачи используются явные конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации. Хотя явные схемы и обладают рядом недостатков, тем не менее, при реализации на суперкомпьютерах они наиболее эффективны.

Объем вычислений в дифференциальном подходе на несколько порядков меньше, чем в интегральном, что позволило эффективно решать задачи волновой томографии. В диссертации алгоритмы и численные методы решения прямых и обратных задач волновой томографии разработаны для суперкомпьютеров. Разработанные методы позволяют получать не только изображения внутренней структуры объекта высокого разрешения достаточного для медицины, но и с высокой точностью абсолютные значения скоростного разреза.

Для томографического исследования модельных 3D объектов в диссертации используется как послойная 2.5D схема, так и 3D схема. В вычислительном плане расчеты по 3D схеме являются очень сложной проблемой. Достаточно отметить, что количество точек сетки расчетов во временной 3D модели  $>10^{11}$ , и задача нелинейна. Методами численного моделирования проведено исследование применимости послойных 2.5D схем в решении 3D задач ультразвуковой томографии. Эти исследования связаны с тем, что наличие волновых эффектов не может быть описано в рамках послойной модели и приводит к артефактам при решении обратной задачи. В качестве тестового объекта использовался однородный шар, для которого известно аналитическое решение прямой задачи через ряды по спецфункциям. Обратная задача решалась в 2.5D схеме.



В диссертации разработаны методы и алгоритмы решения задач волновой томографии в моделях, учитывающих поглощение. Рассмотрены несколько моделей, в которых поглощение как не зависит от частоты, так и нелинейно зависит от частоты. Это позволяет выбирать модель более адекватную физическим свойствам среды. Обратная задача решается как задача одновременного определения двух неизвестных функций входящих в уравнение - скорости и поглощения. Проведены модельные расчеты по реконструкции скоростного разреза при вариации плотности в среде.

Методами математического моделирования и вычислительного эксперимента проведены исследования по определению оптимальных значений параметров ультразвуковых томографов с целью повышения разрешающей способности. Проведено сравнение различных томографических схем: на отражение и прохождение, с неполным диапазоном данных. Эти исследования позволяют сравнить возможности широко распространенных стандартных одноракурсных медицинских УЗИ аппаратов и рассмотренных в диссертации томографических методов, в которых объект зондируется с разных сторон, причем регистрируются отраженные и преломленные волны. Реконструируемое томографическими методами изображение является результатом решения обратной задачи с использованием всех полученных данных, что позволяет повысить точность реконструкции по сравнению с УЗИ аппаратами.

В качестве начального приближения итерационного процесса решения в ультразвуковой томографии использовалась константа, равная скорости в окружающей объект среде. Задача решалась для типичных значений параметров ультразвуковой томографии молочной железы с вариацией скорости  $\sim 20\%$  и размером импульса  $\sim 5\text{мм}$ .

Разработанные комплексы программ из-за большого объема вычислений предназначены для высокопроизводительных суперкомпьютеров как на CPU, так и на GPU процессорах. Распараллеливание вычислений проводилось по томографическим слоям, источникам излучения, а также с использованием пространственного разбиения области вычислений на подобласти. Для

межпроцессорного обмена выбран интерфейс MPI. В работе исследован потенциал масштабируемости и эффективность программного обеспечения. Для решения обратной задачи в 2.5D схеме проводилось распараллеливание на 20480 ядрах CPU суперкомпьютера «Ломоносов» СКЦ МГУ.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Разработанные методы и алгоритмы предназначены для разработки принципиально новых томографов, использующих волновые источники излучения. Потенциальными потребителями разработанного программного обеспечения являются в первую очередь разработчики ультразвуковых томографов для диагностики рака груди. Разработанные томографические схемы могут послужить основой в решении конкретных задач сейсмической георазведке, инженерной сейсмике, неразрушающем контроле в промышленности, для контроля сварных швов труб, гидроакустике и т.д.

Программное обеспечение в задаче реконструкции изображения поверхности Земли РЛС с синтезированной апертурой использовалось для обработки больших массивов реальных данных сантиметрового диапазона, полученных с космического аппарата "Алмаз".

Тема волновой томографии исследовалась в рамках **грантов РФФИ**: № 05-01-08068-офи\_а «Разработка методов решения трехмерных задач волновой томографии с использованием параллельных вычислений»; № 12-07-00304-а «Разработка методов решения 3D нелинейных коэффициентных обратных задач волновой томографии с использованием супер-ЭВМ»; № 13-07-00824 «Разработка на суперкомпьютерах петафлопсного уровня высокомасштабируемых методов математического моделирования распространения ультразвуковых волн и диагностики сред с учетом поглощения»; № 14-07-00078 «Разработка алгоритмов решения коэффициентных обратных задач для трехмерных гиперболических уравнений с полным и неполным диапазоном данных на суперкомпьютерах на графических картах», а также **Госконтракта** № 07.514.12.4024 ФЦП Минобрнауки по теме "Создание сверхмасштабируемого программного

обеспечения на петафлопсных суперкомпьютерах для ультразвуковых томографических исследований в медицине", получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618943.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Осуществлена постановка задачи нелинейной волновой томографии как коэффициентной обратной задачи для уравнения гиперболического типа как для послойной 2.5D реконструкции, так и в 3D случае, в рамках моделей, учитывающих как волновые эффекты (дифракции, рефракции и т.п.), так и эффекты поглощения различного типа.

2. Проведен сравнительный анализ двух подходов для численного решения задач волновой томографии. Показано, что дифференциальный подход, основанный на прямом вычислении производной Фреше функционала невязки, является с вычислительной точки зрения наиболее перспективным по сравнению с интегральным подходом, основанном на представлении функции Грина. Предложены эффективные методы решения обратных задач для линейаризованных моделей в интегральном подходе в системах синтеза апертуры.

3. Разработаны эффективные методы и алгоритмы решения прямых и обратных задач нелинейной волновой томографии в послойном 2.5D и 3D случаях. Алгоритмы базируются на возможности прямого вычисления производной Фреше функционала невязки с помощью решения сопряженной задачи. Впервые для разных постановок обратных задач нелинейной волновой томографии в моделях, учитывающих как волновые эффекты, так и эффекты поглощения, получено представление для производной Фреше функционала невязки.

4. Впервые разработаны эффективные итерационные численные методы решения задач волновой томографии на суперкомпьютерах. Разработаны методы определения одновременно двух неизвестных функций, описывающих скорость и поглощение в исследуемой среде.

5. Впервые создан комплекс программ для суперкомпьютеров как на процессорах общего назначения, так и на графических процессорах для решения задач ультразвуковой томографии в медицине. Предложены эффективные схемы распараллеливания вычислений, обеспечивающие высокую эффективность и масштабируемость программ вплоть до нескольких десятков тысяч процессов.

6. С целью определения оптимальных характеристик проектируемых ультразвуковых томографов проведено полномасштабное численное моделирование в 3D задаче волновой томографии. Показано, что требуемое для медицины разрешения  $\sim 2-3$ мм при контрасте по скорости  $< 15-20\%$ , можно получать даже для сравнительно низкого диапазона частот  $\sim 0.3-0.5$ МГц.

### **Степень достоверности результатов**

Достоверность изложенных результатов обуславливается использованием для их получения основных теоретических положений акустики, фундаментальных принципов математического моделирования, строгими аналитическими выкладками и доказательствами, подтверждается сравнением получаемых решений с данными натурального эксперимента, использованием в расчетах экспериментальных данных. Также достоверность подтверждается публикациями в реферируемых журналах с высоким импакт-фактором.

### **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались **на конференциях**: на конференции «Обратные и некорректно поставленные задачи» - доклад «Некоторые обратные задачи акустики и сеймики», Москва, 1995; **на конференциях «Ломоносовские чтения»** (секция вычислительной математики и кибернетики), Москва, МГУ, 2004, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014; на **Всероссийских научных конференциях «Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ»**, **Новороссийск**, доклады: «Разработка методов компьютерной томографии в нелинейном волновом приближении с использованием суперкомпьютеров» - 2006; «Об одной задаче волновой томографии» - 2007;

«Решение обратной задачи диагностики дорог на реконфигурируемой вычислительной системе с применением языка COLAMO» - 2009; на **Международных научных конференциях «Параллельные вычислительные технологии» доклады:** «Обратные задачи диагностики с синтезированной апертурой», Челябинск - 2007; «Об обратной задаче волновой диагностики дорожных покрытий», Н.Новгород - 2009; на XI Всероссийской конференции «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» - доклад «Сравнение подходов в задачах волновой диагностики», Н. Новгород, 2011; на **Международных суперкомпьютерных конференциях "Научный сервис в сети Интернет "**, **Новороссийск, доклады:** «Интегральный и дифференциальный подходы в задачах волновой томографии» - 2011; «Исследование эффективности и масштабируемости программы решения задач ультразвуковой томографии» - 2012; «Решение на суперкомпьютере задач 3D нелинейной волновой томографии со сверхвысоким разрешением» - 2013; «Моделирование на суперкомпьютере в задаче ультразвуковой диагностики с помощью аналитических решений» - 2013; «Моделирование на суперкомпьютере в задачах волновой томографии с учетом поглощения» - 2014; на «Пятом Московском суперкомпьютерном форуме» - доклад «Вычислительная томография и суперкомпьютерные технологии», Москва, 2014 г.; на Международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России» - доклад «Исследование томографических схем низкочастотной ультразвуковой диагностики на суперкомпьютерах», Москва, 2015 г.; **на семинарах:** Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Япония, Токио - 1997; ВНИИ экспериментальной физики, Саров - 2000; НИИ многопроцессорных вычислительных систем имени А.В. Каляева Южного федерального университета, Таганрог - 2007 - 2008 - 2009; «Обратные задачи математической физики», НИВЦ МГУ - 2013; «Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности», НИВЦ МГУ - 2013; «Вычислительная диагностика и обработка изображений», НИВЦ МГУ – 2015; Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, СО РАН, Новосибирск – 2015; кафедры математики физфак

МГУ, 2016.

### **Личный вклад автора**

В диссертацию включены положения и результаты, полученные либо лично автором, либо при его определяющем участии. Личный вклад автора состоит в построении предлагаемых моделей, формулировке и реализации численных методов и алгоритмов решения задач, доказательстве теорем, разработке комплексов программ для суперкомпьютеров, анализе и интерпретации полученных результатов математического моделирования.

### **Публикации по теме диссертации**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 32 печатных изданиях, 17 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, автор имеет 1 авторское свидетельство [35] на компьютерную программу.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 273 страница текста с 98 иллюстрациями и 12 таблицами. Список литературы содержит 215 наименований.

## Глава 1

### Методы и алгоритмы решения задач томографии в моделях, учитывающих дифракционные эффекты. Дифференциальный подход

В настоящее время томографические исследования (рентгеновская, магнитно-резонансная томографии) являются неотъемлемой частью большинства неразрушающих методов диагностики и особенно в медицине. Высокое разрешение рентгеновских и магнитно-резонансных томографов обусловлено простыми, адекватными реальности математическими моделями, высокой точностью входных данных. Трехмерные задачи интерпретации данных сводятся в этом случае к решению набора независимых двумерных линейных задач, которые с успехом решаются на персональном компьютере. Специальное программное обеспечение помогает получить любое сечение восстанавливаемых трехмерных функций, выделить отдельно структуру кровеносных сосудов и т.п. [139].

Значительно более скромные результаты в ультразвуковых, акустических, сейсмических, электромагнитных исследованиях связаны с тем, что даже в простейших моделях скалярного волнового уравнения обратные задачи интерпретации данных приводят к сложным нелинейным задачам. Волновая природа излучения порождает трехмерные нелинейные задачи, которые в силу волновых эффектов, вообще говоря, некорректно представлять как набор двумерных задач.

Еще более сложной является задача интерпретации данных акустических, сейсмических и ультразвуковых экспериментов в эластичных средах, в которых, как известно, распространяется не одна волна (скалярный случай), а несколько (продольная, поперечная, поверхностная) [158, 163]. В этом случае, формально необходимо использовать тензорные модели [60]. Однако, и в этом случае, если скорости распространения продольной и поперечной волн разнятся, при достаточно больших глубинах залегания неоднородностей приход поперечной и

продольной волны можно разделить, что дает основания и здесь использовать скалярное волновое уравнение.

Математическим проблемам решения обратных задач волновой томографии посвящено большое количество публикаций. Первые работы в этой области, в которых задачи рассматриваются как коэффициентные обратные задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа были опубликованы еще в начале 70-х годов [61, 62, 108]. Классические проблемы исследованы в работах [72, 112, 184, 185].

Разрабатывались прямые методы решения обратной задачи, такие как метод Гельфанда-Левитана-Крейна [17, 149] и другие методы [56]. Метод граничного управления (BC –метод) в обратных задачах волновой томографии предложен в работе [16], его версия предложена в работе [178]. Оптимизационные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений рассмотрены в работах [99, 148, 170, 172]. Обратные коэффициентные задачи в интегральных представлениях функции Грина рассмотрены в публикациях [32, 38, 42, 44, 68, 92].

Традиционным томографическим методом исследования трехмерных объектов в волновой томографии является послойная 2.5D схема. В работах [125, 126] обратная задача рассматривается в 2D варианте с кольцевой геометрией системы регистрации. Звуковая скорость восстанавливается по измеренной задержке сигнала в лучевом приближении. В работе [140] в послойном варианте исследуется обратная задача томографической реконструкции на прохождение. В работе [130] разработаны эффективные методы решения задач ультразвуковой томографии как коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в послойном варианте.

К сожалению, в послойной схеме в рамках одного двумерного слоя невозможно учесть трехмерные эффекты рефракции, дифракции, переотражения. В послойной модели наличие волновых эффектов может исказить форму неоднородности, приводить к артефактам. Решение обратных задач непосредственно в 3D схеме не имеет перечисленных выше проблем. В 3D схеме



эти эффекты учитываются автоматически. Таким образом, с физической точки зрения, решение обратных задач волновой томографии непосредственно в 3D варианте со всех позиций является более предпочтительным по сравнению с послойными моделями.

Возникает вопрос – с чем связана такая популярность послойной 2.5D схемы в публикациях? Дело в том, что решение трехмерных задач как коэффициентных обратных задач – это намного более сложная проблема, чем решение двумерных обратных задач в послойной модели. Для обеспечения высокого разрешения необходимо решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке (не менее 400 точек сетки по каждой из координат). Достаточно отметить, что количество неизвестных непосредственно в 3D схеме в этом случае составляет  $\sim 10^8$ , а количество точек расчетной сетки  $\sim 10^{11}$ . С таким количеством неизвестных нужно решить сложную нелинейную обратную задачу.

Существует всего небольшое количество публикаций, в которых сделана попытка решения коэффициентных обратных задач в реально трехмерном варианте. В работе [100] рассматривается трехмерная обратная коэффициентная задача, в которой трехмерный объект облучается электромагнитным излучением. Отраженная электромагнитная волна регистрируется с той же стороны, где расположен источник. Возможности реконструкции в этом случае ограничены из-за ограниченности диапазона углов. В этом смысле в задачах ультразвуковой томографии применительно к диагностике рака молочной железы ситуация намного лучше, поскольку диагностируемый объект можно обследовать с разных сторон. Невозможно зондировать объект только с одной стороны (со стороны груди).

В работах [87, 214] трехмерная обратная задача ультразвуковой томографии решается поэтапно. В приближении параболического уравнения на первом этапе обратная задача решается на прохождение. Поскольку параболическое приближение позволяет учитывать дифракцию, рефракцию лишь для малых углов отклонения, обратная задача на первом этапе решается по данным, зарегистрированным с противоположной стороны от объекта по отношению к

источнику. Отраженные данные используются на втором этапе алгоритма. Зондирование выполняется для нескольких частот. В работе [167] решается обратная задача 3D ультразвуковой томографии в приближении уравнения Гельмгольца. Объект облучается плоскими ультразвуковыми волнами некоторой частоты с разных сторон. Проведенные численные расчеты на сетке  $65 \times 65 \times 65$  точек не позволяют получать изображения высокого разрешения. В работе [177] обратная задача 3D ультразвуковой томографии решается ВС – методом на низкой частоте 60 КГц, что приводит к сильному «размазыванию» реконструированного изображения. Хотя теоретически ВС – метод достаточно развит, однако мало апробирован численно.

Прорывные результаты в области решения коэффициентных обратных задач ультразвуковой томографии связаны с возможностью выписать точно выражение для градиента функционала невязки через решение сопряженной задачи. В различных подходах это направление представлено в работах [40, 41, 100, 108, 130, 165]. Умея вычислять градиент функционала невязки можно строить эффективные алгоритмы приближенного решения как в 2.5D, так и в 3D схемах. Одним из достижений диссертации является демонстрация того, что все возникающие трудности на пути численной реализации алгоритмов можно преодолеть не только в 2.5D, но и в 3D схеме, в том числе с помощью использования суперкомпьютерных технологий.

Целью настоящей главы 1 является постановка задач волновой томографии как коэффициентных обратных задач в рамках волновых моделей, разработка в рамках дифференциального подхода новых эффективных методов, алгоритмов для решения обратных коэффициентных задач для волнового уравнения в 2.5D и в 3D схемах. Методы решения базируются на возможности прямого вычисления градиента функционала невязки на основе решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения в прямом и обратном времени. Впервые для предложенной постановки обратных задач нелинейной волновой томографии, получено представление для производной Фреше функционала невязки. Впервые программное обеспечение в этих задачах разрабатывается для современных

суперкомпьютеров. Впервые приведены результаты полноценных модельных расчетов в 2.5D и в 3D схемах волновой томографии на суперкомпьютере.

Типичной проблемой в построении итерационных алгоритмов приближенного решения задач ультразвуковой томографии является проблема выбора начального приближения. В качестве начального приближения можно использовать решения линеаризованных приближений Борна, Рытова [92]. Но наиболее естественным начальным приближением в итерационных процессах в задачах ультразвуковой томографии является приближение  $v_0 = \text{const}$ . Именно с этого приближения стартуют итерационные процессы в приведенных модельных задачах. Выбор такого начального приближения является вполне оправданным, поскольку скорость распространения звука как в здоровых тканях, так и в новообразованиях лежит в пределах  $\pm 15\%$  от скорости распространения звука в воде.

Настоящая работа ориентирована в первую очередь на исследование ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики заболеваний раком молочной железы. Однако результаты могут быть полезны и в задачах сейсмологии, инженерной сейсмологии, акустической диагностики, неразрушающего контроля в промышленности, радиолокации, гидроакустики, ультразвуковой диагностики в медицине [10 - 12, 15, 21, 22, 27, 29 - 31, 50, 53, 59, 71, 81, 105].

## 1.1 Базовая скалярная волновая модель.

### Постановка коэффициентной обратной задачи волновой томографии

Распространение акустического или электромагнитного излучения в неоднородной среде в простейшем волновом приближении описывается следующей известной скалярной волновой моделью гиперболического типа:

$$\Delta u(r, q, t) - \frac{1}{v^2(r)} \cdot u_{tt}(r, q, t) = \delta(r - q)g(t), \quad (1.1)$$

где  $u(r, q, t)$  - скалярная волновая функция в среде, зависящая от пространственной переменной  $r \in R^3$  и времени  $t \geq 0$ ,  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $v(r)$  -

скорость распространения излучения,  $\delta(r-q)g(t)$  - описывает возмущение среды точечным источником, располагающимся в точке  $q \in R^3$ ,  $\delta(\cdot)$  - дельта функция Дирака. Начальные условия имеют вид  $u(r, q, t)|_{t=0} = 0$ ;  $u_t(r, q, t)|_{t=0} = 0$ .



Рисунок 1.1 Схема эксперимента

Рассмотрим следующую хорошо известную общую постановку обратной задачи (рисунок 1.1). Пусть неоднородность среды локализована в области  $R$ . Предположим, что источники волн (положение которых характеризуется координатой  $q$ ) располагаются в области  $Q$  ( $q \in Q$ ), а измерения поля  $u(r, q, t)$  доступны только в области  $P$  ( $r \in P$ ). Область  $R$  не имеет общих точек с областями  $Q$  и  $P$ , в то время как  $Q$  и  $P$  могут пересекаться или совпадать. Будем предполагать, что  $v(r)$  - гладкая функция, отличающаяся от известной константы  $v_0$  только в пределах области  $R$  ( $0 < v_1 < v(r) < v_2$ ). Функция  $g(t)$ , описывающая возмущение, известна априори. В обратной задаче мы должны определить неизвестную функцию  $v(r)$  при  $r \in R$ , используя экспериментальные данные  $u(r, q, t)$ , полученные при  $r \in P$ . Рассмотренная обратная задача является нелинейной, т.к. функция  $u(r, q, t)$  при  $r \notin P$  - не известна.

Полученные в настоящем главе результаты базируются на фундаментальных работах Ладыженской [63, 64]. В этих работах получены исчерпывающие теоремы о существовании и единственности решения для гиперболических уравнений в частных производных. Применительно к рассматриваемой в настоящей главе задаче эти теоремы формулируются следующим образом.

**Теорема 1.1** [63]. Пусть в области  $Q = \Omega \times (0, T)$ , где  $\Omega$  - ограниченная область в  $R^N$  ( $N=2,3$ ) и  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $u(r, t)$  удовлетворяет требованиям:

$$u_{tt}(r,t) - \sum_{i=1}^N \partial_i(a(r)) \partial_i u(r,t) + \left[ \sum_{i=1}^N \partial_i(a(r)) \partial_i u(r,t) \right] + b(r) \partial_t u(r,t) = f(r,t),$$

$$u(r,t=0) = \varphi(r) \quad u_t(r,t=0) = \psi(r), \quad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0.$$

Пусть  $f \in L_{2,1}(Q)$ ,  $f_t \in L_{2,1}(Q)$   $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}_2^1(\Omega)$ ,  $\psi \in \overset{o}{W}_2^1(\Omega)$ , коэффициент  $a(r)$  имеет обобщенные производные и

$$0 < \nu \leq a(r) \leq \mu, \quad \max_{\Omega} |\partial_i a(r), b(r)| \leq \mu_1.$$

Тогда существует единственное решение рассматриваемой задачи, принадлежащее  $W_2^2(Q)$  и выполняются неравенства

$$\|u\|_{2,Q}^{(1)} \leq m(T) (\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,1,Q}),$$

$$\|u\|_{2,Q}^{(2)} \leq m(T) (\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(2)} + \|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,1,Q} + \|f_t\|_{2,1,Q}).$$

Здесь  $W_2^q(\Omega)$  - Соболевское пространство функций, имеющих обобщенные производные до порядка  $q$  из пространства  $L_2(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(q)}$  - норма в пространстве  $W_2^q(\Omega)$ ,  $\overset{o}{W}_2^1(\Omega)$  - пространство функций из пространства Соболева  $W_2^1(\Omega)$ , имеющих нулевые граничные условия, пространство  $L_{q,r}(Q_T)$  состоит из всех элементов

$$L_1(Q) \text{ с конечной нормой } \|u\|_{q,r,Q} = \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}.$$

**Теорема 1.2** [64]. Пусть коэффициенты уравнения

$$u_{tt}(r,t) - a(r) \Delta u(r,t) + b(r) u_t(r,t) = f(r,t)$$

имеют непрерывные производные по  $r$  до порядка  $k-1$  ( $k \geq 3$ ) в цилиндре  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ,

$0 < \nu \leq a(r)$ , свободный член  $f(r,t)$  принадлежит классу  $W_2^{k-1}(Q)$ , а граница области

$\Omega$  непрерывно-дифференцируема  $k+1$  раз. Пусть, далее  $\frac{\partial^s f}{\partial t^s} |_{t=0} = 0$  на всей

области  $\Omega$   $s=0, \dots, k-2$ . Тогда обобщенное решение  $u(r,t)$  смешанной задачи для рассматриваемого уравнения при нулевых начальных и граничных условиях

существует, единственно и принадлежит пространству  $W_2^k(Q)$  и, следовательно, является решением почти всюду. Для решения  $u(r, t)$  справедливо неравенство

$$\|u\|_{2,Q}^{(k)} \leq m(T) \|f\|_{2,Q}^{(k-1)}.$$

Как отмечено в работах Ладыженской [63, 64] (и это нетрудно проверить), эти теоремы справедливы, если граничные условия Дирихле заменить на условия Неймана  $\partial_n u / \partial \Omega \times (0, T) = 0$ .

Перейдем к строгим математическим формулировкам. Рассмотрим прямую задачу Коши в  $R^N$  ( $N = 2, 3$ )

$$c(r)\bar{u}_t(r, t) - \Delta \bar{u}(r, t) = f(r, t), \quad \bar{u}(r, t=0) = \bar{u}_t(r, t=0) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $c^{-0.5}(r) = v(r)$  - является скоростью волны в среде,  $r \in R^N$  - положение точки в пространстве,  $f(r, t)$  - функция плотности внешней силы для некоторого положения источника, возмущающего среду. Пусть  $\Omega \subset R^N$  - выпуклая ограниченная односвязная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ . Обозначим через  $\Omega_\varepsilon$  все точки  $\Omega$ , отстоящие от границы  $\partial\Omega$  на расстояние большее  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  - фиксированная величина.

Будем считать, что  $c(r) \in C^2(R^N)$ ,  $0 < v \leq c(r) \leq \mu$ ,  $c(r) = c_0 = const$  вне области  $\Omega_\varepsilon$ . Свободный член  $f(r, t)$  в области  $R^N \times (0, T)$  (для некоторого конечного  $T$ ) равен 0 вне области носителя  $\bar{\Omega}_1 \times (0, T)$ , где  $\bar{\Omega}_1 \subset R^N$  - замыкание ограниченной области  $\Omega_1$ .  $\bar{\Omega}_1$  не пересекается с областью  $\bar{\Omega}$ , замыканием области  $\Omega$ . Кроме того, пусть  $f(r, t) \in W_2^2(\Theta_1 \times (0, T))$  для любой содержащей  $\bar{\Omega}_1$  ограниченной области  $\Theta_1$  с гладкой границей, и  $f(r, t) \equiv 0$  при  $0 < t < \tau$ , для некоторого малого  $0 < \tau$ .  $C^q(\Omega)$  - пространство  $q$  раз непрерывно-дифференцируемых функций в области  $\Omega$ .

Используя теорему 1.2, можно в этих предположениях показать, что существует функция  $\bar{u}(r, t)$ , для которой на  $R^N \times (0, T)$  выполняются соотношения (1.2), причем  $\bar{u}(r, t) \in W_2^3(\Theta_1 \times (0, T))$ , для любой достаточно большой ограниченной области  $\Theta_1 \subset R^N$  с гладкой границей, такой что  $\Omega \subset \Theta_1$  и  $\Omega_1 \subset \Theta_1$ . Это следует,

например, из существования  $\bar{u}(r,t) \in W_2^3(\Pi)$  из теоремы 1.2 при  $k=3$  для области  $\Pi = \Theta \times (0, T)$ , где область  $\Theta \subset R^N$  выпуклая ограниченная односвязная область с границей  $\partial\Theta \in C^4$ . Причем  $\Theta$  такая, что  $\Omega \subset \Theta$  и  $\Omega_1 \subset \Theta$  и настолько большая, что возмущение от источника в области  $\bar{\Omega}_1$  за время  $T$  не успеет дойти до границы  $\Theta$ . В области  $[R^N / \Theta] \times (0, T)$   $\bar{u}(r,t)$  продолжаем нулем.

В частности, существует функция  $U(r,t) = \bar{u}(r,t)$ ,  $r \in \Gamma_\delta$  и  $U(r,t) \in L_2(\Gamma_\delta)$ . Здесь  $\Gamma_\delta = (\partial\Omega)_\delta \times (0, T)$  и  $(\partial\Omega)_\delta$  -  $\delta$ - окрестность быть может только части границы  $\partial\Omega$ , причем будем считать, что, если функция интегрируема на  $\Pi = \Theta \times (0, T)$ , то ее ограничение на  $\Gamma_\delta$  также интегрируемо.

Перейдем к обратной задаче. Существуют различные постановки коэффициентных обратных задач для уравнений в частных производных гиперболического типа [99, 170]. Конкретизируем постановку обратной задачи, которая будет использоваться в настоящей главе 1. Обратная задача состоит в нахождении описывающей неоднородность функции  $c(r)$  в области  $\Omega$ , по экспериментальным данным «измерения» волны  $U(r,t) = \bar{u}(r,t)$ ,  $(r,t) \in \Gamma_\delta$  в малой окрестности части границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  за время  $(0, T)$  при различных положениях источника.

Математически обратная задача ставится следующим образом. Рассмотрим волновое уравнение, которое описывает акустическое поле  $u(r,t)$  в области  $\Theta \times (0, T) = \Pi$

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = f(r,t). \quad (1.3)$$

Кроме того, положим, что  $u(r,t)$  - удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u(r,t)|_\Psi = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\partial_n u(r,t)|_\Psi$  - производная вдоль нормали к гладкой поверхности  $\partial\Theta \in C^4$ ,  $\partial\Theta \times (0, T) = \Psi$ . Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями

скорости  $c^{-0.5}(r) = v(r)$ ,  $c(r) \in C^2(\mathbb{R}^N)$  - гладкая функция, а вне области неоднородности  $\Omega_\varepsilon$   $c(r) \equiv c_0 = const$ , где  $c_0$  - известна.

Пусть «измеренная» функция  $U(r, t) \in L_2(\Gamma_\delta)$  задана в малой окрестности  $\Gamma_\delta$ , где величина  $\delta > 0$  выбирается достаточно малой. Пусть существует обобщенное решение  $u(r, t) \in W_2^1(\Pi)$  задачи (2)-(3) для любой функции  $c(r) \in Y$ , для некоторого множества функций  $Y$ . (Существование обобщенного решения для любой функции из некоторого множества  $Y$  будет доказано). Введем функционал невязки на  $Y$

$$\Phi(u^j(c)) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \left\| \left( u^j|_{\Gamma_\delta} - U^j \right) z_\delta^{1/2} \right\|_{2, \Gamma_\delta}^2 = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\delta} \left( u^j(r, t)|_{\Gamma_\delta} - U^j(r, t) \right)^2 z_\delta(r, t) dr dt. \quad (1.5)$$

Здесь  $u^j(c)$  - решение задачи (1.3), (1.4) при некоторой  $c(r)$ ; индекс  $j=1, \dots, M$  - отвечает разным положениям источника (в дальнейшем для простоты  $j$  писать не будем);  $\|\cdot\|_{2, \Gamma_\delta}^2$  - квадрат нормы в пространстве  $L_2(\Gamma_\delta)$ ,  $z_\delta(r, t) \in C^\infty(\Pi)$  - сглаживающая функция, введенная для гладкого продолжения функции заданной в области  $\Gamma_\delta$  на всю область  $\Pi$ . Обратная задача ставится как задача поиска функции  $\bar{c}(r) \in Y$ , минимизирующей функционал невязки

$$\bar{c}(r): \min_{c(r) \in Y} \Phi(u(c)) = \Phi(u(\bar{c}))$$

для множества функций  $Y$ . Функция  $z_\delta(r, t) \in C^\infty(\Pi)$ , определенная на области  $\Pi$ , например, имеет вид

$$z_\delta(r, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } (r, t) \in \Gamma_{\delta/2}, \\ 0, & \text{при } (r, t) \in \Pi / \Gamma_\delta, \\ 0 < z_\delta < 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Волновое уравнение (1.2) эффективно описывает волновые эффекты. Эта модель является простейшей, но даже в этой модели решение обратных задач волновой томографии связано с необходимостью решения нелинейных некорректно поставленных задач. Поскольку обратная задача является некорректной, то в функционал (1.5) можно добавить регуляризирующий член, а можно и не делать этого, поскольку используемые для решения итерационные



методы в определенном смысле сами обладают регуляризирующими свойствами [92].

## 1.2 Дифференциальный подход к решению задач волновой томографии, основанный на прямом вычислении производной Фреше функционала невязки

Для минимизации функционала будем использовать итерационные методы [83]. Прорывные результаты в области решения задач волновой томографии связаны с возможностью вычисления производной Фреше функционала  $\Phi(u(c))$ . В разных постановках выражение для производной получены в работах [100, 108, 130, 164, 165]. В диссертации впервые для приведенной выше постановки доказана дифференцируемость по Фреше функционала  $\Phi: c(r) \in Y \rightarrow R^1$ , задаваемого выражением (1.5), на некотором множестве  $Y$  и получено выражение для производной.

Рассмотрим вопрос дифференцируемости по Фреше. Определим нормированное пространство  $Z$ , состоящее из таких элементов  $dc(r) \in C^2(\bar{\Theta})$ , что  $dc(r)=0$  вне области  $\Omega_\varepsilon$ . Здесь как и прежде  $\Omega_\varepsilon$  все точки  $\Omega$ , отстоящие от границы  $\partial\Omega$  на расстояние большее  $\varepsilon > 0$ . Норма в  $Z$  задается как норма  $dc(r)$  в  $C^0(\bar{\Theta})$ .

Возьмем функцию  $c_0(r) = c_0 = const$  при  $r \in \bar{\Theta}$ . Определим множество  $Y \subset C^2(\bar{\Theta})$  на многообразии  $c_0(r) + Z$ , состоящее из таких  $c(r) \in c_0(r) + Z$ , для которых  $0 < c_1 < c(r)$  в  $\bar{\Theta}$  ( $c_1 \leq 1$ ). Таким образом,  $c(r)$  равна константе  $c_0$  вне области  $\Omega_\varepsilon$ .

Назовем  $\rho$ -окрестностью  $O_\rho(c(r))$  функции  $c(r) \in Y$  множество таких функций  $c_\rho(r)$ , для которых  $c(r) - c_\rho(r) = dc(r) \in Z$  и  $\max_{r \in \bar{\Theta}} |c(r) - c_\rho(r)|$  меньше  $\rho$ . Очевидно, для любого  $c(r) \in Y$  существует  $\rho$ -окрестность  $O_\rho(c(r)) \subset Y$  для некоторого  $0 < \rho$ . Это следует из того, что в силу непрерывности  $c(r)$  на  $\bar{\Theta}$  для выбранной  $c(r)$  можно найти  $\rho$ , т.ч.  $0 < c_1 < c(r) - \rho$ , а значит  $c_1 < c_\rho(r)$  и  $c_\rho(r) \in Y$ .

Прежде чем доказывать основные теоремы, предварительно докажем лемму

1.1. Рассмотрим задачу на введенной выше области  $\Pi$

$$c(r)v_{tt} - \Delta v = g(r, t), \quad v(r, t=0) = v_t(r, t=0) = 0, \quad \partial_n v|_{\Psi} = 0. \quad (1.7)$$

**Лемма 1.1** На введенной выше области  $\Theta \subset R^N$  рассмотрим функцию  $c(r)$  такую, что  $c(r) \in C^2(\bar{\Theta})$  причем  $0 < c_1 < c(r)$  в  $\Theta$  ( $c_1 \leq 1$ ) и функции  $g(r, t) \in L_2(\Pi)$ . И пусть существуют решения Задачи (1.7)  $v(r, t) \in W_2^2(\Pi)$  для этих  $c(r)$  и  $g(r, t)$ . Тогда существует число  $E_1$ , не зависящее от  $c(r)$  и  $g(r, t)$ , т.ч. для любого  $c(r)$  и  $g(r, t)$  из условия леммы верна равномерная оценка

$$\|v\|_{2, \Pi}^{(1)} \leq E_1 \|g\|_{2, \Pi} \quad (\|\cdot\|_{2, \Pi}^{(k)} - \text{норма в пространстве } W_2^k(\Pi)).$$

**Доказательство.** Умножим уравнение задачи (1.7) на  $v_t$  и проинтегрируем по  $\Theta \times (0, \tau)$ , где  $\tau \in (0, T]$  мы получим

$$\int_{\Theta} \int_0^{\tau} (c(r)v_{tt}v_t - v_t\Delta v) dr dt = \int_{\Theta} \int_0^{\tau} (v_t g) dr dt. \quad (1.8)$$

Преобразуем каждое слагаемое левой части уравнения (1.8) по отдельности.

$$\text{Имеем} \quad \int_{\Theta} \int_0^{\tau} c(r)v_{tt}v_t dr dt = \frac{1}{2} \int_{\Theta} \int_0^{\tau} c(r)\partial_t((v_t)^2) dr dt = \frac{1}{2} \int_{\Theta} c(r)(v_t(r, \tau))^2 dr, \quad (1.9)$$

т.к.  $v_t(r, 0) = 0$ . А также имеем

$$\int_{\Theta} \int_0^{\tau} v_t\Delta v dr dt = \int_{\partial\Theta} \int_0^{\tau} v_t\partial_n v dr dt - \int_{\Theta} \int_0^{\tau} \nabla v_t \cdot \nabla v dr dt = - \int_{\Theta} \int_0^{\tau} \nabla v_t \cdot \nabla v dr dt,$$

т.к. на  $\partial\Theta$   $\partial_n v = 0$ . Интегрируя в последнем равенстве по  $t$  по частям, имеем

$$\int_{\Theta} \int_0^{\tau} v_t\Delta v dr dt = - \int_{\Theta} \int_0^{\tau} \nabla v_t \cdot \nabla v dr dt = - \int_{\Theta} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr + \int_{\Theta} \int_0^{\tau} \nabla v \cdot \nabla v_t dr dt.$$

Складывая последние два равенства, имеем

$$\int_{\Theta} \int_0^{\tau} v_t\Delta v dr dt = - \frac{1}{2} \int_{\Theta} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr. \quad (1.10)$$

Из неравенства Коши имеем

$$\int_{\Theta} v^2(r, \tau) dr = 2 \int_{\Theta} \int_0^{\tau} v(r, \tau) v_t(r, \tau) dr dt \leq 2 \int_0^{\tau} \|v(t)\|_{2, \Theta} \|v_t(t)\|_{2, \Theta} dt. \quad (1.11)$$

Подставим (1.9), (1.10) в (1.8), получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Theta} c(r) (v_t(r, \tau))^2 dr + \frac{1}{2} \int_{\Theta} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr = \int_{\Theta} \int_0^{\tau} (v_t(r, t) g(r, t)) dr dt$$

Умножим на 2 и добавим (1.11), используя неравенство Коши имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} (v(r, \tau))^2 dr + c_1 \int_{\Theta} (v_t(r, \tau))^2 dr + \int_{\Theta} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr &\leq \\ &\leq 2 \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Theta} \|g(t)\|_{2, \Theta} dt + 2 \int_0^{\tau} \|v(t)\|_{2, \Theta} \|v_t(t)\|_{2, \Theta} dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Обозначим

$$V(\tau) = \int_{\Theta} (v(r, \tau))^2 dr + \int_{\Theta} (v_t(r, \tau))^2 dr + \int_{\Theta} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr = \|v(\tau)\|_{2, \Theta}^2 + \|v_t(\tau)\|_{2, \Theta}^2 + \|\nabla v(\tau)\|_{2, \Theta}^2,$$

тогда выражение слева в (1.12) больше, чем  $c_1 V(\tau)$ , а справа, используя

неравенство  $2xy \leq x^2 + y^2$  и добавляя  $\frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} (\|v(t)\|_{2, \Theta}^2 + 2\|\nabla v(t)\|_{2, \Theta}^2) dt \geq 0$ , сводится к виду

$$\begin{aligned} V(\tau) &\leq \frac{1}{c_1} \left( \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Theta}^2 dt + \int_0^{\tau} \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 dt + \int_0^{\tau} \|v(t)\|_{2, \Theta}^2 dt + \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Theta}^2 dt \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \left\{ \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 + \|v(t)\|_{2, \Theta}^2 + 2\|v_t(t)\|_{2, \Theta}^2 + \|v(t)\|_{2, \Theta}^2 + 2\|\nabla v(t)\|_{2, \Theta}^2 \right\} dt \leq \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 dt + \frac{2}{c_1} \int_0^{\tau} V(t) dt. \end{aligned}$$

Используя лемму Гронуолла [120], имеем

$$V(\tau) \leq \frac{2}{c_1} \int_0^{\tau} V(t) dt + \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 dt \leq \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 dt \left( 1 + \frac{2}{c_1} \tau \exp\left\{ \frac{2}{c_1} \tau \right\} \right).$$

Интегрируя по  $\tau$  на отрезке  $[0, T]$ , имеем

$$\begin{aligned} \left( \|v\|_{2, \Pi}^{(1)} \right)^2 &= \|v\|_{2, \Pi}^2 + \|v_t\|_{2, \Pi}^2 + \|\nabla v\|_{2, \Pi}^2 = \int_0^T \|v(\tau)\|_{2, \Theta}^2 + \|v_t(\tau)\|_{2, \Theta}^2 + \|\nabla v(\tau)\|_{2, \Theta}^2 d\tau \leq \\ &\leq \int_0^T \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 dt \left\{ 1 + \frac{2}{c_1} \tau \exp\left( \frac{2}{c_1} \tau \right) \right\} d\tau \leq \int_0^T \|g(t)\|_{2, \Theta}^2 dt \int_0^T \frac{1}{c_1} \left( 1 + \frac{2}{c_1} \tau \exp\left\{ \frac{2}{c_1} \tau \right\} \right) d\tau \leq \|g\|_{2, \Pi}^2 E. \end{aligned}$$

или  $\|v\|_{2, \Pi}^{(1)} \leq E \|g\|_{2, \Pi}$ . Лемма 1.1 доказана.

**Теорема 1.3** Пусть  $\Theta \subset R^N$ ,  $N = 2, 3$  - выпуклая ограниченная односвязная область, причем граница области  $\partial\Theta \in C^4$ . Рассмотрим задачу (1.3), (1.4), где  $f(r,t) \in W_2^2(\Pi)$ ,  $f(r,t) \equiv 0$  при  $0 < t < \tau$ . Тогда для любой  $c(r) \in Y$  существует и единственное обобщенное решение  $u(r,t,c) \in W_2^1(\Pi)$  задачи (1.3), (1.4), причем это отображение  $D: c \in Y \rightarrow u(r,t,c) \in W_2^1(\Pi)$  дифференцируемо по Фреше для любой  $c(r) \in Y$ , где производная Фреше  $\tilde{u}(r,t,c,dc)$  есть линейный оператор из нормированного пространства  $Z$  в  $W_2^1(\Pi)$ . Кроме того, является дифференцируемым по Фреше и функционал  $\Phi: c \in Y \rightarrow R^1$ , задаваемый выражением (1.5).

**Доказательство.** Докажем существование отображения  $D: c \in Y \rightarrow u(r,t,c) \in W_2^1(\Pi)$ . В силу того, что  $f(r,t) \equiv 0$  при  $0 < t < \tau$ , имеем  $\partial_i^j(f(r,0)) = 0$  ( $j=0,1$ ). Тогда из теоремы 1.2 (с граничными условиями Неймана) следует, что существует единственное решение задачи (1.3), (1.4)  $u(r,t) \in W_2^3(\Pi)$ . Таким образом, в условиях теоремы 1.3 для произвольного  $c \in Y$  существует единственное решение задачи (1.3), (1.4). Это определяет оператор  $D: c \in Y \rightarrow u(r,t,c) := u(c) \in W_2^3(\Pi)$ .

Определим линейный и ограниченный оператор  $\tilde{D}: dc \in Z \rightarrow \tilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(\Pi)$  для произвольного  $c \in Y$  следующим образом. Рассмотрим для  $c$  и  $u(r,t,c)$  следующую задачу в области  $\Pi$

$$c(r)v_{rr} - \Delta v = -u_{rr}(r,t,c)dc(r) \quad (1.13)$$

$$v(r,t=0) = v(r,t=\tau) = 0, \quad \partial_n v|_{\partial\Pi} = 0 \quad (1.14)$$

для произвольного  $dc(r) \in Z$ . Преобразуем уравнение (1.13). Поскольку  $0 < c_1 < c(r)$ , то можно поделить на  $c(r)$   $v_{rr}(r,t) - c^{-1}(r)\Delta v(r,t) = -c^{-1}(r)u_{rr}(r,t,c)dc(r)$ . Для достаточно гладких функций  $c(r)$  и  $v(r,t)$ , как известно, можно записать  $\nabla \cdot (c^{-1}\nabla v) = \nabla(c^{-1})\nabla v + c^{-1}\Delta v$ . Перейдем к эквивалентному уравнению для обобщенного решения, где по условию  $c(r) \in C^2(\bar{\Theta})$

$$v_{tt}(r,t) - \nabla \cdot (c^{-1}(r)\nabla v(r,t)) + \nabla(c^{-1}(r))\nabla v(r,t) = -c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,c)dc(r).$$

Заметим, что  $c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,q)dc(r) \in L_2(\Pi)$  и  $c^{-1}(r)u_{ttt}(r,t,q)dc(r) \in L_2(\Pi)$ . Поскольку  $c(r) \in Y \subset C^2(\bar{\Theta})$  и  $0 < c_1 < c(r)$ , то выполнены условия теоремы 1.1 (с граничными условиями Неймана).

Из этой теоремы 1.1 следует, что существует единственное решение задачи (1.13), (1.14) для произвольного  $dc \in Z$ . Обозначим это решение через  $\tilde{u}(r,t,c,dc)$ . Кроме того,  $\tilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^2(\Pi)$  и выполняется оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(r,t,c,dc)\|_{2,\Pi}^{(2)} &\leq E_2 \left( \|c^{-1}u_{tt}(q)dc\|_{2,\Pi} + \|c^{-1}u_{ttt}(q)dc\|_{2,\Pi} \right) \leq E_2 c_1^{-1} \left( \|u_{tt}(q)\|_{2,\Pi} + \|u_{ttt}(q)\|_{2,\Pi} \right) \|dc\|_C \leq \\ &\leq E_2 c_1^{-1} 4 \|u(c)\|_{2,\Pi}^{(3)} \|dc\|_Z \leq E_3 \|u(c)\|_{2,\Pi}^{(3)} \|dc\|_Z, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где константа  $E_3$ , не зависит от  $dc$ .  $\|\cdot\|_{2,\Pi}^{(k)}$  - норма в пространстве  $W_2^k(\Pi)$ .

Кроме того, поскольку  $c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,q)dc(r)$  линейно зависит от  $dc$ , то и  $\tilde{u}(r,t,c,dc)$  линейно зависит от  $dc$ . Таким образом, определен линейный и ограниченный оператор  $\tilde{D}: dc \in Z \rightarrow \tilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(\Pi)$ .

Покажем, что отображение  $\tilde{D}: dc \in Z \rightarrow \tilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(\Pi)$  является производной Фреше для отображения  $D: c \in Y \rightarrow u(r,t,c) \in W_2^1(\Pi)$  для выбранного  $c \in Y$ . Рассмотрим  $\rho$ -окрестность  $O_\rho(c) \subset Y$  элемента  $c$ . Обозначим через  $u(r,t,c+dc) = u(c+dc)$  решение Задачи (1.3), (1.4) для  $c+dc \in O_\rho(c)$ . Далее, для  $u(c+dc) - u(c) - \tilde{u}(c,dc)$ , используя (1.3), (1.13), можно записать

$$\begin{aligned} (c+dc)u_{tt}(c+dc) - c u_{tt}(c) - c \tilde{u}_{tt}(c,dc) - \Delta u(c+dc) + \Delta u(c) + \Delta \tilde{u}(c,dc) &= dc u_{tt}(c), \\ (c+dc) \partial_{tt}(u(c+dc) - u(c) - \tilde{u}(c,dc)) + dc u_{tt}(c) + dc \tilde{u}_{tt}(c,dc) - \\ - \Delta(u(c+dc) - u(c) - \tilde{u}(c,dc)) &= dc u_{tt}(q). \end{aligned}$$

И окончательно

$$[(c+dc) \partial_{tt} - \Delta](u(c+dc) - u(c) - \tilde{u}(c,dc)) = -dc \tilde{u}_{tt}(c,dc). \quad (1.16)$$

А также из (1.4), (1.14) граничные и начальные условия

$$\begin{aligned} (u(c+dc)-u(c)-\tilde{u}(c,dc))(r,t=0)=0, \quad \partial_t(u(c+dc)-u(c)-\tilde{u}(c,dc))(r,t=0)=0 \\ \partial_n(u(c+dc)-u(c)-\tilde{u}(c,dc))|_{\Psi}=0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, для любого  $c+dc \in O_\rho(c) \subset Y$  функция  $u(c+dc)-u(c)-\tilde{u}(c,dc)$  является решением задачи (1.16), (1.17). Причем, поскольку  $u(c+dc) \in W_2^3(\Pi)$ ,  $u(c) \in W_2^3(\Pi)$  и  $\tilde{u}(c,dc) \in W_2^2(\Pi)$ , то  $(u(c+dc)-u(c)-\tilde{u}(c,dc)) \in W_2^2(\Pi)$  и  $-dc\tilde{u}_t(c,dc) \in L_2(\Pi)$ . Тогда согласно лемме 1 выполняется равномерная оценка для всех  $c+dc \in O_\varepsilon(c)$

$$\begin{aligned} \|(u(c+dc)-u(c)-\tilde{u}(c,dc))\|_{2,\Pi}^{(1)} &\leq E_1 \|dc\tilde{u}_{tt}(c,dc)\|_{2,\Pi} \leq E_1 \|dc\tilde{u}_t(c,dc)\|_{2,\Pi} \leq \\ &\leq E_1 \|dc\|_C \|\tilde{u}(c,dc)\|_{2,\Pi}^{(2)} \leq E_1 E_3 (\|dc\|_C \|u(c)\|_{2,\Pi}^{(3)} \|dc\|_Z) \leq E_4 \|u(c)\|_{2,\Pi}^{(3)} \|dc\|_Z^2, \end{aligned}$$

где использовано неравенство (1.15),  $\|\cdot\|_Z$  - норма в пространстве  $Z$ .

Поскольку последний член имеет второй порядок малости по  $dc$ , то отображение  $D: c \in Y \rightarrow u(r,t,c) \in W_2^1(\Pi)$  дифференцируемо по Фреше для выбранной  $c \in Y$ , а линейный оператор  $\tilde{D}: dc \in Z \rightarrow \tilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(\Pi)$  является его производной.

Докажем дифференцируемость функционала  $\Phi(u^j(c))$  из (1.5) для выбранного  $c \in Y$ , где как и прежде индекс  $j=1, \dots, M$  - отвечает разным положениям источника. Для  $U^j(r,t) \in L_2(\Gamma_\delta)$ , используя теорему о дифференцировании сложной функции, получим дифференцируемость по Фреше  $\Phi(u^j(c))$  и производная имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi'(u^j(c), dc) &= \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_\delta} \left( u^j(c) \Big|_{\Gamma_\delta} - U^j \Big|_{\Gamma_\delta}(t) \left( \left( u^j(c) \Big|_{\Gamma_\delta} \right), dc \right) dr dt = \\ &= \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_\delta} \left( u^j(c) \Big|_{\Gamma_\delta} - U^j \Big|_{\Gamma_\delta}(r,t) \tilde{u}^j(c,dc) \Big|_{\Gamma_\delta} dr dt \end{aligned} \quad (1.18)$$

Теорема 1.3 доказана.

Рассмотрим задачу в области  $\Pi$ , которую назовем «сопряженной» к основной задаче (1.3), (1.4)

$$c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t) = (u(r,t) \Big|_{\Gamma_\delta} - U(r,t)) \Big|_{\Gamma_\delta}(r,t), \quad (1.19)$$

$$w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0, \quad \partial_n w(r,t) \Big|_{\Psi} = 0 \quad (1.20)$$

где  $u$  – есть решение основной задачи (1.3), (1.4),  $U(r,t)$ - экспериментальным данным «измерения» волны  $\bar{u}(r,t)|_{\Gamma_\delta}$  прямой задачи (1.1). Здесь  $z_\delta(r,t) \in C^\infty(\Pi)$  - сглаживающая функция, введенная для гладкого продолжения функции заданной в области  $\Gamma_\delta$  на всю область  $\Pi$  в правой части (1.19). Функция  $z_\delta(r,t)$ , например, имеет описанный выше вид (1.6).

Пусть заданная в окрестности границы  $\Gamma_\delta$  функция  $U(r,t)$  такова, что

$$U(r,t) \in W_2^1(\Gamma_\delta). \quad (1.21)$$

Если  $U(r,t) = \bar{u}(r,t)|_{\Gamma_\delta}$ , где  $\bar{u}(r,t)$  - решение прямой задачи Коши (1.1), то условие гладкости следует из того, что  $\bar{u}(r,t) \in W_2^3(\Pi)$ .

**Теорема 1.4** Пусть выполнены условия теоремы 1.3 и  $U(r,t) \in W_2^1(\Gamma_\delta)$ . Тогда производная Фреше для функционала  $\Phi(u(c)): c \in Y \rightarrow R^1$ , задаваемого выражением (1.5), имеет вид

$$\Phi'(u^j(c), dc) = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_\delta} \left( u^j(c) - U^j \right) z_\delta(r,t) \tilde{u}^j(c, dc) \Big|_{\Gamma_\delta} dr dt = \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left[ \int_0^T w_i^j(r,t) u_i^j(r,t) dt \right] dc(r) dr, \quad (1.22)$$

где  $u^j$  – есть решение основной задачи (1.3), (1.4), а  $w^j$  – есть решение «сопряженной» задачи (1.19), (1.20), для некоторого положения источника  $j$ . Здесь производная Фреше является линейным оператором из нормированного пространства  $Z$  в  $R^1$ .

**Доказательство.** В теореме 1.3 доказано, что функционал  $\Phi(u(c))$  дифференцируем по Фреше и производная имеет вид (1.18). Докажем существование и единственность решения задачи (1.19), (1.20).

Поскольку  $U(r,t) \in W_2^1(\Gamma_\delta)$ ,  $u(r,t,c) \in W_2^3(\Pi)$  и  $z_\delta(r,t) \in C^\infty(\Pi)$  то  $(u(r,t)|_{\Gamma_\delta} - U(r,t))z_\delta(r,t) \in W_2^1(\Pi)$ . Тогда согласно теореме 1.1 существует единственное решение  $w(r,t) \in W_2^2(\Pi)$  задачи (1.19), (1.20).

Рассмотрим следующие соотношения для  $w(r,t) \in W_2^2(\Pi)$  и  $\tilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^2(\Pi)$ , где  $\tilde{u}(r,t,c,dc)$  по переменным  $(r,t)$  является решением задачи (1.13), (1.14) для произвольного  $dc \in Z$ . В этих соотношениях используем формулы (1.6), (1.14), (1.19), (1.20) и правила дифференцирования по частям для пространств  $W_2^2(\Pi)$ , которые следуют, например, из формул (6.21), (6.22) из [63] и теореме о следе [120]. Обозначив  $\tilde{u}(r,t,c,dc)$  через  $\tilde{u}(r,t)$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} (u(r,t)|_{\Gamma\delta} - U(r,t))z_{\delta}(r,t)\tilde{u}(r,t)drdt &= \int_{\Pi} (c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t))\tilde{u}(r,t)drdt = \\ &= \int_{\Theta 0}^T c(r)w_{tt}(r,t)\tilde{u}(r,t)dt dr - \int_{\Theta 0}^T \Delta w(r,t)\tilde{u}(r,t)drdt = \\ &= - \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dt dr - \int_{\Theta 0}^T \int_{\partial\Theta} \partial_n w(s,t)\tilde{u}(s,t)ds dt + \\ &+ \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)drdt = - \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dt dr - 0 + \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)drdt. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} (u(r,t)|_{\Gamma\delta} - U(r,t))z_{\delta}(r,t)\tilde{u}(r,t)drdt &= \int_{\Gamma\delta} (u(r,t)|_{\Gamma\delta} - U(r,t))z_{\delta}(r,t)\tilde{u}(r,t)drdt = \\ &= - \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dt dr + \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)drdt. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Далее, поскольку  $u(r,t) \in W_2^3(\Pi)$ , рассмотрим следующие соотношения, в которых используем формулы (1.4), (1.13) и (1.20)

$$\int_{\Pi} w(r,t)(c(r)\tilde{u}_{tt}(r,t) - \Delta \tilde{u}(r,t))drdt = - \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} w(r,t)u_{tt}(r,t)dc(r)dt dr = \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)dt dr. \quad (1.24)$$

С другой стороны, используя соотношения (1.14) и (1.20) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} w(r,t)(c(r)\tilde{u}_{tt}(r,t) - \Delta \tilde{u}(r,t))drdt &= \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} w(r,t)c(r)\tilde{u}_{tt}(r,t)dt dr - \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} w(r,t)\Delta \tilde{u}(r,t)drdt = \\ &= - \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dt dr - \int_{\Theta 0}^T \int_{\partial\Theta} w(s,t)\partial_n \tilde{u}(s,t)ds dt + \int_{\Theta 0}^T \int_{\Theta} \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)drdt = \end{aligned}$$



$$= - \int_{\Theta_0}^T \int c(r) w_t(r, t) \tilde{u}_t(r, t) dt dr + \int_{\Theta_0}^T \int \nabla w(r, t) \nabla \tilde{u}(r, t) dr dt. \quad (1.25)$$

Из (1.24) и (1.25) получаем

$$\int_{\Theta_0}^T \int w_t(r, t) u_t(r, t) dc(r) dt dr = - \int_{\Theta_0}^T \int c(r) w_t(r, t) \tilde{u}_t(r, t) dt dr + \int_{\Theta_0}^T \int \nabla w(r, t) \nabla \tilde{u}(r, t) dr dt. \quad (1.26)$$

Тогда из (1.18), (1.23) и (1.26) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(u^j(c), dc) &= \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_\delta} \left( u^j(c) \Big|_{\Gamma_\delta} - U^j \right) z_\delta(r, t) \tilde{u}^j(c, dc) \Big|_{\Gamma_\delta} dr dt = \sum_{j=1}^M \int_{\Theta_0}^T \int w_t^j(r, t) u_t^j(r, t) dc(r) dt dr = \\ &= \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left[ \int_0^T w_t^j(r, t) u_t^j(r, t) dt \right] dc(r) dr. \end{aligned}$$

Здесь  $dc(r) = 0$  при  $r \notin \Omega_\varepsilon$ , поскольку  $dc(r) \in Z$ .  $u^j(r, t)$  - есть решение основной задачи (1.3), (1.4), а  $w^j(r, t)$  - есть решение «сопряженной» задачи (1.19), (1.20) при заданном  $c(r)$  для некоторого положения источника  $j$ . Таким образом, производная функционала выражается через решения основной и «сопряженной» задачи. Теорема 1.4 доказана.

**Замечание 1.1.** Вопросам дифференцируемости по Фреше для волнового уравнения в других постановках посвящен ряд работ. В работе [99] дифференцирование рассмотрено в других пространствах функций и с ненулевыми граничными условиями в прямой и сопряженной задаче. В работе [164] для волнового уравнения в движущейся среде доказана дифференцируемость в задаче с другими граничными условиями ( $u=0$ ) и не приведено явное выражение для производной. Доказательство проведено в других пространствах функций, заметим также, что в настоящей диссертации дифференцируемость по Фреше доказана в норме  $C$  (а не  $C^k$ ). В работе [169] на физическом уровне строгости формально получено выражение для градиента для отличающейся постановки задачи, что приводит к иным граничным условиям в сопряженной задаче. В работе [170] также на физическом уровне строгости получено выражение для градиента, однако не приведена строго математическая постановка задачи, не выписаны граничные условия.

**Замечание 1.2.** Используя полученное представление для производной Фреше функционала невязки можно построить эффективные итеративные алгоритмы решения обратных задач ультразвуковой томографии как в двумерном, так и в трехмерном случае [83]. Отметим, что строго говоря, из полученного выражения для производной Фреше (1.22) нельзя использовать градиент для минимизации функционала невязки, поскольку  $c(r) \in C^2(\bar{\Omega})$ , а градиент может не принадлежать пространству  $C^2(\bar{\Omega})$ . Однако для численных расчетов в конечномерных пространствах эта проблема не является принципиальной.

**Замечание 1.3.** Для вычисления производной по Фреше в соответствии с доказанными теоремами необходимо решения прямой (1.3), (1.4) и “сопряженной” (1.19), (1.20) задач с граничными условиями, заданными как отмечалось на границе  $\Psi$ , расположенной достаточно далеко от области  $\Omega$ . Т.е. такой, что за время  $T$  излучение от источников не успевает дойти до границы  $\Psi$ . Тогда нулевые граничные условия задачи (1.3), (1.4) выполняются. При проведении численных расчетов можно либо выбирать достаточно большую область расчетов, либо проводить расчеты в небольшой области, содержащей  $\Omega$  с условиями неотражения на границе. Приближенные методы задания условий неотражения можно найти в работах [54, 86, 119].

### **1.3 Численные методы в дифференциальном подходе к решению задач волновой томографии в 2.5D и 3D схемах**

В обратных задачах волновой томографии возможны две томографические схемы исследования внутренней структуры 3D объектов. В первом варианте используется послойная схема (так называемая схема 2.5D), в которой решаются двумерные обратные задачи на последовательности двумерных сечений 3D объекта, при этом источники и приемники располагаются последовательно в этих сечениях. Во втором варианте источники и приемники расположены на некоторой поверхности окружающей объект и решается трехмерная обратная задача (так называемая схема 3D).

Томографическая 2.5D схема для 3D объектов является традиционной, например, в рентгеновской томографии. В волновой томографии с использованием, например, ультразвукового излучения эффекты дифракции, рефракции и переотражения являются значимыми и решение задачи по слоям не совсем корректно. Тем не менее, большая часть работ по разработке алгоритмов решения обратных задач ультразвуковой томографии делается в послойной 2.5D схеме [18, 20, 90, 106, 125, 126, 140, 146, 155, 186, 193] с кольцевой геометрией системы регистрации. В главе 4 будет рассмотрен вопрос о применимости послойных 2.5D схем для решения трехмерных задач волновой томографии. Популярность послойного подхода в публикациях связана с тем, что решение обратных задач в 3D схеме намного более сложная проблема, чем последовательное решение набора двумерных обратных задач в послойном подходе. Сложности в 3D схеме связаны как с построением методов и алгоритмов, так и с огромным объемом вычислений. Существует всего небольшое количество публикаций, в которых сделана попытка решения обратных задач волновой томографии в 3D схеме в упрощенной постановке на сетках небольшого размера [167, 211].

В настоящем разделе будут разработаны численные методы как в послойной 2.5D схеме решения трехмерных задач волновой томографии, так и в 3D схеме. Заметим, что выражение для градиента полученное в разделе 1.2 справедливо и в  $R^2$ , и в  $R^3$ .

Опишем численные методы в послойной 2.5D схеме для слоев в  $R^2$ . Переход в  $R^3$  не имеет принципиальных сложностей и можно провести по аналогии. Будем считать, что в каждом из сечений процесс распространения ультразвуковой волны описывается уравнением (1.3) в  $R^2$  при фиксированном  $z$ , так что  $r=(x,y)$ . Для вычисления градиента функционала невязки будем использовать формулу (1.22), где  $r \in R^2$ . Аналогично функционал невязки  $\Phi(u(c))$  вычисляется по функции  $u(r,t)$ , где  $r \in R^2$ .

Для решения обратной задачи в каждом из двумерных сечений, будем использовать метод конечных разностей во временной области. В такой

постановке решение волновых дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов введем равномерную дискретную сетку

$$v_{ijk} = \{ (x_i, y_j, t_k) : x_i = ih, \quad 0 \leq i < n; \quad y_j = jh, \quad 0 \leq j < n; \quad t_k = k\tau, \quad 0 \leq k < m \},$$

где  $h$  – шаг сетки по пространственным переменным,  $\tau$  – шаг сетки по времени.

Используем следующие аппроксимации второго порядка точности для производных 2-го порядка в уравнении (1.3)

$$u_{tt}(r, t) = \frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^k + u_{ij}^{k-1}}{\tau^2}, \quad u_{xx}(r, t) = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h^2}.$$

Аналогичная разностная схема используется для  $u_{yy}(r, t)$ . В области, не содержащей источников, получаем явную разностную схему для дифференциального уравнения (1.3) для расчета распространения звуковой волны последовательно по временным слоям (расчет «в прямом времени»)

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{c_{ij}} \tau^2 \Delta u_{ij}^k + 2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}, \quad (1.27)$$

где  $\Delta u_{ij}^k = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h^2} + \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h^2}$  – двумерный дискретный лапласиан в точке  $(i, j)$  в момент времени  $k$  в 2D,  $u_{ij}^k$  – значения  $u(r, t)$  в точке  $(i, j)$  в момент времени  $k$ ,  $c_{ij}$  – значения  $c(r)$  в точке  $(i, j)$ . Параметры  $h$  и  $\tau$  связаны условием устойчивости Куранта  $c^{-0.5} \tau < h/\sqrt{2}$ . В расчетах мы использовал шаг по времени равный  $\tau = 0.3c_0^{-0.5}h$ , что обеспечило стабильность расчетов. Здесь  $c_0^{-0.5}(r)$  – скоростью волны в окружающей однородной среде. Время  $T$  выбирается достаточно большим, так чтобы все основные отражения и переотражения от исследуемого объекта успевали дойти до приемников.

В качестве граничных условий для модельных расчетов в главе 1 выбиралось условие «неотражения» на границе области расчетов в соответствии с замечанием 1.3. В самом простом варианте плоской волны, падающей нормально на границу, условие неотражения, или, что то же самое, “прозрачности” границы, можно записать в виде  $\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5} \partial_t u|_{ST}$  на множестве  $S \times [0, T]$ , где  $S$  – граница области

расчетов  $\Omega$ . В расчетах использовалось приближения второго порядка точности для условия «неотражения», которое позволило значительно сократить отражение от границы при больших углах падения. Это условие на границе имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Существуют более продвинутые варианты условия неотражения границы  $S$  [54, 86, 119].

Расчет сопряженной задачи (1.19), (1.20) для  $w$  выполняется по аналогичным разностным формулам. Решение находится по временным слоям в явной форме. Градиент (1.22) функционала (1.5) для одного положения источника вычислялся по разностной формуле

$$(\text{grad } \Phi)_{ij} = \sum_{k=0}^m \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^k}{\tau} \tau. \quad (1.28)$$

Невязка для одного положения источника вычислялась по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2qm} \sum_{\substack{i, j \in S \\ k=0..m-1}} (u_{ij}^k - U_{ij}^k)^2, \quad (1.29)$$

где  $U_{ij}^k$  — данные, используемые в качестве экспериментальных для решения обратной задачи;  $u_{ij}^k$  — значения  $u$ , полученные при решении прямой задачи в тех точках границы  $S$ , где расположены детекторы,  $q$  — количество детекторов на границе  $S$ ,  $m$  — число шагов по времени.

В модельных расчетах исследуемая область окружена однородной средой, в которой процесс распространения зондирующего импульса хорошо известен, что позволяет вычислить  $u(r, t)$  и  $u_t(r, t)$  при малом  $t$ . Зондирующий импульс задается в некоторый момент времени  $t_1 > 0$  в виде центрально-симметрично распространяющейся волны в среде  $L$  по формуле

$$\begin{cases} u(r, t_1) = \exp(\alpha(r - R_0)) \sin\left(\frac{4\pi(r - R_0)}{v_0 \Theta}\right), & \text{при } R_0 - v_0 \Theta < r < R_0, \\ u(r) = 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.30)$$

где  $r$  - расстояние от текущей точки до источника импульса,  $\Theta$  – длительность импульса по времени,  $v_0$  - скорость волны в среде  $L$ ,  $R_0$  – расстояние от переднего фронта волны до источника импульса,  $\alpha > 0$  - параметр.

На рисунке 1.2 приведен график зондирующего импульса со следующими параметрами  $\alpha = 400.4$ ,  $R_0 = 0.01$  м,  $v_0 = 1500$  м/с;  $\Theta = 0.00000666$  с.

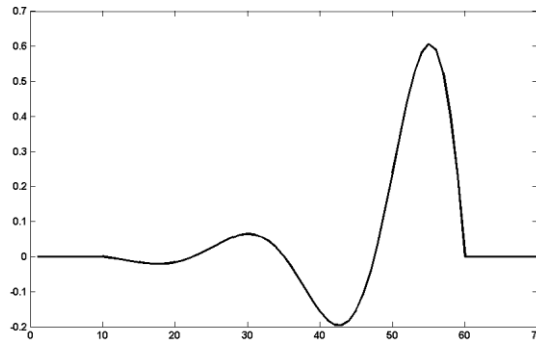


Рисунок 1.2 График зондирующего импульса

Функция  $u(r, t_1)$  имеет компактный носитель, размер которого приблизительно равен двум длинам волн. Реальные источники сигналов характеризуются разными сигналами  $u(r, t_1)$ . Вид сигнала зависит от материалов источников, их конструкции и электрического сигнала, который на них подается. В рамках определенных моделей можно рассчитать электрический сигнал, который необходимо сгенерировать и подать на источник, для того, чтобы получить нужный начальный импульс  $u(r, t_1)$ . Характерной особенностью всех импульсов  $u(r, t_1)$  является наличие некоторых переколебаний как на рисунке 1.2. Чем меньше переколебания, тем, как правило, лучше. В идеализированном варианте переколебания отсутствуют.

Вычислительный эксперимент состоял в решении прямой задачи по определению акустического давления  $u|_{ST}$  на границе расчётной области  $S$ , где расположены детекторы, при известном распределении скорости звука  $v(r) = c^{-0.5}(r)$ , и затем использования полученных данных  $u|_{ST}$  для решения обратной задачи по восстановлению распределения скорости  $v(r)$ .

Для решения обратной задачи был использован следующий итерационный процесс минимизации функционала невязки (1.5). В качестве начального

приближения выбирается значение  $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$ , соответствующее скорости звука в чистой воде 1.5 км/с.

На каждой итерации ( $m$ ) выполняются следующие действия:

1. Расчет начального импульса источника по формуле (1.30).
2. Решение прямой задачи (1.3), (1.4) для текущего итерационного приближения  $c^{(m)}$ . Расчет распространения ультразвуковой волны  $u^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  выполняется по формуле (1.27). Вычисляются значения  $u(\mathbf{r}, t)$  на каждом из детекторов.
3. Вычисление невязки  $\Phi^{(m)} = \Phi(u^{(m)}(\mathbf{r}))$  из формулы (1.29).
4. Решение сопряженной задачи (1.19), (1.20) для  $w^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ .
5. Вычисление градиента  $\Phi'_c(u^{(m)}(\mathbf{r}))$  по формуле (1.28) для всех источников.
6. Коррекция текущего приближения  $c^{(m+1)} = c^{(m)} + \lambda^{(m)} \Phi'_c(u^{(m)}(\mathbf{r}))$ . Процесс возвращается к пункту 2.

Начальный шаг метода градиентного спуска  $\lambda^{(0)}$  выбирается из априорных соображений. Если невязка  $\Phi^{(m+1)}$  на следующей итерации оказывается больше, чем  $\Phi^{(m)}$ , то шаг  $\lambda^{(m)}$  уменьшается в 1.5 раза. Для более точного определения шага метода наискорейшего спуска потребовалось бы выполнять дополнительные итерации, что увеличило бы время расчётов вдвое и более.

Рассматриваемые обратные задачи волновой томографии являются некорректными. Роль параметра регуляризации в итерационном процессе играет количество итераций. Согласно теории итеративной регуляризации [14, 93], в качестве приближенного решения обратной задачи с погрешностью входных данных  $\delta$  можно взять элемент  $c^{(m(\delta))}$  итерационной последовательности  $c^{(m)}$ , где  $m(\delta)$  представляет собой первый номер, для которого выполнено неравенство  $\Phi^{(m(\delta))} \leq b \delta^2$ . Здесь  $b$  – фиксированное число, большее 1. Можно показать [14], что для широкого круга некорректных задач градиентные методы итеративной регуляризации позволяют строить приближенное решение  $c^{(m(\delta))}$ , которое при  $\delta \rightarrow 0$  стремится к точному решению задачи. В модельных расчетах параметр  $b$  выбирался равным 1.1.

Как нетрудно убедиться, использование явных разностных схем в рассмотренном в настоящей главе 1 дифференциальном подходе в трёхмерном случае, приводит к необходимости выполнить порядка  $O(n^3\tau)$  операций типа сложения-умножения для вычисления одной итерации метода градиентного спуска, где  $\tau$  – количество точек сетки по времени,  $n$  — размер сетки по одной координате. Выполнение такого объема вычислений вполне посильная задача для современных суперкомпьютеров, использование дифференциального подхода позволяет решать реальные задачи волновой томографии за разумное время. Дифференциальный подход имеет существенное преимущество в объёмах вычислений по сравнению с интегральным подходом, который будет рассмотрен в главе 2. Особенно это преимущество проявляется в трёхмерном случае.

#### **1.4 Примеры модельных расчетов задач волновой томографии в 2.5D и 3D схемах**

При проведении расчетов томографическая схема и основные значения параметров выбирались в первую очередь с целью моделирования в задаче ультразвуковой томографии молочной железы. На первом этапе модельные расчеты задач волновой томографии проводились по двумерным слоям в 2.5D схеме. Для расчетов использовалась математическая модель, описываемая уравнением (1.3). На рисунке 1.3 приведена схема эксперимента, источники обозначены цифрой 1, приемники – 2. 8 источников расположены в серединах сторон и в углах квадрата области расчетов, приемники излучения расположены по периметру области расчетов. Исследуемая область  $G$ , содержащая неоднородности, расположена в центре квадрата расчетной области и окружена средой  $L$  с известной скоростью  $v_0$ .



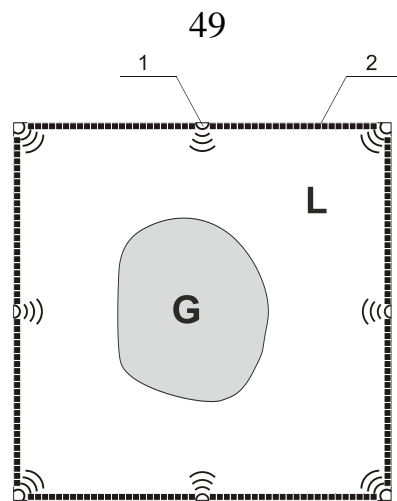


Рисунок 1.3 Схема эксперимента в 2D задаче

Использование суперкомпьютера позволило эффективно провести численные решения обратной задачи для реальных параметров ультразвуковой томографии молочной железы. Спецификой рассматриваемых задач ультразвуковой томографии является то, что ультразвуковые характеристики молочной железы мало отличаются друг от друга как для здоровых, так и для пораженных раком тканей. Скорость распространения звука в воде составляет  $c_0=1500$  м/сек, в то время как скорость распространения звука в человеческих тканях отличается от  $c_0$  не более чем на 10 % (примерная скорость распространения звука в жировой ткани равна 1450 м/сек, в мышечной ткани равна 1570 м/сек. В разных работах приводят разные данные для скорости распространения звука в для пораженных раком тканей. Согласно работе [214] составляет 1585 –1630 м/с , согласно работе [107] - 1530.8м/с, согласно работе [210] - 1527.4 м/с, согласно работе [161] - 1564 м/с, согласно работе [190] - 1530/1550 м/с. Таким образом, скорость звука в злокачественных образованиях отличается от  $c_0=1500$  м/сек не более чем на 10-15%.

Таким образом, необходимо восстанавливать скоростной разрез при очень малом контрасте, когда здоровые и пораженные раком ткани имеют очень малые отличия в скорости распространения. Это накладывает жесткие требования на алгоритмы реконструкции томографических изображений. Для медицинских

целей также важно, чтобы минимальный размер неоднородностей, которые удастся обнаружить, составлял  $\sim 2\text{-}3\text{мм}$ .

Как один из примеров, приведем результаты расчета для разного количества источников в двумерной задаче. На рисунке 1.4 приведены результаты расчеты модельной задачи, которая решалась без внесения дополнительной погрешности. Вариация скорости  $v(r)$  в модельной задаче не превышала 10%. Точное решение задачи совпадает с рисунком 1.5а. Центральная длина волны излучения  $\lambda=5$  мм. Минимальный размер неоднородности составлял около 2 мм при размере области неоднородности порядка 15 см. Модельные расчеты проводились на области размера 20см, на сетке  $500\times 500$  точек. На рисунках 1.4а-в приведены результаты реконструкции функции скорости, полученные с использованием 8 источников, соответственно на 10, 170 и 500 итерациях, на рисунке 1.4г – скоростной разрез получен с использованием 4 источников излучения на 500 итерации. Расстояние между приемниками составляло  $\sim \lambda/2$ .

Как видно из рисунков 1.4а-в, приближенное решение на первых 10 итерациях очень далеко от точного решения. Приближенное решение на 170 итерации уже восстанавливает форму неоднородности. Хорошо видны артефакты как внутри исследуемой области, так и вне ее. Тем не менее, рисунок демонстрирует достаточно хорошее разрешение даже маленьких объектов размером 2 мм. Решение на 500 итерации хорошо восстанавливает не только форму неоднородности, но и абсолютное значение скорости. Артефакты практически отсутствуют. На рисунке 1.4г приведено реконструированное сечение той же самой задачи на 4 источниках. Если сравнить результаты на 500 итерации на 4 и 8 источниках, то на 4 источниках, в отличие от 8, видно наличие артефактов.

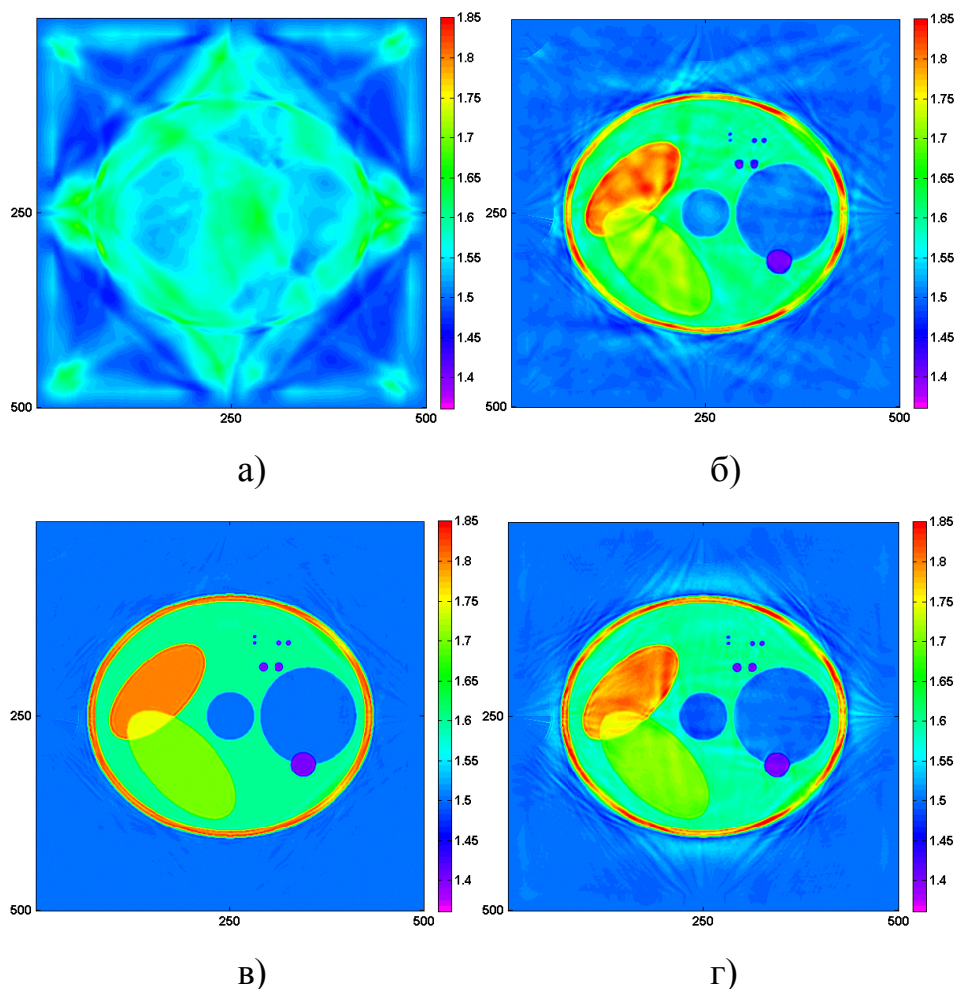


Рисунок 1.4 Результаты модельных расчетов: а) –10 итераций, 8 источников; б) –170 итераций, 8 источников; в) – 500 итераций, 8 источников; г) –500 итераций, 4 источника

В таблице 1.1 приведены значения функционала невязки для 10, 170 и 500 итераций для 4 и 8 источников соответственно. Видно, что функционал невязки на 500 итерации для 4 источников превосходит значения функционала невязки для 8 источников в 10 раз.

Таблица 1.1 Значения функционала невязки

Число итераций	10	170	500
Невязка, 4 источника	$4.91 \cdot 10^{-4}$	$2.37 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$
Невязка, 8 источников	$3.66 \cdot 10^{-4}$	$4.19 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$
Время расчета (мин)	0.5	7	20

Модельные расчеты приведенные выше проводились на сетке  $500 \times 500$  точек. Такое количество точек сетки обеспечивает погрешность аппроксимации вполне достаточную для решения задач с погрешностью экспериментальных данных в несколько процентов. Приведенное в таблице 1.1 время расчетов получено для 64 вычислительных ядер суперкомпьютера «Ломоносов» МГУ.

**Модельные расчеты в 2.5D схеме.** Ниже будут приведены результаты расчетов в послойной 2.5D схеме волновой томографии. Эти расчеты были нацелены на исследование предельных характеристик ультразвуковой томографии по разрешающей способности, для анализа влияния дифракционных эффектов. Поэтому модельные задачи решались на мелкой сетке  $1000 \times 1000$  по  $x$ ,  $y$  в квадрате  $20 \times 20$  см с целью уменьшения погрешностью вычислений в рамках заданной модели. Сетка по  $t$  диктуется условием устойчивости Куранта и составила 3000 точек в промежутке от 0 до  $T$ . Выбор такой мелкой сетки связан с тем, что для решения прямой и сопряженной задачи используется явная разностная схема. Начальный импульс, распространяясь в пространстве, в модельных задачах аппроксимируется на 25 точках сетки по координатам  $x$  и  $y$  соответственно, чтобы обеспечить хорошую аппроксимацию для численного вычисления лапласиана.

Одной из задач численного эксперимента было исследование возможностей суперкомпьютера для одновременного расчета большого количества сечений 2.5D схемы, что реально необходимо на ультразвуковых томографических установках [117, 123]. Для этих целей экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 3D объекте с модельными неоднородностями размером до 150 мм. Минимальный размер неоднородности 2мм. Размер области ультразвукового зондирования по горизонтали  $200 \times 200$  мм, по вертикали 200 мм. Расстояние между сечениями в данной модельной задаче по оси  $z$  принималось равным 5 мм. Расчеты проводились одновременно на 40 сечениях.

Разрешение по  $x$ ,  $y$  и по  $z$  в реальных ультразвуковых томографических установках хотелось бы иметь одинаковым порядка 2-3 мм или еще меньше.

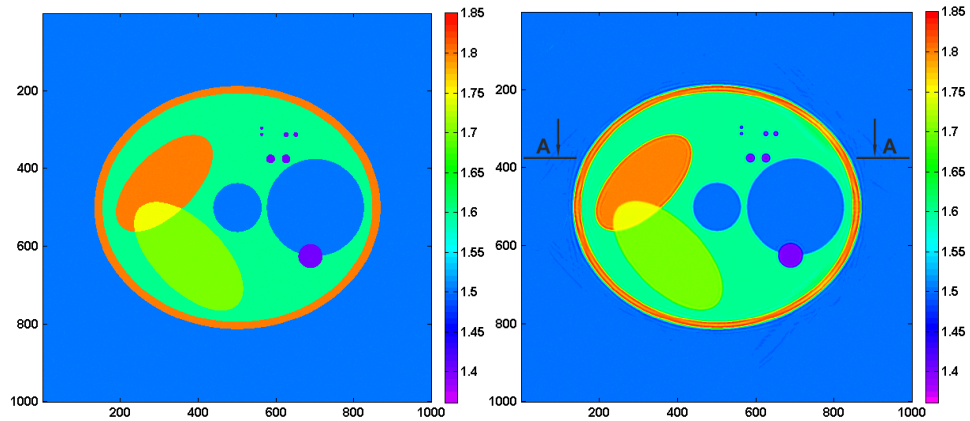
Возможность уменьшения расстояния между сечениями по  $z$  в ультразвуковой томографии, в отличие от X-ray томографии, упирается в то, что сечения по оси  $z$  должны быть независимыми. Толщина сечений, при которых их можно считать независимыми, определяется прежде всего дифракционными эффектами и эффектом рефракции, переотражения и т.п. Вопрос о возможности восстановления в ультразвуковой томографии независимых сечений на расстоянии 2-3 мм друг от друга в реальных экспериментах более подробно обсуждается в главе 4.

Вариация скорости  $v(x, y, z)$  в модельной задаче не превышала 20%. Модельные расчеты проводились для центральной длины волны излучения 5.0 мм; количество источников в каждом сечении – 8. Расстояние между детекторами составляло 2.4 мм. Все расчеты проводились с начального приближения скорости  $v_0 = const$ .

В ходе модельных экспериментов по восстановлению 3D неоднородности в послойной 2.5D схеме решалась двумерная прямая задача распространения ультразвуковой волны независимо в каждом двумерном сечении. Дополнительная ошибка в экспериментальные данные не вносилась. По полученным данным решалась обратная задача восстановления функции  $c(x, y, z)$  при каждом фиксированном  $z = z_i$  ( $i = 1, \dots, 40$ ) на 20480 ядрах суперкомпьютера «Ломоносов» МГУ [70]. На рисунках 1.5а-и, из-за ограничений по объему, приведены результаты реконструкции только некоторых сечений функции скорости распространения ультразвуковой волны в исследуемом объекте как функции от  $x$ ,  $y$  при фиксированном  $z = z_i$ .

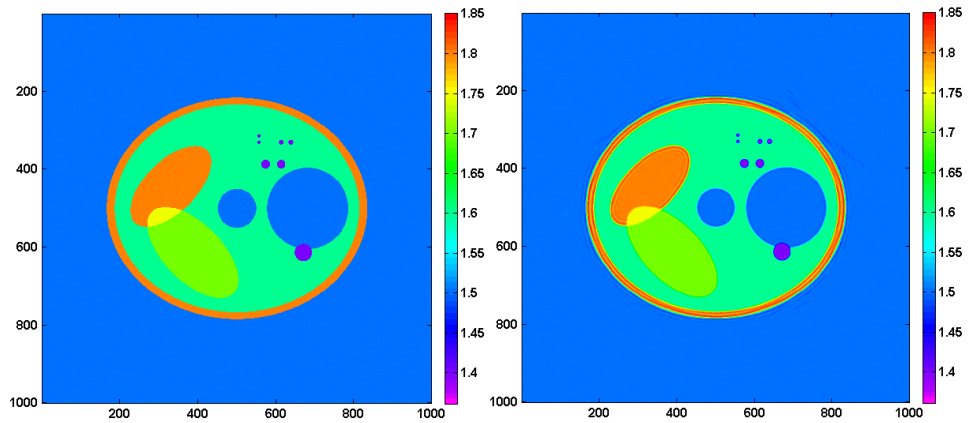
На рисунках 1.5 слева приведены сечения фантома. Справа - результаты восстановленных изображений. Рисунки снабжены шкалой значений цвета функции скорости. На рисунке 1.6 приведено сечение скорости распространения волны в неоднородности как функция от координаты  $x$ . Пунктир соответствует точному решению. Разработанные алгоритмы позволяют восстанавливать не только форму неоднородности, но и с высокой точностью само значение скорости как функции от координаты. Видно также, что достаточно хорошо

восстанавливаются даже небольшие неоднородности размером 2-5 мм. На рисунке 1.6 отчетливо виден эффект «звона» восстановленного решения в местах «скачка» точного решения задачи. Эти эффекты вызваны волновым характером источников ультразвукового излучения, в частности, наличием переколебаний зондирующего импульса (рисунок 1.2).



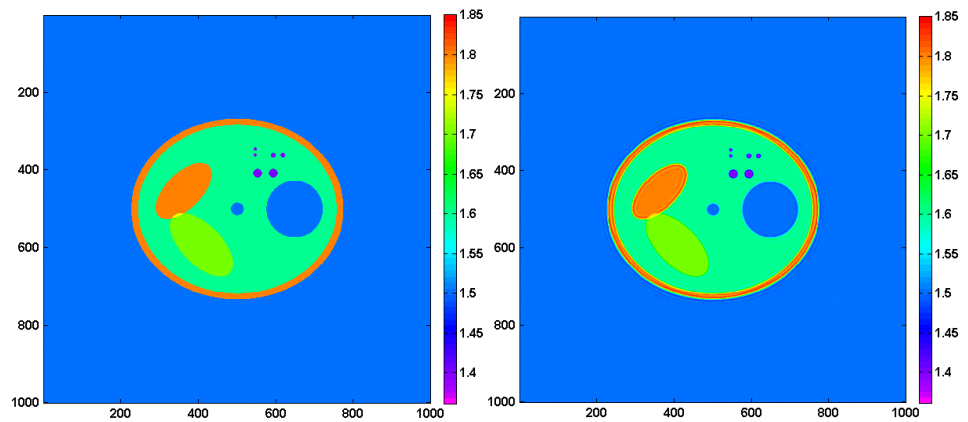
а)

б)



в)

г)



д)

е)

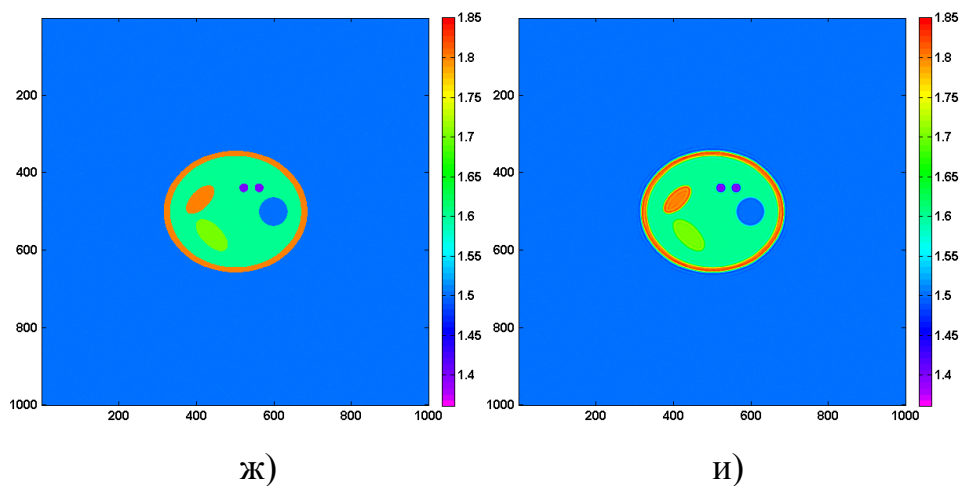


Рисунок 1.5 Слева - модельные сечения 3D объекта, справа - восстановленные сечения 3D объекта

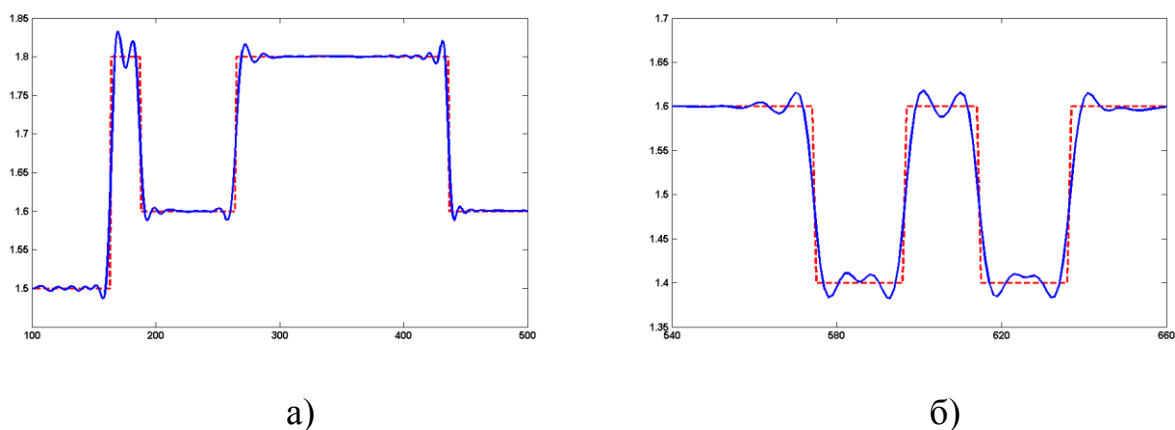


Рисунок 1.6 Графики сечения вдоль линии AA на картинке 3b: а) – на участке от 100 до 500 пиксела, б) – на участке от 540 до 660 пиксела

Приведем некоторые данные из модельных расчетов, которые характеризуют возможности суперкомпьютеров по сравнению с однопроцессорными компьютерами. Метод наискорейшего спуска обеспечивает монотонное убывание функционала невязки. Как обычно, в задачах минимизации, функционал невязки вначале убывает достаточно быстро, а при больших итерациях приближается к погрешности и практически не убывает. При модельных расчетах в обратной задаче без внесения дополнительной погрешности в экспериментальные данные, значение функционала невязки удалось уменьшить в 10000 раз за 700 итераций за время около 4 часов на 20480

ядрах суперкомпьютера «Ломоносов». Этот результат был получен лишь для демонстрации предельных возможностей суперкомпьютера при решении задач ультразвуковой томографии с очень маленькой погрешностью.

Реальные задачи можно решать на сетке  $500 \times 500$  точек с количеством итераций порядка 300-400. Использование 2560 вычислительных ядер суперкомпьютера позволяет в этом случае проводить расчеты на 40 слоях за время  $\sim 15$  мин. Выигрыш по времени при этом по сравнению с однопроцессорным вариантом составляет более чем 1000 раз. Более подробно проблемы применения суперкомпьютерных технологий в задачах волновой томографии будут рассмотрены в главе 5.

Важным параметром ультразвуковой томографии является длина волны излучения. Выбранная центральная длина волны для модельных расчетов равная 5 мм превышает длины волн, используемые в обычных ультразвуковых исследованиях. Этот выбор обусловлен тем, что в задачах томографии необходимо получать сигнал на детекторах с высокой точностью. Ультразвуковое излучение в мягких тканях поглощается, причем поглощение сильно зависит от частоты или, что тоже самое, от длины волны. Уменьшение длины волны с одной стороны увеличивает разрешение, а с другой стороны из-за поглощения уменьшает соотношение сигнал-шум, что работает в обратную сторону. Выбранный диапазон порядка 5 мм, как показали модельные расчеты, обеспечивает при малой ошибке входных данных, восстановление деталей сечения, размеры которых не превосходят 2 мм. Заметим также, что короткий зондирующий импульс, приведенный на рисунке 1.2, содержит широкий спектр частот, в том числе и более высоких.

Остановимся еще на одной причине, по которой важным фактором при решении задач ультразвуковой томографии является получение очень детализированных изображений. Очень важным является определение формы новообразования, которая в значительной степени определяет доброкачественность опухоли. Зачастую негладкая (звездчатая) форма



свидетельствует о недоброкачественности образования. Для решения последней задачи очень важно получение реконструкции сечения с высокой точностью.

В томографических задачах существует два разрешения. Одно по пространству, а второе по восстанавливаемому в томографии абсолютному значению функции скорости. Одной из проблем в медицине является обнаружение новообразований при малом отклонении скорости в пределах 10%. Как видно из результатов расчетов разработанные алгоритмы позволяют восстанавливать абсолютное значение функции скорости с высокой точностью.

**Модельные расчеты в 3D схеме.** Алгоритмы итерационного процесса аналогичны в двумерном и трехмерном случаях [130]. Количество неизвестных в конечно-разностном подходе составляет  $\sim n^N$ , а количество точек расчетной сетки  $\sim n^{N+1}$ , где  $n$  - количество точек сетки по одному направлению,  $N$  – размерность задачи. Если сравнивать количество неизвестных, то для трехмерной задачи ( $N=3$ ) это количество увеличивается в  $n$  раз по сравнению с двумерной. Так при  $n=400$  количество неизвестных в трехмерной модели порядка  $10^8$ . Использование суперкомпьютеров позволяет эффективно распараллеливать вычисления, что уменьшает время вычислений в сотни раз.

Тем не менее, несмотря на большую сложность решения трехмерных задач, именно это направление представляется наиболее перспективным, поскольку оно позволяет решать задачу учитывая рефракционные эффекты, дифракционные эффекты, переотражение в трехмерном пространстве. Например, в рамках послойной модели можно учитывать переотражение в слое, но отсутствует переотражение между неоднородностями в разных слоях и т.п. Эти эффекты автоматически описываются в трехмерной волновой модели.

Для расчетов в 3D схеме волновой томографии использовалась математическая модель, описываемая уравнением (1.3). На рисунке 1.3 приведена схема модельного эксперимента по ультразвуковой томографической диагностике исследуемой области, содержащей неоднородности. Область неоднородности расположена внутри расчетного куба и окружена средой с известной скоростью

$v_0 = const$ . На гранях куба располагаются источники и приемники ультразвуковых импульсов.

В качестве фантома для модельных исследований использовался неоднородный по структуре трехмерный объект размером до 100 мм, в котором изменение скорости распространения ультразвуковых волны варьировалось в пределах 10%. Минимальный размер неоднородности составлял 1 мм.

Основные параметры для модельных задач выбраны следующими:

- Центральная длина волны зондирующего импульса  $\lambda = 5$  мм,
- Размер области ультразвукового зондирования —  $10 \times 10 \times 10$  см. Расчёты проводятся на равномерной сетке внутри куба, количество точек сетки по координатам  $X \times Y \times Z$  составляет  $320 \times 320 \times 320$ , шаг сетки — 0,3 мм;
- Число шагов по времени  $T$  составляет 1280, шаг сетки по времени — 10 мкс. Сетка по  $t$  диктуется соотношением Куранта  $c^{-0.5} \tau < h / \sqrt{3}$ ,
- Количество положений источников - 6.
- Расстояние между приемниками в длинах волн —  $\lambda / 2$ .

В модельных расчётах использовалось следующее представление для зондирующего импульса:

$$u(\mathbf{r}, t_0) = \begin{cases} \sin(2\pi x / \lambda), & |0.5 + x / \lambda| \leq 0.25 \\ \sin(2\pi x / \lambda) \cdot |\sin(2\pi x / \lambda)|, & 0.25 \leq |0.5 + x / \lambda| \leq 0.5, \\ 0, & |0.5 + x / \lambda| > 0.5 \end{cases}, \quad (1.31)$$

где  $x = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - v_0 t_0$  — расстояние от фронта волны до источника, находящегося в точке  $\mathbf{r}_0$ ,  $v_0$  — скорость распространения звука в воде, равная 1,5 км/с,  $\lambda$  — заданная ширина импульса (центральная длина волны). График зондирующего импульса, заданного согласно (1.31), приведён на рисунке 1.7.

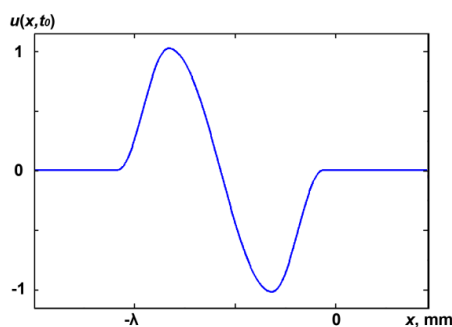


Рисунок 1.7 График зондирующего импульса

В модельной задаче волновой томографии источники и приёмники располагались со всех сторон от исследуемого объекта. Источники  $S_1 - S_6$  располагаются по центрам каждой из граней куба (рисунок 1.8). Приёмники располагаются на каждой грани куба с шагом 2,5 мм, так что каждая грань представляет собой двумерный массив из  $40 \times 40$  приёмников.

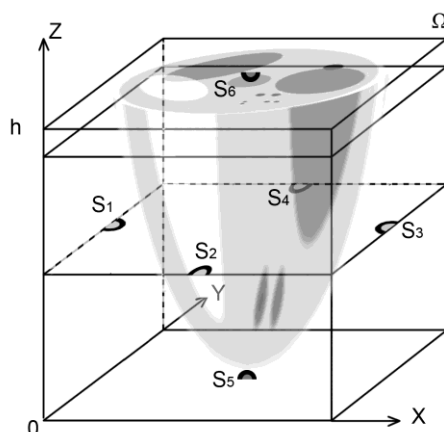
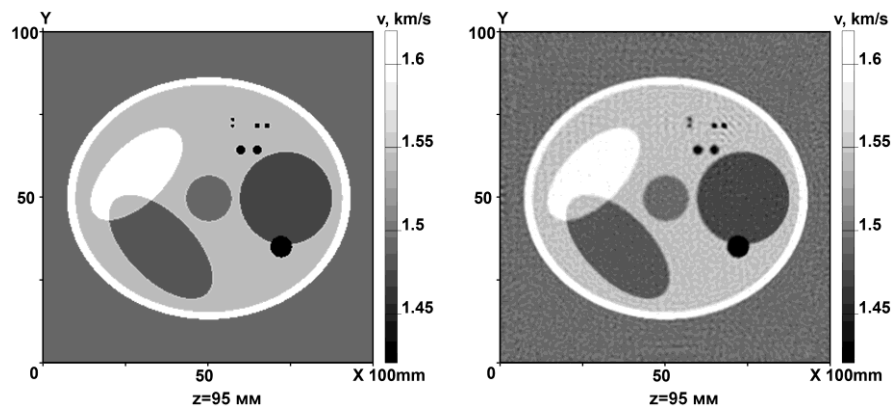


Рисунок 1.8 Схема расположения источников в модельной задаче с полными данными

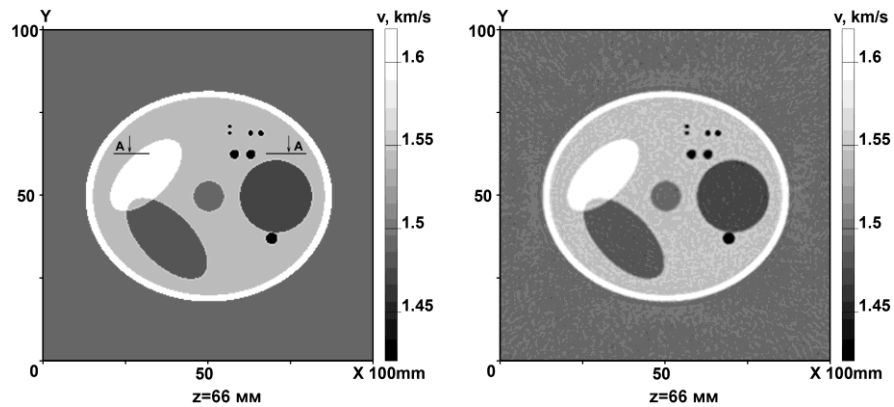
Сначала решалась прямая задача распространения ультразвуковой волны (1.3), (1.4) в неоднородной среде в трёхмерной области с начальными условиями, задающими зондирующий импульс (1.31). Полученные значения волнового поля на детекторах  $U|_{ST}$  сохранялись — эти значения используются в качестве экспериментальных данных для обратной задачи. Затем, используя полученные

значения  $U|_{ST}$  в соотношении (1.19), итеративно решалась обратная задача восстановления трёхмерного распределения скорости звука  $v(x, y, z)$ .

На рисунке 1.9 приведены сечения трёхмерной функции скорости звука  $v(x, y, z)$  в плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ . Слева приведены сечения фантома, справа — сечения восстановленного трёхмерного изображения. Изображение получено после 120 итераций итерационного процесса. Видно, что качество реконструкции очень высокое, достаточно хорошо восстанавливаются даже неоднородности малого размера  $\sim 1-2$  мм.



а)



б)

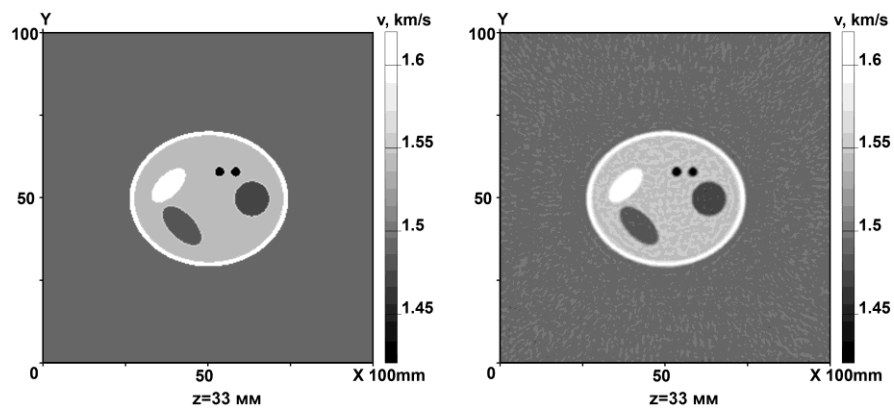


Рисунок 1.9 Модельная задача 3D томографии; сечения 3D объекта в плоскостях  $z=\text{const}$ ; слева — фантом, справа — восстановленное изображение:

а) — сечение при  $z=95$  мм, б) — сечение при  $z=66$  мм, в) — сечение при  $z=33$  мм

На рисунке 1.10 приведены сечения фантома и восстановленного изображения в плоскости, перпендикулярной оси  $Y$ . В этом сечении неоднородности имеют вытянутую форму. Качество реконструкции также высокое.

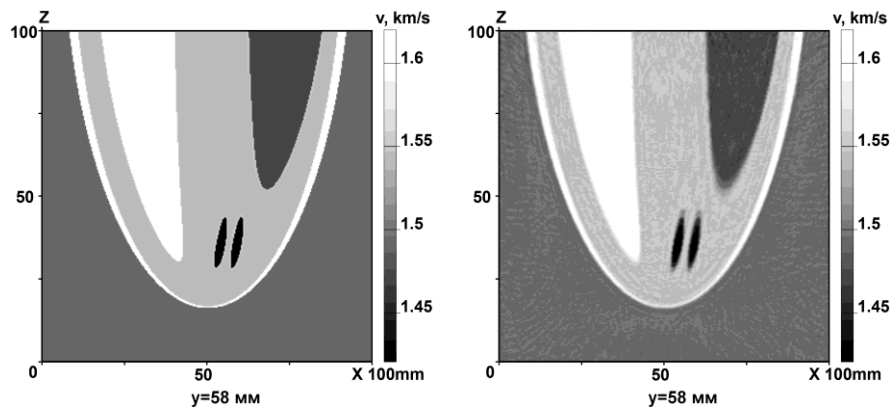
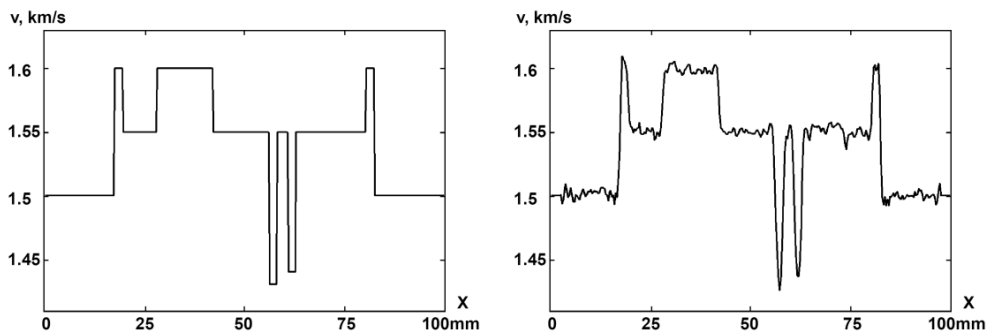


Рисунок 1.10 Модельная задача реконструкции 3D объекта; сечения 3D объекта в плоскости  $y=\text{const}$ : слева — фантом, справа — восстановленное изображение

На рисунке 1.11 приведены графики точной и восстановленной скорости звука на линии А–А рисунка 1.9б. Видно, что хорошо восстанавливается не только форма неоднородностей, но и значение скорости звука внутри небольших включений.



а)

б)

Рисунок 1.11 График скорости звука на линии А–А:  
слева — фантом, справа — реконструированное значение скорости

В качестве начального приближения для итерационного процесса во всех расчётах использовалось  $c^{(0)} = \text{const}$ . Рисунок 1.12 демонстрирует динамику изменения восстановленного изображения скорости звука в зависимости от числа итераций.

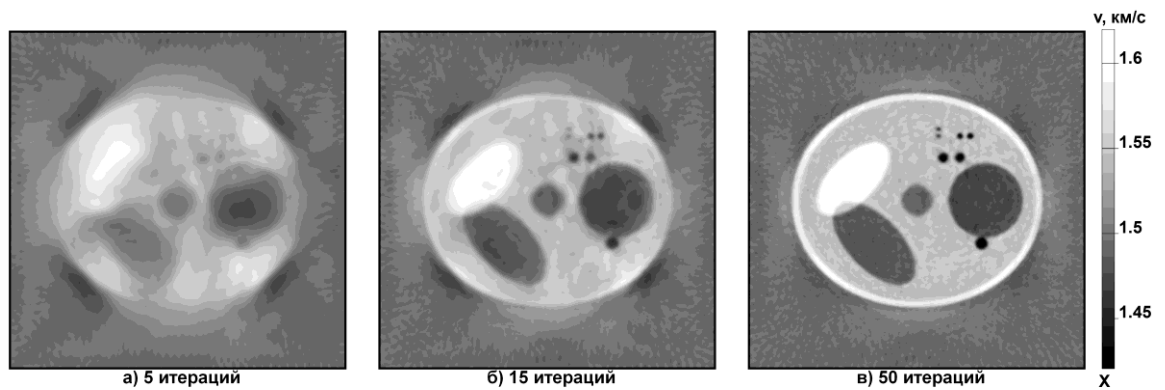


Рисунок 1.12 Восстановленное изображение при разном числе итераций

В таблице 1.2 приведены значения функционала невязки и время расчета для 5, 15 и 120 итераций. Видно, что функционал невязки за 120 итерации уменьшился в  $\sim 1000$  раз.

Таблица 1.2 Значения функционала невязки

Число итераций	5	15	120
Невязка, 6 источников	$3.95 \cdot 10^{-5}$	$2.56 \cdot 10^{-6}$	$5.29 \cdot 10^{-8}$
Время расчета (мин)	5	15	120

Значение функционала невязки  $\sim 5.29 \cdot 10^{-8}$  соответствует уровню ошибки сигналов детекторов  $\sim 0.3\%$ . На рисунке 1.13 показан график значения функционала невязки в зависимости от числа итераций. Метод наискорейшего

спуска обеспечивает монотонное убывание функционала невязки. На первых итерациях невязка убывает достаточно быстро, а с увеличением количества итераций, по мере приближения к решению, невязка убывает значительно медленнее.

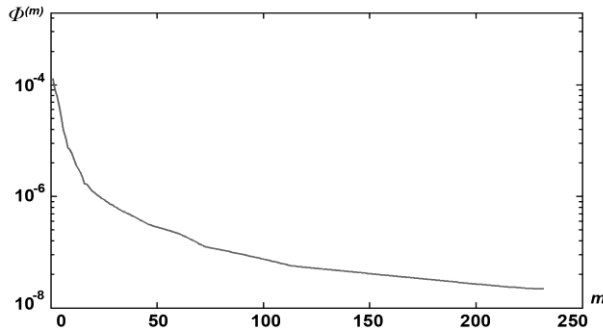


Рисунок 1.13 График функционала невязки в зависимости от числа итераций

Понятно, что, имея восстановленную функцию  $v(x,y,z)$  как трехмерную функцию, заданную на сетке, можно восстановить сечение этой функции в любой плоскости, не обязательно параллельной координатным плоскостям. На рисунке 1.14 приведено сечение функции  $v(x,y,z)$  в наклонной плоскости.

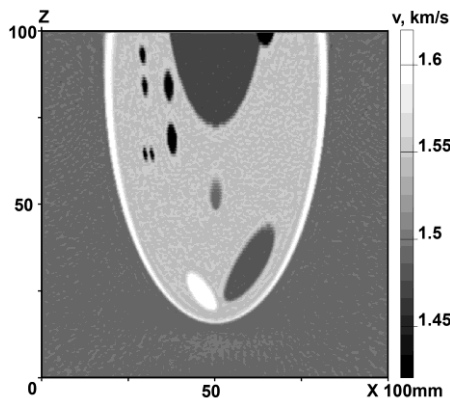


Рисунок 1.14 Восстановленное сечение 3D объекта в наклонной плоскости

Приведем некоторые данные о возможностях суперкомпьютеров в решении задач ультразвуковой томографии. Для модельных расчетов использовался суперкомпьютер на графических картах (6 графических карт NVIDIA Tesla X2070). Решение обратной задачи реконструкции скорости  $v(x,y,z)$  как функции трех переменных в случае 6 источников позволило решить задачу за время порядка 2 часов.

## 1.5 Выводы

В главе 1 осуществлена постановка задачи нелинейной волновой томографии как коэффициентной обратной задачи для уравнения гиперболического типа во временной области.

Обратная задача состоит в определении неизвестной функции скорости распространения волны в исследуемой области неоднородности. Рассмотренные модели, учитывают волновые эффекты дифракции, рефракции, переотражения зондирующего излучения. Рассматриваемая обратная задача является нелинейной и сложна для реализации даже на современных суперкомпьютерах, в том числе из-за огромного объема вычислений.

Предлагаемую постановку можно использовать в приложении к задачам ультразвуковой диагностики в медицине, инженерной сейсмологии, неразрушающего контроля в промышленности, радиолокации, гидроакустики.

Разработаны эффективные методы и алгоритмы решения прямых и обратных задач нелинейной волновой томографии во временной области в двумерном и трехмерном случае как коэффициентных задач для волнового уравнения. Разработанные алгоритмы базируются на возможности прямого вычисления производной Фреше функционала невязки с помощью решения начально-краевых задач для волнового уравнения в прямом и обратном времени. В рассматриваемых постановках обратных задач впервые получено точное выражение для производной Фреше функционала невязки.

Впервые разработаны эффективные итерационные численные методы решения задач волновой томографии на суперкомпьютерах как для послойной 2.5D томографической схемы реконструкции, так и для 3D схемы при зондировании исследуемого объекта импульсными источниками. Предложены устойчивые явные разностные схемы второго порядка точности для расчетов в прямом и обратном времени, обеспечивающие возможность эффективного распараллеливания вычислений на суперкомпьютерах.



Впервые проведены модельные расчеты в обратной задаче волновой томографии по восстановлению трехмерной функции  $v(x,y,z)$  как в стандартной послойной 2.5D томографической схеме, в которой проводятся исследования 3D объекта по его двумерным сечениям, так и в 3D схеме. В послойной схеме в рамках одного двумерного слоя невозможно учесть трехмерные эффекты рефракции, дифракции, переотражения. Поэтому трехмерная модель более адекватна действительности с физической точки зрения, однако с вычислительной точки зрения 3D схема гораздо сложнее, чем 2.5D схема. Одним из достижений работы является демонстрация того, что все возникающие трудности на пути численной реализации 2.5D и 3D алгоритмов можно преодолеть.

Проведенные исследования показали высокую перспективность дифференциального метода. Разработанные алгоритмы хорошо ложатся на структуру суперкомпьютеров. Открывается возможность для проведения расчетов на мелких сетках с высоким разрешением. Проведенные модельные расчеты показывают, что реальное разрешение восстановленных изображений не хуже 3 мм. Модельные расчеты продемонстрировали возможность хорошего восстановления не только формы неоднородности, но и с высокой точностью абсолютного значения функции скорости. Такие высокие результаты удается достичь благодаря учету влияния дифракционных эффектов в волновой модели. Эти результаты получены при небольшом количестве источников, но достаточно большом количестве приемников, расстояние между которыми составляет  $\sim \lambda/2$ .

Важнейшей проблемой приближенного решения нелинейных задач является выбор начального приближения. Проведенные расчеты модельных задач показали, что в рассматриваемом диапазоне параметров разработанные алгоритмы эффективно решают обратную задачу в итерационных схемах с начального приближения  $c(x,y)=const$ . Возможно, это связано с тем, что скорость распространения звука в человеческих тканях и в новообразованиях молочной железы как доброкачественных так и злокачественных отличается от начального приближения  $const$  не более чем 10%, что обеспечивает близость к глобальному минимуму функционала.

## Глава 2

### Интегральный подход к решению коэффициентных обратных задач в скалярной волновой модели

Целью главы 2 является разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения решения обратных коэффициентных задач для волнового уравнения в интегральных представлениях функции Грина для нелинейных и линеаризованных моделей. Проведена оценка возможности численного решения обратных задач с помощью разработанного аппарата на мелких расчетных сетках. Проведено сравнение вычислительных возможностей дифференциального и интегрального подходов.

Обратные задачи в интегральном представлении, как известно, можно свести к системе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода [92] [184]. Полученная задача является некорректно-поставленной. Для нее разработан богатый арсенал итеративных методов решения [13, 14, 92, 94]. Автором диссертации обратные коэффициентные задачи в интегральных представлениях рассмотрены в публикациях [1, 23, 32, 33, 36, 38, 39, 42, 44, 45, 67, 68, 73, 80].

Решение обратных нелинейных коэффициентных задач для волнового уравнения в интегральных представлениях является сложной проблемой. Объем вычислений в задаче растет как  $n^9$  ( $n$  – размер сетки расчетов по одной координате), что является непосильной проблемой даже для современных суперкомпьютеров.

Разумной альтернативой представляется использование линеаризованных моделей. Интегральный подход оказывается весьма эффективным для исследования линеаризованных приближений задач волновой томографии. В отличие от исходной нелинейной обратной задачи, в некоторых линеаризованных моделях проблем с объемом вычислений уже не возникает. В этой главе предложены различные алгоритмы решения обратных задач волновой

томографии в линеаризованных моделях. Диагностики исследуемой среды осуществляется методом синтезированной апертуры.

## 2.1 Интегральная постановка коэффициентной обратной задачи волновой томографии

В главе 1 рассмотрена коэффициентная обратная задача волновой томографии в постановке, описываемой уравнением (1.1) во временной области. Рассмотрим постановку задачи в частотной области. Взяв формально Фурье преобразование по времени от левой и правой части уравнения (1.1), задачу можно свести к уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(r, q, \omega) + \kappa^2(r, \omega)u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega), \quad (2.1)$$

Здесь  $\Delta$  - оператор Лапласа по пространственной переменной  $r \in R^3$ . Это уравнение в скалярном приближении описывает акустическое или электромагнитное поле  $u(r, q, \omega)$ , генерируемое источником, описываемым функцией  $f(r, q, \omega)$ . Если источник является точечным гармоническим осциллятором, расположенным в точке  $q \in Q$ , то эта функция имеет вид  $f(r, q, \omega) = -\delta(r - q)$ ,  $\omega$  - круговая частота источника излучения. Неоднородность среды вызвана только изменениями фазовой скорости  $c(r)$ , имеет место соотношение  $\kappa(r, \omega) = \omega/c(r)$ . Вне области неоднородности  $\kappa(r, \omega) = \kappa_0 = \omega/c_0$ , где  $c_0 = const$  - известна.

В обратной задаче мы должны определить неизвестную функцию  $c(r)$  при  $r \in R$ , используя экспериментальные данные  $u(r, q, \omega)$ , полученные при  $r \in P$  для некоторого набора частот  $\omega$  и набора положений источника  $q \in Q$  (рисунок 1.1).

Рассмотрим хорошо известный подход к решению коэффициентных обратных задач в рамках волновых моделей в частотной области, основанный на интегральном представлении, который базируется на использовании аппарата функции Грина. Хорошо известно, что функция Грина для уравнения (2.1) в однородной среде удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(r, q, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} G(r, q, \omega) = -\delta(r - q)$$

и имеет вид

$$G(r, q, \omega) = \frac{1}{4\pi\|r - q\|} \cdot \exp(i \frac{\omega}{c_0} \|r - q\|).$$

Как и прежде (см. рисунок 1.1), будем предполагать, что поле  $u(r, q, \omega)$  измеряется в области  $P$  ( $r \in P$ ), т.е. приемники излучения пробегают область  $P$ . Точечные источники излучения пробегают область  $Q$  ( $q \in Q$ ), неоднородность расположена в ограниченной области  $R$ . Раздельно записывая уравнения для областей  $R$  и  $P$ , получаем нелинейную систему уравнений [32, 92]

$$\begin{cases} u(r, q, \omega) = u_0(r, q, \omega) + \omega^2 \int_R G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', & r \in R, \\ U(p, q, \omega) = \omega^2 \int_R G(r', p, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', & p \in P. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь  $U(p, q, \omega) = u(p, q, \omega) - u_0(p, q, \omega)$ ,  $u_0(r, q, \omega) = -\int_Q G(r', r, \omega) f(r', q, \omega) dr'$ ,

$\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$ . Введем в рассмотрение вектор  $X = \begin{pmatrix} \xi(r) \\ u(r, q, \omega) \end{pmatrix}$ . Систему (2.2)

можно записать в следующем виде

$$F(X) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$F(X) = \begin{cases} u(r, q, \omega) - u_0(r, q, \omega) - \omega^2 \int_R G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr' \\ \omega^2 \int_R G(r', p, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr' - U(p, q, \omega) \end{cases}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) является интегральным уравнением первого рода в некоторых гильбертовых пространствах относительно функций  $\xi(r)$  и  $u(r, q, \omega)$ . Это уравнение нелинейно, поскольку неизвестные функции входят в уравнение в виде произведения.

В обратной задаче неизвестными считаются свойства среды  $\xi(r)$  и поле  $u(r, q, \omega)$ . Известной является функция  $U(p, q, \omega)$ , полученная в результате

измерений в области расположения приемников. Требуется по этим измерениям, полученным для некоторого набора частот  $\omega$  и набора положений источника  $q \in Q$ , восстановить неоднородность среды  $\xi(r)$ .

## 2.2 Методы и алгоритмы решения нелинейной обратной задачи волновой томографии в интегральной постановке

### 2.2.1 Итерационные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии в интегральной постановке. Сравнение с дифференциальным подходом

Полученная задача (2.3), (2.4) является некорректно-поставленной и может быть решена, например, итеративно-регуляризованным методом Гаусса – Ньютона, описанным в [92]

$$X_{s+1} = X_s - (F_s'^* F_s' + \alpha_s E)^{-1} (F_s'^* F(X_s) + \alpha_s (X_s - \zeta)), \quad (2.5)$$

где  $s$  – номер итерации,  $F_s' = F'(X_s)$  – производная Фреше для (2.4),  $F_s'^*$  – оператор сопряженный  $F_s'$ . Подходящий выбор последовательности  $\alpha_s$  и элемента  $\zeta$  обеспечивают регуляризирующие свойства алгоритма.

Можно явно выписать формулы для  $F_s' = F'(X_s)$  и  $F_s'^* F_s'$ , которые получены автором в работах [38, 68]. В конечномерном виде эрмитова положительно-определенная матрица  $F_s'^* F_s'$  имеет размер  $N(t+1) \times N(t+1)$  и представляет собой разреженную матрицу, состоящую из  $(t+1) \times (t+1)$  блоков с размером блоков  $N \times N$

$$F_s'^* F_s' = \begin{pmatrix} (N \times N) & 0 & \dots & 0 & (N \times N) \\ 0 & (N \times N) & \dots & 0 & (N \times N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (N \times N) & (N \times N) \\ (N \times N) & (N \times N) & \dots & (N \times N) & (N \times N) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C^{1*}C^1 & 0 & \dots & 0 & & C^{1*}D^1 \\ 0 & C^{2*}C^2 & \dots & 0 & & C^{2*}D^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C^{t*}C^t & & C^{t*}D^t \\ D^{1*}C^1 & D^{2*}C^2 & \dots & D^{t*}C^t & D^{1*}D^1 + D^{2*}D^2 + \dots + D^{t*}D^t & \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $s$  - номер итерации,  $N$  – количество точек сетки в объеме расчетной области  $R$ ,  $t = N_\omega \cdot N_q$ ,  $N_\omega$  – число используемых частот зондирования,  $N_q$  – число положений источников,  $C^{\tau*}C^\tau = C_1^{\tau*}C_1^\tau + C_2^{\tau*}C_2^\tau$  и аналогично для матриц  $DC$  и  $DD$ ,

$$C^\tau = \begin{bmatrix} C_1^\tau \\ C_2^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \omega_1^2 A^\tau * \text{diag}(\xi_p) \\ \omega_1^2 B^\tau * \text{diag}(\xi_p) \end{bmatrix}; \quad D^\tau = \begin{bmatrix} D_1^\tau \\ D_2^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 A^\tau * \text{diag}(u_p^\tau) \\ \omega_1^2 B^\tau * \text{diag}(u_p^\tau) \end{bmatrix}.$$

$A_{ij}^\tau = G(r_j, r_i, \omega^\tau) dr$ ,  $B_{ij}^\tau = G(r_j, p_i, \omega^\tau) dr$ ,  $r_i, r_j \in R$ ,  $p_i \in P$ , каждому значению индекса  $\tau$  соответствует некоторая частота  $\omega$  и положение источника  $q \in Q$ ,  $1 \leq \tau \leq t$  [38, 68].

Однако даже возможность выписать явные выражения для матриц не позволяет эффективно решать рассматриваемую обратную задачу. Дело в том, что эта задача с вычислительной точки зрения является очень трудоемкой. Количество неизвестных задачи растет примерно как  $O(tn^3)$ , где  $n$  - число точек в одном направлении трехмерной сетки ( $N = n^3$ ). Наиболее вычислительно трудоемкими операциями в рассматриваемой процедуре Гаусса – Ньютона (2.5) является вычисление матрицы  $F_s'^{*}F_s'$  (2.6) и обращение оператора  $(F_s'^{*}F_s' + \alpha_s E)$  на каждой итерации процедуры Гаусса – Ньютона. Для вычисления матрицы необходимо выполнить порядка  $O(tn^9)$  операций типа сложения-умножения. Для обращения оператора итерационными методами необходимо выполнить на каждом шаге итераций порядка  $O(tn^6)$  операций (количество итераций составляет, как правило, несколько сотен) [41].

Рассмотренный выше алгоритм приводит к вычислению вектора  $X = \begin{pmatrix} \xi(r) \\ u(r, q, \omega) \end{pmatrix}$ . В реальности нас интересует только компонента  $\xi(r)$ ,

описывающая неоднородность. Эту особенность задачи можно использовать следующим образом. Нелинейную систему уравнений (2.2) запишем в виде

$$\begin{cases} F_1(u, \xi) = 0 \\ F_2(u, \xi) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь  $F_1$  и  $F_2$  - отображения гильбертовых пространств  $H_1$  и  $H_2$  в общем случае в другие пространства  $H_1'$  и  $H_2'$ , обладающие, будем предполагать, следующими свойствами:  $F_1$  и  $F_2$  - непрерывные, частные производные  $F_{1u}$ ,  $F_{2u}$ ,  $F_{1\xi}$ ,  $F_{2\xi}$  существуют в  $H_1$  и  $H_2$  соответственно, а оператор  $F_{1u}$  имеет ограниченный обратный. Путем исключения неизвестного поля  $u(r, q, \omega)$  из системы (2.7) мы получаем операторное уравнение для нахождения  $\xi(r)$

$$F_2(\varphi(\xi), \xi) = 0, \quad (2.8)$$

где  $\varphi(\xi)$  определяет непрерывное отображение  $u = \varphi(\xi)$ . При выполнении вышеперечисленных условий на  $F_1$  и  $F_2$  отображение  $\varphi(\xi)$  дифференцируемо и выполняется равенство

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{\partial F_1}{\partial \xi} \cdot \left( \frac{\partial F_1}{\partial u} \right)^{-1}.$$

Заметим, что

$$F_2' = \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \left( -\frac{\partial F_1}{\partial \xi} \cdot \left( \frac{\partial F_1}{\partial u} \right)^{-1} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial \xi}$$

и, следовательно, итерации Ньютона-Гаусса для уравнения (2.8) будут иметь вид

$$\xi_{s+1} = \xi_s - (F_{2s}'^* F_{2s}' + \alpha_s E)^{-1} (F_{2s}'^* F_{2s}(\varphi(\xi_s), \xi_s) + \alpha_s (\xi_s - \zeta_s)). \quad (2.9)$$

Здесь  $\alpha_s$  - некоторые положительные числовые параметры,  $\zeta_s$  - некоторый элемент  $H_2$ .

Итерационный процесс (2.9) с вычислительной точки зрения также является трудоемким. В отличие от итерационного процесса (2.5) число неизвестных несколько меньше - порядка  $O(n^3)$ . Для обращения оператора  $(F_{2s}'^* F_{2s}' + \alpha_s E)$

итерационными методами необходимо выполнить на каждом шаге итераций порядка  $O(n^6)$  операций, что также меньше, чем для процесса (2.5). Однако для вычисления матрицы  $(F'_{2s} * F'_{2s} + \alpha_s E)$  необходимо выполнить по-прежнему порядка  $O(m^9)$  операций типа сложения-умножения.

Рассмотренный в главе 1 дифференциальный подход имеет существенное преимущество в объемах вычислений. Использование, например, явных схем приводит к необходимости выполнить порядка  $O(n^3\tau)$  операций типа сложения-умножения для вычисления градиента одной итерации, где  $\tau$  – количество точек сетки по времени. Таким образом, полученная оценка для числа операций в интегральном подходе значительно больше, чем в дифференциальном подходе.

### 2.2.2 Модельные расчёты

#### обратных задач волновой томографии в интегральной постановке

Для оценки эффективности предложенных в разделе 2.2.1 алгоритмов были решены модельные задачи восстановления структуры приповерхностного слоя Земли. Численные эксперименты по решению обратной задачи были проведены на суперкомпьютере «Чебышев». Для решения 3D обратных задач волновой томографии использовался итеративно-регуляризованный метод Гаусса – Ньютона (2.5). Обращение матрицы выполнялось итеративными методами, которые состоят из многократного повторения стандартной операции умножения матрицы на вектор. Преимущество итеративных методов в сравнении с методами прямого обращения матрицы состоит в возможности их простого распараллеливания. Распараллеливание этой операции выполняется следующим образом: каждый процесс хранит только некоторую часть строк матрицы и выполняет умножение на вектор только этих строк. Учитывая, что количество строк матрицы может составлять до нескольких десятков тысяч, такое распараллеливание очень эффективно и, что важно, масштабируется до большого числа процессов.



Рассмотрим следующую модель для численного эксперимента. На глубине 45 м под поверхностью Земли располагалось два одинаковых точечных объекта на расстоянии 90 м между собой и один такой же объект на глубине 135 м (см. рисунок 2.1). Фазовая скорость в среде равна  $c_0=1800$  м/с. На поверхности Земли над объектами симметрично в квадрате размером  $380\times 380$  метров располагалось  $40\times 40$  приемников в узлах решетки с равномерным шагом. Источник располагался на поверхности посередине между объектами. Зондирование проводилось на частотах 40 и 60 Гц, что соответствует длинам волн 45 и 30 м. При решении обратной задачи область расчетов  $R$  имела размеры  $180\times 180\times 180$  метров, в ней была введена сетка  $33\times 33\times 33$  точек. Время расчета одной итерации итерационного процесса (2.5) на 512 вычислительных ядрах составило около 7.5 ч. Число неизвестных составило около 110000 комплексных чисел.

На рисунке 2.1 а, б, в приведено изображение амплитуды исходных данных в вертикальном и горизонтальных сечениях, проходящих через объекты. На рисунке 2.2 а, б, в восстановленное изображение в тех же сечениях. Проведенные модельные расчеты показывают, что в рамках поставленной обратной задачи волновой томографии удастся локализовать положения неоднородностей как в непосредственной близости к поверхности, так и на глубине.

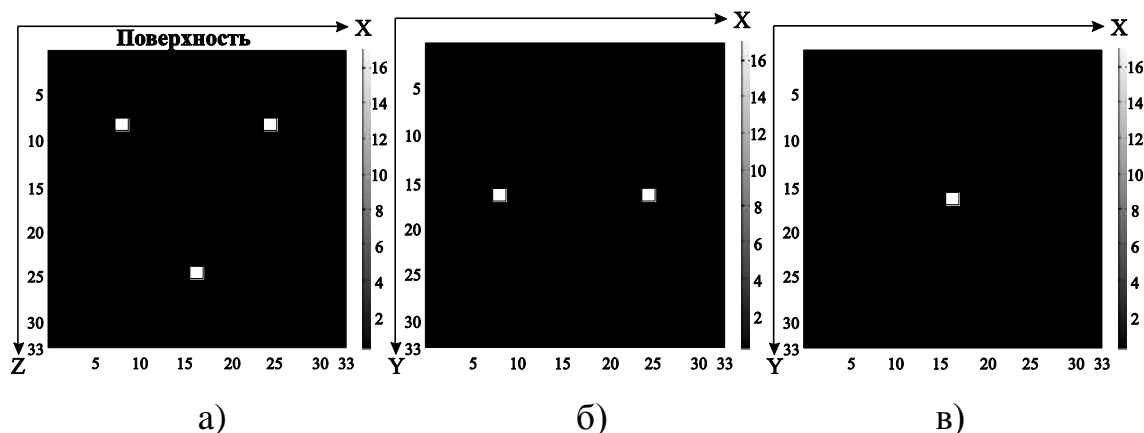


Рисунок 2.1 Исходное изображение трех объектов: а) – сечение в вертикальной плоскости, б) – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через два объекта, в) – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через один объект

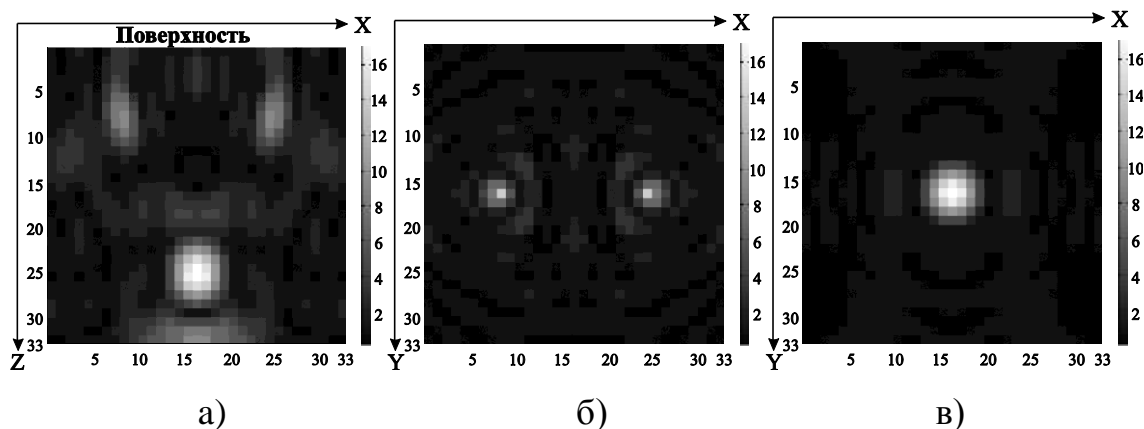


Рисунок 2.2 Восстановленное изображение трех объектов: а) – сечение в вертикальной плоскости, б) – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через два объекта, в) – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через один объект

В приведённом численном эксперименте источники и приёмники располагались только на поверхности Земли. Это, разумеется, накладывает ограничения на разрешающую способность сейсмических методов. Несколько лучше ситуация в инженерной сейсмике, когда исследуются небольшие области размерами в десятки метров. В этом случае можно расположить источники и приёмники не только на поверхности, но и в шурфах, окружающих исследуемую область. На рисунке 2.3а приведена схема модельного эксперимента (источники обозначены конусами, а приемники точками). Источники и приемники располагались на поверхности Земли (плоскость  $z=0$ ) в области размером  $20 \times 20$  м и в вертикальных шурфах глубиной до 10 м. Неоднородность выбрана в виде двух кубов. Размеры неоднородностей составляют 3 м и 6 м, шаг сетки 1,5 м. Фазовая скорость в неоднородностях равна 2000 м/сек, а в окружающем объёме — 1000 м/с. Задача решалась на одной частоте 100 Гц. На рисунке 2.3б изображено сечение результата реконструкции обратной задачи в плоскости OYZ на сетке  $18 \times 18 \times 18$  точек.

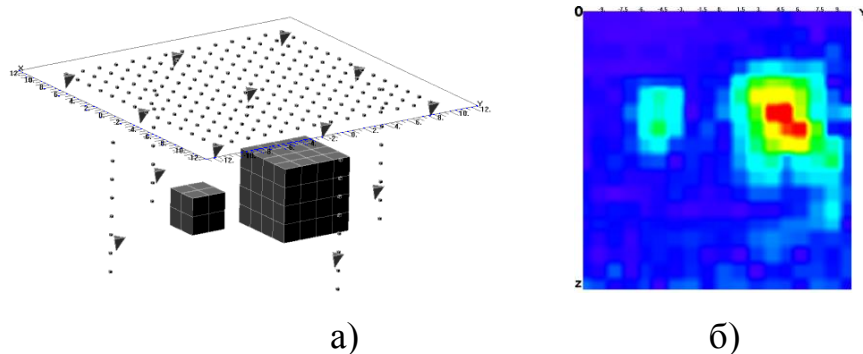


Рисунок 2.3 а) Схема эксперимента с шурфами; б) сечение в плоскости OYZ результата реконструкции двух неоднородностей на сетке  $18 \times 18 \times 18$  точек

Как видно из модельных расчетов, рассматриваемая нелинейная обратная задача в интегральном представлении из-за огромного объема вычислений является сложной для реализации даже на современных суперкомпьютерах. Даже использование 512 вычислительных ядер позволяет проводить расчеты только на сетке не более 20-30 точек по каждой координате, что недостаточно для сложных задач с реальными данными. Для сравнения в дифференциальном представлении в главе 4 решалась задача размером до  $400 \times 400 \times 400$  точек для 24 источников.

Естественным выходом в этом случае является линейаризация интегральных уравнений (приближения Борна, Рытова и т.д.) [48, 68, 91]. Использование линейаризованных приближений в интегральном подходе значительно сокращают объем вычислений. Однако возможности применения этих приближений в реальных задачах для сложных неоднородных сред достаточно ограничены из-за упрощения модели. Тем не менее, линейаризованные приближения можно использовать в случае простой структуры неоднородности (например, локализованных неоднородностей малого размера) или для получения начальных приближений итерационных процедур решения нелинейных обратных задач.

### 2.3 Линейаризованные модели в задачах волновой диагностики. Задачи с синтезированной апертурой

В этом разделе предложены методы и алгоритмы решения задач в линеаризованной интегральной постановке. Для диагностики исследуемой среды используется принцип синтезирования апертуры.

В методе синтезированной апертуры, как правило, в процессе зондирования исследуемого объекта источники и приемники перемещаются вдоль некоторой прямой или плоскости, и регистрируется отраженный от объекта сигнал. Одним из вариантов схемы зондирования является метод zero-offset сбора данных, когда пространственное положение источника совпадает с положением приемника. Основное отличие синтезированных апертур от обычных апертур антенн состоит в том, что синтезированная апертура формируется последовательно во времени и является результатом когерентного приема волны при различном положении в пространстве реальным приемником.

В зависимости от вида зондирующего импульса методы синтезированной апертуры различаются на узкополосные [7, 58, 84] и широкополосные [51]. Для узкополосной СА характерен эффект фазовой модуляции принимаемого траекторного сигнала от отражающего объекта. Этот эффект определяет фазовые алгоритмы обработки данных. Узкополосные СА обладают высоким разрешением в азимутальном направлении, однако, в некоторых случаях разрешение по дальности недостаточно. Для широкополосной СА характерен эффект сдвига по времени принимаемого импульса, что связано с изменением дальности от приемника до объекта вдоль траектории приема. В результате отраженный от точечного объекта сигнал имеет вид параболы в координатах траекторной дальности и времени приема. Широкополосные СА обладают высоким разрешением и по азимуту, и по дальности, однако использование зондирующего сигнала в виде короткого импульса часто не представляется возможным ввиду огромной требуемой импульсной мощности.

Методы СА находят применение в самых различных областях волнового зондирования. Одним из важнейших приложений является дистанционное зондирование Земли радиолокационными системами с синтезированием апертуры (РСА). Можно выделить две большие группы РСА: это РСА авиационного

базирования (пространственное разрешение до сантиметров) и космического базирования (пространственное разрешение до метров). Такие системы используются для мониторинга труднодоступных участков хозяйственной деятельности (наблюдение, классификация, оценка биомассы растительного покрова, мониторинг состояния подземных трубопроводов), для разведывательных целей и военных задач (обнаружение подземных бункеров, подпочвенных объектов, мин и т.д.) и т.п. Широко используются методы СА в гидролокации, где созданы специальные устройства для подводного наблюдения. [52]. Методы СА применяются в области неразрушающего контроля ультразвуком, в дефектометрия металлов, для контроля широкого круга сварных соединений [9, 131, 154, 159, 191]. Методы СА используются в медицине для визуализации внутренних органов с помощью ультразвука [133, 150, 194, 200].

В разделе 2.3.1 рассмотрена задача реконструкции в 3D методом синтезированной апертуры для широкополосного зондирующего импульса. В разделе 2.3.2 рассмотрена задача реконструкции изображения поверхности Земли РЛС с синтезированной апертурой для узкополосного зондирующего импульса.

### **2.3.1 Задача синтезирования апертуры в 3D для широкополосного импульса**

Рассмотрим линеаризованный интегральный подход к решению трёхмерных коэффициентных обратных задач во временной области в скалярной волновой модели (1.1). В приближении Борна для трёхмерной задачи со специальным набором экспериментальных данных (zero-offset data) с короткоимпульсными источниками возмущений в диссертации впервые предложен и теоретически обоснован эффективный метод обращения в 3D, позволивший решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке. Рассмотренная постановка задачи относится к методам синтезированной апертуры для широкополосного зондирующего импульса.

Введем, как и выше, обозначение,  $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$ , тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\Delta u(r, q, t) - \frac{1}{c_0^2(r)} \cdot u_{tt}(r, q, t) = \delta(r - q) \cdot f(t) - u_{tt}(r, q, t) \cdot \xi(r). \quad (2.10)$$

Обозначим через  $G(r, t, q, \tau)$  функцию Грина для волнового уравнения (2.10)

$$G(r, t, q, \tau) = \frac{1}{4\pi|r - q|} \delta\left(t - \tau - \frac{|r - q|}{c_0}\right). \quad (2.11)$$

Предположим, что интегралы, рассмотренные ниже, существуют, тогда легко видеть, что (2.10) может быть переписано как

$$u(r, q, t) - \frac{1}{4\pi|r - q|} f\left(t - \frac{|r - q|}{c_0}\right) = - \int_R \int_{\tau \geq 0} u_{\tau\tau}(\tilde{r}, q, \tau) \cdot \xi(\tilde{r}) \cdot G(r, t, \tilde{r}, \tau) d\tau d\tilde{r}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим борновское приближение [44], т.е. будем считать, что функция  $u(\tilde{r}, q, t)$  стоящая под интегралом в правой части (2.12), равна

$$u(\tilde{r}, q, t) = \frac{1}{4\pi|\tilde{r} - q|} f\left(\tau - \frac{|\tilde{r} - q|}{c_0}\right). \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.12), а также интегрируя по  $\tau$  в (2.12) имеем

$$U(r, q, t) = \int_R \frac{1}{16\pi^2|\tilde{r} - r||\tilde{r} - q|} f''\left(t - \frac{|\tilde{r} - r| + |\tilde{r} - q|}{c_0}\right) \cdot \xi(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad (2.14)$$

где через  $U(r, q, t)$  обозначена левая часть уравнения (2.12), которая известна в области измерений (при  $r \in P$ ). Таким образом, обратная задача в борновском приближении сводится к определению  $\xi(\tilde{r})$  из линейного интегрального уравнения (2.14).

Борновское приближение позволяет линеаризовать уравнение, поскольку вместо произведения двух неизвестных функций  $u_{\tau\tau}(\tilde{r}, q, \tau)\xi(\tilde{r})$ , мы получаем произведение известной функции  $f''(\cdot)$  на неизвестную  $\xi(r)$ . Линейные уравнения, как известно, решать значительно проще, чем нелинейные. Конечно, борновское приближение справедливо отнюдь не всегда. Оно предполагает, что волна в рассматриваемой среде не претерпевает деформаций и распространяется примерно так же, как в однородной среде. Однако существует целый ряд важных

приложений, где это приближение допустимо. Некоторые из них рассмотрены в разделе 2.3.

Для короткоимпульсных источников возмущений основные значения функции  $f(t)$  сосредоточены при малых  $t$ . Будем считать, что функция  $f''(t) = \delta(\cdot)$ . В этом случае уравнение (2.14) сводится к виду

$$U(r, q, t) = - \int_R \frac{1}{16\pi^2 |\tilde{r} - r| |\tilde{r} - q|} \delta\left(t - \frac{|\tilde{r} - r| + |\tilde{r} - q|}{c_0}\right) \cdot \xi(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (2.15)$$

Таким образом, обратная задача в борновском приближении для короткоимпульсных источников сводится к определению  $\xi(\tilde{r})$  из линейного интегрального уравнения (2.15).

Заметим, что интеграл в уравнении (2.15) имеет специальный вид. Он представляет собой интеграл от функции  $\xi(\tilde{r})$  с некоторым весовым множителем по двумерной поверхности пересечения области  $R$  и эллипсоида

$$t = \frac{|\tilde{r} - r| + |\tilde{r} - q|}{c_0}. \quad (2.16)$$

при различных значениях параметров  $t, r, q$ . Параметры  $r, q$  определяют фокусы эллипсоида, а параметр  $t$  — размер эллипсоида. Подобная задача относится к области томографических задач, в которых требуется найти некоторую функцию в  $R^3$  по известным интегралам от этой функции вдоль различных двумерных поверхностей [28].

### **2.3.1.1 Метод прямого обращения в линеаризованных задачах волновой диагностики**

Остановимся на методах решения трехмерного томографического уравнения (2.15). Предлагаемый в диссертации метод по своей структуре похож на хорошо известный алгоритм  $\rho$  - фильтрации обратной проекции, который используется в задаче классической двумерной томографии реконструкции изображения по его преобразованию Радона. Как известно, алгоритм  $\rho$  - фильтрации разбивается на два этапа. На первом этапе выполняется операция

обратной проекции, в которой к исходным данным применяется оператор сопряженный в некоторых пространствах к прямому.

В рассматриваемой трехмерной задаче на первом этапе левую и правую часть уравнения (2.15) умножим на  $R^*$ . Уравнение принимает вид

$$R^*U = R^*R\xi, \quad (2.17)$$

где через  $R$  - обозначен интегральный оператор (2.15),  $R^*$  - оператор, имеющий вид

$$R^*U(r, q, t) = -\int_P \left( \int_{t \geq 0} \frac{1}{16\pi^2 |\tilde{r} - r| |\tilde{r} - q|} \delta\left(t - \frac{|\tilde{r} - r| + |\tilde{r} - q|}{c_0}\right) U(r, q, t) dt \right) dr = v(\tilde{r}, q), \quad (2.18)$$

где  $\tilde{r} \in R^3$ .

Как видно, вычисление выражения (2.18) сводится к интегрированию с некоторым весовым множителем функции  $U(r, q, t)$ , измеренной в ходе эксперимента, по гиперблоидам, определяемым уравнением (2.16) в пространстве переменных  $t, r$ , при различных значениях параметра  $\tilde{r}$ . Интересно отметить, что идеи обратной проекции, которые сводятся к вычислению выражения (2.18) от известной функции  $U(r, q, t)$ , широко распространены в обратных задачах, в том числе в сейсморазведке [96, 215], где для обращения интегрального уравнения (2.15) применяется оператор  $R^*$ . Однако в рассматриваемой задаче, как будет показано ниже, оператор  $R^*$  отличен от обратного  $R^{-1}$ . В связи с этим необходимо выполнение второго этапа алгоритма, на котором осуществляется обращение уравнения (2.17). Похожий этап в задачах классической двумерной томографии называется  $\rho$  - фильтрацией.

Будем рассматривать задачу (2.15), когда источники и приёмники располагаются на плоскости  $z=0$  ( $r=(x, y, 0)$ ). Будем считать, что измерения поля в эксперименте проводятся в точке расположения источника  $q$ , т.е.  $r=q$ . В задачах сейсморазведки такой набор данных называется zero-offset data.

На втором этапе алгоритма осуществляется обращение уравнения (2.17), при условии  $r=q$ . Пусть  $\xi(\tilde{r})$  - описывает неоднородность  $\tilde{r} \in R^3$ . Прямой оператор обозначим через  $R$ , тогда данные  $U(r, t)$ , записанные на поверхности



$z=0$  ( $r=(x,y,0)$ ), в приближении короткоимпульсных источников ( $f''(\cdot) \rightarrow \delta(\cdot)$ ) выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} R\xi = U(r,t) &= \int d\tilde{r} \frac{1}{16\pi^2 |\tilde{r}-r|^2} \cdot \xi(\tilde{r}) f''\left(t - \frac{2/|\tilde{r}-r|}{c_0}\right) = \\ &= -\int d\tilde{r} \frac{1}{16\pi^2 |\tilde{r}-r|^2} \xi(\tilde{r}) \delta\left(t - \frac{2/|\tilde{r}-r|}{c_0}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Оператор  $R^*$  имеет вид

$$R^*U(r,t)(\bar{r}) = W(\bar{r}) = -\int U(r,t) \frac{1}{16\pi^2 |r-\bar{r}|^2} \cdot \delta\left(t - \frac{2/|r-\bar{r}|}{c_0}\right) dr dt,$$

где  $\bar{r} \in R^3$ . Вычислим оператор  $R^*R\xi$ :

$$\begin{aligned} R^*R\xi = W(\bar{r}) &= \\ &= \int_{z=0} dr \int_{t \geq 0} dt \frac{1}{16\pi^2 |r-\bar{r}|^2} \cdot \delta\left(t - \frac{2/|r-\bar{r}|}{c_0}\right) \int_{H \subset R^3} d\tilde{r} \frac{1}{16\pi^2 |\tilde{r}-r|^2} \cdot \delta\left(t - \frac{2/|\tilde{r}-r|}{c_0}\right) \cdot \xi(\tilde{r}) = \\ &= \int d\tilde{r} \xi(\tilde{r}) \int dr \frac{1}{16\pi^2 16\pi^2 |r-\bar{r}|^2 |\tilde{r}-r|^2} \cdot \delta\left(\frac{2/|\bar{r}-r|}{c_0} - \frac{2/|\tilde{r}-r|}{c_0}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $\tilde{r} \in H \subset R^3$ ,  $\bar{r} \in R^3$ ,  $r \in R^2$ ,  $H$  — ограниченная область неоднородности, расположенная в области  $z > 0$ ; в последнем равенстве взят интеграл по  $t$ .

Для того, чтобы в выражении (2.20) взять интеграл по  $r$  от  $\delta(\cdot)$ -функции, воспользуемся следующей формулой (2.21) [49]. Пусть функция  $P(r)$  ( $r=(x,y) \in R^2$ ), такая что  $P(r) \in C^\infty$ ,  $grad P \neq 0$  при  $P=0$ . Пусть введены новые координаты  $u, v$  в окрестности поверхности  $P=0$ , причем  $u=P(r)$  и якобиан  $D\left(\frac{xy}{uv}\right)$  отличен от нуля в этой окрестности. Тогда

$$\int \delta(P) \varphi(r) dr = \int \psi(0, v), \quad (2.21)$$

где  $\psi(u, v) = \varphi_1(u, v) \cdot D\left(\frac{xy}{uv}\right)$ ,  $\varphi_1(u, v) = \varphi(x, y)$ .

Рассмотрим интеграл по  $r$  в выражении (2.20), который обозначим  $I$ , обозначим через  $B$  множитель  $\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{16\pi^2}$  и проведем замену переменных

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{2/|\bar{r}-r|}{c_0} - \frac{2/|\tilde{r}-r|}{c_0}, \text{ где } r=(x, y), \text{ имеем} \\ y = y \end{cases}$$

$$I = B \int dr \frac{1}{|r - \bar{r}|^2 |\tilde{r} - r|^2} \cdot \delta \left( \frac{2|r - \bar{r}|}{c_0} - \frac{2|r - \tilde{r}|}{c_0} \right) = B \int dy \frac{J \left( \frac{x, y}{u, y} \right)}{|r(u, y) - \bar{r}|^2 \cdot |\tilde{r} - r(u, y)|^2} \Bigg|_{u=0}. \quad (2.22)$$

Вычислим якобиан  $J \left( \frac{u, y}{x, y} \right)$ . Учитывая, что  $|r - \bar{r}| = \left( (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + \bar{z}^2 \right)^{0.5}$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{c_0} \frac{(x - \bar{x})}{\left( (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + \bar{z}^2 \right)^{0.5}} - \frac{2}{c_0} \frac{(x - \tilde{x})}{\left( (x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 + \tilde{z}^2 \right)^{0.5}} = \frac{2(x - \bar{x})}{c_0 |r - \bar{r}|} - \frac{2(x - \tilde{x})}{c_0 |r - \tilde{r}|}.$$

Таким образом,

$$J \left( \frac{u, y}{x, y} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left| \frac{2(x - \bar{x})}{c_0 |r - \bar{r}|} - \frac{2(x - \tilde{x})}{c_0 |r - \tilde{r}|} \right|$$

или

$$J \left( \frac{x, y}{u, y} \right) = \frac{c_0}{2} \frac{|r - \bar{r}| |r - \tilde{r}|}{|(x - \bar{x})/|r - \tilde{r}| - (x - \tilde{x})/|r - \bar{r}|}.$$

Продолжим вычисления в (2.22)

$$\begin{aligned} I &= B \int dy \frac{c_0}{2} \frac{1}{|(x - \bar{x})/|r - \tilde{r}| - (x - \tilde{x})/|r - \bar{r}|} \frac{1}{|r - \bar{r}| \cdot |r - \tilde{r}|} \Bigg|_{u=0} = \\ &= B \int dy \frac{c_0}{2} \frac{1}{|\tilde{x} - \bar{x}|/|\bar{r} - r|/|r - \tilde{r}| \cdot |r - \tilde{r}|} \Bigg|_{u=0} = B \frac{c_0}{2|\tilde{x} - \bar{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|\bar{r} - r|^2} \Bigg|_{u=0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для вычисления интеграла в (2.23) воспользуемся рисунком 2.4. Из рисунка нетрудно получить соотношения, где  $s$  — натуральный параметр вдоль прямой интегрирования

$$|\bar{r} - r|^2 \Big|_{u=0} = a^2 + s^2, \quad dy = |\cos \varphi| ds = \frac{|\bar{x} - \tilde{x}|}{\sqrt{(\bar{x} - \tilde{x})^2 + (\bar{y} - \tilde{y})^2}} ds = \frac{|\bar{x} - \tilde{x}|}{c} ds,$$

где ввели обозначение  $c = \sqrt{(\bar{x} - \tilde{x})^2 + (\bar{y} - \tilde{y})^2}$ .

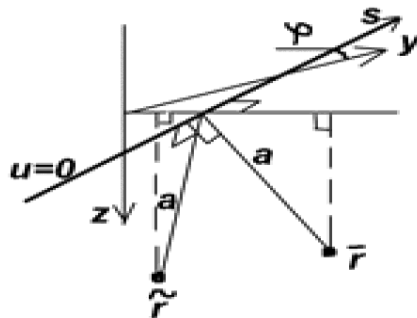


Рисунок 2.4 К выводу формул вычисления интегралов

Найдем  $a^2$ . Из рисунка нетрудно получить соотношение

$$\sqrt{(a^2 - \bar{z}^2)} + \sqrt{(a^2 - \tilde{z}^2)} = \sqrt{\bar{A}} + \sqrt{\tilde{A}} = c = \sqrt{(\bar{x} - \tilde{x})^2 + (\bar{y} - \tilde{y})^2}.$$

Выполним преобразования

$$\bar{A} + \tilde{A} + 2\sqrt{\bar{A}\tilde{A}} = c^2; \quad \bar{A}^2 + \tilde{A}^2 + 2\bar{A}\tilde{A} + c^4 - 2c^2(\bar{A} + \tilde{A}) = 4\bar{A}\tilde{A}; \quad (\bar{A} - \tilde{A})^2 + c^4 - 2c^2(\bar{A} + \tilde{A}) = 0;$$

$$(\tilde{z}^2 - \bar{z}^2)^2 + c^4 - 2c^2(2a^2 - \tilde{z}^2 - \bar{z}^2) = 0; \quad \frac{(\tilde{z}^2 - \bar{z}^2)^2 + c^4}{2c^2} + \tilde{z}^2 + \bar{z}^2 = 2a^2;$$

$$\frac{(\tilde{z}^2 - \bar{z}^2)^2 + c^4 + 2c^2(\tilde{z}^2 - \bar{z}^2) + 4c^2\bar{z}^2}{2c^2} = 2a^2.$$

Окончательно имеем 
$$\frac{(c^2 + (\tilde{z}^2 - \bar{z}^2))^2 + 4c^2\bar{z}^2}{4c^2} = a^2.$$

Воспользуемся табличным интегралом [49]

$$2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \frac{0!}{(2*0+1)!! \sqrt{a^2} (\sqrt{1a^2 + 0})^1} = \frac{2}{a^2}.$$

Продолжим вычисления в (2.23)

$$\begin{aligned} I &= \frac{Bc_0}{2|\bar{x} - \tilde{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|\bar{r} - r|^{\beta}} \Big|_{u=0} = \frac{Bc_0}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Bc_0}{2c} \frac{4c^2}{(c^2 + (\tilde{z}^2 - \bar{z}^2))^2 + 4c^2\bar{z}^2} = \\ &= \frac{Bc_0 2c}{c^4 + (\tilde{z}^2 + \bar{z}^2)^2 + 2c^2(\tilde{z}^2 + \bar{z}^2) - 4\tilde{z}^2\bar{z}^2} = \frac{Bc_0 2c}{(c^2 + (\tilde{z}^2 + \bar{z}^2))^2 - 4\tilde{z}^2\bar{z}^2} = \\ &= \frac{Bc_0 2c}{(c^2 + (\tilde{z}^2 - 2\tilde{z}^2\bar{z}^2 + \bar{z}^2))(c^2 + (\tilde{z}^2 + 2\tilde{z}^2\bar{z}^2 + \bar{z}^2))} = \frac{Bc_0 2c}{(\bar{r} - \tilde{r})^2 (\bar{r} - \tilde{r}^*)^2} = I. \end{aligned}$$

Таким образом, возвращаясь к (2.20)

$$R^* R \xi = \frac{2c_0}{(16\pi^2)^2} \int_H \frac{\sqrt{(\bar{x} - \tilde{x})^2 + (\bar{y} - \tilde{y})^2}}{|\bar{r} - \tilde{r}|^{\beta} |\bar{r} - \tilde{r}^*|^{\beta}} \xi(\tilde{r}) d\tilde{r} = R^* U = v(\tilde{r}), \quad (2.24)$$

где  $\tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in R^3$ ,  $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in R^3$ ,  $\tilde{r}^* = (\tilde{x}, \tilde{y}, -\tilde{z}) \in R^3$ .

Как можно заметить из (2.24), ядро оператора  $R^* R$  имеет особенность в точке  $\tilde{r}$ , однако  $R^* R$  не является единичным оператором. Полученное выражение (2.24) показывает, что функцию  $R^* U = v(\bar{r})$ , вообще говоря, нельзя

рассматриваемая как реконструированное изображение, поскольку она существенно отличается от  $\xi(\tilde{r})$ .

В настоящей работе предлагается для получения функции  $\xi(\tilde{r})$  решить уравнение (2.24), которое является интегральным уравнением 1 рода.

Проведем несложные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} - \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} &= \frac{|\bar{r}-\tilde{r}^*|^2 - |\bar{r}-\tilde{r}|^2}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2 |\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} = \\ &= \frac{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2 + (\bar{z}-(-\tilde{z}))^2 - (\bar{x}-\tilde{x})^2 - (\bar{y}-\tilde{y})^2 - (\bar{z}-\tilde{z})^2}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2 |\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} = \\ &= \frac{\tilde{z}^2 + 2\tilde{z}\bar{z} + \bar{z}^2 - \bar{z}^2 + 2\tilde{z}\bar{z} - \tilde{z}^2}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2 |\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} = \frac{4\tilde{z}\bar{z}}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2 |\bar{r}-\tilde{r}^*|^2}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2 |\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} = \frac{1}{4\tilde{z}\bar{z}} \cdot \left[ \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} - \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} \right].$$

Обозначим  $C = \frac{2c_0}{(16\pi^2)^2} \sqrt{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2}$ , тогда

$$\begin{aligned} R^* R \xi &= \int_H \frac{C}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2 |\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} \cdot \xi(\tilde{r}) d\tilde{r} = \int_H \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \left[ \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} - \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} \right] \cdot \xi(\tilde{r}) d\tilde{r} = \\ &= \int_H \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} \xi(\tilde{r}) d\tilde{r} - \int_H \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} \xi(\tilde{r}) d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Преобразуем второе слагаемое, делая подстановку  $\tilde{z} = -\tilde{z}$ :

$$\begin{aligned} \int_H \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}^*|^2} \xi(\tilde{r}) d\tilde{r} &= \iiint_{a c e}^{b d f} \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2 + (\bar{z}-(-\tilde{z}))^2} \xi(\tilde{r}) d\tilde{z} d\tilde{x} d\tilde{y} = \\ &= \iiint_{a c}^{b d} \int_{-e}^{-f} \frac{C}{-4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2 + (\bar{z}-\tilde{z})^2} \xi(\tilde{x}, \tilde{y}, -\tilde{z}) (-d\tilde{z}) d\tilde{x} d\tilde{y} = \\ &= - \iiint_{a c}^{b d} \int_{-f}^{-e} \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2 + (\bar{z}-\tilde{z})^2} \xi(\tilde{x}, \tilde{y}, -\tilde{z}) d\tilde{z} d\tilde{x} d\tilde{y} = - \int_{H^*} \frac{C}{4\tilde{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} \xi(\tilde{r}^*) d\tilde{r}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in H^*$ ,  $H^*$  - область симметричная  $H$  относительно плоскости  $z=0$ .

Доопределим искомую  $\xi(\tilde{r})$  в области  $H^*$  нулем, тогда

$$\int_{H^*} \frac{C}{4\bar{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} \xi(\tilde{r}) d\tilde{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int_H \frac{C}{4\bar{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} \xi(\tilde{r}^*) d\tilde{r} = 0.$$

Таким образом, продолжая (2.25), имеем:

$$R^*R\xi = \int_{H \cup H^*} \frac{C}{4\bar{z}\bar{z}} \frac{1}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} (\xi(\tilde{r}) + \xi(\tilde{r}^*)) d\tilde{r} = \frac{2c_0}{(16\pi^2)^2 \bar{z}} \int_{H \cup H^*} \frac{\sqrt{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2}}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} \cdot \frac{\xi(\tilde{r}) + \xi(\tilde{r}^*)}{4\bar{z}} d\tilde{r}.$$

Т.е. уравнение (2.24) сводится к виду:

$$\bar{z}R^*R\xi = \frac{2c_0}{(16\pi^2)^2} \int_{H \cup H^*} \frac{\sqrt{(\bar{x}-\tilde{x})^2 + (\bar{y}-\tilde{y})^2}}{|\bar{r}-\tilde{r}|^2} \frac{\xi(\tilde{r}) + \xi(\tilde{r}^*)}{4\bar{z}} d\tilde{r} = \bar{z}v(\bar{r}) = \bar{z}R^*U, \quad (2.26)$$

где интегрирование проводится по области  $H$  и симметричной ей области  $H^*$  относительно плоскости  $z=0$ . Искомая функция  $\eta(\tilde{r}) = \frac{\xi(\tilde{r}) + \xi(\tilde{r}^*)}{4\bar{z}}$  по условию вне области  $H \cup H^*$  обращается в нуль. Нетрудно заметить, что уравнение (2.26) рассмотренное на всем пространстве  $R^3$  является уравнением типа свертки относительно функции  $\eta(\tilde{r})$ .

Для получения приближенного решения в некорректно поставленной задаче (2.24) можно воспользоваться схемой Тихонова [92]. В ней приближенное решение находится по формуле

$$\eta^\alpha = (R^*R + \alpha E)^{-1} (\bar{z}R^*U), \quad (2.27)$$

где  $\alpha$  - параметр регуляризации. Для численной реализации алгоритма (2.26) для уравнений типа свертки удобно использовать преобразование Фурье.

Вычислим аналитически преобразование Фурье от ядра уравнения (2.26). Перейдем к цилиндрическим координатам  $\{x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z\}$

$$\begin{aligned} FK &= \iiint \exp[-i(w_1x + w_2y + w_3z)] \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \\ &= \iiint \exp[-i\rho(w_1 \cos \varphi + w_2 \sin \varphi) \exp\{-iw_3z\}] \frac{\rho}{\rho^2 + z^2} \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_{\rho} \left[ \int_{\varphi} \exp[-i\rho(\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \cos(\varphi - \varphi_0))] d\varphi \right] \left[ \int_z \exp\{-iw_3z\} \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} dz \right] d\rho, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $\varphi_0$  - не зависит от переменных интегрирования. Найдем интеграл по  $d\varphi$  [49]:

$$\int_{\varphi} \exp\{-i\rho(\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \cos(\varphi - \varphi_0))\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \exp\{-i\mu \cos(\varphi - \varphi_0)\} d\varphi = 2\pi J_0(\mu),$$

где введено обозначение  $\mu = \rho\sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ ,  $J_0(x)$  - функция Бесселя первого рода.

Найдем интеграл по  $dz$  [49]:

$$\int_z \exp\{-iw_3z\} \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} dz = \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-iw_3z\}}{\rho^2 + z^2} dz = \rho^2 \frac{\pi}{\rho} \exp(-|\rho w_3|) = \rho\pi \exp(-|\rho w_3|).$$

Продолжим вычисления в (2.28)

$$\begin{aligned} FK &= \int_{\rho} \left[ 2\pi J_0\left(\rho\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right) \right] \left[ \rho\pi \exp(-|\rho w_3|) \right] d\rho = \\ &= 2\pi^2 \int_0^{\infty} J_0\left(\rho\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right) \exp(-|\rho w_3|) \rho d\rho = 2\pi^2 \frac{|w_3|}{(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

где использовали табличный интеграл [49].

Таким образом, получаем явное выражение для алгоритма (2.27)

$$\xi^{\alpha}(\tilde{r}) + \xi^{\alpha}(\tilde{r}^*) = \frac{2(16\pi^2)^2}{c_0} \tilde{z} \cdot F^{-1} \left( \left( \frac{2\pi^2 |w_3|}{(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^{\frac{3}{2}}} + \alpha \right)^{-1} F(\tilde{z} \cdot R^* U) \right), \quad (2.29)$$

где  $F, F^{-1}$  - прямое и обратное преобразование Фурье в  $R^3$ . Используя априорные данные о том, что  $H$  располагается в полуплоскости  $z > 0$  выделяем функцию  $\xi^{\alpha}(\tilde{r})$  рассматривая только такие, что  $\tilde{z} > 0$ .

**Замечание 2.1** Предложенные алгоритмы по своей структуре похожи на хорошо известный алгоритм « $\rho$ -фильтрации обратной проекции». Этот метод широко используется в задаче классической двумерной томографии реконструкции изображения по его интегральным характеристикам [135].

**Замечание 2.2** В обратных задачах зачастую используется приближённый метод решения, заключающийся в том, что вместо обратного оператора  $R^{-1}$  используется сопряжённый оператор  $R^*$ . Такая популярность применения сопряжённого оператора для обращения связана с тем, что, как правило, ядро оператора  $R^*R$  имеет особенность. В рассматриваемой задаче, как видно из (2.24), ядро оператора  $R^*R$  имеет особенность в точке  $\tilde{r}$ . Из приведённых ниже

модельных расчётов видно, что методы полного обращения в обратной задаче позволяют получить гораздо лучшие результаты по сравнению с сопряжённым оператором.

### 2.3.1.2 Модельные расчёты в задаче синтезирования апертуры в 3D для широкополосного импульса

В диссертации были проведены модельные расчеты по решению прямой и обратной задачи рассмотренными выше методами. На первом этапе расчетов решалась прямая задача. Решение прямой задачи необходимо для получения данных на детекторах, которые в дальнейшем используются в обратной задаче в качестве экспериментальных данных. В прямой задаче задавалась модельная неоднородность, описываемая функцией  $\xi(r)$ . Место регистрации совпадает с местом возмущения среды и проводится на плоскости  $z=0$  в декартовой системе координат  $Oxyz$ , ось  $Z$  направлена вниз, а неоднородность располагалась в полупространстве  $z>0$ . На рисунке 2.5 приведены сечения в плоскости  $Oxz$  модельных неоднородностей, описываемых функцией  $\xi(r)$ , которые использовались при решении двух модельных задач.

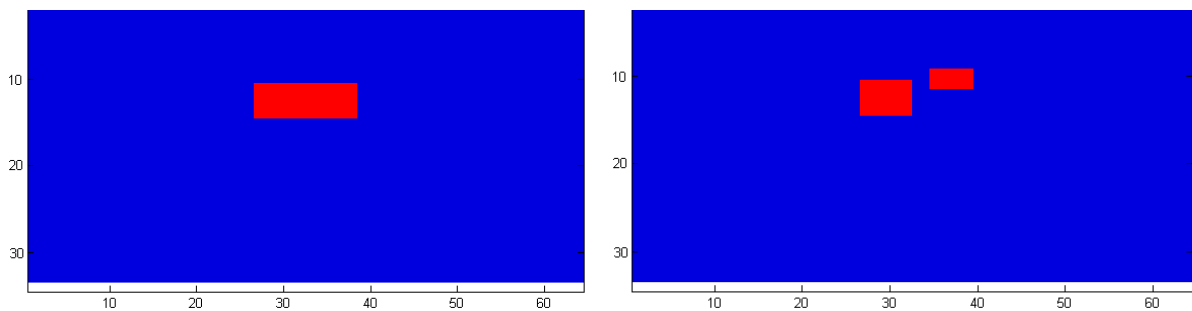


Рисунок 2.5 Сечения в плоскости  $Oxz$  модельных неоднородностей

На втором этапе решалась обратная задача описанными выше методами. Были проведены модельные расчеты по реконструкции изображений трехмерных объектов методом обращения по формуле (2.29) и методом «приближенного» обращения по формуле (2.18). Как видно из формулы (2.18), вычисления методом обратной проекции являются прямыми вычислениями, т.е. необходимо найти

интеграл от известных экспериментальных данных  $R^*U(r,t)(\bar{r})$  для набора точек  $\bar{r} \in R^3$ .

На рисунке 2.6 приведены сечения в плоскости  $Oxz$  восстановленных методом обратной проекции модельных неоднородностей (см. рисунок 2.5). Из рисунков видно, что этот метод позволяет получать лишь размазанное изображение.

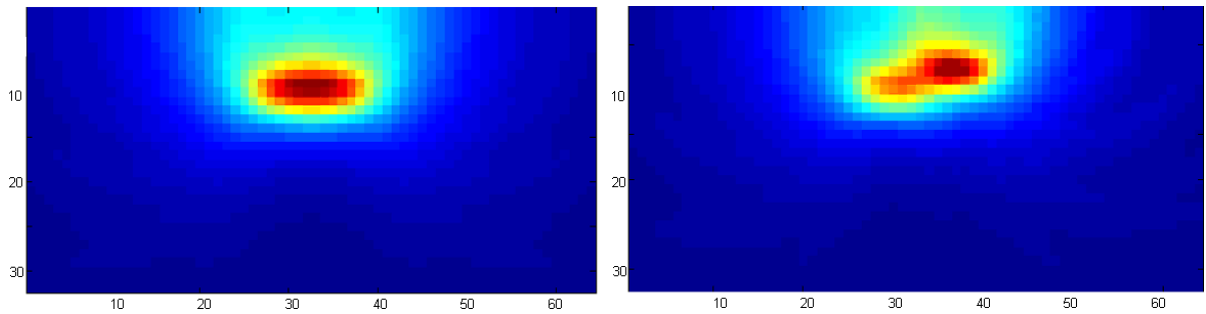


Рисунок 2.6 Сечения в плоскости  $Oxz$ , восстановленные, методом обратной проекции

Далее проводилось решение обратных задач методом обращения по формуле (2.29). Как видно из формулы (2.29), этот метод состоит из двух шагов: на первом шаге применяется оператор  $R^*$ , а на втором — решается уравнение типа свертки с помощью преобразования Фурье. На рисунке 2.7 приведены сечения в плоскости  $Oxz$  восстановленных методом обращения модельных неоднородностей на сетке размера  $64 \times 64 \times 32$  точки. Время решения на 16 вычислительных ядрах суперкомпьютера «Чебышев» одной задачи составило около 20 сек. Результаты расчетов подтвердили высокие вычислительные возможности предлагаемого метода.

Экспериментальные данные для решения обратной задачи брались из решения прямой задачи (2.19). В силу сделанных выше упрощений, прямая задача (2.19) лишь приближённо описывает реальные физические процессы распространения и отражения волн. Рассмотренный подход может быть с успехом использован для обнаружения малоразмерных тел, границ объектов в задачах сейсморазведки, георадарного зондирования приповерхностных слоёв Земли, неразрушающего контроля в промышленности [34, 42].



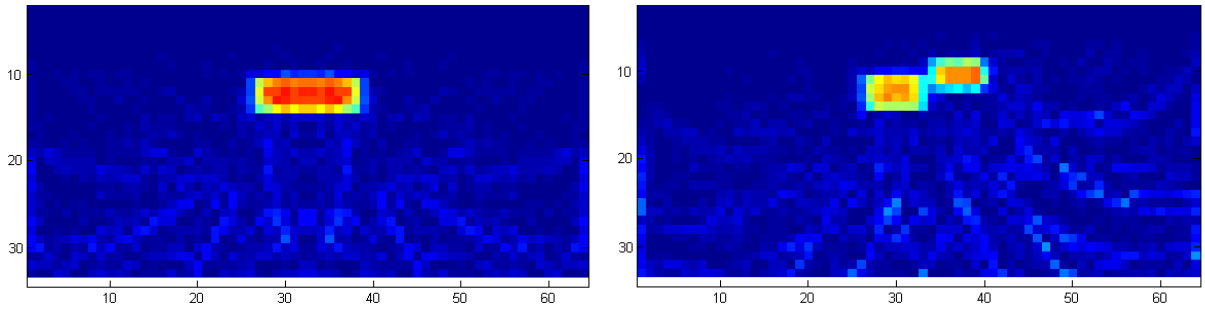


Рисунок 2.7 Сечения в плоскости  $Oxz$ , восстановленные методом обращения

Анализируя вычислительный аспект рассматриваемого метода в трёхмерной задаче синтеза апертуры для широкополосного импульса, можно видеть, что основной объем вычислений приходится на первый шаг расчетов по формуле (2.18). Эти вычисления легко распараллеливаются, поскольку представляют собой независимые расчёты для разных  $\vec{r} \in R^3$ . Объем вычислений метода составляет порядка  $O(n^5)$  где  $n$  — число точек сетки по одной координате. Как видно из приведенной задачи, линеаризация нелинейной обратной задачи в интегральном представлении и использование ее специфики позволяет на несколько порядков уменьшить объем вычислений. Это приводит к возможности решать задачи на сетках большого размера за малое время.

### 2.3.2 Задача РЛС с синтезированной апертурой для реконструкции изображения поверхности Земли

Рассмотрим интересный класс обратных задач реконструкции изображения поверхности Земли с помощью РЛС с синтезированной апертурой для узкополосного импульса. С математической точки зрения этот класс задач как и рассмотренный в предыдущем разделе 2.3.1 является линеаризацией нелинейных обратных задач в интегральном представлении. Схема зондирования и постановка задачи похожи на рассмотренную выше. Отличия заключаются в том, что задача сводится к двумерной постановке для узкополосного импульса зондирования, регистрируется не только время прихода отраженного сигнала, но и фаза.

РЛС с синтезированной апертурой являются одним из перспективных направлений дистанционного исследования поверхности Земли с борта летательного аппарата. Применение волн радиодиапазона с длиной волны порядка 0.1 м позволяет вести наблюдения практически независимо от времени суток и состояния атмосферы.

Основной проблемой при использовании РЛС на борту летательного аппарата является проблема разрешающей способности. Большая удаленность носителя РЛС от исследуемого участка поверхности (в случае космических аппаратов дальность может составлять сотни километров), естественные ограничения на размеры (апертуру) антенны, установленной на борту летательного аппарата, достаточно большая длина волны зондирующего излучения - все эти факторы приводят к тому, что диаметр области взаимодействия излучения РЛС с исследуемой поверхностью является чрезвычайно большим — до нескольких километров. Для большинства приложений такой диаметр луча является неприемлемым с точки зрения разрешающей способности.

Повышение разрешающей способности РЛС возможно за счет применения специализированной методики наблюдений, основанной на принципах синтезирования апертуры. Идеи синтезирования апертуры заключаются в когерентном зондировании поверхности Земли с помощью РЛС бокового обзора на протяжении достаточно большого участка траектории движения носителя РЛС и последующей реконструкции изображения исследуемой поверхности по совокупности данных, полученных с различных точек траектории [7, 66, 82, 85, 176, 182, 208].

### **2.3.2.1 Принципы синтезирования апертур для узкополосных импульсов зондирования**

Схема наблюдений и регистрации данных РЛС с синтезированной апертурой показана на рисунке 2.8. На борту летательного аппарата, движущегося

по прямолинейной траектории над картографируемой поверхностью Земли, установлена РЛС бокового обзора, жестко связанная с носителем, которая излучает зондирующие сигналы  $s(t)$  (как правило, импульсные). Зондирующее излучение, распространяясь, достигает исследуемой поверхности, взаимодействует с ней, отражается и поступает на приемные устройства РЛС. Отраженные сигналы  $u(t)$  прошедшие циклы усиления и детектирования, регистрируются в качестве исходных данных. При этом специальная аппаратура, установленная на борту носителя, позволяет регистрировать как амплитуду, так и фазу отраженного сигнала.

Построим математическую модель процесса зондирования в рамках линейного приближения. Будем считать, что при отражении сигналов от исследуемой поверхности, их приеме на борту летательного аппарата, а также при усилении и детектировании выполняется принцип суперпозиции откликов от различных участков поверхности. Кроме того будем использовать стандартное старт-стоповое приближение [95], т.е. предполагаем, что можно пренебречь изменением геометрических параметров системы "носитель - картографируемая поверхность" в течение цикла излучения-приема.

Рассмотрим для простоты изложения плоскопараллельный случай движения носителя по прямой, параллельной плоскости Земли. Подобное приближение при незначительных искривлениях траектории носителя и рельефа местности вполне допустимо и приводит к незначительным геометрическим искажениям реконструируемой поверхности. Однако для получения высокоточных изображений необходим и в ряде случаев возможен учет априорной информации об искривлении траектории и рельефе поверхности Земли.

Свяжем с исследуемой областью поверхности Земли декартову систему координат  $OXYZ$  (рисунок 2.8). Будем считать, что носитель РЛС движется по прямой на высоте  $H$  вдоль оси  $OX$ , т.е. точки траектории носителя РЛС имеют координаты  $(x, 0, H)$ . На траектории носителя введем координату  $\xi$ , так что  $\xi = x$ . Для удобства дальнейшего изложения перейдем на поверхности Земли от координаты  $y$  к координате  $\rho$  по следующей формуле  $\rho = \sqrt{y^2 + H^2}$ . Введенные

координаты  $(x, \rho)$  на поверхности Земли называются азимутальной и наклонной дальностями.

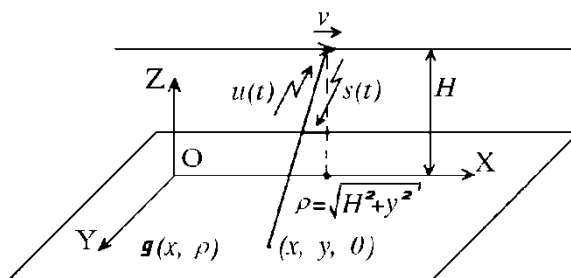


Рисунок 2.8 Схема наблюдений и регистрации данных РЛС с синтезированной апертурой

Отражающие свойства поверхности Земли будем характеризовать с помощью комплекснозначного коэффициента  $g(x, \rho)$  так, что  $g(x, \rho) dx d\rho$  — линейный коэффициент отражения радиоволн в направлении носителя РЛС от элементарной площадки  $dx d\rho$  с координатами  $(x, \rho)$ . Модуль  $g(x, \rho)$  описывает эффективность отражения энергии, а фаза — эффекты взаимодействия зондирующего излучения с исследуемой поверхностью при отражении. При этом будем считать, что в рассматриваемом угловом диапазоне облучения точки  $(x, \rho)$  на поверхности Земли  $g(x, \rho)$  не зависит от углов зондирования. Введенный коэффициент отражения  $g(x, \rho)$  характеризует свойства исследуемой поверхности и сложным образом зависит как от микро- и макрорельефа поверхности, так и от характеристик отражающего материала. Модуль функции  $g(x, \rho)$  является искомой величиной в задачах построения изображений РЛС с синтезированной апертурой.

Обозначим через  $s(t)$  — излучаемый РЛС комплексный сигнал. В соответствии с принятой моделью сигнал  $d\hat{u}(\xi(t), x, \rho)$ , поступающий на приемную антенну РЛС, имеющую координату  $\xi(t)$  в момент времени  $t$  на траектории движения летательного аппарата, в результате отражения от площадки  $dx d\rho$  с координатами  $(x, \rho)$  имеет вид

$$d\hat{u}(\xi(t), x, \rho) = \mathbf{Re} \left\{ s \left( t - \frac{2R(\xi(t), x, \rho)}{c} \right) P(\xi(t), x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho \right\}, \quad (2.30)$$

где  $R(\xi(t), x, \rho)$  — расстояние между носителем РЛС и точкой поверхности  $(x, \rho)$ , вещественная функция  $P$  учитывает эффекты диаграммы направленности антенны ( $P(\xi(t), x, \rho)$  предполагается известной), задержка  $\frac{2}{c}R(\xi(t), x, \rho)$  учитывает время прохождения сигнала от носителя до точки  $(x, \rho)$  и обратно  $c$  — скорость распространения радиоволн.

В силу принципа суперпозиции полный сигнал  $\hat{u}(\xi(t), x, \rho)$ , действующий во входных цепях РЛС, есть интеграл от (2.30) по плоскости исследуемой поверхности  $(x, \rho)$  (реально влияние диаграммы направленности приводит к интегрированию по ограниченной области плоскости  $(x, \rho)$ ):

$$\hat{u}(\xi(t)) = \mathbf{Re} \left\{ \iint s \left( t - \frac{2R(\xi(t), x, \rho)}{c} \right) P(\xi(t), x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho \right\}. \quad (2.31)$$

Полученное уравнение (2.31) описывает модель формирования отклика при облучении поверхности Земли сигналом  $s(t)$ . Воспользуемся старт-стоповым приближением, полагая  $t = t_j + \tau$ , перейдем к новой переменной  $\xi_j = \xi(t_j) = vt_j$  — координате носителя вдоль траектории, где  $v$  — скорость носителя РЛС. В теории синтезирования апертуры  $t_j$  называются "медленным" временем. Параметр  $\tau$  называется "быстрым" временем и характеризует наклонную дальность от носителя РЛС до точки на исследуемой поверхности. Тогда уравнение (2.31) преобразуется к виду:

$$\hat{u}(\xi(t)) = \hat{u}(\xi(t_j + \tau)) = \hat{u}(\xi_j, \tau) = \mathbf{Re} \left\{ \iint s \left( t_j + \tau - \frac{2R(\xi_j, x, \rho)}{c} \right) P(\xi_j, x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho \right\}. \quad (2.32)$$

Конкретизируем вид зондирующих сигналов. Будем считать, что периодически с периодом  $2T_z$  излучаются импульсные сигналы в виде цуга высокочастотных колебаний конечной длительности частоты  $\omega_0$ . В этом случае зондирующий сигнал представляет собой гребенку импульсов:

$$s(t) = s(t_j + \tau) = \begin{cases} \exp(-i\omega_0\tau) & |\tau| \leq T \\ 0 & T < |\tau| \leq T_z \end{cases},$$

где  $t = t_j + \tau$ ;  $\tau \in [-T_z, T_z]$ ;  $t_j = 2T_z(j-1)$ ;  $(t_j - T)$  — момент начала излучения  $j$ -го импульса,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $2T_z$  — период посылки импульсов;  $2T$  — длительность импульса,  $\omega_0$  — несущая частота.

Регистрируемый отклик, получаемый в результате детектирования  $\hat{u}$ , в рамках линейных моделей процессов усиления и детектирования с точностью до постоянных множителей можно представить в виде комплекснозначной функции (комплексные значения сигнала можно получить, например, с помощью «поднесущей» частоты):

$$\hat{u}(\xi_j, \tau) = \iint_{G(t_j, \tau)} \exp\left(i\omega_0 \frac{2R(\xi_j, x, \rho)}{c}\right) P(\xi_j, x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho. \quad (2.33)$$

Интегрирование производится по области  $G(t_j, \tau)$  переменных  $(x, \rho)$ , определяемой неравенством (размер области по  $\rho$  определяется длительностью импульса):  $|\tau - \frac{1}{c} 2R(\xi(t_j), x, \rho)| \leq T$ . Полученное уравнение представляет собой модель формирования регистрируемого отклика РЛС с синтезированной апертурой.

Используя принятые ранее предположения, разложим расстояние  $R(\xi, x, \rho)$  в ряд Тейлора:

$$R(\xi, x, \rho) = \sqrt{\rho^2 + (x - \xi)^2} = \rho + \frac{1}{2}(x - \xi)^2 \rho^{-1} - \frac{1}{8}(x - \xi)^4 \rho^{-3} + \dots \quad (2.34)$$

При характерных значениях параметров функционирования реальных систем члены разложения (2.34) выше второго порядка по абсолютной величине  $\ll \lambda_0$  — длины волны излучения, поэтому при подстановке в уравнение (2.33) этими членами можно пренебречь. Тогда уравнение (2.33) преобразуется к виду (здесь и в дальнейшем для простоты обозначений индекс  $j$  опускаем):

$$\hat{u}(\xi, \tau) = \iint \chi(\xi, \tau, x, \rho) P(\xi, x, \rho) \exp\left(\frac{i\omega_0}{c\rho}(x - \xi)^2\right) \exp\left(i\frac{2\omega_0\rho}{c}\right) g(x, \rho) dx d\rho, \quad (2.35)$$

где  $\chi(\xi, \tau, x, \rho)$  — характеристическая функция области  $G(\xi, \tau)$ , определяемой неравенством (2.33). Как следует из (2.33), область  $G(\xi, \tau)$  имеет вид полосы, вытянутой вдоль координаты  $x$  и имеющей небольшой изгиб. При плоскопараллельном движении функции  $P$  и  $\chi$  зависят от разности  $(\xi - x)$ .

Рассмотрим практически важный случай, когда соотношение между параметрами системы ( $2T$  — длительностью импульса,  $2L$  — характерным размером облучаемой области вдоль координаты  $x$ , определяемым диаграммой направленности антенны, расстоянием от носителя до облучаемой области) таковы, что с большой степенью точности произведение  $\chi(\xi-x, \tau, \rho)P(\xi-x, \rho)$  приближается функцией

$$\chi(\xi-x, \tau, \rho)P(\xi-x, \rho) = \begin{cases} 1, & \text{при } |\xi-x| \leq L, \quad |\tau-2\rho/c| < T \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Рассмотренное приближение предполагает, что с достаточной точностью можно перейти от интегрирования по вытянутой изогнутой области  $G$ , ограниченной диаграммой направленности антенны, к интегрированию по прямоугольнику  $(x, \rho): |\xi-x| \leq L, |\tau-2\rho/c| \leq T$ . Тогда в формуле (2.35) перейдем от двойного интеграла к повторному. Повторный интеграл можно записать в виде

$$u(\xi, \tau) = \int_{\xi-L}^{\xi+L} \exp\left(\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}(x-\xi)^2\right) g'(x, \tau) dx, \quad (2.36)$$

где введена сглаженная функция:

$$g'(x, \tau) = \int_{(\tau-T)c/2}^{(\tau+T)c/2} \exp\left(\frac{i2\omega_0\rho}{c}\right) g(x, \rho) d\rho. \quad (2.37)$$

Функция  $\exp(i2\omega_0(x-\xi)^2/(c\rho))$  вынесена из-под интеграла по  $d\rho$ , поскольку она слабо меняется в пределах интегрирования по  $\rho$ .

Таким образом, в рассматриваемом приближении математическая модель регистрации излучения в случае зондирования короткими импульсами описывается выражением (2.36), имеющим достаточно простой вид одномерной свертки с ядром Френеля (на участке  $(-L, L)$ ) по координате  $x$  при  $-\infty < \xi < \infty$ . Функция  $g'(x, \tau)$  связана с  $g(x, \tau)$  соотношением (2.37).

В обратной задаче требуется по приближенно заданным радиолокационным данным  $u(\xi, \tau)$  восстановить функцию  $g'(x, \tau)$  (на самом деле интерес представляет лишь модуль  $g'(x, \tau)$ ). Функция  $g'(x, \tau)$  связана с функцией  $g(x, \tau)$ , характеризующей отражающие свойства поверхности Земли, соотношением

(2.37), т.е.  $g'(x, \tau)$  является функцией, сглаженной на период длительности импульса. При характерных значениях параметров реальной РЛС размер сглаживания составляет  $\sim 1\text{м}$ . Поэтому восстановление  $g'(x, \tau)$  (а не  $g(x, \tau)$ ) является вполне корректной заменой.

**Замечание.** Уравнение (2.32) для импульсного режима зондирования в моменты времени  $t_j$ , опуская индекс  $j$ , имеет вид

$$\hat{u}(\xi, \tau) = \mathbf{Re} \left\{ \iint s \left( \tau - \frac{2R(\xi, x, \rho)}{c} \right) P(\xi, x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho \right\}.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение с точностью до обозначений и весового множителя  $P(\xi, x, \rho)$  совпадает с уравнением (2.19) в двумерном случае.  $P(\xi, x, \rho)$  - определяется диаграммой направленности антенны, которой мы пренебрегли при выводе уравнения (2.19). В свою очередь множителем  $(16\pi^2 / r' - r'^2)^{-1}$  - в уравнении (2.19), связанным с затуханием расходящегося сигнала, в данном случае можно пренебречь в силу специфики параметров системы.

Таким образом, задача из предыдущего раздела 2.3.1 близка к задаче РЛС с синтезированной апертурой. Основные отличия состоят в том, что данная задача описывается в 2D для узкополосного импульса с некоторой диаграммой направленности, что определяет специфику методов решения.

Характерная особенность интегрального уравнения (2.36) состоит в том, что оно распадается на независимые одномерные интегральные уравнения для каждого  $\tau$ . Как видно, при каждом  $\tau$  необходимо решать одномерные интегральные уравнения 1 рода с ядром Френеля, носитель которого ограничен отрезком  $(-L, L)$ . При типичных параметрах РЛС на носителе ядра  $(-L, L)$  помещается достаточно много зон Френеля ядра  $\exp(i2\omega_0(x-\xi)^2 / (c\rho))$  (до сотен зон), что позволяет получать высокое разрешение по  $x$  при обработке реальных данных.

Для приближенного нахождения  $g'(x, \tau)$  можно воспользоваться следующим интегральным оператором («обратное преобразование Френеля» с конечными пределами интегрирования)



$$\tilde{g}(x, \tau) = \int_{-L}^L \exp\left(-\frac{i2\omega_0}{c^2\tau} \xi^2\right) u(x - \xi, \tau) d\xi \quad (2.38)$$

Алгоритм (2.38) известен в литературе как алгоритм фокусированного синтеза [7, 57, 138, 151, 195]. Как видно, алгоритм фокусированного синтеза имеет достаточно простой вид одномерной свертки по координате  $\xi$ . При реализации алгоритма на компьютере можно использовать процедуру быстрого преобразования Фурье, что позволяет достигать высокой скорости вычислений.

При обработке реальных данных, полученных на РЛС с синтезированной апертурой, размеры зондируемой поверхности Земли могут составлять до нескольких десятков километров по азимутальной и наклонной дальностям. Размер шага сетки на экспериментальных данных  $\sim 1$  м. Это приводит к необходимости проведения огромного объёма вычислений (иногда в реальном времени). Однако специфика алгоритма решения обратной задачи такова, что расчёты можно проводить практически независимо для каждого значения наклонной дальности. Это позволяет эффективно распараллеливать вычисления, выделяя каждому процессу свой диапазон значений по наклонной дальности.

### 2.3.2.2 Результаты реконструкции реальных данных РЛС с синтезированной апертурой

На рисунке 2.9 показаны результаты цифровой реконструкции изображения РЛС с синтезированием апертуры, установленной на космическом аппарате "Алмаз" [82]. На рисунке 2.9 слева приведено исходное изображение - функция  $u(\xi, \tau)$ , полученная в результате зондирования поверхности Земли (окраины Москвы), на рисунке 2.9 справа - результаты решения задачи методом фокусированного синтеза: фрагмент восстановленного изображения. Как видно из этого примера, применение разработанных методов позволяет получить разрешающую способность порядка 11-15 м.

Дальнейшее повышение разрешающей способности РЛС с синтезированной апертурой ставит задачу развития математических методов и моделей

реконструкции изображений РЛС. Постановки задач в этом случае являются более сложными, поскольку модель включает в себя такие факторы, как криволинейную траекторию движения носителя РЛС, эффекты рельефа зондирующей поверхности, искривление носителя ядра оператора и т.п.

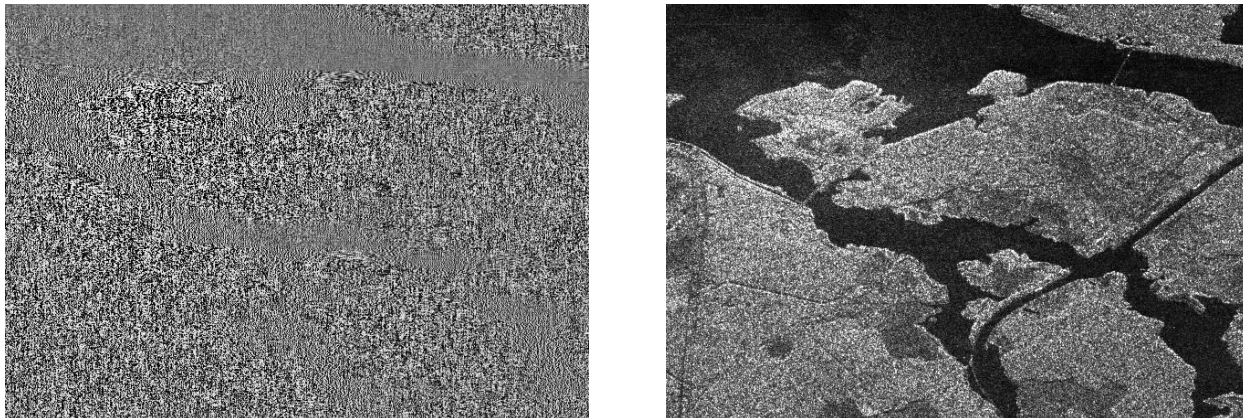


Рисунок 2.9 Реконструкция поверхности Земли (окраины Москвы) по данным РЛС с синтезированной апертурой, установленной на космическом аппарате «Алмаз». Слева - исходные данные, справа - восстановленное изображение

## 2.4 Выводы

С точки зрения математических методов существуют интегральный и дифференциальный подходы к решению коэффициентных обратных задач в рамках волновых моделей. В настоящей главе 2 рассмотрен интегральный подход, который базируется на использовании аппарата функции Грина. Обратные задачи в этом случае можно свести к системе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода.

В интегральном представлении решение рассматриваемой трехмерной нелинейной обратной задачи волновой томографии даже на современных суперкомпьютерах возможно только на крупных расчетных сетках в силу огромного объема вычислений. К достоинствам интегрального подхода можно отнести простую постановку обратной задачи, применимую, в том числе для полубесконечной или бесконечной среды, включающей в себя неоднородность. Интегральный подход может быть с успехом применен в случае простой

структуры неоднородности (например, несколько небольших по размерам неоднородностей).

Методы решения обратной задачи, основанные на дифференциальном подходе, требуют существенно меньшего объема вычислений и с успехом решаются на сетках до  $400 \times 400 \times 400$  точек. Вычислительные проблемы, в этом случае, вызваны необходимостью постановки дополнительных граничных условий, которые не связаны с физическими характеристиками изучаемых объектов, а являются следствием использования техники разностных схем в ограниченной области пространства.

Естественным выходом для решения задач волновой томографии в интегральном представлении является линеаризация. Линеаризованные приближения в интегральном подходе значительно сокращают объем вычислений. В некоторых специальных задачах, рассмотренных в диссертации, линеаризация представляется перспективной и позволяет получать неплохие результаты. В настоящей главе осуществлены постановки задач в линеаризованных моделях в задаче реконструкции с синтезированной апертурой для широкополосных и узкополосных импульсов зондирования. В задаче реконструкции изображений поверхности Земли со спутника по данным зондирования с помощью РЛС с синтезированной апертурой для узкополосных импульсов предложены алгоритмы и программы фокусированного синтеза, позволившие получать изображения высокого качества для больших массивов данных. В настоящей главе рассмотрена также обратная задача в 3D в линеаризованной интегральной постановке с синтезированной апертурой для широкополосных импульсов зондирования. Для этой задачи впервые предложен и теоретически обоснован эффективный метод обращения, позволивший решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке.

Однако, в целом, возможности использования линейных приближений для сложных неоднородных сред достаточно ограничены. Обычно, линеаризованные решения могут служить лишь начальным приближением итерационных процедур решения нелинейных обратных задач.

### Глава 3

## Методы и алгоритмы решения коэффициентных обратных задач волновой томографии в моделях с учетом поглощения

Различные физические задачи можно описывать скалярными волновыми уравнениями. К таким задачам относятся задачи ультразвуковой томографии в медицине, электромагнитного зондирования, сеймики, инженерной сеймики, диагностики промышленных изделий с помощью акустического излучения и т.п. Во всех перечисленных выше задачах всегда присутствует поглощение как неотъемлемый физический процесс распространения волн в средах. Настоящая глава посвящена решению коэффициентных обратных задач волновой томографии с учетом эффектов поглощения. Рассматриваются различные модели, связанные в первую очередь с процессами распространения ультразвука в неоднородных поглощающих средах. Разработаны в рамках дифференциального подхода новые эффективные методы, алгоритмы для решения коэффициентных обратных задач для волновых моделей с различной зависимостью поглощения от частоты в 2.5D и в 3D схемах. Методы решения базируются на возможности прямого вычисления производной Фреше функционала невязки. Впервые для предложенной постановки обратных задач нелинейной волновой томографии, получено представление для производной Фреше функционала невязки. Впервые программное обеспечение в этих задачах разрабатывается для современных суперкомпьютеров.

В настоящее время в медицине для регулярных обследований используется ультразвуковая диагностика. Поглощение ультразвуковых волн в диагностируемом объекте является одним из основных физических процессов. Ультразвуковые импульсы большой частоты более 20 МГц используются исключительно для диагностики подкожных слоев, поскольку полностью поглощаются на глубине порядка нескольких миллиметров. На частоте порядка от 0.3 до 1.5 МГц ослабление сигнала от источника в мягких тканях человека может

достигать нескольких раз при размере диагностируемого объекта 10-15 см [134]. Именно этот диапазон от 0.3-1.5 МГц используются при проектировании ультразвуковых томографов.

Задачей ультразвуковой томографии является поиск неоднородностей в диагностируемой области. В идеале можно пытаться искать как неоднородности по скорости распространения ультразвуковой волны, так и неоднородности по поглощению. Считается, что аномальная область в скоростном разрезе является более достоверным фактором, если она повторяется и как аномальность по поглощению. Как правило, поглощение звука в злокачественных образованиях выше, чем в окружающих тканях!!! [117]. Одной из целей главы является оценка возможности одновременного определения скоростного разреза и неоднородностей по поглощению из решения обратной задачи для волнового уравнения с поглощением.

Попытки решения обратных задач в моделях с поглощением немногочисленны. Связано это с тем, что разработка методов решения коэффициентных обратных задач, когда неизвестными являются как функции характеризующие скорость, так и функции характеризующие поглощение является очень сложной обратной задачей. Как правило, авторами предлагаются приближенные методы и упрощенные модели, где степень упрощения модели зависит от возможностей алгоритмов и вычислительных средств. Так в работах [87, 214] предложены методы решения обратных задач ультразвуковой томографии в модели, учитывающей как дифракционные эффекты, так и эффекты поглощения. В качестве приближенной модели для волнового уравнения авторы используют так называемую параболическую модель. В рассмотренной задаче поглощение зависит от частоты и можно использовать модели с разной зависимостью поглощения от частоты. Результаты апробированы не только на модельных задачах, но и на макете ультразвукового томографа.

В работах [181, 193] разработки ультразвуковых томографов доведены до макетов. Обратные задачи рассматриваются как в лучевой постановке, так и в рамках волновых моделей. Скоростной разрез восстанавливается по времени

прихода и задача восстановления скоростного разреза и поглощающих характеристик оказываются разделенными друг от друга. В работе [181] обратная задача ультразвуковой томографии рассматривается как коэффициентная обратная задача для уравнения Гельмгольца. По сути дела коэффициент уравнения Гельмгольца в рассматриваемой работе рассматривается как комплексная функция, что обеспечивает описание как дифракционных явлений, так и поглощения, не зависящего от частоты. Восстановление скоростного разреза осуществляется в томографической схеме на прохождение. Одним из приближений методов является то, что обратная задача восстановления скоростного разреза и поглощающих характеристик переводится в частотную область, которая разделяется на несколько диапазонов. Задача минимизации функционала невязки решается последовательно в каждом из диапазонов. В качестве начального приближения используется точка минимума функционала в предшествующем диапазоне частот. По сути, это существенное приближение в используемых методах.

В теоретических работах [130, 166] рассмотрена постановка коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения с учетом поглощения независимого от частоты. В отличие от перечисленных выше работ на теоретическом уровне получено точное выражение для градиента функционала невязки, что дает возможность построения итерационных алгоритмов приближенного решения нелинейной коэффициентной обратной задачи.

Среди последних публикаций отметим статью [179], в которой исследуется возможность получения из томографических данных как скоростного разреза, так и поглощения в исследуемом объеме методом граничного управления, а также статью [136], в которой исследуется возможность получения скоростного разреза и плотности.

Разработка методов решения обратных коэффициентных задач в моделях с поглощением представляет интерес и для задач сейсмологии. Например, в работах [183, 203] обратная задача сейсмологии решается в математической модели близкой к лучевой с некоторым законом поглощения вдоль лучей. Обратные задачи

реконструкции скоростного разреза и реконструкции поглощающих свойств среды искусственно разделяются на две независимые задачи, что формально с математической точки зрения также является приближением к модели. В одной из основных моделей поглощение линейно зависит от частоты. Разработка методов интерпретации сейсмических данных в волновых моделях с поглощением, безусловно, перспективно для сейсмических исследований, где ослабление сигнала является важным фактором.

Отметим также публикации [102, 110, 111, 122, 160, 199, 209], где проведены теоретические исследования и модельные расчеты в прямой задаче для различных моделей поглощения акустических волн. В задачах акустического зондирования в медицине поглощение, как правило, зависит от частоты. При этом, чем выше частота, тем выше поглощение. Рассмотрены различные модели поглощения, включающие даже дробно-степенную зависимость от частоты. Волновые уравнения в рассматриваемых постановках предполагают введение дробных производных по времени. Не все из рассматриваемых моделей допускают разумную физическую интерпретацию. Несмотря на большое количество работ в области исследования механизмов поглощения, их физических моделей, в вопросах математического моделирования процессов поглощения волн в неоднородных средах еще много неясного.

В связи с этим необходимо исследовать обратные задачи в условиях некоторой неопределенности волновых моделей относительно характера поглощения. В настоящей главе рассматриваются несколько волновых моделей, в которых поглощение как не зависит от частоты, так и зависит от частоты нелинейным образом. Обратная задача рассматривается во временной области. Неизвестными являются не только функция, характеризующая скоростной разрез, но и функция, описывающая поглощение в диагностируемой области [77, 78, 129].

В главе сделана попытка ответить на следующие вопросы:

1. Можно ли в ультразвуковой томографии в волновой модели во временной области, имея стандартные томографические данные на детекторах при разном

положении источников и приемников, восстанавливать не только скоростной разрез, но и функцию, характеризующую поглощение?

2. Если ответ на первый вопрос положителен, что восстанавливается лучше – скоростной разрез или функция характеризующая поглощение?

3. Насколько ответ на вопросы 1 и 2 зависит от модели поглощения?

4. Можно ли пытаться восстанавливать скоростной разрез в моделях без поглощения, если оно реально присутствует и значимо?

### **3.1 Некоторые скалярные волновые модели распространения излучения в неоднородных средах во временной области с учетом поглощения**

В главе 3 прямые и обратные задачи ультразвуковой томографии как задачи поиска скоростного разреза и неоднородностей по поглощению рассматриваются в рамках различных математических моделей поглощения. В каждой из моделей приближенно оценивается характер зависимости коэффициента поглощения от частоты.

#### **3.1.1 Простейшая волновая модель с поглощением, не зависящим от частоты**

Простейшей волновой моделью, описывающей поглощение, является модель

$$\text{Модель 1. } c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)u_t(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t), \quad (3.1)$$

где  $a(r)$  - описывает поглощение в среде. Как будет показано ниже, в этом случае поглощение сигнала не зависит от частоты. Как результат, импульс по мере распространения убывает по амплитуде, но практически не меняет форму. В одномерном случае это уравнение соответствует телеграфному уравнению. Эта модель используется также как приближенная модель в ультразвуковой томографии мягких тканей человека [166, 181], исследованию этой модели поглощения посвящены также работы [109, 113].



Найдем, как зависит поглощение от частоты для плоской волны для уравнения

$$cu_{tt}(r,t) + au_t(r,t) - u_{xx}(r,t) = 0, \quad (3.2)$$

где  $c = \text{const} > 0$ ,  $a = \text{const} \neq 0$ . Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \exp\left(-i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right) - bx\right), \quad (3.3)$$

где  $b \neq 0$  – определяет поглощение. Подставляем (3.3) в (3.2), получим

$$c(i\omega)^2 - \left(-\frac{i\omega}{v} - b\right)^2 + ai\omega = 0.$$

Раздельно запишем для действительной и мнимой частей

$$\begin{cases} -c\omega^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - b^2 = 0 \\ -2\frac{\omega b}{v} + a\omega = 0 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Подставляя второе уравнение в первое, имеем квадратное уравнение относительно  $b^2$   $-4b^4 - 4c\omega^2 b^2 + \omega^2 a^2 = 0$ . Решаем, получим

$$b^2 = \frac{c\omega^2 \pm c\omega^2 \sqrt{\frac{a^2}{c^2\omega^2} + 1}}{-2}$$

Разлагаем корень при малых  $\frac{a}{\omega}$ , имеем

$$\sqrt{\frac{a^2}{c^2\omega^2} + 1} \approx 1 + \frac{a^2}{2c^2\omega^2}.$$

Получаем

$$b^2 = \begin{cases} -c\omega^2 - \frac{a^2}{4c} \\ \frac{a^2}{4c} \end{cases}.$$

Верхнее выражение отрицательное, поэтому берем только нижнее  $b_{1,2} = \pm \frac{|a|}{2\sqrt{c}}$ .

Подставим во второе уравнение (3.4) имеем  $v_{1,2} = \pm \frac{|a|}{a\sqrt{c}}$ .

Пусть без ограничения общности  $v > 0$ , тогда для  $a > 0$  подходит  $v_1$  и получаем  $b_1 > 0$ , что соответствует затуханию волны с коэффициентом  $b_1$  не зависящим от частоты. При этом скорость равна значению  $\frac{1}{\sqrt{c}}$  скорости волны в

среде без поглощения. Для  $a < 0$  подходит  $v_2$  и получаем  $b_2 < 0$ , что соответствует возбуждению волны. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнения с поглощением (3.2) поглощение описывается выражением (3.3) с коэффициентом  $b = \frac{|a|}{2\sqrt{c}}$ , не зависящим от частоты в первом приближении по  $\frac{a}{\omega}$ .

В задачах ультразвуковой томографии мягких тканей поглощение в действительности зависит от частоты. Существуют разные данные [137, 199, 204], из которых следует, что зависимость от частоты для продольных волн имеет степень от 1 до 2. Таким образом, модель 1 с физической точки зрения не самым лучшим образом описывает характер поглощения. Тем не менее, эта модель используется в ультразвуковой томографии мягких тканей [166, 181].

### 3.1.2 Стоксовская модель поглощения, квадратично зависящая от частоты

Рассмотрим другую волновую модель, в которой в отличие от модели 1 поглощение зависит от частоты. Как будет показано ниже, в этом случае обратную задачу можно также свести к коэффициентной обратной задаче для уравнения в частных производных.

Будем рассматривать так называемое стоксовское поглощение в вязких средах [187, 196]. Рассмотрим распространение ультразвуковых волн в среде с потерей энергии, связанной с переходом части энергии в тепло. Диссипация акустической энергии может быть обусловлена теплопроводностью среды, различными молекулярными процессами. В большинстве реальных сред основной причиной поглощения ультразвука является вязкость. В соответствии с законом Ньютона для сил внутреннего трения, будем считать, что в первом приближении вязкие напряжения пропорциональны скорости деформации. Тогда для изотропной идеальной среды при отсутствии сдвиговой упругости в выражение для напряжения  $\sigma$  добавляем вязкое напряжение  $a \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \xi$

$$\sigma = K \operatorname{div} \xi + a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \xi, \quad (3.5)$$

где  $K \operatorname{div} \xi$  - описывает упругое напряжение (закон Гука для всестороннего сжатия),  $\operatorname{div} \xi$  - вследствие уравнения неразрывности является объемным расширением,  $\xi$  - вектор смещения,  $K$  - модуль объемной упругости,  $a$  - коэффициент вязкости. В нашем случае тензор напряжений имеет вид  $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$ , где  $p$  - давление в среде ( $\sigma = -p$ ). Тогда уравнение движения (в соответствии со вторым законом Ньютона) имеет вид

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (3.6)$$

где  $\rho_0$  - плотность. Для безвихревого характера движения введем потенциал скоростей [202]. Из уравнения (3.6) следует

$$v(t) = v(0) - \frac{1}{\rho_0} \nabla \int_0^t p dt,$$

где  $v(0)$  - начальное распределение скоростей. Введем потенциал при  $t = 0$   $v(0) = -\nabla f$ . Тогда

$$v(t) = -\nabla \left( f - \frac{1}{\rho_0} \int_0^t p dt \right) = -\nabla F(t),$$

где введен потенциал скоростей равный выражению в скобках, причем  $\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \frac{1}{\rho_0} p$ . Беря производную по времени от обеих частей в выражении (3.5) и учитывая, что  $\sigma = -p$  имеем

$$-p_t = -\rho_0 F_{tt} = K \operatorname{div}(v) + a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(v) = -K \operatorname{div} \nabla F - a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \nabla F = -K \Delta F - a \frac{\partial}{\partial t} \Delta F. \quad (3.7)$$

Для медленно меняющихся коэффициентов уравнение для скорости получим, беря градиент, а уравнение для давления получим, беря производную по времени от обеих частей в (3.7)

$$\begin{aligned} \rho_0 v_{tt} &= K \Delta v + a (\Delta v)_t, \\ \rho_0 p_{tt} &= K \Delta p + a (\Delta p)_t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для рассматриваемой модели уравнения с поглощением для любой из скалярных компоненты  $v$  и  $p$  можно использовать модель 2а:

$$\text{Модель 2а. } c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)(\Delta u)_t - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t).$$

Найдем, как зависит поглощение от частоты в рассматриваемой модели для плоской волны для уравнения

$$cu_{tt}(r,t) + au_{xxt}(r,t) - u_{xx}(r,t) = 0, \quad (3.9)$$

где  $c = \text{const} > 0$ ,  $a = \text{const} \neq 0$ . Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \exp\left(-i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right) - bx\right), \quad (3.10)$$

где  $b \neq 0$  – определяет поглощение. Подставляем его в (3.9), получим

$$c(i\omega)^2 - \left(-\frac{i\omega}{v} - b\right)^2 + a\left(-\frac{i\omega}{v} - b\right)^2 i\omega = 0.$$

Раздельно запишем для действительной и мнимой части

$$\begin{cases} -c\omega^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - b^2 - 2\frac{\omega^2 ab}{v} = 0 \\ -2\frac{\omega b}{v} - \frac{a\omega^3}{v^2} + a\omega b^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\omega^2}{v^2} - b^2 - 2\frac{\omega^2 ab}{v} - c\omega^2 = 0 \\ b^2 - \frac{\omega^2}{v^2} - 2\frac{b}{av} = 0 \end{cases}. \quad (3.11)$$

Сложим первое и второе уравнения (3.11) имеем

$$v = -2\frac{\omega^2 a^2 + 1}{c\omega^2 a} b. \quad (3.12)$$

Подставим во второе уравнение (3.11) получим квадратное уравнение относительно  $b^2$

$$b^4 + \frac{c\omega^2}{\omega^2 a^2 + 1} b^2 - \frac{\omega^6 c^2 a^2}{4(\omega^2 a^2 + 1)} = 0.$$

Решаем, получим

$$b^2 = -\frac{c\omega^2}{2(\omega^2 a^2 + 1)} \pm \frac{c\omega^2}{2(\omega^2 a^2 + 1)} \sqrt{\omega^2 a^2 + 1}.$$

Разлагаем корень при малых  $\omega a$

$$\sqrt{\omega^2 a^2 + 1} \approx 1 + \frac{\omega^2 a^2}{2}.$$

Получаем, что для малых  $\omega a$

$$b^2 = \begin{cases} \frac{c\omega^4 a^2}{4(\omega^2 a^2 + 1)} \\ -\frac{c\omega^2}{2(\omega^2 a^2 + 1)} \left(2 + \frac{\omega^2 a^2}{2}\right) \end{cases}.$$

Нижнее выражение отрицательное, поэтому берем только верхнее

$$b_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{c}|a|\omega^2}{2\sqrt{\omega^2 a^2 + 1}}. \text{ Подставим в (3.12) имеем } v_{1,2} = \mp \frac{|a|\sqrt{\omega^2 a^2 + 1}}{a\sqrt{c}}.$$

Пусть без ограничения общности  $\nu > 0$ , тогда для  $a < 0$  подходит  $v_1$  и получаем  $b_1 > 0$ , что соответствует затуханию волны с зависимостью  $\omega^2$  от частоты. При этом имеется некоторая дисперсия скорости вокруг значения  $1/\sqrt{c}$  скорости волны в среде без поглощения. Для  $a > 0$  подходит  $v_2$  и получаем  $b_2 < 0$ , что соответствует возбуждению волны. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнения с поглощением (3.9) поглощение описывается выражением (3.10) с коэффициентом  $b = \frac{\sqrt{c}|a|\omega^2}{2\sqrt{\omega^2 a^2 + 1}}$  с квадратичной зависимостью от частоты в первом приближении по  $\omega a$ .

Можно показать, что аналогичную квадратичную зависимость поглощения от частоты имеет также следующая модель 2б.

$$\text{Модель 2б. } c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)u_{ttt} - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t). \quad (3.13)$$

Аналогично модели 2а можно показать, что для уравнения (3.13) коэффициент поглощения имеет вид  $b = 0.5\omega^2|a|c^{-0.5}$ . Модель 2б также используется как модель поглощения ультразвуковых и акустических волн [137].

**Замечание.** Достоинством моделей 1-2 является то, что они описывают как дифракционные явления распространения волн в неоднородных средах, так и эффекты поглощения. Модели 1 и 2 существенно отличаются друг от друга. В модели 1 частотный спектр сигнала не меняется при прохождении через поглощающую среду. В модели 2 спектр сигнала после прохождения через поглощающую среду меняется.

### 3.2 Постановка задачи волновой томографии с поглощением, не зависящим от частоты.

#### Вывод выражений для производной Фреше функционала невязки

Прямая задача Коши в  $R^N$  ( $N = 2, 3$ ) в модели 1 имеет следующий вид

$$\text{Модель 1. } c(r)\bar{u}_{tt}(r,t) + a(r)\bar{u}_t(r,t) - \Delta\bar{u}(r,t) = f(r,t), \quad \bar{u}(r,t=0) = \bar{u}_t(r,t=0) = 0. \quad (3.14)$$

Здесь  $c^{-0.5}(r) = v(r)$  - является скоростью волны в среде,  $a(r)$  - описывает поглощение в среде,  $r \in R^N$  - положение точки в пространстве,  $\Delta$  - оператор Лапласа по переменной  $r$ .  $f(r,t)$  - функция плотности внешней силы, возмущающей среду.

Будем считать, что  $c(r), a(r) \in C^3(R^N)$ ,  $0 < v \leq c(r) \leq \mu$ ,  $c(r) = c_0 = const$  и  $a(r) = a_0 = const$  вне области  $\Omega$ , где  $\Omega \subset R^N$  - выпуклая ограниченная односвязная область, причем граница области  $\partial\Omega \in C^5$ . Свободный член  $f(r,t)$  в области  $R^N \times (0, T)$  (для некоторого конечного  $T$ ) равен 0 вне области носителя  $\bar{\Omega}_1 \times (0, T)$ , где  $\bar{\Omega}_1 \subset R^N$  - замыкание ограниченной области  $\Omega_1$ .  $\bar{\Omega}_1$  не пересекается с областью  $\bar{\Omega}$ , замыканием области  $\Omega$ . Кроме того, пусть  $f(r,t) \in W_2^3(\Theta_1 \times (0, T))$  для любой содержащей  $\bar{\Omega}_1$  ограниченной области  $\Theta_1$  с гладкой границей, и  $f(r,t) \equiv 0$  при  $0 < t < \tau$ , для некоторого малого  $0 < \tau$ . Здесь  $W_p^q(\Omega)$  - Соболевское пространство функций, имеющих обобщённые производные до порядка  $q$  из пространства  $L_p(\Omega)$ ,  $C^q(\Omega)$  - пространство  $q$  раз непрерывно-дифференцируемых функций в  $\Omega$ .

Используя теорему 1.2, можно в этих предположениях показать, что существует функция  $\bar{u}(r,t)$ , для которой на  $R^N \times (0, T)$  выполняются соотношения (3.14), причем  $\bar{u}(r,t) \in W_2^4(\Theta_1 \times (0, T))$ , для любой достаточно большой ограниченной области  $\Theta_1 \subset R^N$  с гладкой границей, такой что  $\Omega \subset \Theta_1$  и  $\Omega_1 \subset \Theta_1$ . Это следует, например, из существования  $\bar{u}(r,t) \in W_2^4(\Theta \times (0, T))$  из теореме 1.2 при  $k=4$  для области  $\Theta \subset R^N$  с гладкой границей, такой что  $\Omega \subset \Theta$  и  $\Omega_1 \subset \Theta$  и настолько большой, что возмущение от источника в области  $\bar{\Omega}_1$  за время  $T$  не успеет прийти

до границы  $\Theta$ , а в области  $[R^N / \Theta] \times (0, T)$  продолжаем  $\bar{u}(r, t) \equiv 0$ . В частности, по теореме о следе [120] существуют функции  $U(s, t) = \bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$  и  $p(s, t) = \partial_n \bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$  из  $L_2(\Gamma)$  ( $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$ ).

Перейдем к обратной задаче. В работе [166] рассмотрен вариант постановки коэффициентной обратной задачи для уравнений гиперболического типа с поглощением в модели 1, который отличается от приведенного ниже. Конкретизируем постановку, которая будет использоваться в настоящем разделе

Обратная задача состоит в нахождении описывающих неоднородность функций  $c(r)$  и  $a(r)$  в области  $\Omega$ , по экспериментальным данным «измерения» волны  $U(s, t) = \bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$  ( $(s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) = \Gamma$ ) на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  за время  $(0, T)$  при различных положениях источника.

Заметим, что, зная экспериментальные данные  $U(s, t) = \bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$ , можно вычислить функцию  $p(s, t) = \partial_n \bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$ . Для этого, например, решаем задачу (3.14), для области  $\Theta / \Omega \times (0, T)$  (при настолько большой  $\Theta$ ,  $\Omega \subset \Theta$ , что возмущение от источника в области  $\bar{\Omega}_1$  за время  $T$  не успеет дойти до границы  $\Theta$ ) с граничными значениями  $U(s, t)$  на  $\partial\Omega \times (0, T)$  и нулевыми граничными значениями на  $\partial\Theta \times (0, T)$  для известного свободного члена  $f(r, t)$ . В результате получим  $\bar{u}(r, t)$  на  $\Theta / \Omega \times (0, T)$ , из которой можно найти  $\partial_n \bar{u}(r, t)|_{\Gamma} = p(s, t)$ .

Математически обратная задача ставится следующим образом. Рассмотрим волновое уравнение с учетом поглощения, которое описывает акустическое поле  $u(r, t)$  в области  $\Omega \times (0, T) = Q$

$$c(r)u_{tt}(r, t) + a(r)u_t(r, t) - \Delta u(r, t) = 0. \quad (3.15)$$

Кроме того, допустим, что  $u(r, t)$  - удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$u(r, t=0) = u_t(r, t=0) = 0, \quad \partial_n u|_{\Gamma} = p(s, t). \quad (3.16)$$

Здесь  $\partial_n u|_{\Gamma}$  - производная вдоль нормали к гладкой поверхности  $\partial\Omega \in C^5$ ,  $p(s, t)$  - известная функция, заданная на  $\Gamma$ , полученная, например, из приведенных выше

соображений. Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями скорости  $c^{-0.5}(r) = v(r)$  и коэффициента поглощения  $a(r)$ ,  $c(r), a(r) \in C^3(\mathbb{R}^N)$  - гладкие функция, а вне области неоднородности  $\Omega_\delta$   $c(r) \equiv c_0 = const$  и  $a(r) = a_0 = const$ , где  $c_0, a_0$  - известны. Здесь через  $\Omega_\delta$  обозначены все точки  $\Omega$ , отстоящие от границы  $\partial\Omega$  на расстояние большее  $\delta$ , где  $\delta > 0$  - фиксированная величина.

Пусть «измеренная» функция  $U(s, t) \in L_2(\partial\Omega \times (0, T)) = L_2(\Gamma)$ . Пусть существует обобщенное решение  $u(r, t) \in W_2^1(Q)$  задачи (3.15), (3.16) для любой пары функций  $q = (c(r), a(r)) \in Y$ , для некоторого множества пар функций  $Y$ . (Существование обобщенного решение для любой пары функций из некоторого множества  $Y$  будет доказано). По теореме о следе для функции  $u(r, t) \in W_2^1(Q)$  существует ограниченный линейный оператор  $Tu \rightarrow u|_\Gamma \in L_2(\partial\Omega \times (0, T))$ . Введем функционал невязки на  $Y$

$$\Phi(u^j(c, a)) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \|u^j|_\Gamma - U^j\|_{2, \Gamma}^2 = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u^j(s, t) - U^j(s, t))^2 ds dt \quad (3.17)$$

Здесь  $u^j(c, a)$ - решение задачи (3.15), (3.16) при некотором  $c(r)$  и  $a(r)$ ; индекс  $j=1, \dots, M$  - отвечает разным положениям источника (в дальнейшем для простоты  $j$ , как правило, писать не будем);  $\|\cdot\|_{2, \Gamma}^2$  - квадрат нормы в пространстве  $L_2(\Gamma)$ . Обратная задача ставится как задача поиска пары функций  $(\bar{c}(r), \bar{a}(r)) \in Y$ , минимизирующей функционал невязки

$$(\bar{c}(r), \bar{a}(r)) : \min_{(c(r), a(r)) \in Y} \Phi(u(c, a)) = \Phi(u(\bar{c}, \bar{a}))$$

для множества пар функций  $Y$ .

Для минимизации функционала будем использовать итерационные методы. Рассмотрим вопрос дифференцируемости по Фреше функционала  $\Phi: q \in Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ , задаваемый выражением (3.17), на некотором множестве  $Y$  и найдем его производную. В иной постановке выражение для производной получено в [166].

Пусть заданная на границе  $\Gamma$  функция  $p(s, t)$  такова, что существует функция  $F(r, t)$ , такая что



$$F(r,t) \in W_2^4(Q), \quad \partial_n F|_\Gamma = p(s,t), \quad (3.18)$$

$$\partial_t^j F(r,0) = 0 \quad \text{при } r \in \Omega, \quad j = 0, \dots, 3.$$

Если  $p(s,t) = \partial_n \bar{u}(r,t)|_\Gamma$ , где  $\bar{u}(r,t)$  - решение прямой задачи Коши (3.14), то существование такой функции  $F(r,t)$  следует из существования  $\bar{u}(r,t) \in W_2^4(\Omega \times (0,T))$  - решения прямой задачи Коши (3.14), где полагаем  $F(r,t) = \bar{u}(r,t)$ . Условие  $\partial_t^j F(r,0) = 0$  при  $r \in \Omega$  выполняется, т.к. носитель  $f(r,t)$  не пересекается с областью  $\bar{\Omega}$  и возбуждение распространяется с конечной скоростью. Другой вариант построения функции  $F(r,t)$  состоит, например, в продолжении достаточно гладкой функции  $p(r,t)$  с границы  $\partial\Omega$  на всю область  $\Omega$  методами построения изложенными в разделе 3.4 [64].

Определим нормированное пространство  $Z$ , состоящее из таких пар элементов  $(dc(r), da(r)) \in C^3(\bar{\Omega}) \times C^3(\bar{\Omega})$ , что  $dc(r) = da(r) = 0$  в пограничной полосе  $\bar{\Omega}/\Omega_\delta$  ширины  $\delta > 0$ , а норма задается как максимум из норм  $dc(r)$  и  $da(r)$  в  $C^0(\bar{\Omega})$ . Здесь через  $\Omega_\delta$  обозначены все точки  $\Omega$ , отстоящие от границы  $\partial\Omega$  на расстояние большее  $\delta$ .

Возьмем функции  $c_0(r) = c_0 = const$  и  $a_0(r) = a_0 = const$  при  $r \in \bar{\Omega}$ . Определим множество  $Y \subset C^3(\bar{\Omega}) \times C^3(\bar{\Omega})$  на многообразии  $(c_0(r), a_0(r)) + Z$ , состоящее из таких  $(c(r), a(r)) \in (c_0(r), a_0(r)) + Z$ , для которых  $0 < c_1 < c(r)$  в  $\bar{\Omega}$  ( $c_1 \leq 1$ ). Таким образом,  $c(r)$  и  $a(r)$  равны соответственно константам  $c_0$  и  $a_0$  в пограничной полосе  $\bar{\Omega}/\Omega_\delta$  ширины  $\delta > 0$ .

Назовем  $\varepsilon$ -окрестностью  $O_\varepsilon(c(r), a(r))$  пары  $(c(r), a(r)) \in Y$  множество таких пар функций  $(c_\varepsilon(r), a_\varepsilon(r))$ , для которых  $(c(r) - c_\varepsilon(r), a(r) - a_\varepsilon(r)) = (dc(r), da(r)) \in Z$  и максимум из  $\max_{r \in \bar{\Omega}} |c(r) - c_\varepsilon(r)|$  и  $\max_{r \in \bar{\Omega}} |a(r) - a_\varepsilon(r)|$  меньше  $\varepsilon$ . Очевидно, для любого  $(c(r), a(r)) \in Y$  существует  $\varepsilon$ -окрестность  $O_\varepsilon(c(r), a(r)) \subset Y$  для некоторого  $0 < \varepsilon$ . Это следует из того, что в силу непрерывности  $c(r)$  на  $\bar{\Omega}$  для выбранной  $c(r)$  можно найти  $\varepsilon$ , т.ч.  $0 < c_1 < c(r) - \varepsilon$ , а значит  $c_1 < c_\varepsilon(r)$  и  $(c_\varepsilon(r), a_\varepsilon(r)) \in Y$ .

Прежде чем доказывать основные теоремы, предварительно докажем лемму 3.1. Похожее утверждение в иной постановке рассмотрено в работе [164]. Рассмотрим задачу на введенной выше области  $Q$

$$c(r)v_n + a(r)v_t - \Delta v = f(r, t), \quad v(r, t=0) = v_t(r, t=0) = 0, \quad \partial_n v|_T = 0. \quad (3.19)$$

**Лемма 3.1.** *На введенной выше области  $\Omega \subset R^N$  рассмотрим функции  $c(r)$  и  $a(r)$  такие, что  $c(r), a(r) \in C^2(\bar{\Omega})$  причем  $0 < c_1 < c(r)$  и  $|a(r)| < a_1$  в  $\Omega$  ( $c_1 \leq 1$ ) и функции  $f(r, t) \in L_2(Q)$ . И пусть существуют решения Задачи (3.19)  $v(r, t) \in W_2^2(Q)$  для этих  $c(r)$ ,  $a(r)$  и  $f(r, t)$ . Тогда существует число  $E_1$ , не зависящее от  $c(r)$ ,  $a(r)$  и  $f(r, t)$ , т.ч. для любого  $c(r)$ ,  $a(r)$  и  $f(r, t)$  из условия леммы верна равномерная оценка*

$$\|v\|_{2,Q}^{(1)} \leq E_1 \|f\|_{2,Q}. \quad (\|\cdot\|_{2,Q}^{(k)} - \text{норма в пространстве } W_2^k(Q)).$$

**Доказательство.** Умножим уравнение задачи (3.19) на  $v_t$  и проинтегрируем по  $\Omega \times (0, \tau)$ , где  $\tau \in (0, T]$  мы получим

$$\int_0^\tau \int_\Omega (c(r)v_n v_t + a(r)v_t v_t - v_t \Delta v) dr dt = \int_0^\tau \int_\Omega (v_t f) dr dt \quad (3.20)$$

Преобразуем каждое слагаемое левой части уравнения (3.20) по отдельности.

$$\text{Имеем} \quad \int_0^\tau \int_\Omega c(r)v_n v_t dr dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega c(r) \partial_t (v_t)^2 dr dt = \frac{1}{2} \int_\Omega c(r) (v_t(r, \tau))^2 dr, \quad (3.21)$$

т.к.  $v_t(r, 0) = 0$ . А также имеем

$$\int_0^\tau \int_\Omega v_t \Delta v dr dt = \int_0^\tau \int_\Omega v_t \partial_n v dr dt - \int_0^\tau \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v dr dt = - \int_0^\tau \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v dr dt,$$

т.к. на  $\partial\Omega$   $\partial_n v = 0$ . Интегрируя в последнем равенстве по  $t$  по частям, имеем

$$\int_0^\tau \int_\Omega v_t \Delta v dr dt = - \int_0^\tau \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v dr dt = - \int_\Omega \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr + \int_0^\tau \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v_t dr dt.$$

Складывая последние два равенства, имеем

$$\int_0^\tau \int_\Omega v_t \Delta v dr dt = - \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr. \quad (3.22)$$

Из неравенства Коши имеем

$$\int_{\Omega} v^2(r, \tau) dr = 2 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} v(r, \tau) v_t(r, \tau) dr dt \leq 2 \int_0^{\tau} \|v(t)\|_{2, \Omega} \|v_t(t)\|_{2, \Omega} dt. \quad (3.23)$$

Подставим (3.21), (3.22) в (3.20), получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} c(r) (v_t(r, \tau))^2 dr + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr = \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v_t(r, t) f(r, t)) dr dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} a(r) (v_t(r, t))^2 dr dt$$

Умножим на 2 и добавим (3.23), используя неравенство Коши имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v(r, \tau))^2 dr + c_1 \int_{\Omega} (v_t(r, \tau))^2 dr + \int_{\Omega} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr \leq \\ \leq 2 \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Omega} \|f(t)\|_{2, \Omega} dt + 2a_1 \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Omega}^2 dt + 2 \int_0^{\tau} \|v(t)\|_{2, \Omega} \|v_t(t)\|_{2, \Omega} dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

Обозначим

$$V(\tau) = \int_{\Omega} (v(r, \tau))^2 dr + \int_{\Omega} (v_t(r, \tau))^2 dr + \int_{\Omega} \nabla v(r, \tau) \cdot \nabla v(r, \tau) dr = \|v(\tau)\|_{2, \Omega}^2 + \|v_t(\tau)\|_{2, \Omega}^2 + \|\nabla v(\tau)\|_{2, \Omega}^2,$$

тогда выражение слева в (3.24) больше, чем  $c_1 V(\tau)$ , а справа, используя

неравенство  $2xy \leq x^2 + y^2$  и добавляя  $\frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \left( (1 + 2a_1) \|v(t)\|_{2, \Omega}^2 + (2 + 2a_1) \|\nabla v(t)\|_{2, \Omega}^2 \right) dt \geq 0$ ,

сводится к виду

$$\begin{aligned} V(\tau) &\leq \frac{1}{c_1} \left( \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Omega}^2 dt + \int_0^{\tau} \|f(t)\|_{2, \Omega}^2 dt + 2a_1 \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Omega}^2 dt + \int_0^{\tau} \|v(t)\|_{2, \Omega}^2 dt + \int_0^{\tau} \|v_t(t)\|_{2, \Omega}^2 dt \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \left\{ \|f(t)\|_{2, \Omega}^2 + \|v(t)\|_{2, \Omega}^2 + (2 + 2a_1) \|v_t(t)\|_{2, \Omega}^2 + (1 + 2a_1) \|v(t)\|_{2, \Omega}^2 + (2 + 2a_1) \|\nabla v(t)\|_{2, \Omega}^2 \right\} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|f(t)\|_{2, \Omega}^2 dt + \frac{2 + 2a_1}{c_1} \int_0^{\tau} V(t) dt. \end{aligned}$$

Используя лемму Гронуолла [120], имеем

$$V(\tau) \leq \frac{2 + 2a_1}{c_1} \int_0^{\tau} V(t) dt + \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|f(t)\|_{2, \Omega}^2 dt \leq \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|f(t)\|_{2, \Omega}^2 dt \left( 1 + \frac{2 + 2a_1}{c_1} \tau \exp \left\{ \frac{2 + 2a_1}{c_1} \tau \right\} \right).$$

Интегрируя по  $\tau$  на отрезке  $[0, T]$ , имеем

$$\begin{aligned} \left( \|v\|_{2, \Omega}^{(1)} \right)^2 &= \|v\|_{2, \Omega}^2 + \|v_t\|_{2, \Omega}^2 + \|\nabla v\|_{2, \Omega}^2 = \int_0^T \|v(\tau)\|_{2, \Omega}^2 + \|v_t(\tau)\|_{2, \Omega}^2 + \|\nabla v(\tau)\|_{2, \Omega}^2 d\tau \leq \\ &\leq \int_0^T \frac{1}{c_1} \int_0^{\tau} \|f(t)\|_{2, \Omega}^2 dt \left\{ 1 + \frac{2 + 2a_1}{c_1} \tau \exp \left( \frac{2 + 2a_1}{c_1} \tau \right) \right\} d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^T \|f(t)\|_{2,\Omega}^2 dt \int_0^T \frac{1}{c_1} \left( 1 + \frac{2+2a_1}{c_1} \tau \exp\left\{ \frac{2+2a_1}{c_1} \tau \right\} \right) d\tau \leq \|f\|_{2,Q}^2 E$$

или

$$\|v\|_{2,Q}^{(1)} \leq E_1 \|f\|_{2,Q}.$$

Лемма 3.1 доказана.

Будем обозначать через  $q$  пару  $q=(c(r), a(r)) \in Y$  и через  $dq$  пару  $dq=(dc(r), da(r)) \in Z$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $\Omega \subset R^N$ ,  $N = 2, 3$  - выпуклая ограниченная односвязная область, причем граница области  $\partial\Omega \in C^5$ . Рассмотрим задачу (3.15), (3.16), где для  $p(r,t)$  выполняется условие (3.18). Тогда для любой  $q \in Y$  существует и единственное обобщенное решение  $u(r,t,q) \in W_2^1(Q)$  задачи (3.15), (3.16), причем это отображение  $D: q \in Y \rightarrow u(r,t,q) \in W_2^1(Q)$  дифференцируемо по Фреше для любой  $q \in Y$ , где производная по Фреше  $\tilde{u}(r,t,q,dq)$  есть линейный оператор из нормированного пространства  $Z$  в  $W_2^1(Q)$ . Кроме того, является дифференцируемым по Фреше и функционал  $\Phi: q \in Y \rightarrow R^1$ , задаваемый выражением (3.17).

**Доказательство.** Докажем существование отображения  $D: q \in Y \rightarrow u(r,t,q) \in W_2^1(Q)$ . Используя функцию  $F(r,t)$  из условия (3.18), можно свести поиск  $u(r,t)$  решения задачи (3.15), (3.16) при произвольном фиксированном  $q \in Y$  к задаче поиска  $v(r,t)$  - решения задачи

$$\begin{aligned} c(r)v_{rr}(r,t) + a(r)v_t(r,t) - \Delta v(r,t) &= c(r)F_{rr}(r,t) + a(r)F_t(r,t) - \Delta F(r,t), \\ v(r,t=0) = v_t(r,t=0) &= 0, \quad \partial_n v|_H = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда  $u(r,t) = v(r,t) + F(r,t)$  будет решением задачи (3.15), (3.16).

Заметим, что поскольку  $F(r,t) \in W_2^4(Q)$  и  $c(r), a(r) \in C^3(\bar{\Omega})$ , то

$$c(r)F_{rr}(r,t) + a(r)F_t(r,t) - \Delta F(r,t) \in W_2^2(Q).$$

Кроме того,

$$\partial_t^j (c(r)F_u(r,0) + a(r)F_t(r,0) - \Delta F(r,0)) = 0 \quad (j=0,1)$$

в силу (3.18). Тогда из теоремы 1.2 (с граничными условиями Неймана) следует, что существует единственное решение задачи (3.25)  $v(r,t) \in W_2^3(Q)$ . А значит  $u(r,t) = v(r,t) + F(r,t)$  является единственным решением задачи (3.15), (3.16) и  $u(r,t) \in W_2^3(Q)$ . Таким образом, в условиях теоремы 1 для произвольного  $q \in Y$  существует единственное решение задачи (3.15), (3.16). Это определяет оператор  $D: q \in Y \rightarrow u(r,t,q) := u(q) \in W_2^3(Q)$ .

Определим линейный и ограниченный оператор  $\tilde{D}: dq \in Z \rightarrow \tilde{u}(r,t,q,dq) \in W_2^1(Q)$  для произвольного  $q \in Y$  следующим образом. Рассмотрим для  $q$  и  $u(r,t,q)$  следующую задачу

$$c(r)v_{tt} + a(r)v_t - \Delta v = -u_{tt}(r,t,q)dc(r) - u_t(r,t,q)da(r), \quad (3.26)$$

$$v(r,t=0) = v_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.27)$$

для произвольного  $dq = (dc(r), da(r)) \in Z$ . Преобразуем уравнение (3.26). Поскольку  $0 < c_1 < c(r)$ , то можно поделить на  $c(r)$

$$v_{tt}(r,t) + c^{-1}(r)a(r)v_t - c^{-1}(r)\Delta v(r,t) = -c^{-1}(r)(u_{tt}(r,t,q)dc(r) + u_t(r,t,q)da(r)).$$

Для достаточно гладких функций  $c(r)$  и  $v(r,t)$ , как известно, можно записать  $\nabla \cdot (c^{-1}\nabla v) = \nabla(c^{-1})\nabla v + c^{-1}\Delta v$ . Перейдем к эквивалентному уравнению для обобщенного решения, где по условию  $c(r) \in C^3(\bar{\Omega})$

$$\begin{aligned} v_{tt}(r,t) - \nabla \cdot (c^{-1}(r)\nabla v(r,t)) + \nabla(c^{-1}(r))\nabla v(r,t) + c^{-1}(r)a(r)v_t = \\ = -c^{-1}(r)(u_{tt}(r,t,q)dc(r) + u_t(r,t,q)da(r)). \end{aligned}$$

Заметим, что  $c^{-1}(r)(u_{tt}(r,t,q)dc(r) + u_t(r,t,q)da(r)) \in L_2(Q)$  и  $c^{-1}(r)(u_{tt}(r,t,q)dc(r) + u_t(r,t,q)da(r)) \in L_2(Q)$ . Поскольку  $(c(r), a(r)) \in Y \subset C^3(\bar{\Omega}) \times C^3(\bar{\Omega})$  и  $0 < c_1 < c(r)$ , то выполнены условия теоремы 1.1 (с граничными условиями Неймана  $\partial_n v|_{ST} = 0$ ).

Из этой теоремы 1.1 следует, что существует единственное решение задачи (3.26), (3.27) для произвольного  $dq \in Z$ . Обозначим это решение через  $\tilde{u}(r,t,q,dq)$ . Кроме того,  $\tilde{u}(r,t,q,dq) \in W_2^2(Q)$  и выполняется оценка

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(r, t, q, dq)\|_{2, Q}^{(2)} &\leq E_2 \left( \|c^{-1}(u_u(q)dc + u_t(q)da)\|_{2, Q} + \|c^{-1}(u_{uu}(q)dc + u_{ut}(q)da)\|_{2, Q} \right) \leq \\
&\leq E_2 c_1^{-1} \left( \|u_u(q)\|_{2, Q} + \|u_{uu}(q)\|_{2, Q} \right) \|dc\|_c + \left( \|u_t(q)\|_{2, Q} + \|u_{ut}(q)\|_{2, Q} \right) \|da\|_c \leq \\
&\leq E_2 c_1^{-1} 4 \|u(q)\|_{2, Q}^{(3)} \|dq\|_Z \leq E_3 \|u(q)\|_{2, Q}^{(3)} \|dq\|_Z,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

где константа  $E_3$ , не зависит от  $dq$ .  $\|\cdot\|_{2, Q}^{(k)}$  - норма в пространстве  $W_2^k(Q)$ .

Кроме того, поскольку  $c^{-1}(r)(u_u(r, t, q)dc(r) + u_t(r, t, q)da(r))$  линейно зависит от  $dq$ , то и  $\tilde{u}(r, t, q, dq)$  линейно зависит от  $dq$ . Таким образом, определен линейный и ограниченный оператор  $\tilde{D}: dq \in Z \rightarrow \tilde{u}(r, t, q, dq) \in W_2^1(Q)$ .

Покажем, что отображение  $\tilde{D}: dq \in Z \rightarrow \tilde{u}(r, t, q, dq) \in W_2^1(Q)$  является производной по Фреше для отображения  $D: q \in Y \rightarrow u(r, t, q) \in W_2^1(Q)$  для выбранного  $q \in Y$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $O_\varepsilon(q) \subset Y$  элемента  $q$ . Обозначим через  $u(r, t, q + dq) = u(q + dq)$  решение Задачи (3.15), (3.16) для  $q + dq \in O_\varepsilon(q)$ . Далее, для  $u(q + dq)$ ,  $u(q)$  и  $\tilde{u}(q, dq)$ , используя (3.15), (3.26), можно записать

$$\begin{aligned}
(c + dc)u_u(q + dq) - c u_u(q) - c \tilde{u}_u(q, dq) + (a + da)u_t(q + dq) - a u_t(q) - a \tilde{u}_t(q, dq) - \\
- \Delta u(q + dq) + \Delta u(q) + \Delta \tilde{u}(q, dq) = dc u_u(q) + da u_t(q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c + dc) \partial_{uu}(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq)) + dc u_{uu}(q) + dc \tilde{u}_{uu}(q, dq) + \\
+ (a + da) \partial_{it}(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq)) + da u_{it}(q) + da \tilde{u}_{it}(q, dq) - \\
- \Delta(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq)) = dc u_{uu}(q) + da u_{it}(q).
\end{aligned}$$

И окончательно

$$[(c + dc) \partial_{uu} + (a + da) \partial_{it} - \Delta](u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq)) = -dc \tilde{u}_{uu}(q, dq) - da \tilde{u}_{it}(q, dq). \tag{3.29}$$

А также из (3.16), (3.27) граничные и начальные условия

$$\begin{aligned}
(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq))(r, t = 0) = 0, \quad \partial_t(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq))(r, t = 0) = 0 \\
\partial_n(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq))|_F = 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Таким образом, для любого  $q + dq \in O_\varepsilon(q) \subset Y$  функция  $u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq)$  является решением задачи (3.29), (3.30). Причем, поскольку  $u(q + dq) \in W_2^3(Q)$ ,  $u(q) \in W_2^3(Q)$  и  $\tilde{u}(q, dq) \in W_2^2(Q)$ , то  $(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq)) \in W_2^2(Q)$  и

$-dc\tilde{u}_n(q, dq) - da\tilde{u}_t(q, dq) \in L_2(Q)$ . Тогда согласно лемме 3.1 выполняется равномерная оценка для всех  $q + dq \in O_\varepsilon(q)$

$$\begin{aligned} \|(u(q + dq) - u(q) - \tilde{u}(q, dq))\|_{2,Q}^{(1)} &\leq E_1 \|dc\tilde{u}_n(q, dq) - da\tilde{u}_t(q, dq)\|_{2,Q} \leq \\ &\leq E_1 (\|dc\tilde{u}_n(q, dq)\|_{2,Q} + \|da\tilde{u}_t(q, dq)\|_{2,Q}) \leq E_1 (\|dc\|_C + \|da\|_C) \|\tilde{u}(q, dq)\|_{2,Q}^{(2)} \leq \\ &\leq E_1 E_3 (\|dc\|_C + \|da\|_C) \|u(q)\|_{2,Q}^{(3)} \|dq\|_Z \leq E_4 \|u(q)\|_{2,Q}^{(3)} \|dq\|_Z^2, \end{aligned}$$

где использовано неравенство (3.28),  $\|\cdot\|_Z$  - норма в пространстве  $Z$ .

Поскольку последний член имеет второй порядок малости по  $dq$ , то отображение  $D: q \in Y \rightarrow u(r, t, q) \in W_2^1(Q)$  дифференцируемо по Фреше для выбранной  $q \in Y$ , а линейный оператор  $\tilde{D}: dq \in Z \rightarrow \tilde{u}(r, t, q, dq) \in W_2^1(Q)$  является его производной.

Докажем дифференцируемость функционала  $\Phi(u^j(q))$  для выбранного  $q \in Y$ , где как и прежде индекс  $j=1, \dots, M$  – отвечает разным положениям источника. По теореме о следе для функции  $u^j(r, t) \in W_2^1(Q)$  существует ограниченный линейный оператор  $Tu^j \rightarrow u^j|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$ . Тогда для  $U^j(s, t) \in L_2(\Gamma)$ , используя теорему о дифференцировании сложной функции, получим дифференцируемость по Фреше  $\Phi(u^j(q))$  и производная имеет вид

$$\Phi'(u^j(q), dq) = \sum_{j=1}^M \int_\Gamma (u^j(q)|_\Gamma - U^j) \left( (u^j(q)|_\Gamma)' , dq \right) ds dt = \sum_{j=1}^M \int_\Gamma (u^j(q)|_\Gamma - U^j) \tilde{u}^j(q, dq)|_\Gamma ds dt. \quad (3.31)$$

Теорема 3.1 доказана.

Рассмотрим задачу, которую назовем «сопряженной» к основной задаче (3.15), (3.16)

$$c(r)w_n(r, t) - a(r)w_t(r, t) - \Delta w(r, t) = 0, \quad (3.32)$$

$$w(r, t = T) = w_t(r, t = T) = 0, \quad \partial_n w|_\Gamma = u|_\Gamma - U, \quad (3.33)$$

где  $u$  – есть решение основной задачи (3.15), (3.16),  $U(s, t)$  - экспериментальным данным «измерения» волны  $\bar{u}(r, t)|_\Gamma$  прямой задачи (3.14).

Пусть заданная на границе  $\partial\Omega$  функция  $U(r,t)$  такова, что существует функция  $H(r,t)$ , такая что

$$H(r,t) \in W_2^3(Q), \quad \partial_n H|_{\Gamma} = U(r,t). \quad (3.34)$$

Если  $U(s,t) = \bar{u}(r,t)|_{\Gamma}$ , где  $\bar{u}(r,t)$  - решение прямой задачи Коши (3.14), то существование такой функции  $H(r,t)$  следует из существования  $\bar{u}(r,t) \in W_2^4(\Omega \times (0, T))$  - решения прямой задачи (3.14), если положить  $H(r,t) = b(r)\bar{u}(r,t)$ . Здесь  $b(r) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  такова, что  $b(r)|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\partial_n b(r)|_{\partial\Omega} = 1$ . (По поводу построения такой функции  $b(r)$  смотри, например, [99]). Другой вариант построения функции  $H(r,t)$  состоит, например, в продолжении достаточно гладкой функции  $U(r,t)$  с границы  $\partial\Omega$  на всю область  $\Omega$  методами построения изложенными в разделе 3.4 [64].

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия Теоремы 1 и для  $U(r,t)$  выполняется условие (3.34). Тогда производная по Фреше для функционала  $\Phi(u(q)): q \in Y \rightarrow R^1$ , задаваемого выражением (3.17), имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi'(u^j(q), dq) &= \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma} (u^j(q)|_{\Gamma} - U^j) \bar{u}^j(q, dq)|_{\Gamma} ds dt = \\ &= \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left\{ \left[ \int_0^T w_i^j(r,t) u_i^j(r,t) dt \right] dc(r) + \left[ \int_0^T w_i^j(r,t) u^j(r,t) dt \right] da(r) \right\} dr, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $u^j$  - есть решение основной задачи (3.15), (3.16), а  $w^j$  - есть решение «сопряженной» задачи (3.32), (3.33), для некоторого положения источника  $j$ . Здесь производная по Фреше является линейным оператором из нормированного пространства  $Z$  в  $R^1$ .

**Доказательство.** В теореме 3.1 доказано, что функционал  $\Phi(u(q))$  дифференцируем по Фреше и производная имеет вид (3.31). Докажем существование и единственность решения задачи ((3.32), (3.33)). Используя



функцию  $H(r,t)$ , сведем задачу (3.32), (3.33) при фиксированном  $q \in Y$  к решению задачи с нулевыми граничными условиями

$$\begin{aligned} c(r)v_{tt}(r,t) + a(r)v_t(r,t) - \Delta v(r,t) &= (c(r)\partial_{tt} + a(r)\partial_t - \Delta)(b(r)u(r,t,q) - H(r,t)) \\ v(r,t=T) = v_t(r,t=T) &= 0, \quad \partial_n v|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $u(r,t,q)$  - решение основной задачи (3.15), (3.16). Тогда  $w(r,t) = v(r,t) + (b(r)u(r,t,q) - H(r,t))$  - будет решением задачи (3.32), (3.33). Заметим, что

$$\partial_n w|_{\Gamma} = \partial_n v|_{\Gamma} + (\partial_n b u + b \partial_n u - \partial_n H)|_{\Gamma} = (u - U)|_{\Gamma}.$$

Поскольку  $H(r,t) \in W_2^3(Q)$  и  $u(r,t,q) \in W_2^3(Q)$ , то  $(c(r)\partial_{tt} + a(r)\partial_t - \Delta)(b(r)u(r,t,q) - H(r,t)) \in W_2^1(Q)$ . Тогда согласно теореме 1.1 существует единственное решение  $v(r,t) \in W_2^2(Q)$ , а значит и решение  $w(r,t) \in W_2^2(Q)$  задачи (3.32), (3.33).

Рассмотрим следующие соотношения для  $w(r,t) \in W_2^2(Q)$  и  $\tilde{u}(r,t,q,dq)$ , где  $\tilde{u}(r,t,q,dq) \in W_2^2(Q)$  по переменным  $(r,t)$  является решением задачи (3.26), (3.27) для произвольного  $dq \in Z$ . В этих соотношениях используем формулы (3.27), (3.32), (3.33) и правила дифференцирования по частям для пространств  $W_2^2(Q)$ , которые следуют, например, из формул (6.21), (6.22) из [63], глава 1 параграф 6 стр.75-76] и теореме о следе. Обозначив  $\tilde{u}(r,t,q,dq)$  через  $\tilde{u}(r,t)$  имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega T} (c(r)w_{tt}(r,t) - a(r)w_t(r,t) - \Delta w(r,t)) \tilde{u}(r,t) dr dt = \\ &= \int_{\Omega 0}^T \int_{\Omega} c(r)w_{tt}(r,t) \tilde{u}(r,t) dt dr - \int_{\Omega 0}^T \int_{\Omega} a(r)w_t(r,t) \tilde{u}(r,t) dt dr - \int_{0 \Omega}^T \int_{\Omega} \Delta w(r,t) \tilde{u}(r,t) dr dt = \\ &= - \int_{\Omega 0}^T \int_{\Omega} c(r)w_t(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_{\Omega 0}^T \int_{\Omega} a(r)w(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr - \int_{0 S}^T \int_{\Omega} \partial_n w(s,t) \tilde{u}(s,t) ds dt + \\ &+ \int_{0 \Omega}^T \int_{\Omega} \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt = - \int_{\Omega 0}^T \int_{\Omega} c(r)w_t(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_{\Omega 0}^T \int_{\Omega} a(r)w(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr - \end{aligned}$$

$$-\int_{\Gamma} (u(s,t) - U(s,t)) \tilde{u}(s,t) ds dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (u(s,t) - U(s,t)) \tilde{u}(s,t) ds dt = \\ & = -\int_0^T \int_{\Omega} c(r) w_t(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} a(r) w(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Далее, поскольку  $u(r,t) \in W_2^3(Q)$ , рассмотрим следующие соотношения, в которых используем формулы (3.16), (3.26) и (3.33)

$$\begin{aligned} & \int_Q w(r,t) (c(r) \tilde{u}_{tt}(r,t) + a(r) u_t(r,t) - \Delta \tilde{u}(r,t)) dr dt = -\int_0^T \int_{\Omega} \{w(r,t) u_{tt}(r,t) dc(r) + w(r,t) u_t(r,t) da(r)\} dt dr = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \{w_t(r,t) u_t(r,t) dc(r) + w_t(r,t) u(r,t) da(r)\} dt dr. \end{aligned} \quad (3.37)$$

С другой стороны, используя соотношения (3.27) и (3.33) имеем

$$\begin{aligned} & \int_Q w(r,t) (c(r) \tilde{u}_{tt}(r,t) + a(r) \tilde{u}_t(r,t) - \Delta \tilde{u}(r,t)) dr dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} w(r,t) c(r) \tilde{u}_{tt}(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} w(r,t) a(r) \tilde{u}_t(r,t) dt dr - \int_0^T \int_{\Omega} w(r,t) \Delta \tilde{u}(r,t) dr dt = \\ & = -\int_0^T \int_{\Omega} c(r) w_t(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} a(r) w(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr - \int_0^T \int_{\Omega} w(s,t) \partial_n \tilde{u}(s,t) ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt = -\int_0^T \int_{\Omega} c(r) w_t(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} a(r) w(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из (3.37) и (3.38) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \{w_t(r,t) u_t(r,t) dc(r) + w_t(r,t) u(r,t) da(r)\} dt dr = \\ & = -\int_0^T \int_{\Omega} c(r) w_t(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} a(r) w(r,t) \tilde{u}_t(r,t) dt dr + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Тогда из (3.31), (3.36) и (3.39) имеем

$$\begin{aligned}\Phi'(u^j(q), dq) &= \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma} (u^j(q)|_{\Gamma} - U^j) \tilde{u}^j(q, dq)|_{\Gamma} ds dt = \\ &= \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_0} \int_0^T \{w_i^j(r, t) u_i^j(r, t) dc(r) + w_i^j(r, t) u^j(r, t) da(r)\} dt dr = \\ &= \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left\{ \left[ \int_0^T w_i^j(r, t) u_i^j(r, t) dt \right] dc(r) + \left[ \int_0^T w_i^j(r, t) u^j(r, t) dt \right] da(r) \right\} dr.\end{aligned}$$

Здесь  $u^j(r, t)$ - есть решение основной задачи (3.15), (3.16), а  $w^j(r, t)$ - есть решение «сопряженной» задачи (3.32), (3.33) при заданном  $q$  для некоторого положения источника  $j$ . Таким образом, производная функционала выражается через решения основной и «сопряженной» задачи. Теорема 3.2 доказана.

**Замечание 3.1.** В работе [166] для волнового уравнения с поглощением на физическом уровне строгости формально получено выражение для градиента, однако не приведена строго математическая постановка задачи, не выписаны граничные условия.

**Замечание 3.2.** Используя полученное представление для производной Фреше функционала невязки можно построить эффективные итеративные алгоритмы решения обратных задач ультразвуковой томографии как в двумерном, так и в трехмерном случае. Отметим, что строго говоря, из полученного выражения для производной Фреше (3.35) нельзя использовать градиент для минимизации функционала невязки, поскольку  $c(r) \in C^3(\bar{\Omega})$ , а градиент может не принадлежать пространству  $C^3(\bar{\Omega})$ . Однако для численных расчетов в конечномерных пространствах эта проблема не является принципиальной.

**Замечание 3.3.** Нетрудно показать, что теоремы аналогичные теоремам 3.1 и 3.2 можно доказать для сред без поглощения  $a(r) \equiv 0$ . Можно также доказать аналогичные теоремам 1.3 и 1.4 утверждения в средах с поглощением, описываемых выражением (3.15). Таким образом, в средах с поглощением при решении обратных задач можно ставить на границе как условия (3.16) и (3.33), так и условия неотражения на границе как и в главе 1 (см. замечание 1.3).

### 3.3 Постановка и итерационные методы решения задач волновой томографии в стоксовской модели поглощения

В настоящем разделе 3.3 прямая и обратная задача и выражение для градиента функционала невязки рассмотрены на физическом уровне строгости. Это связано с тем, что дифференциальное уравнение, описывающее процесс, не является гиперболическим в силу наличия частных производных третьего порядка, а значит, для него не выполняются фундаментальные теоремы 1.1 и 1.2, на которых строятся доказательства предыдущих теорем.

Задача в прямом времени в модели 2а имеет следующий вид

$$\text{Модель 2а. } c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)(\Delta u(r,t))_t - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t), \quad (3.40)$$

$$u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = u_{tt}(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u|_{ST} = p(r,t). \quad (3.41)$$

Будем предполагать, что вне области неоднородности скорость  $c^{-0.5}(r) = v(r) \equiv v_0 = \text{const}$  ( $v_0$  - известна), а в окрестности ограничивающей область  $\Omega$  поверхности  $S = \partial\Omega$

$$a(r)|_S = 0. \quad (3.42)$$

В случае исследования объекта помещенного в воду можно считать выполненным условие  $a(r) \equiv 0$  около границы, поскольку поглощение ультразвука в воде гораздо меньше, чем в тканях. Обратная задача состоит в нахождении функций  $c(r)$  и  $a(r)$ , описывающих неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны  $U(s,t)$  на границе  $S$  области за время  $(0,T)$  при различных положениях  $r_0$  источника.

Как и выше поставим обратную задачу как задачу минимизации функционала (3.17). Для минимизации функционала будем использовать градиентные итерационные методы. Выпишем математическую задачу, позволяющую вычислить градиент функционала (3.17). Обозначим через  $q$  пару  $q = (c, a)$ ,  $u_q dq = u_c dc + u_a da$ . Линейная относительно произвольной вариации  $dq = (dc, da)$  часть приращения функционала (3.17) имеет вид

$$\Phi(u^j(q), dq) = \sum_{j=1}^M \int_{ST} (u^j(q)|_{\Gamma} - U^j) u_q^j dq|_{\Gamma} ds dt. \quad (3.43)$$

Здесь предполагается дифференцируемость по Фреше решения  $u^j(r, t)$  задачи (3.40), (3.41) как функции от  $q(r)$ ,  $u_q^j$  - производная Фреше, как и прежде индекс  $j=1, \dots, M$  - отвечает разным положениям источника.

Взяв полную производную по  $q(r)$  в (3.40), имеем

$$c(r)(u_c dc + u_a da)_{tt} + a(r)\Delta(u_c dc + u_a da)_t - \\ - \Delta(u_c dc + u_a da) + u_{tt}(r, t)dc + \Delta u_t(r, t)da = 0. \quad (3.44)$$

Кроме того, вводя линейный оператор  $P$  ограничения функции на область  $t=0$ , имеем из (3.41), что  $u(r, t=0) \equiv P(u(r, t)) = 0 = const$ . Дифференцируя по  $q(r)$ , получим  $(P(u(r, t)))'_q d\xi = P(u_q dq) = (u_q dq)(r, t=0) = 0$ . Аналогично из (3.41) получаем, что

$$(u_q d\xi)(r, t=0) = (u_q dq)_t(r, t=0) = (u_q dq)_{tt}(r, t=0) = 0, \quad \partial_n(u_q dq)|_{ST} = 0. \quad (3.45)$$

Таким образом, функция  $(u_q dq)(r, t)$  при любой вариации  $dq = (dc, da)$  является решением задачи (3.44), (3.45). Введем оператор  $A$ :  $Au = c(r)u_{tt}(r, t) + a(r)\Delta u_t(r, t) - \Delta u(r, t)$ .

Рассмотрим задачу, которую назовем «сопряженной» к основной задаче (3.40), (3.41)

$$Bw = c(r)w_{tt}(r, t) - \Delta\{a(r)w_t(r, t)\} - \Delta w(r, t) = 0, \quad (3.46)$$

$$w(r, t=T) = w_t(r, t=T) = w_{tt}(r, t=T) = 0, \quad \partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U, \quad (3.47)$$

где  $u$  - есть решение основной задачи (3.40), (3.41). Обозначим  $(u_q dq)(r, t) = \tilde{u}(r, t)$

для некоторой вариации  $dq$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(Bw, \tilde{u})$ .

Используя соотношения (3.42), (3.45) и (3.47), получим

$$0 = (Bw, \tilde{u}) = \int_{\Omega T} (Bw) \tilde{u} dr dt = \\ = \int_{\Omega 0}^T \int c(r)w_{tt}(r, t) \tilde{u}(r, t) dt dr - \int_{\Omega 0}^T \int \Delta\{a(r)w_t(r, t)\} \tilde{u}(r, t) dt dr - \int_{\Omega 0}^T \int \Delta w(r, t) \tilde{u}(r, t) dr dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega 0}^T c(r)w_i(r,t)\tilde{u}_i(r,t)dt dr - \int_{0 S}^T \partial_n \{a(s)w_i(s,t)\}\tilde{u}(s,t)ds dt + \\
&+ \int_{0 \Omega}^T \nabla \{a(r)w_i(r,t)\}\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt - \int_{0 S}^T \partial_n w(s,t)\tilde{u}(s,t)ds dt + \int_{0 \Omega}^T \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt = \\
&= -\int_{\Omega 0}^T c(r)w_i(r,t)\tilde{u}_i(r,t)dt dr + \int_{0 \Omega}^T \nabla \{a(r)w_i(r,t)\}\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt - \\
&- \int_{ST} (u(s,t) - U(s,t))\tilde{u}(s,t)ds dt + \int_{0 \Omega}^T \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt .
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{ST} (u(s,t) - U(s,t))\tilde{u}(s,t)ds dt = \\
&= -\int_{\Omega 0}^T c(r)w_i(r,t)\tilde{u}_i(r,t)dt dr + \int_{0 \Omega}^T \nabla \{a(r)w_i(r,t)\}\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt + \int_{0 \Omega}^T \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt . \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим скалярное произведение  $(w, A\tilde{u})$ . Используя соотношения (3.41), (3.44) и (3.47), а также  $\Delta u(r, t=0) = 0$  получим

$$\begin{aligned}
(w, A\tilde{u}) &= \int_{\Omega T} w(r,t)A(\tilde{u}(r,t))dr dt = \\
&= -\int_{\Omega 0}^T [w(r,t)u_{tt}(r,t)dc(r) + w(r,t)\Delta u_t(r,t)da(r)]dt dr = \\
&= \int_{\Omega 0}^T [w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r) + w_i(r,t)\Delta u(r,t)da(r)]dt dr . \quad (3.49)
\end{aligned}$$

С другой стороны, используя соотношения (3.45) и (3.47), имеем

$$\begin{aligned}
(w, A\tilde{u}) &= \int_{\Omega 0}^T w(r,t)c(r)\tilde{u}_{tt}(r,t)dt dr + \int_{\Omega 0}^T w(r,t)a(r)\Delta \tilde{u}_t(r,t)dt dr - \int_{0 \Omega}^T w(r,t)\Delta \tilde{u}(r,t)dr dt = \\
&= -\int_{\Omega 0}^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dt dr - \int_{\Omega 0}^T a(r)w_i(r,t)\Delta \tilde{u}(r,t)dt dr - \\
&- \int_{0 S}^T w(s,t)\partial_n \tilde{u}(s,t)ds dt + \int_{0 \Omega}^T \nabla w(r,t)\nabla \tilde{u}(r,t)dr dt = \\
&= -\int_{\Omega 0}^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dt dr - \int_{0 S}^T a(s)w_i(s,t)\partial_n \tilde{u}(s,t)ds dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_0}^T \nabla \{a(r)w_i(r,t)\} \nabla \tilde{u}(r,t) dt dr + \int_{0\Omega}^T \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt = \\
& = - \int_{\Omega_0}^T c(r)w_i(r,t)\tilde{u}_i(r,t) dt dr + \int_{\Omega_0}^T \nabla \{a(r)w_i(r,t)\} \nabla \tilde{u}(r,t) dt dr + \int_{0\Omega}^T \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt. \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Из (3.49) и (3.50) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0}^T [w_i(r,t)u_i(r,t)dc(r) + w_i(r,t)\Delta u(r,t)da(r)] dt dr = \\
& = - \int_{\Omega_0}^T c(r)w_i(r,t)\tilde{u}_i(r,t) dt dr + \int_{\Omega_0}^T \nabla \{a(r)w_i(r,t)\} \nabla \tilde{u}(r,t) dt dr + \int_{0\Omega}^T \nabla w(r,t) \nabla \tilde{u}(r,t) dr dt. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Тогда из (3.43), (3.48) и (3.51) имеем

$$\begin{aligned}
\Phi'(u^j(q), dq) &= \sum_{j=1}^M \int_{ST} (u^j(q)|_{\Gamma} - U^j) u_q^j dq|_{\Gamma} ds dt = \\
&= \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_0}^T \{w_i^j(r,t)u_i^j(r,t)dc(r) + w_i^j(r,t)\Delta u^j(r,t)da(r)\} dt dr = \\
&= \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left\{ \left[ \int_0^T w_i^j(r,t)u_i^j(r,t) dt \right] dc(r) + \left[ \int_0^T w_i^j(r,t)\Delta u^j(r,t) dt \right] da(r) \right\} dr.
\end{aligned}$$

Выделяя линейные части по вариации  $dc$  и  $da$ , окончательно для градиента функционала  $\Phi(u(q))$  имеем

$$\Phi'_c(u(q)) = \sum_{j=1}^M \int_0^T w_i^j(r,t)u_i^j(r,t) dt, \quad \Phi'_a(u(q)) = \sum_{j=1}^M \int_0^T w_i^j(r,t)\Delta u^j(r,t) dt. \quad (3.52)$$

Здесь  $u^j(r,t)$  - есть решение основной задачи (3.40), (3.41), а  $w^j(r,t)$  - есть решение «сопряженной» задачи (3.46), (3.47) при заданных  $c(r)$  и  $a(r)$  для некоторого положения источника  $j$ . Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и «сопряженную» задачи.

Задача в прямом времени в модели 2б имеет следующий вид

$$\text{Модель 2б. } c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t),$$

$$u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = u_{tt}(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u|_{ST} = p(r,t).$$

Сопряженная задача имеет вид

$$Bw = c(r)w_{tt}(r, t) - a(r)w_{ttt}(r, t) - \Delta w(r, t) = 0,$$

$$w(r, t = T) = w_t(r, t = T) = w_{tt}(r, t = T) = 0, \quad \partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U.$$

Нетрудно на физическом уровне строгости получить выражение для градиента функционала невязки (3.17) для решения обратной задачи в модели 2б

$$\Phi'_c(u(c)) = \sum_{j=1}^M \int_0^T w_t^j(r, t) u_t^j(r, t) dt, \quad \Phi'_a(u(a)) = \sum_{j=1}^M \int_0^T w_t^j(r, t) u_{tt}^j(r, t) dt.$$

Таким образом, в каждой из моделей 2а-б в явном виде на физическом уровне строгости выписано выражение для градиента функционала невязки. Зная градиент, можно предложить различные итерационные методы минимизации функционала невязки. В качестве базового метода для решения обратных задач в моделях 1-2 использовался модифицированный вариант метода наискорейшего спуска, подробно описанный ниже.

### 3.4 Численные методы на основе явных разностных схем решения обратных задач волновой томографии с поглощением

В настоящем разделе будут разработаны численные методы как в послойной 2.5D схеме решения трехмерных задач волновой томографии, так и в 3D схеме. Заметим, что полученные выражения для градиента справедливы и в  $R^2$ , и в  $R^3$ .

Опишем численные методы в послойной 2.5D схеме для слоев в  $R^2$ . Переход в  $R^3$  не имеет принципиальных сложностей и можно провести по аналогии. Для решения обратной задачи в модели 1 в каждом из слоев, будем использовать метод конечных разностей. На области изменения аргументов введем равномерную дискретную сетку

$$v_{ijk} = \{(x_i, y_j, t_k) : x_i = ih, \quad 0 \leq i < n; \quad y_j = jh, \quad 0 \leq j < n; \quad t_k = k\tau, \quad 0 \leq k < m\},$$

где  $h$  – шаг сетки по горизонтальным координатам,  $\tau$  – шаг сетки по времени. Параметры  $h$  и  $\tau$  связаны условием устойчивости Куранта  $c^{-0.5}\tau < h/\sqrt{2}$ . Параметры  $n, m$  задают количество точек сетки по горизонтальным координатам и времени.



Используем следующую разностную аппроксимацию уравнения (3.15) 2-го порядка точности в области, не содержащей источников

$$c_{ij} \frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^k + u_{ij}^{k-1}}{\tau^2} + a_{ij} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h^2} - \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h^2} = 0,$$

где первое слагаемое аппроксимирует  $c(r)u_{tt}(r,t)$ , второе -  $a(r)u_t(r,t)$ , а третье -  $-\Delta u(r,t)$ . Здесь  $u_{ij}^k$  - значения  $u(r,t)$  в точке  $(x_i, y_j)$  в момент времени  $t_k$ ,  $c_{ij}$  и  $a_{ij}$  - значения  $c(r)$  и  $a(r)$  в точке  $(x_i, y_j)$  соответственно. Выделяя член  $u_{ij}^{k+1}$ , получаем явную разностную схему по временным слоям для расчета распространения звуковой волны (расчет «в прямом времени») для уравнения (3.15)

$$u_{ij}^{k+1} = \left( 2\left(\frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2}{h^2}\right)u_{ij}^k + \frac{u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k}{h^2} + \left(\frac{a_{ij}}{2\tau} - \frac{c_{ij}}{\tau^2}\right)u_{ij}^{k-1} \right) \left( \frac{a_{ij}}{2\tau} + \frac{c_{ij}}{\tau^2} \right)^{-1}, \quad (3.53)$$

начальные условия задаются в виде  $u_{ij}^0 = u_{ij}^1 = 0$ . В качестве граничных условий для модельных расчетов в главе 3 выбиралось как условия (3.16) и (3.33), так и условие неотражения на границе второго порядка точности [54] (Замечание 3.3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.54)$$

В модельных расчетах исследуемая область окружена однородной средой (рисунок 3.1), в которой процесс распространения зондирующего импульса хорошо известен, что позволяет вычислить  $u(r,t)$  и  $u_t(r,t)$  при малом  $t$ . Зондирующий импульс задается в некоторый момент времени  $t_1 > 0$  в виде радиально распространяющейся волны в среде L по формуле

$$\begin{cases} u(r, t_1) = K \exp(\alpha(r-R_0)) \sin\left(\frac{4\pi(r-R_0)}{v_0\Theta}\right), & \text{при } R_0 - v_0 T < r < R_0, \\ u(r) = 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (3.55)$$

где  $r$  - расстояние от текущей точки до источника импульса,  $\Theta$  - длительность импульса по времени,  $v_0$  - скорость волны в среде L,  $R_0$  - расстояние от переднего фронта волны до источника импульса,  $K$  - амплитуда импульса,  $\alpha > 0$  - задает крутизну огибающей импульса. Параметры, задающие импульс в модельных расчетах выбирались таким образом, чтобы центральная частота примерно равнялась 300 кГц,  $\alpha = 0.45$ ,  $R_0 = 10$  мм,  $v_0 = 1500000$  мм/с,  $\Theta = 0.00000666$  с,  $K = 2$ .

Аналогично (с учетом замены знака перед  $a$ ) выписывается разностная схема для  $w(r,t)$  в обратном времени. В сопряженной задаче волна также поглощается. Решение находится по временным слоям в явной форме. Градиент (3.35) функционала (3.17) вычислялся по разностной формуле

$$\text{grad}C_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^k}{\tau} \tau, \quad \text{grad}A_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} u_{ij}^k \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k-1}}{\tau} \tau, \quad (3.56)$$

где  $\text{grad}C_{ij}$  - градиент в точке  $(x_i, y_j)$  по  $c$ , а  $\text{grad}A_{ij}$  - градиент в точке  $(x_i, y_j)$  по  $a$ .

Невязка для одного положения источника вычисляется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2qm} \sum_{\substack{i,j \in S \\ k=0..m-1}} (u_{ij}^k - U_{ij}^k)^2. \quad (3.57)$$

Здесь  $S$  – граница,  $U_{ij}^k$  – значения  $U(r,t)$  в точке  $(x_i, y_j)$  на границе  $S$  в момент времени  $t_k$ ,  $q$  – количество детекторов на границе  $S$ ,  $m$  – число шагов по времени.

Для проведения модельных расчётов был использован следующий итерационный процесс.

В качестве начального приближения выбирается значение  $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$ , соответствующее скорости звука в чистой воде 1.5 км/с и  $a^{(0)} = a_0 = \text{const} = 0$ .

На каждой итерации ( $p$ ) выполняются следующие действия:

1. Расчет начального импульса источника с использованием формулы (3.55).
2. Решение прямой задачи (3.15), (3.16) для текущего итерационного приближения  $(c^{(p)}, a^{(p)})$ . Расчет распространения ультразвуковой волны  $u^{(p)}(r, t)$  выполняется по формуле (3.53). Вычисляются значения  $u(r,t)$  на каждом из детекторов.
3. Вычисление невязки  $\Phi^{(p)} = \Phi(u^{(p)}(r, t))$  по формуле (3.57).
4. Решение сопряжённой задачи (3.32), (3.33) для  $w^{(p)}(r, t)$ .
5. Вычисление градиента ( $\text{grad}C^{(p)}$ ,  $\text{grad}A^{(p)}$ ) по формуле (3.56) для всех источников.
6. Коррекция текущего приближения  $c^{(p+1)} = c^{(p)} + \gamma^{(p)} \text{grad}C^{(p)}$ ,  $a^{(p+1)} = a^{(p)} + \gamma^{(p)} \text{grad}A^{(p)}$ . Процесс возвращается к пункту 2.

В качестве регуляризирующего параметра использовалось правило останова итераций, в котором количество итераций определяется уровнем погрешности входных данных.

Начальный шаг метода градиентного спуска  $\gamma^{(0)}$  выбирается из априорных соображений. Для более точного определения шага для наискорейшего спуска потребовалось бы выполнять дополнительные итерации, что увеличило бы время расчётов в 2 и более раз. Если невязка  $\Phi^{(p)}$  на следующей итерации оказывается больше  $\Phi^{(p-1)}$ , шаг  $\gamma^{(p)}$  уменьшается в 1.5 раза.

Далее, выпишем разностную схему для уравнения (3.40) в модели 2а. Мы использовали четырехслойную по времени схему, которая, как показали модельные расчеты, обеспечила получение устойчивого решения волнового уравнения с поглощением (3.40). Для слагаемых  $c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t)$  разностная аппроксимация использовалась такая же, как и выше. Для слагаемого  $a(r)(\Delta u)_t$  предложена следующая схема

$$\frac{a_{ij}}{\tau h^2} \left[ \left( u_{i+1j}^k - u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1} + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k - u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1} + u_{ij-1}^k \right) - \left( u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^k - u_{ij}^{k-2} + u_{i-1j}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^k - u_{ij}^{k-2} + u_{ij-1}^{k-1} \right) \right].$$

Выделяя член  $u_{ij}^{k+1}$ , получаем явную разностную схему по временным слоям для расчета распространения звуковой волны (расчет «в прямом времени») для уравнения (3.40)

$$u_{ij}^{k+1} = \left( \frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2a_{ij}}{\tau h^2} \right)^{-1} \left[ \frac{c_{ij}}{\tau^2} (2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}) - \frac{a_{ij}}{\tau h^2} \left\{ \left( u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^{k-1} + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k \right) - \left( u_{i+1j}^{k-1} - 2u_{ij}^k - 2u_{ij}^{k-2} + u_{i-1j}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} + u_{ij-1}^{k-1} \right) \right\} + \frac{1}{h^2} (u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k - 4u_{ij}^k) \right]. \quad (3.58)$$

Сопряженная задача описывается уравнением (3.46). Для аппроксимации слагаемого  $\Delta \{a(r)w_t(r,t)\}$  предложена следующая схема

$$\frac{1}{\tau h^2} \left[ a_{i+1j} (w_{i+1j}^{k+1} - w_{i+1j}^k) - a_{ij} \left\{ \left( w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^k \right) - \left( w_{ij}^{k-1} + w_{ij}^{k+1} \right) \right\} + a_{i-1j} (w_{i-1j}^{k+1} - w_{i-1j}^k) + a_{ij+1} (w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij+1}^k) - a_{ij} \left\{ \left( w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^k \right) - \left( w_{ij}^{k-1} + w_{ij}^{k+1} \right) \right\} + a_{ij-1} (w_{ij-1}^{k+1} - w_{ij-1}^k) \right].$$

Разностная схема для волны  $w(r,t)$  в сопряженной задаче выписывается в следующей явной форме по временным слоям в обратном времени

$$w_{ij}^{k-1} = \left( \frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2a_{ij}}{h^2} \right)^{-1} \left[ \frac{c_{ij}}{\tau^2} (2w_{ij}^k - w_{ij}^{k+1}) + \frac{1}{h^2} \left[ a_{i+1j} (w_{i+1j}^{k+1} - w_{i+1j}^k) + a_{i-1j} (w_{i-1j}^{k+1} - w_{i-1j}^k) + a_{ij+1} (w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij+1}^k) - 2a_{ij} (w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^k - w_{ij}^{k+1}) + a_{ij-1} (w_{ij-1}^{k+1} - w_{ij-1}^k) \right] + \frac{1}{h^2} (w_{i+1j}^k + w_{i-1j}^k + w_{ij+1}^k + w_{ij-1}^k - 4w_{ij}^k) \right]$$

Градиент (3.52) функционала невязки вычислялся по разностной формуле

$$\begin{aligned} \text{grad}C_{ij} &= \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^k}{\tau} \tau, \\ \text{grad}A_{ij} &= \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k - 4u_{ij}^k}{h^2} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k-1}}{\tau} \tau, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где  $\text{grad}C_{ij}$  градиент в точке  $(x_i, y_j)$  по  $c$ , а  $\text{grad}A_{ij}$  - градиент в точке  $(x_i, y_j)$  по  $a$ . Все остальные вычисления и итерационный процесс выполняются аналогично описанному выше для модели 1.

### 3.5 Численное моделирование по восстановлению функций, описывающих скорость и поглощение в 2.5D и 3D схемах

В разделе 3.5 приведены примеры модельных расчетов задач волновой томографии с учетом поглощения как для модели 1, так и для модели 2 в 2.5D и 3D схемах. Используя явное представление для градиента функционала невязки для различных моделей 1-2, можно предложить эффективные итерационные процедуры восстановления  $c(r)$  и  $a(r)$ .

**Модельные расчеты в 2.5D задачах ультразвуковой томографии с поглощением.** Рассмотрим двумерные задачи ультразвуковой томографии, для расчетов использовались математические модели с поглощением, описываемые уравнениями (3.15), (3.40) в моделях 1-2. В силу большого объема вычислений наиболее эффективно рассматриваемые обратные задачи решаются с использованием суперкомпьютеров. Суперкомпьютеры позволяют решать задачи

на сетке до нескольких тысяч точек по каждой координате в восстанавливаемом слое, в настоящей работе моделирование проводилось на равномерной расчетной сетке  $500 \times 500$  точек. Расчеты проводились на суперкомпьютере «Ломоносов» Суперкомпьютерного центра МГУ им. М.В. Ломоносова [24]. Для модельных расчетов использовалось небольшое количество ядер равное 256, что позволяет уменьшить время расчетов в  $\sim 100$  раз по сравнению с расчетами на одном ядре. Время расчета 500 итераций составило около 3.5 часов. В задаче с 64 источниками на сетке  $500 \times 500$  эффективное распараллеливание возможно и при большем количестве ядер. Так при 2000 ядер ускорение составит около 1000 раз.

На рисунке 3.1 приведена схема эксперимента, источники обозначены цифрой 1, приемники – 2. Источники расположены по сторонам области расчетов через равные интервалы, приемники излучения расположены также по периметру области расчетов с шагом  $\sim \lambda/3$ , где  $\lambda$  - длина волны центральной частоты импульса. Это типичный размер трансдюсеров. Особенностью использования таких трансдюсеров является их широкая диаграмма направленности. Исследуемая область G, содержащая неоднородности, расположена в центре квадрата расчетной области и окружена непоглощающей средой L с известной скоростью  $v_0 = 1500 \text{ м/с}$ .

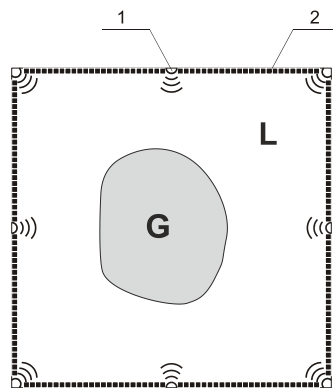


Рисунок 3.1 Схема расположения источников и приемников в модельном эксперименте

Экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 2D объекте с модельными неоднородностями. В модельных расчетах для моделей 1-2 использовались одинаковые сечения функции скорости

распространения ультразвуковой волны  $v(x, y)$  в исследуемом объекте. Минимальный размер неоднородности 3мм. Вариация скорости  $c(x, y)$  не превышала 20%. В моделях 1, 2 поглощение характеризуется функцией  $a(x, y)$ . Вариация коэффициента поглощения  $a(x, y)$  в пределах объекта не превышала 50%. Амплитуда волны при учете поглощения падает примерно в 3 раза. Выбранные диапазоны вариации параметров соответствуют диапазонам изменения в мягких тканях человека [134].

В ходе модельных расчетов с использованием численных методов в разностной аппроксимации решалась прямая задача распространения ультразвуковой волны. На рисунке 3.2 слева приведена форма зондирующего импульса как функция от времени. Импульс локализован, имеет широкий спектр с центральной частотой 300 кГц. На рисунке 3.2 справа приведены регистрируемые на одном из трансдюсеров сигналы как функции от времени, рассчитанные в модели без поглощения и в моделях 1-2 с поглощением после прохождения через объект. Сплошная линия соответствует волне прошедшей через среду без поглощения, точками – волна с учетом поглощения в модели 1 и пунктир - волна с учетом поглощения в модели 2а. Видно, что амплитуда волны при учете поглощения падает примерно в 3 раза. В модели 2а частотный спектр волны содержит в основном низкие частоты, в модели 1 спектр частот по сравнению с исходной волной не изменился, что связано с характером поглощения не зависящим от частоты.

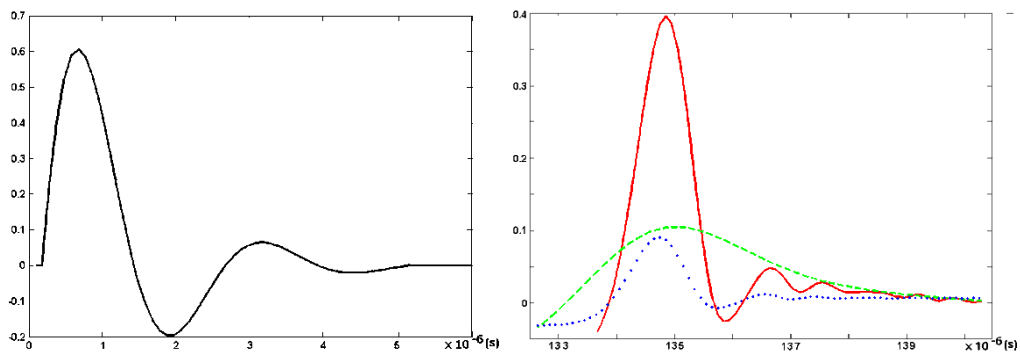


Рисунок 3.2 Слева - форма импульса; справа - регистрируемые сигналы на одном из трансдюсеров. Модель без поглощения - (сплошная линия), модель 1 - (точки), модель 2а - (пунктир).

По полученным данным без внесения дополнительного шума решалась обратная задача. Параметры расчетной модели: длина волны излучения 5.0 мм; шаг регистрации сигналов по пространству 2.0 мм; размер области ультразвукового зондирования по горизонтали 200x200 мм.

Для решения обратной задачи использовался итерационный процесс с начального приближения  $c(r) = \text{const} = c_0$  – известной вне области неоднородности. При наличии поглощения начальное приближение для поглощения выбиралось  $a(r) = \text{const} = a_0$  в диагностируемой области, где  $a_0$  полагалась равной среднему коэффициенту поглощения для мягких тканей. Вне области неоднородности, где поглощение отсутствует  $a(r)$  всегда полагалась равной 0. Проводились также вычисления с начального приближения  $a_0 = 0$  в области  $\Omega$ , которые показали аналогичную сходимость итерационного процесса. Расчеты проводились для 64 источников излучения. Модельные задачи рассчитывались при условиях неотражения (3.54) на границе, на которой происходит измерение волнового поля (см. Замечание 3.3).

На рисунке 3.3 для модели 1 приведены модельные сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны  $v(x, y)$  в исследуемом объекте (слева) и функции поглощения ультразвуковой волны  $a(x, y)$  (справа) как функции от  $x, y$ .

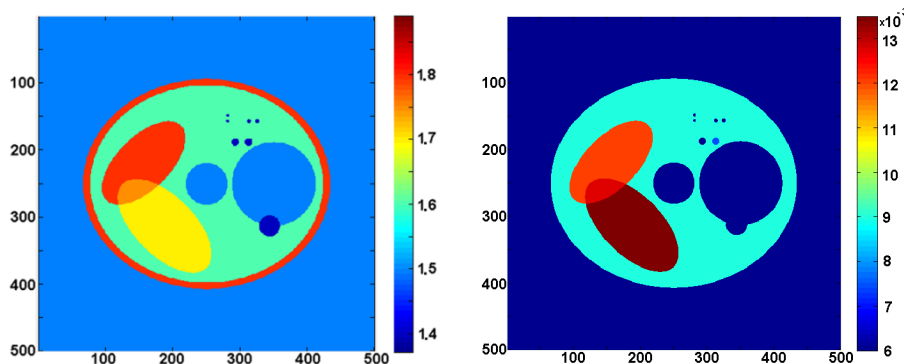


Рисунок 3.3 Модельные изображения в модели 1:  
слева - скоростного разреза  $v(r)$ ; справа - поглощения  $a(r)$ .

На рисунках 3.4, 3.5 приведены результаты восстановления функции  $v(x, y)$  в рамках модели 1 через 500 и 3500 итераций.

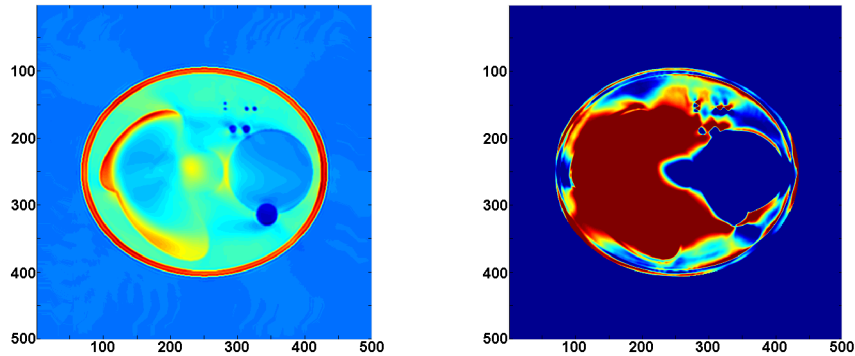


Рисунок 3.4 Реконструированное изображение через 500 итераций в модели 1:  
слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

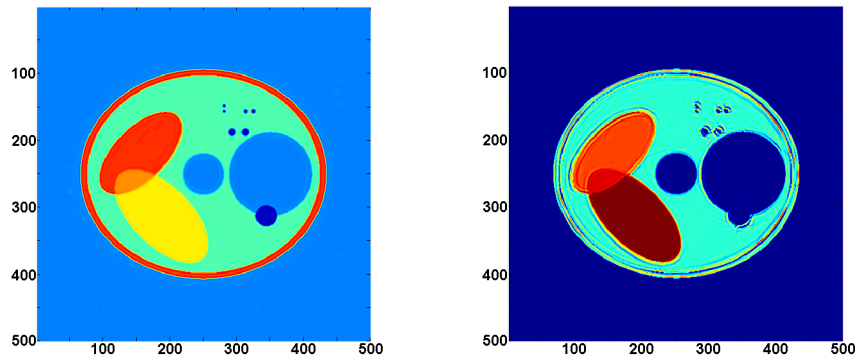


Рисунок 3.5 Реконструированное изображение через 3500 итераций в модели 1:  
слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

На рисунке 3.6 для модели 2 приведены модельные сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны  $v(x, y)$  в исследуемом объекте (слева) и функции поглощения ультразвуковой волны  $a(x, y)$  (справа) как функции от  $x, y$ .

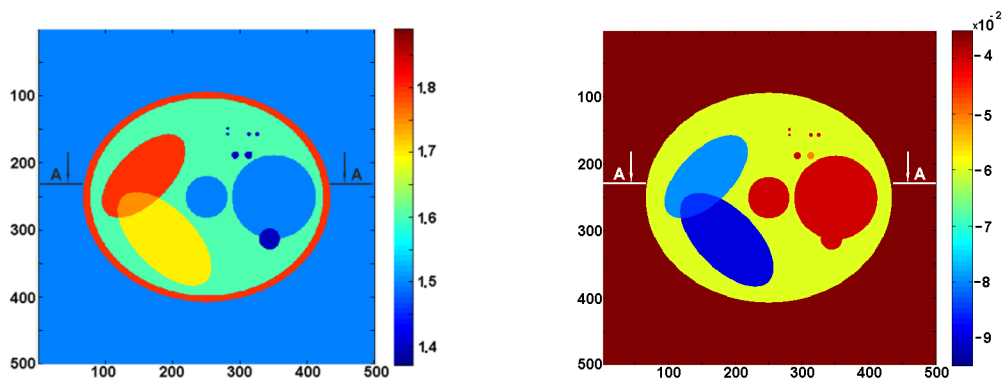




Рисунок 3.6 Модельные изображения в модели 2а: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$ 

На рисунках 3.7, 3.8 приведены результаты восстановления функции  $v(x, y)$  в рамках модели 2а через 500 и 3500 итераций. Видно, что в обеих моделях с поглощением удастся восстановить одновременно две неизвестные функции скорость и поглощение. Хотя модели 1 и 2 трудно сравнивать из-за разного характера поглощения, однако не удастся почувствовать из решения модельных задач, существует ли разница в восстановлении функции описывающей поглощение между моделями 1 и 2. Тем не менее, отчетливо можно утверждать, что функция скорости при заданных параметрах, восстанавливается за меньшее число итераций и с более высоким качеством, чем функция поглощения.

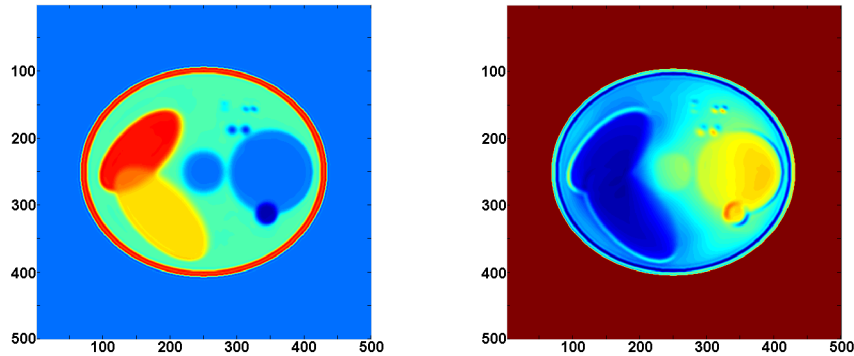


Рисунок 3.7 Реконструированное изображение через 500 итераций в модели 2а:

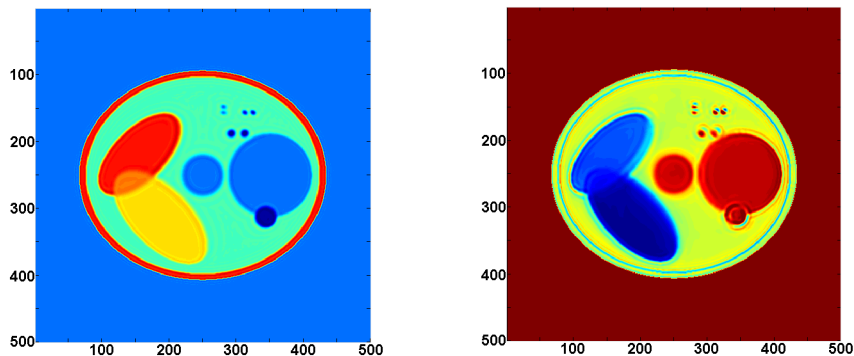
слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$ 

Рисунок 3.8 Реконструированное изображение через 3500 итераций в модели 2а:

слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

Тот же факт, что функция скорости восстанавливается с более высоким качеством, чем функция поглощения. виден, например, из рисунка 3.9, где изображены графики точного и восстановленного сечений вдоль линии AA на рисунке 3.6 слева для скорости и справа для поглощения.

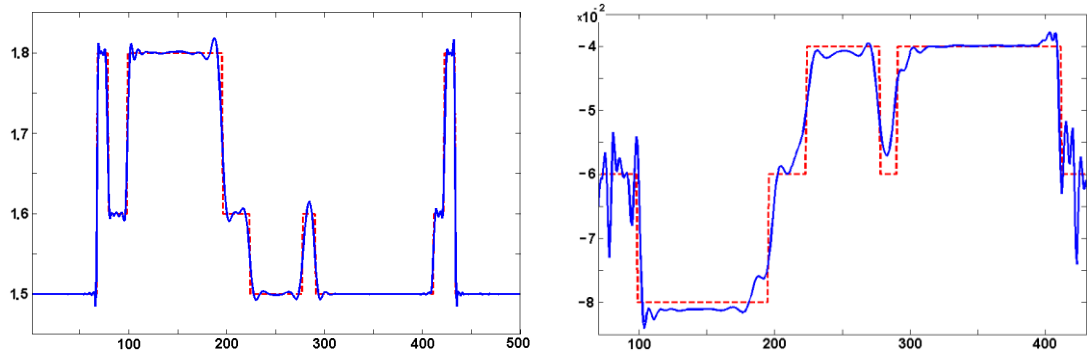


Рисунок 3.9 График точного (пунктир) и восстановленного (сплошная) сечения вдоль линии AA на рисунке 3.6 для модели 2a через 3500 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

На физическом уровне строгости этот факт можно попытаться объяснить тем, что функционал невязки больше зависит от вариации скорости, чем от вариации коэффициентов в модели поглощения. Представим себе, что зондирование осуществляется для простоты очень короткими импульсами. Тогда даже при небольших вариациях скорости зарегистрированный сигнал на детекторе и его дубликат в возмущенном варианте из-за задержки по времени прихода будут ортогональны в  $L_2$ , если их носители не пересекаются. Если мы изменили коэффициент поглощения в модели, то приходящий сигнал на детекторе изменится только по амплитуде.

На рисунке 3.10 приведены результаты реконструкции через 500 итераций в модели 2 при добавлении нормально распределенного случайного шума со стандартном отклонением равным 0.02, что соответствует уровню 10% от амплитуды прошедшей волны. Через 500 итераций был достигнут уровень среднеквадратичного отклонения 0.000396, что хорошо согласуется с дисперсией добавленного шума равной 0.0004. Как видно из рисунка 3.10, скорость по-

прежнему восстанавливается лучше, чем поглощение. Даже при достаточно высоком уровне шума качество реконструкции скорости - высокое.

Из рисунка 3.11 следует, что уменьшение числа источников до 4 (по сравнению с 64), также сильнее сказывается на реконструкции поглощения, качество которого становится низким.

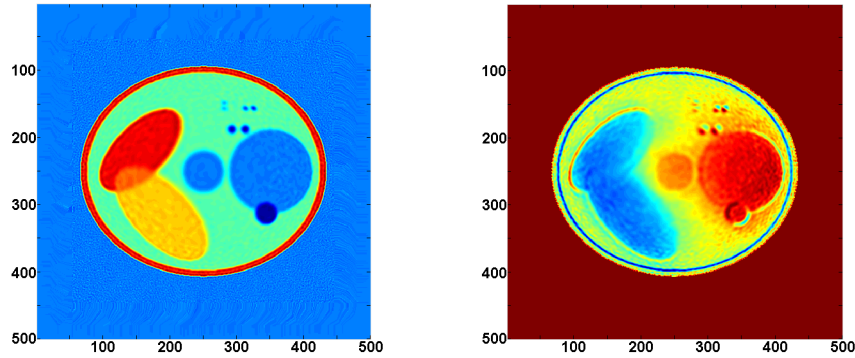


Рисунок 3.10 Реконструированное изображение в модели 2а с 10% шумом через 500 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

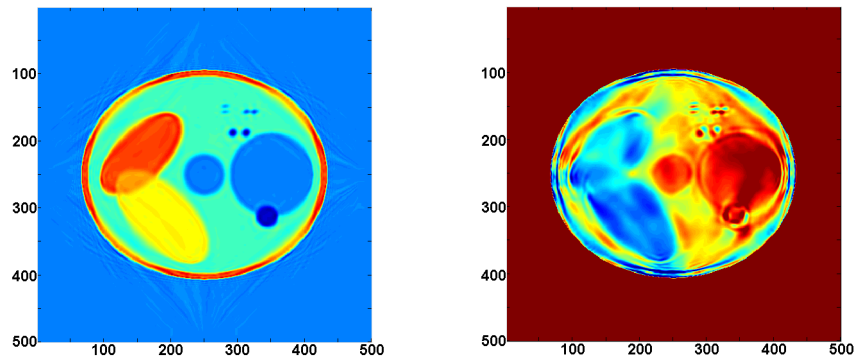


Рисунок 3.11 Реконструированное изображение в модели 2а, 4 источника через 5000 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

Исследуем вопрос, так ли важно, какая используется модель поглощения. Оказывается, что если модель не та, то поглощение вообще не удается восстановить, однако скорость удастся восстановить. Это видно из рисунка 3.12, где реконструировались  $v(r)$  и  $a(r)$  на основе модели 1 по данным полученным из модели 2. Скорость в этом случае, восстановилась неплохо, в то время как поглощение не восстановилось вообще.

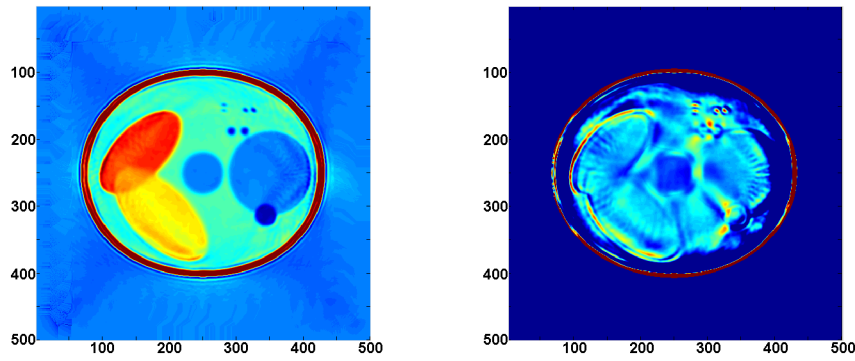


Рисунок 3.12 Реконструкция с учетом поглощения на основе модели 1 по данным полученным из модели 2а, 400 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

Все приведенные выше модельные задачи рассчитывались при условиях неотражения на границе, на которой происходит измерение волнового поля (см. Замечание 3.3). В приведенных ниже расчетах использовались граничные условия (3.16)  $\partial_n u(r, t)|_\Gamma = p(s, t)$ , где  $p(s, t)$  — некоторая известная функция. Эти граничные условия предполагаются в теоремах 3.1 и 3.2 при выводе выражения для производной Фреше (3.35) для задачи (3.15), (3.16). Это означает, что в этом варианте для восстановления скоростного разреза необходимо использовать значения как  $\bar{u}(r, t)|_\Gamma = U(s, t)$ , так и  $\partial_n \bar{u}(r, t)|_\Gamma = p(s, t)$  на границе  $\Gamma$ . Функцию  $p(s, t)$  можно пытаться измерить в эксперименте, а можно воспользоваться процедурой, описанной в разделе 3.2, которая состоит в следующем. По экспериментальным данным  $U(s, t)$  на границе  $\Gamma$  решаем внешнюю для области  $\Omega$  задачу для области  $\Theta / \Omega \times (0, T)$  (при настолько большой  $\Theta$ ,  $\Omega \subset \Theta$ , что либо возмущение от источника в области  $\bar{\Omega}_1$  за время  $T$  не успеет дойти до границы  $\Theta$ , либо отражение от границы  $\Theta$  не успеет дойти до границы  $\Gamma$ ) с граничными значениями  $U(s, t)$  на  $\partial\Omega \times (0, T)$  и нулевыми граничными значениями на  $\partial\Theta \times (0, T)$  для известного свободного члена  $f(r, t)$ . В результате получим  $\bar{u}(r, t)$  на  $\Theta / \Omega \times (0, T)$ , из которой можно найти  $\partial_n \bar{u}(r, t)|_\Gamma = p(s, t)$ .

Эта процедура использовалась в приведенных ниже расчетах в двумерном случае. А именно, решалась прямая задача и сохранялись экспериментальные данные  $U(s, t)$  на границе  $\Gamma$ . Далее по этим данным как без дополнительно

добавленного случайного шума, так и с шумом, численно решалась описанная выше внешняя задача на большой области  $\Theta$ . По полученному решению на границе вычисляли  $\partial_n \bar{u}(r, t)|_{\Gamma} = p(s, t)$ . Большой уровень добавленного в  $U(s, t)$  шума может приводить к большим погрешностям при вычислении  $p(s, t)$ , а значит к ухудшению качества реконструкции, что видно из приведенных ниже модельных расчетов.

На рисунке 3.13 приведены результаты реконструкции скоростного разреза и поглощения в задаче (3.15), (3.16) без внесения дополнительного шума в  $U(s, t)$ . В итерационном процессе использовался градиент функционала невязки в соответствии с формулой (3.35), количество итераций - 700. Средняя длина волны зондирующего импульса составляла 5 мм. Зондирование выполнялось плоскими короткими импульсами с 16 сторон. Расчеты проводились на сетке  $500 \times 500$  точек на области  $20 \times 20$  см, параметр Куранта равен 3. Функция  $U(s, t)$  предполагалась известной во всех точках границы квадратной области расчетов. Видно, что в случае, если ошибка задания входных данных отсутствует, скоростной разрез восстанавливается идеально, а функция поглощения хуже. Как видно из сравнения рисунка 3.13 с рисунком 3.5, результаты восстановления различными методами (с различными граничными условиями) мало отличаются друг от друга (различие в цвете связано с различием в палитре).

На рисунке 3.14 приведены результаты реконструкции скоростного разреза и поглощения после 400 итераций в задаче (3.15), (3.16) с внесенным в  $U(s, t)$  дополнительным 2% от амплитуды  $U(s, t)$  шумом. На рисунке 3.15 - с внесенным дополнительным 5% шумом после 400 итераций. Как видно из рисунков, качество реконструкции функции поглощения сильно ухудшается. Это связано с тем, что добавленный к  $U(s, t)$  шум приводит к большим погрешностям при вычислении  $p(s, t)$ .

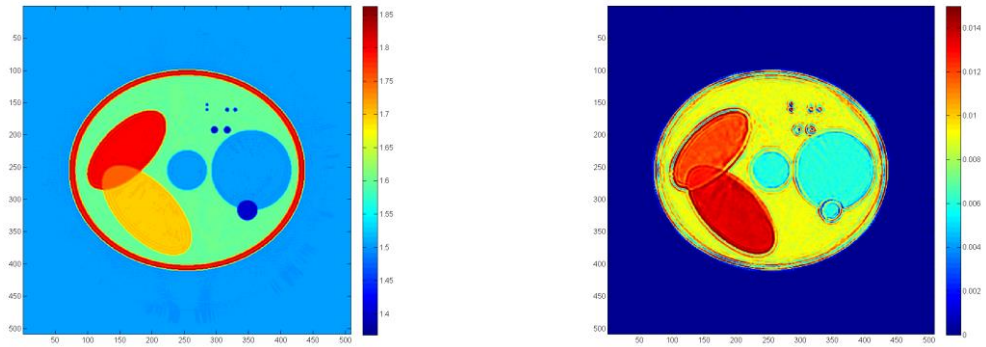


Рисунок 3.13 Реконструированное изображение в модели 1 по точным граничным условиям через 700 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

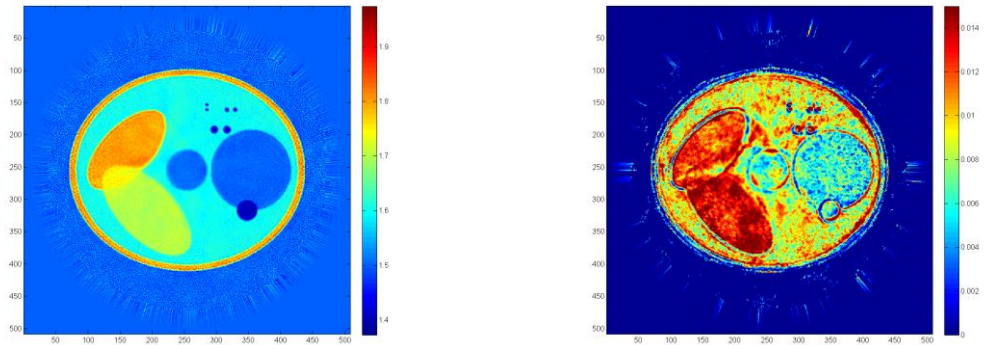


Рисунок 3.14 Реконструированное изображение в модели 1 с 2% шумом через 400 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

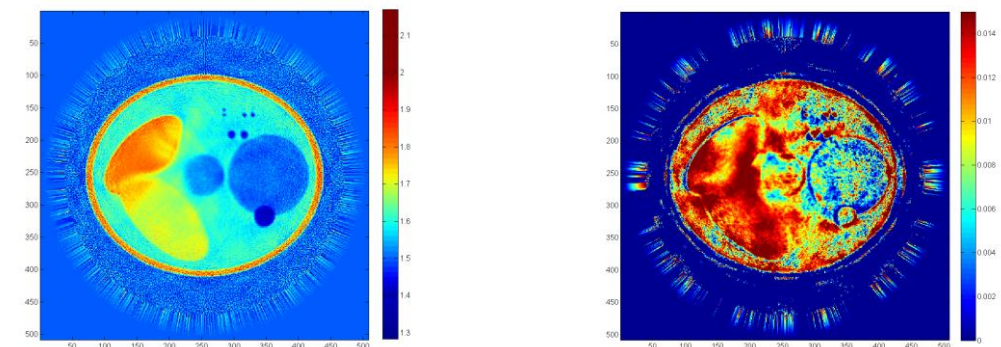


Рисунок 3.15 Реконструированное изображение в модели 1 с 5% шумом через 400 итераций: слева -  $v(r)$ ; справа -  $a(r)$

**Модельные расчеты в 3D задачах ультразвуковой томографии с поглощением.** Рассмотрим трехмерную обратную задачу ультразвуковой томографии в модели (3.15), (3.16), включающей поглощение. В такой модели поглощение не зависит от частоты. Для получения высокого качества реконструкции не только скоростного разреза, но и функции поглощения, необходимо использовать большое количество источников. Для расчёта модельной задачи ультразвуковой томографии с учётом поглощения в 3D использовалось 48 источников — по 12 источников (рисунок 3.16) на каждой из боковых граней куба, изображенного на рисунке 1.8.

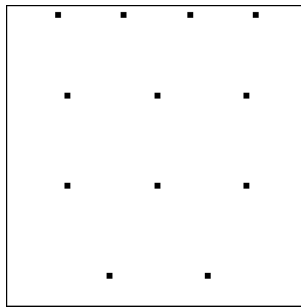


Рисунок 3.16 Расположение источников на каждой из боковых граней куба в модельной задаче с учётом поглощения

Модельная задача решалась с неполными входными данными: на верхней плоскости  $z=H$  как источники, так и приёмники отсутствуют. Размер расчётной области выбран приближенным к реальному,  $H=176$  мм, шаг разностной сетки составляет 0,5 мм. Приёмники располагаются на боковых и нижней грани куба с шагом 2 мм.

Сечения фантома, использовавшегося для получения экспериментальных данных, в плоскостях  $z=\text{const}$  приведены на рисунке 3.17. Вверху изображён скоростной разрез  $v(\mathbf{r})$ , внизу — сечение функции поглощения  $a(\mathbf{r})$ .

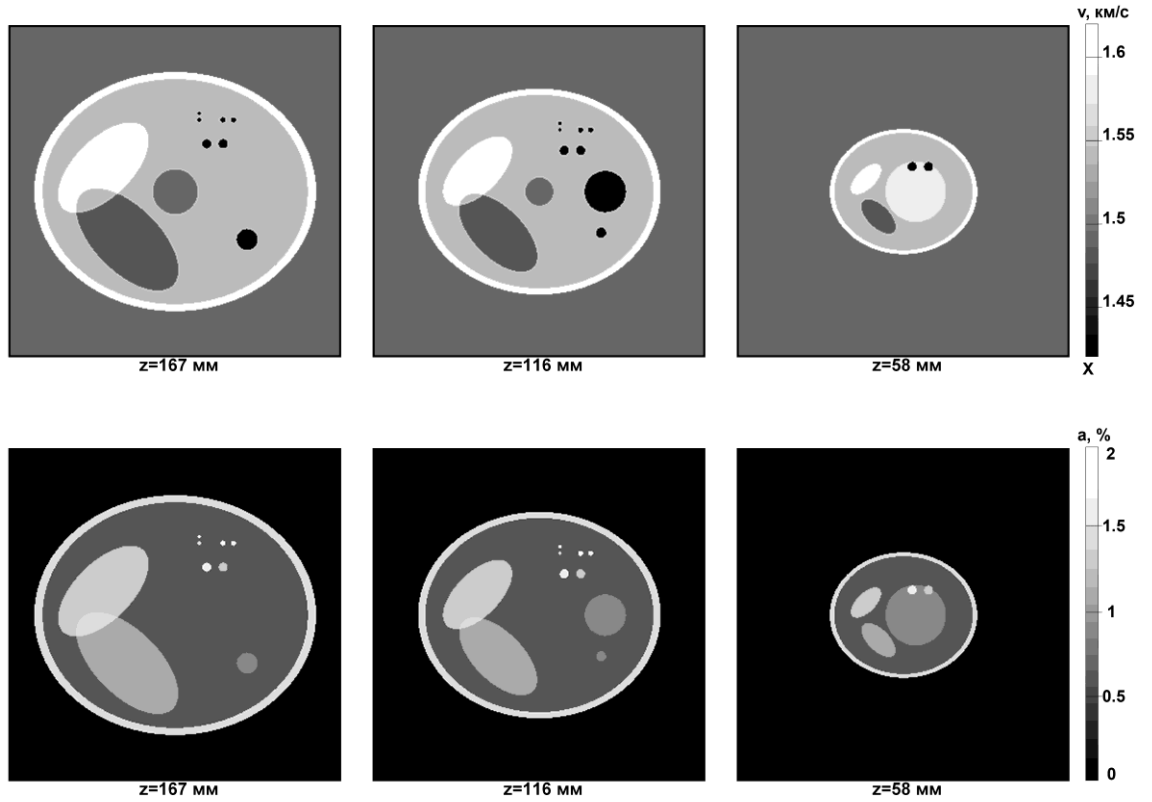
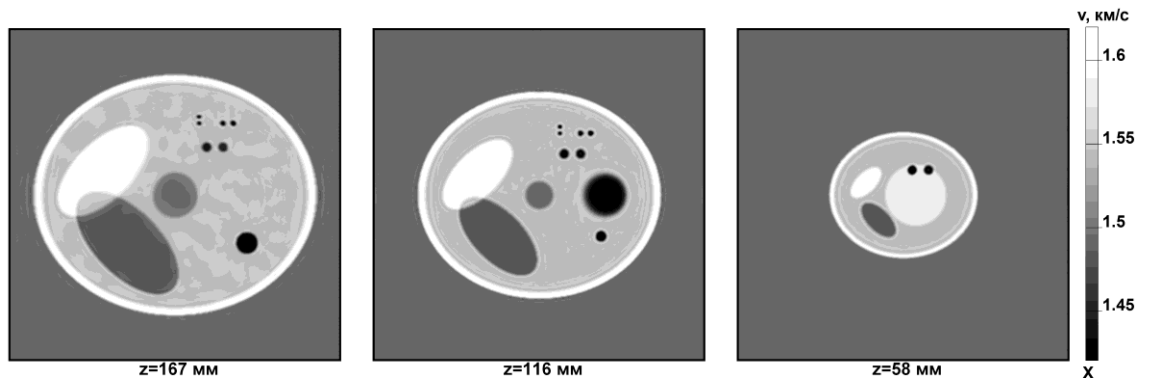


Рисунок 3.17 Изображение фантома в модельной задаче реконструкции 3D объекта в модели с поглощением: сверху — скоростной разрез  $v(\mathbf{r})$ , снизу — функция поглощения  $a(\mathbf{r})$ .

На рисунке 3.18 приведены сечения восстановленных трёхмерных изображений  $v(\mathbf{r})$  и  $a(\mathbf{r})$  в плоскостях  $z=\text{const}$ . На рисунке 3.19 приведены сечения фантома и восстановленного изображения в плоскости  $y=\text{const}$ .





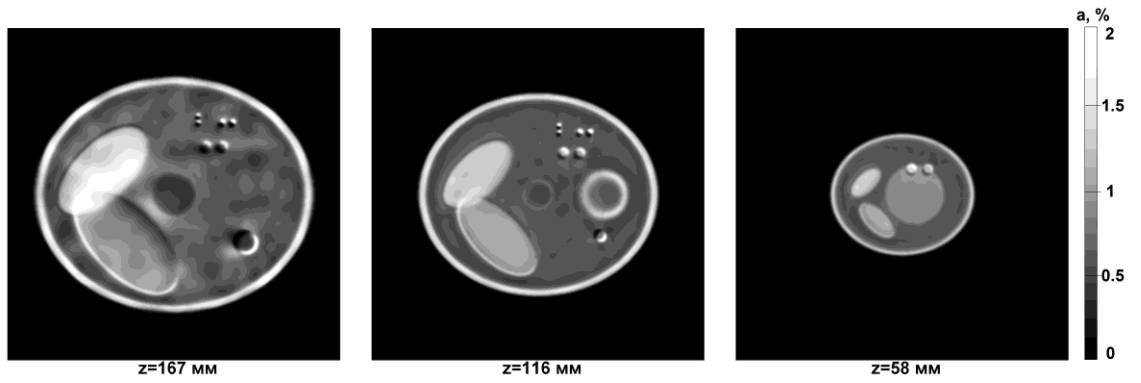


Рисунок 3.18 Модельная задача реконструкции 3D объекта в модели с поглощением: сверху — сечения скорости звука  $v(\mathbf{r})$  в плоскостях  $z=\text{const}$ , снизу — сечения коэффициента поглощения  $a(\mathbf{r})$  в плоскостях  $z=\text{const}$ .

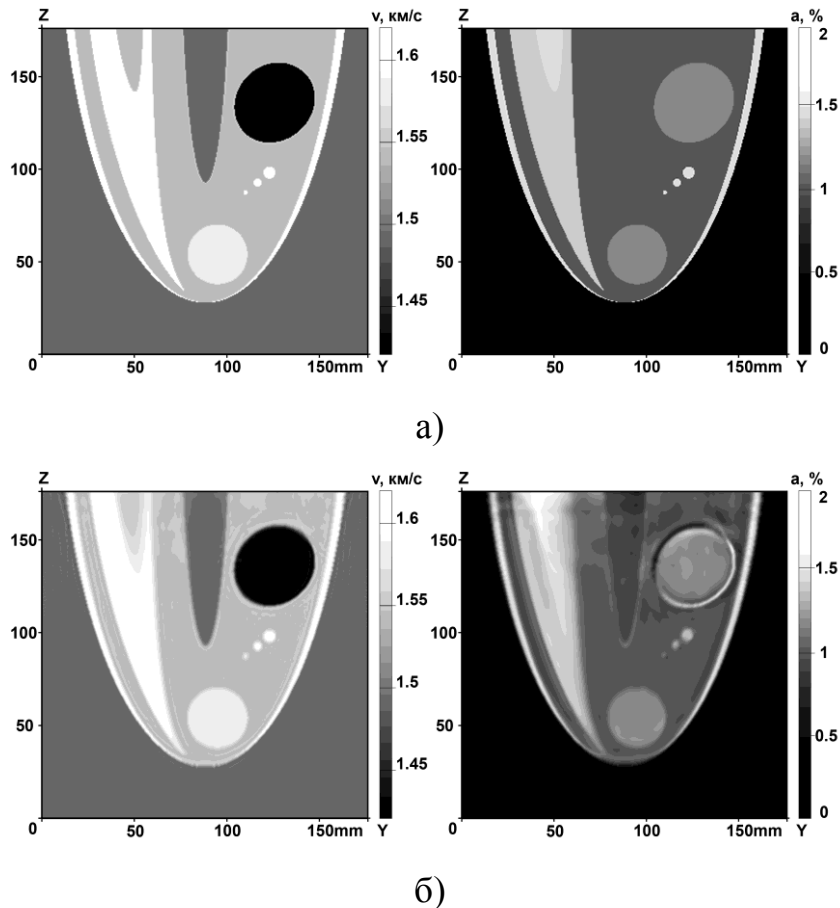


Рисунок 3.19 Реконструированные сечения скорости звука  $v(\mathbf{r})$  (слева) и коэффициента поглощения  $a(\mathbf{r})$  (справа) в плоскости  $y=\text{const}$ : а) — фантом, б) — восстановленное изображение.

Эти изображения получены после 800 итераций метода градиентного спуска. Для восстановления функции поглощения требуется заметно больше итераций, чем для восстановления скоростного разреза. Поскольку расчёты для каждого источника практически независимы, они выполняются параллельно. Для расчёта использовалось 48 графических ускорителей NVIDIA Tesla X2070 — по числу источников. Решение обратной задачи реконструкции скорости звука и функции поглощения заняло порядка 6 часов.

Удивительным фактом, продемонстрированным на модельном примере, является то, что использование томографических данных даже в схеме с неполными данными и при относительно небольшом количестве источников в принципе позволяет определять как скоростной разрез, так и характеристики поглощения исследуемого объекта. Однако, как видно из рисунков 3.18 и 3.19, скоростной разрез восстанавливается намного лучше, чем функция поглощения, что аналогично результатам, полученным в 2D случае.

Даже если ставить перед собой задачу восстановления только скоростного разреза, то в математической модели нужно всё равно учитывать поглощение, если оно присутствует в реальном объекте. Проиллюстрируем этот факт на примере. Попытаемся решить задачу восстановления скоростного разреза  $v(\mathbf{r})$ , используя модель (1.3), хорошо описывающую дифракционные эффекты, но не учитывающую поглощение.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Как и в предыдущей задаче, зададим трёхмерные распределения скорости звука  $v(\mathbf{r})$  и поглощения  $a(\mathbf{r})$  согласно рисунку 3.17. Источники располагаются согласно рисунку 3.16. Приёмники располагаются на всех гранях куба, кроме верхней грани  $z=H$ . Для моделирования распространения ультразвука в среде используем уравнение, учитывающее поглощение (3.15). Решив прямую задачу моделирования распространения ультразвукового импульса, получим экспериментальные данные на детекторах  $U|_{\Gamma}$ . Для восстановления скоростного разреза  $v(\mathbf{r})$  воспользуемся математической моделью, не учитывающей поглощение (1.3). Сечения

реконструированного без учёта поглощения скоростного разреза  $v(\mathbf{r})$  в плоскостях  $Z=\text{const}$  приведены на рисунке 3.20.

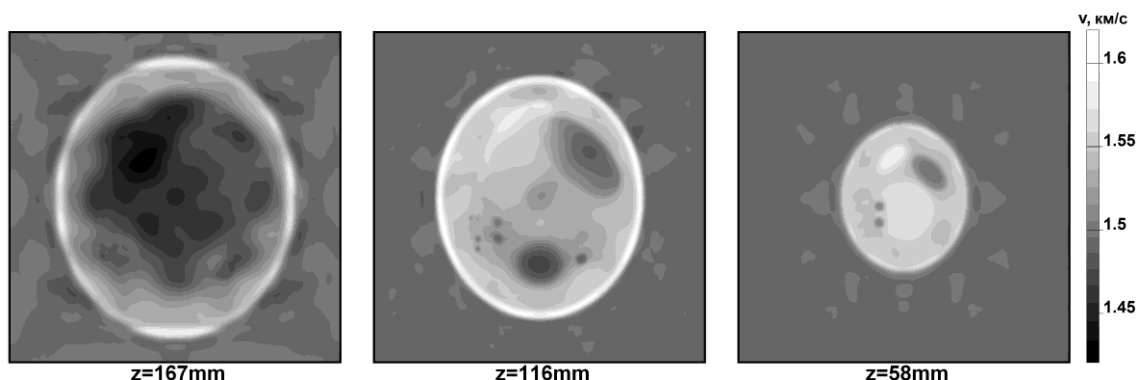


Рисунок 3.20 Реконструированные без учёта поглощения сечения скоростного разреза  $v(\mathbf{r})$  в плоскостях  $z=\text{const}$

Как видно из рисунка 3.20, полученное изображение по качеству не сравнимо с изображением, восстановленным в модели с поглощением (сравнить рисунки 3.20 и 3.18). Чем больше глубина просвечиваемой ткани, и, следовательно, больше поглощение, тем хуже результат реконструкции. Приведённый результат означает, что даже если ставить перед собой задачу восстановления только скоростного разреза, необходимо решать эту задачу в модели с поглощением, которое также является неизвестным. Это означает, что математическая модель должна по возможности точно описывать реальный процесс. Чем точнее модель соответствует реальному процессу, тем более высокое качество изображения можно получить.

### 3.6 Выводы

В главе 3 разработаны эффективные методы решения обратных задач ультразвуковой томографии в различных моделях с поглощением. Основное отличие моделей заключается в зависимости поглощения от частоты зондирующего излучения. В модели 1, в отличие от модели 2, частотный состав

зондирующего сигнала при прохождении через среду не меняются. Выбор модели поглощения, прежде всего, определяется физикой процессов поглощения.

Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача относительно двух неизвестных функций координат характеризующих как скоростной разрез, так и поглощение в диагностируемой области. Впервые получены точные выражения производной Фреше функционала невязки как по функции скорости, так и по функции поглощения для различных постановок. Разработаны эффективные алгоритмы минимизации функционала невязки на базе вычисления градиента через решение сопряженной задачи. В рассматриваемой постановке не требуется искусственно разделять данные на прохождение и отражение, проводить реализацию алгоритмов поэтапно. В разработанных методах решается единая задача нахождения двух функций скорости и поглощения.

Решение модельных обратных задач волновой томографии с поглощением впервые проводилось при двух различных постановках граничных условий: при условии прозрачности границ и при вычисленной по экспериментальным данным нормальной производной на границе. Если в первом методе некоторые сложности вызывает математическое описание условия прозрачности, то во втором методе решение внешней задачи на большой области расчетов и устойчивость к погрешности в данных. Однако показано, что эти сложности преодолимы и оба метода могут успешно использоваться при решении обратных задач волновой томографии.

Все расчеты модельных задач впервые проводились на суперкомпьютерах как на процессорах общего назначения в 2D задачах, так и на графических процессорах в 3D задачах, что позволяет в сотни раз сократить время вычислений по сравнению с персональным компьютером.

Важной проблемой построения итерационных методов является выбор начального приближения. Все модельные задачи решались с начального приближения, в котором все искомые коэффициенты в диагностируемой области полагались равными константе. В рассматриваемом диапазоне параметров с

вариацией функции скорости не более 20% и функции поглощения не более 50% разработанные итерационные алгоритмы эффективно решают обратную задачу.

Модельные расчеты показали, что при небольших погрешностях входных данных можно восстанавливать одновременно две функции не только скоростной разрез, но и функцию характеризующую поглощение.

В обеих моделях с поглощением скоростной разрез восстанавливается лучше, чем коэффициент  $a(r)$ , характеризующий поглощения. При возрастании погрешности входных данных можно прогнозировать ситуацию, при которой скоростной разрез будет восстанавливаться, в то время как коэффициент, характеризующий поглощение, практически не будет восстанавливаться.

Полученный результат, заключающийся в том, что восстановление скоростного разреза не так сильно зависит от модели поглощения, позволяет оптимистично оценивать потенциальные возможности ультразвуковых томографов для медицинских целей для определения неоднородностей по скорости, когда модель поглощения известна приближенно. Для одновременного определения неоднородностей характеризующих поглощение необходимо использовать математические модели, адекватно описывающие физические процессы поглощения.

## **Математическое моделирование и вычислительный эксперимент в прямых и обратных задачах волновой томографии**

Настоящий раздел посвящен математическому моделированию и проведению вычислительного эксперимента в прямых и обратных задачах волновой томографии при проектировании УЗ томографических комплексов в медицине. Разработка ни одного современного устройства не обходится без предварительного этапа математического моделирования. Для такого сложного устройства, как ультразвуковой томограф, требующего больших затрат для создания даже макетов, математическое моделирование для предварительной оценки параметров установки позволяет сэкономить много времени и средств. Появление мощных графических станций и суперкомпьютеров сделало возможным моделирование физических процессов распространения ультразвуковых волн в неоднородных средах. Расчёт обратных задач ультразвуковой томографии в широком диапазоне параметров томографов и схем экспериментов позволяет определить оптимальные варианты томографических комплексов.

В разделе 4.1 сравнивается эффективность, популярной в силу простоты конструкции и вычислений, послойной схемы исследования трёхмерных объектов, в которой на каждом слое решается двумерная обратная задача, и непосредственно трёхмерной схемы волновой томографии, в которой обратная задача решается относительно трёхмерных неизвестных функций. Важность этого исследования связана с тем, что волновой процесс в сплошной среде всегда является трёхмерным. Эффекты дифракции и рефракции невозможно с физической точки зрения адекватно интерпретировать в двумерном случае.

В разделе 4.2 проведены модельные расчеты по исследованию влияния плотности на возможность реконструкции неоднородностей для медицинских сред в задачах ультразвуковой томографии. Функция плотности наряду с функцией скорости входит в уравнение линейной акустики и пренебрежение

плотностью является некоторым приближением. Вместе с тем, вариации плотности в мягких тканях человека сравнительно невелики, и, как показывают исследования других авторов, функция скорости оказывает основное влияние на распространение волн в неоднородных тканях.

Важным вопросом является выбор схемы зондирования. Все ультразвуковые приборы, используемые в настоящее время в медицине для диагностики различных заболеваний, работают по схеме на отражение. Возможна и другая схема обследования - на прохождение. Именно такая схема используется в рентгеновской томографии. Выбор схемы 3D томографических исследований является ключевым моментом, ответ на который даёт математическое моделирование.

Одним из основных параметров ультразвуковых томографов является их разрешающая способность. Размер опухоли на ранней стадии, когда её ещё можно удалить с благоприятным прогнозом, составляет порядка 3 мм. Исходя из этого, хотелось бы иметь разрешение ультразвукового томографа не хуже 3 мм.

Какие параметры влияют на разрешающую способность ультразвукового томографа в первую очередь? К таким параметрам относятся:

- длина волны и форма излучаемого сигнала;
- полоса пропускания электронного тракта;
- количество и расположение источников излучения;
- количество и расположение приёмников;
- точность регистрации данных;
- параметры оцифровки сигналов.

В главе 4 приведены результаты математического моделирования по оценке влияния этих параметров.

#### **4.1 Исследование применимости послойных схем в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии**

##### **4.1.1 Методы аналитического решения трёхмерной задачи рассеяния**

## **ультразвукового излучения на неоднородности в виде шара**

Одна из проблем в решении трёхмерных нелинейных обратных задач ультразвуковой томографии состоит в чрезвычайно огромном объёме вычислений. В связи с этим очень привлекательно использовать классическую томографическую схему, в которой восстанавливаются двумерные сечения 3D объектов. Для решения двумерных задач используются данные, полученные с помощью приёмников и источников, расположенных в одной плоскости. Таким образом, трёхмерная задача заменяется последовательностью более простых двумерных задач.

Эта идея заимствована из рентгеновской томографии, где использование послойного метода возможно благодаря тому, что коэффициент рефракции для рентгеновского излучения практически не отличается от единицы, а, следовательно, лучи практически не отклоняются от прямой. В ультразвуковой томографии выделение тонких слоёв аналогично рентгеновской томографии не всегда оправдано, поскольку лучи могут искривляться из-за наличия эффектов рефракции, как в пределах исследуемого двумерного слоя, так и в третьем измерении, и покидать слой. Добавим сюда также волновые эффекты дифракции и переотражения.

Поэтому в задачах ультразвуковой томографии использование послойных томографических схем не является строго обоснованным. Целью модельных расчётов в настоящем разделе является исследование возможностей использования двумерных послойных схем томографической реконструкции 3D объектов в волновой томографии. Такие исследования представляет интерес из-за большой популярности послойного подхода в ультразвуковой томографии [117, 118]. В последние несколько лет появились публикации в области непосредственно трёхмерной схемы волновой томографии [87, 123, 144, 198, 213, 214]. В работах [123, 144, 198] используется лучевая модель. Более перспективным являются исследования, проводимые в рамках волновых моделей [87, 213, 214]. Постановка задачи и основные результаты раздела 4.1 основаны на



работах, опубликованных в статьях [2 - 4, 37, 128]. Выбор значений параметров в математических моделях ориентирован на задачи дифференциальной диагностики заболеваний молочной железы.

В настоящем разделе эта проблема иллюстрируется расчётом тестовой модельной задачи. Для моделирования выбран самый простой трёхмерный объект — однородный шар, помещённый в однородную среду (рисунок 4.1). Рассеяние звуковой волны на шаре может быть выражено аналитически. Используя известную технологию разложения в ряды по специальным функциям, можно рассчитать трёхмерное рассеяние волнового поля в любой точке заданной плоскости трёхмерного пространства, пересекающей шар. Таким образом, мы решаем трёхмерную прямую задачу распространения волны аналитически. Возможность решения прямой задачи аналитическим способом делает вычислительный эксперимент более «чистым» и позволяет дополнительно проконтролировать численные методы решения прямой задачи. Далее, решив по полученным данным двумерную обратную задачу в этой плоскости численными методами, мы можем сравнить результат с соответствующим сечением шара. Для оценки качества послойных моделей обратная задача решалась в нескольких слоях.

Скалярное уравнение линейной акустики в неоднородной среде хорошо известно и может быть получено при следующих предположениях [65]. Будем считать, что движение среды является адиабатическим движением идеальной жидкости. Пусть также колебания среды описывается малыми колебаниями сжимаемой жидкости. Тогда из уравнения непрерывности, уравнения состояния и уравнения движения Эйлера можно получить уравнение линейной акустики для колебания давления  $p(r, t)$  в среде с переменной плотностью  $\rho_0(r)$  и фазовой скоростью  $c(r)$  (более подробно см. раздел 4.2)

$$\frac{1}{c^2} p_{tt} + \frac{(\nabla \rho_0 \cdot \nabla p)}{\rho_0} - \Delta p = 0, \quad (4.1)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа, а  $\nabla$  - градиент по переменной  $r \in R^3$ ,  $t$  - время. В случае слабо меняющейся плотности, выражение  $\nabla \rho_0(r)$  - мало и, пренебрегая величиной

второго порядка малости  $\frac{(\nabla\rho_0 \cdot \nabla p)}{\rho_0}$ , получаем стандартное волновое уравнение, которое при наличии точечного источника, располагающегося в точке  $r_0$  и генерирующего импульс  $f(t)$ , имеет вид

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{r})} p_{tt}(\mathbf{r}, t) - \Delta p(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot f(t). \quad (4.2)$$

Предполагается также, что давление  $p(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет нулевым начальным условиям  $p(\mathbf{r}, t=0) = p_t(\mathbf{r}, t=0) = 0$  и условию Зоммерфельда на бесконечности.

Аналитические методы решения задачи рассеяния на однородном шаре  $\Omega \subset R^3$  с помощью метода разделения переменных хорошо известны [206]. Рассмотрим сначала звуковое давление в виде гармонического по времени колебания с частотой  $\omega$ . В этом случае

$$p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Re}(u(\mathbf{r})e^{i\omega t}),$$

и волновое уравнение (4.2) преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.3)$$

где  $k(\mathbf{r}) = \omega/c(\mathbf{r})$  — волновое число. Предположим, что внутри шара  $\Omega \subset R^3$  (рисунок 4.1), имеющего границу  $S$ , скорость распространения звука равна  $c(\mathbf{r}) \equiv c_\Omega = const$ . Вне шара скорость звука равна  $c(\mathbf{r}) \equiv c_0 = const$ . Будем считать, что неоднородность среды вызвана только изменением скорости звука, а плотность среды и внутри и вне шара равна  $\rho = const$ . Предположим, что падающее поле  $u^i(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r} \notin \Omega \subset R^3$ ) представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $Z$ :  $u^i(\mathbf{r}) = e^{-ikz}$ . Полное поле вне шара  $\Omega$  ( $\mathbf{r} \notin \Omega \subset R^3$ ) обозначим через  $u(r)$ . Оно представляет собой сумму падающей волны и неизвестного рассеянного поля  $u^s(\mathbf{r})$ , т.е.  $u(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + u^s(\mathbf{r})$ . Эти функции вне шара удовлетворяют уравнению Гельмгольца с волновым числом  $k = \omega/c_0$ . Внутри шара полное поле обозначим через  $u^\Omega(r)$ . Оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца внутри шара с волновым числом  $k_\Omega = \omega/c_\Omega$ . На границе  $S$  шара поле  $u(\mathbf{r})$  и поле  $u^\Omega(r)$  удовлетворяют условиям сопряжения [88]:

$$u = u^\Omega, \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u^\Omega}{\partial \nu}, \quad (4.4)$$

где  $\partial/\partial \nu$ - производная по внешней нормали на границе  $S$ . Эти соотношения выражают непрерывность давления на границе.

Задача рассеяния падающего поля  $u^i(\mathbf{r})$  на шаре состоит в нахождении поля  $u^\Omega(\mathbf{r})$  внутри шара  $\Omega \subset R^3$  и рассеянного поля  $u^s(\mathbf{r})$  вне шара, удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности. Решение этой задачи может быть выписано в виде рядов по специальным функциям.

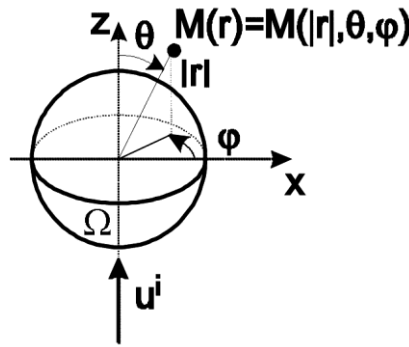


Рисунок 4.1. К аналитическому выводу решения обратной задачи рассеяния

Введём сферические координаты. Точка  $M$  с координатами  $(x, y, z)$  будет иметь координаты  $(|r|, \theta, \varphi)$ . В этом случае падающее поле может быть представлено в виде ряда

$$u^i(|\mathbf{r}|, \theta) = e^{-ik|\mathbf{r}|\cos\theta} = \sum_{m \geq 0} \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot j_m(k|\mathbf{r}|),$$

где  $T_m = P_m(\cos\theta)$ ,  $P_m(x)$  — полиномы Лежандра,  $\delta_m = 2m+1$ ,  $j_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J_{m+\frac{1}{2}}(x)$  — сферическая функция Бесселя первого рода.

Внутри области  $\Omega$  решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию сопряжения (4.4), имеет вид

$$u^\Omega(|\mathbf{r}|, \theta) = \sum_{m \geq 0} F_m \cdot \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot j_m(k|\mathbf{r}|),$$

где

$$F_m = \frac{j_m(kR) \cdot h'_m(kR) - j'_m(kR) \cdot h_m(kR)}{j_m(k_\Omega R) \cdot h'_m(kR) - C \cdot j'_m(k_\Omega R) \cdot h_m(kR)}.$$

Решение прямой задачи — рассеянная волна  $u^s(r)$ , которая является решением уравнения Гельмгольца (4.3) вне области  $\Omega$ , удовлетворяющая условию излучения Зоммерфельда, и такая, что поле  $u^i(r)+u^s(r)$  удовлетворяет условию сопряжения (4.4), будет иметь вид:

$$u^s(|\mathbf{r}|, \theta) = \sum_{m \geq 0} D_m \cdot \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot h_m(k|\mathbf{r}|), \quad (4.5)$$

где

$$D_m = \frac{C \cdot j_m(kR) \cdot j'_m(k_\Omega R) - j'_m(kR) \cdot j_m(k_\Omega R)}{j_m(k_\Omega R) \cdot h'_m(kR) - C \cdot j'_m(k_\Omega R) \cdot h_m(kR)},$$

$C = \frac{k_\Omega \rho}{k \rho_\Omega} = \frac{c \rho}{c_\Omega \rho_\Omega}$ ,  $h_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot H_{m+\frac{1}{2}}(x)$  - сферическая функция Ханкеля второго рода.

Сходимость рядов, представляющих решение задачи рассеяния, исследована в [152].

Решение задачи рассеяния выписано в предположении, что ультразвуковое поле является гармоническим по времени. В этом случае значения акустического давления могут быть получены, пользуясь (4.5). Предположим теперь, что падающее поле представляет собой плоскую волну в виде короткого импульса, распространяющегося вдоль оси OZ:

$$p^i(r, t) = f\left(t - \frac{z}{c_0}\right),$$

где функция  $f(t)$  отлична от нуля на интервале  $(t_*, t_* + \tau)$ ,  $\tau$  — длительность импульса. На рисунке 4.2 изображён график зондирующего импульса, использовавшегося нами при решении обратной задачи, как функции от времени.

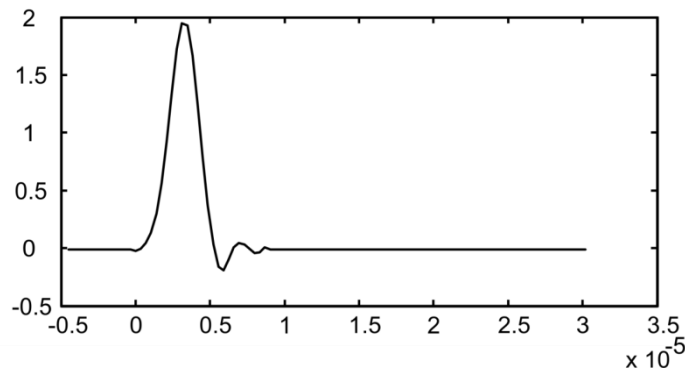


Рисунок 4.2. Форма короткого зондирующего импульса

Будем рассматривать функцию  $f(t)$  в виде конечного ряда Фурье (4.6) на отрезке  $(-T_0, T_0)$ , где  $T_0$  выбирается достаточно большим из условия прохождения импульса в интересующей нас области. Момент времени  $t=0$  соответствует началу прохождения импульса через точку  $x=y=z=0$ .

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N f_n \exp(i\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}. \quad (4.6)$$

Пользуясь линейностью уравнения Гельмгольца и условий сопряжения, можно решать задачу рассеяния по формулам (4.5) отдельно для каждой гармоники  $\omega_n$  ( $k_n = \omega_n/c_0$ ) соотношения (4.6) и получать решения  $u^s(\mathbf{r}, \omega_n)$ . Общим решением поставленной задачи на интервале  $(-T_0, T_0)$  будет сумма решений, полученных для рассматриваемых гармоник:

$$p(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-N}^N u^s(\mathbf{r}, \omega_n) \exp(i\omega_n t).$$

Заметим, что поскольку  $f(t)$  — действительная функция, проводить расчёты можно только для половины слагаемых.

#### 4.1.2 Модельная задача реконструкции трёхмерного шара в послонной томографической схеме

Значения параметров, использующихся в модельной задаче, являются характерными для ультразвукового обследования молочной железы. Схема численного эксперимента показана на рисунке 4.3. Здесь изображён куб, внутри которого проводилось численное моделирование взаимодействия ультразвукового излучения с неоднородностью. Центр куба расположен в начале координат, ось  $Z$  направлена вверх. Размер ребра куба равен 20 см. Куб заполнен однородной средой с неоднородностью  $\Omega$ , обозначенной цифрой 1. Среда имеет плотность  $1 \text{ г/см}^3$  и скорость распространения ультразвука  $c_0=1500 \text{ м/с}$  (вода). Неоднородность имеет форму шара радиусом  $R=6 \text{ см}$ . Значение скорости звука

внутри шара  $c_{\Omega} = 1600 \text{ м/с}$ . Плотность шара равняется плотности окружающей среды.

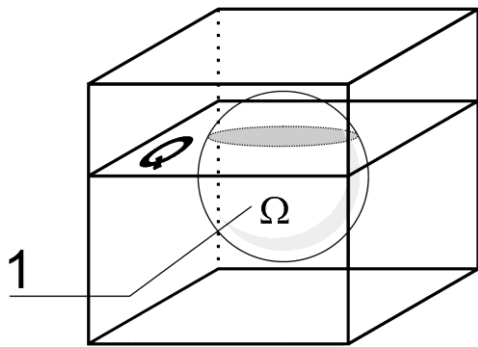


Рисунок 4.3 Схема трёхмерного численного эксперимента

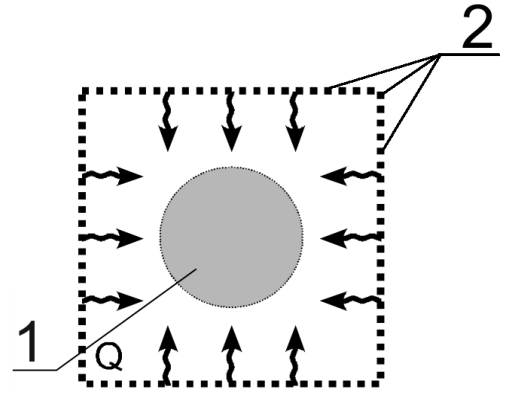


Рисунок 4.4 Схема двумерного численного эксперимента

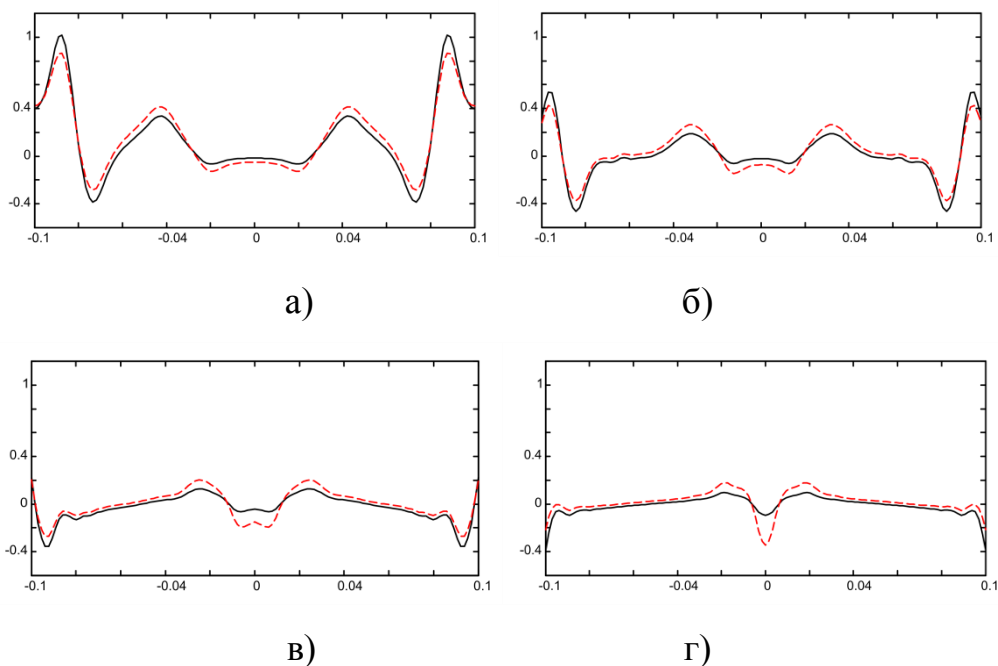
В качестве зондирующего импульса при решении прямой задачи в трёх измерениях использовалась плоская волна, падающая на шар перпендикулярно оси  $Z$  поочерёдно с четырёх боковых сторон вдоль осей  $X$  и  $Y$ . На рисунке 4.2 изображён график зондирующего импульса. Ширина импульса  $\lambda = 7 \text{ мм}$ . Расстояние между приёмниками, расположенными на сторонах куба, не превосходило  $\lambda/3$ .

Для исследования возможностей использования послойных схем в трёхмерной волновой томографии модельные расчёты по решению двумерной обратной задачи проводились в различных сечениях куба  $Q$ , перпендикулярных оси  $Z$  и пересекающих шар (рисунок 4.3). Схема эксперимента при решении 2D обратной задачи приведена на рисунке 4.4. Размер квадратных сечений  $Q$ , в которых решались 2D обратные задачи, равен  $20 \times 20 \text{ см}$ , размер разностной сетки —  $1000 \times 1000$  точек. Неоднородность — сечение шара — имеет вид круга и обозначена цифрой 1. Приёмники расположены по периметру квадрата и обозначены цифрой 2. Неоднородность зондируется в 2D с каждой стороны квадрата четырьмя плоскими импульсами, обозначенными стрелками.

Рассмотрим случай, когда сечение  $Q$  лежит в плоскости  $Z=0$  (центральное сечение). Приведём сравнение результатов аналитического решения прямой

задачи в этом сечении для 3D случая (для неоднородности в виде шара) по формуле (4.5) и результатов аналитического решения прямой задачи для 2D случая, описанных в разделе 4.2. В 2D случае неоднородность имеет вид круга (рисунок 4.4), полученного при пересечении выбранного центрального слоя и шара (рисунок 4.3) (эта задача эквивалентна рассеянию на цилиндре в 3D). Как будет показано в разделе 4.2, при решении 2D обратной задачи по аналитическим 2D данным прямой задачи круг восстанавливается с очень высоким качеством. Поэтому сравнение аналитических данных прямой задачи в 2D и 3D представляет интерес, т.к. чем больше отличие, тем худшее качество реконструкции следует ожидать в послойной (2.5D) схеме томографии.

На рисунке 4.5 приведены результаты аналитического решения прямой задачи для цилиндра (сплошная линия) и шара (пунктирная линия) на дальней по направлению падающей волны границе квадрата  $Q$  центрального сечения. Разница между сплошной и пунктирной линией на рисунке 4.5 демонстрирует ошибку входных данных, которую вносит непосредственно послойная схема томографических исследований. Выбрано несколько последовательных значений времени при прохождении этой границы фронтом рассеянной волны. Сравнение графиков, показывают, что наибольшие различия наблюдаются в области геометрической тени за неоднородностью.



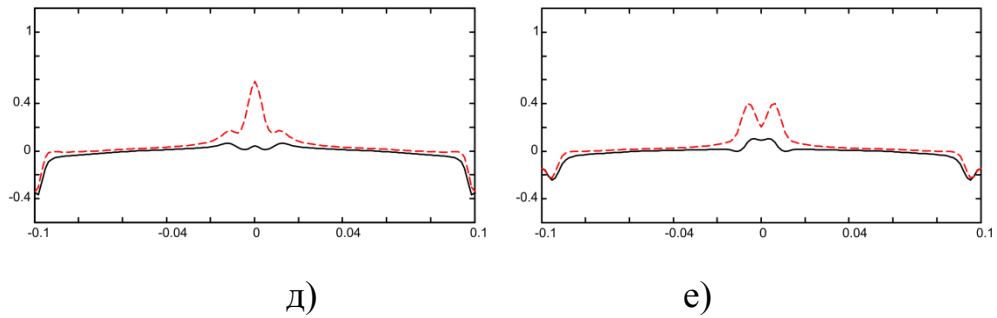


Рисунок 4.5 Сравнение решений прямой задачи для цилиндра и сферы в последовательные моменты времени

Таким образом, даже для центрального сечения, где падающая волна в силу симметрии не выходит из плоскости сечения, имеются расхождения в рассеянии для 2D и 3D задачи, что связано с рефракцией в соседних слоях для 3D случая. Всё это сказывается на качестве реконструкции даже центрального сечения. Ещё более значимыми эти эффекты являются для сечений, не проходящих через центр сферы. Если выделить параллельное сечение, когда плоскость  $Q$  проходит, например, на расстоянии  $R/2$  от центра ( $R$  – радиус сферы), то вопрос о качестве реконструированного двумерного сечения не является столь очевидным, поскольку волна, в этом случае, падает под углом  $60$  градусов к поверхности сферы и в силу рефракции выходит за пределы этого слоя.

Модельные расчёты для послойной реконструкции трёхмерного объекта состояли в следующем. Выбирается набор горизонтальных сечений шара  $z=z_i$  (см. рисунок 4.3), и аналитически по формуле (4.5) решается прямая трёхмерная задача по вычислению рассеянного поля на границе куба в каждой плоскости  $z=z_i$ . По полученным данным решаются 2D обратные задачи в каждом сечении (см. рисунок 4.4) на основе методов, описанных в главе 1. Полученное решение сравнивается с известным сечением шара в соответствующей плоскости.

На рисунке 4.6 снизу приведены восстановленные в выбранных сечениях  $z=0$ ,  $z=4$  см,  $z=5$  см,  $z=6$  см скоростные разрезы  $c(x,y)$ , где  $z=0$  проходит через центр шара, значение  $z$  возрастает слева направо на рисунке. Сверху для наглядности приведены модельные сечения шара для тех же  $z$ . Видно, что для центрального сечения  $z=0$  восстановленное решение достаточно хорошо



совпадает с точным решением. Форма сечения практически совпадает с формой неоднородности в этом сечении. Наличие небольших артефактов в основном связано с расхождениями при решении прямой задачи в 2D и 3D приведёнными на рисунке 4.5. В следующем сечении при  $z=4$  см форма неоднородности уже искажается, что связано с явлениями рефракции. При увеличении  $z$  увеличивается влияние рефракции, которая приводит к ещё большим искажениям для сечения  $z=5$  см. Так при  $z=6$  см всё полученное изображение представляет собой артефакт, поскольку точным решением является точка.

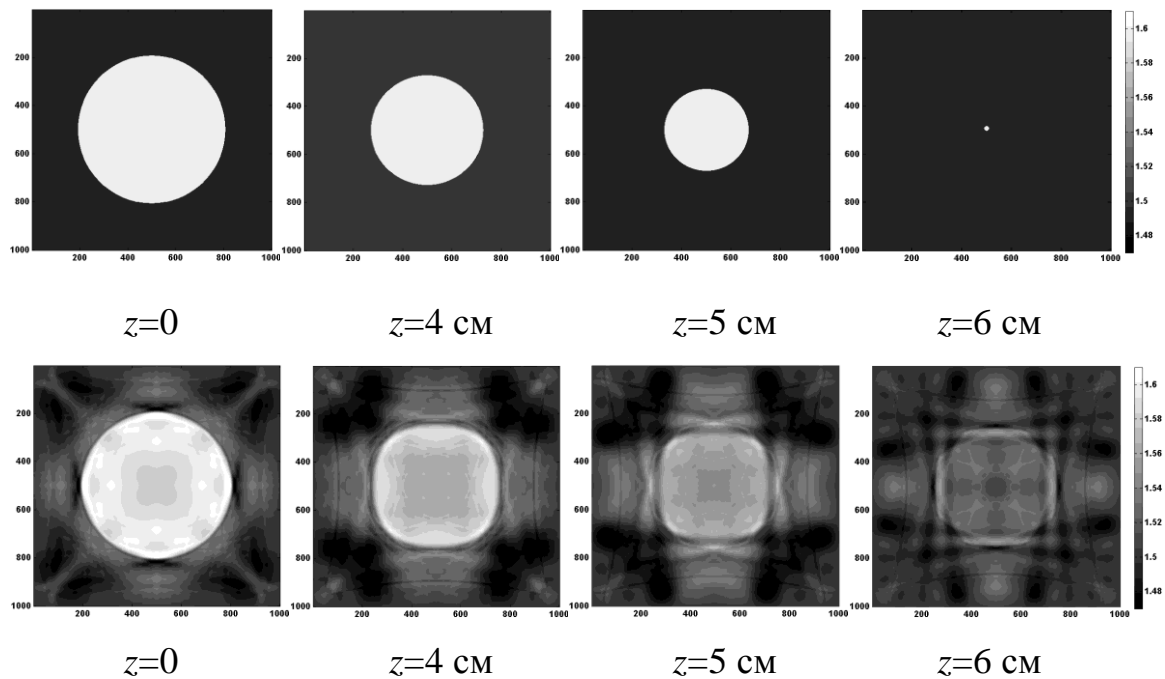


Рисунок 4.6 Модельная задача реконструкции трёхмерного шара: сверху — сечения шара в плоскостях  $z=\text{const}$ , снизу — реконструированные изображения

Таким образом, можно считать, что хотя в принципе послойная схема применима в ультразвуковой томографии, её использование приводит к искажению геометрических параметров неоднородности, к появлению артефактов. Проще всего проблемы, возникающие в послойной томографии, можно описать на физическом уровне строгости в лучевом приближении. В отличие от рентгеновской томографии, лучи в ультразвуковой томографии уже не являются прямыми. Более того, они выходят из плоскости, что и ограничивает возможности использования послойных схем томографии.

Отметим, что методы решения прямой и обратной задачи акустики приведены в предположении, что плотность среды, входящая в общее уравнение линейной акустики, слабо меняется или постоянна.

Проведённые модельные расчёты позволяют сделать следующие выводы:

1. Широко применяемый в настоящее время подход, в рамках которого решение трёхмерной задачи ультразвуковой томографии заменяется набором двумерных обратных задач по слоям (2.5D схема), не является, строго говоря, обоснованным с математической точки зрения. Однако, полученные результаты показывают, что в области параметров близких к ультразвуковой диагностике заболеваний молочной железы, с некоторой погрешностью 2.5D схема позволяет восстанавливать как форму неоднородного объекта, так и абсолютные значения скорости распространения волны.

2. Наличие эффектов дифракции, рефракции и переотражения приводит к появлению артефактов в восстановленных сечениях в 2.5D схеме, что необходимо иметь ввиду при интерпретации данных реконструированных изображений. Наиболее значимым физическим эффектом, определяющим такие искажения, является эффект рефракции.

3. Более перспективным является решение обратных задач ультразвуковой томографии непосредственно в 3D варианте, в котором эффекты дифракции, рефракции, переотражения точно учитываются в постановке задач. Платой за это является огромный объем вычислений при решении обратной задачи.

#### **4.2 Исследование влияния плотности в задачах ультразвуковой томографии в медицине**

В настоящем разделе методами математического моделирования в 2D для простого объекта в виде однородного круга проведены исследования влияния плотности на возможность реконструкции неоднородностей для медицинских сред, имеющих небольшую вариацию плотности в 10%-20%. Распространение ультразвукового излучения в неоднородной среде моделируется двумя

различными методами (аналитическим и конечно-разностным). Эти исследования позволяют оценить границы применимости рассматриваемых моделей и оценить точность вычислений для различных значений параметров. Использование двух независимых методов расчета распространения волн позволяет удостовериться в надежности методов решения прямой и обратной задачи.

Как известно, решение прямой задачи рассеяния в 2D для неоднородности в виде круга, эквивалентно задаче рассеяния в 3D для бесконечного цилиндра. В случае неоднородности в виде бесконечного цилиндра помещенного в однородную среду поле прямой задачи рассеяния можно найти аналитически в виде рядов по специальным функциям. Этот подход хорошо исследован в литературе [152, 180, 206]. Используя разработанную в этих публикациях технологию, можно рассчитать волновое поле в любой точке пространства для любой формы импульса через ряды. Полученное аналитическое решение использовалось для сравнения с конечно-разностным решением в 2D, а также в качестве данных прямой задачи для реконструкции неоднородности. Решив обратную задачу по этим данным, мы можем сравнить полученный результат с известным точным решением.

#### **4.2.1 Постановка и аналитические решения прямой задачи рассеяния на цилиндре для скалярного уравнения линейной акустики**

Уравнение распространения волны в неоднородной среде хорошо известно и может быть получено из следующих соображений [65]. Будем считать, что движение среды описывается адиабатическим движением идеальной (невязкой) жидкости. При адиабатическом движении энтропия, приведенная к единице массы, каждого перемещающегося в пространстве участка остается постоянной по времени, т.е.

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (4.7)$$

где берется полная производная по времени от энтропии.

Будем также считать, что движение среды описывается малыми колебаниями сжимаемой жидкости. Т.е. колебания плотности  $\rho(r,t)$ , давления  $p(r,t)$ , вектора скорости  $\mathbf{v}(r,t)$  – малы. Представим функции плотности и давления в виде

$$p(r, t)=p_0(r)+p_1(r,t), \quad \rho(r, t)=\rho_0(r)+\rho_1(r,t), \quad (4.8)$$

где  $p_0(r)$ ,  $\rho_0(r)$  – постоянные по времени равновесные значения,  $p_1(r,t)$ ,  $\rho_1(r,t)$  – малые колебания во времени ( $p_0 \gg p_1$ ,  $\rho_0 \gg \rho_1$ ).  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\mathbf{v}$  – малые величины первого порядка. Равновесное значение скорости будем считать равным 0. Заметим, что при отсутствии внешнего поля  $p_0(r)=p_0=\text{const}$ .

Пренебрегая малыми величинами второго порядка, уравнение движения Эйлера запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}(r,t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(r,t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(r,t) + \frac{\nabla p(r,t)}{\rho(r)} = \frac{\partial \mathbf{v}(r,t)}{\partial t} + \frac{\nabla(p_0 + p_1(r,t))}{\rho_0(r) + \rho_1(r,t)} = \frac{\partial \mathbf{v}(r,t)}{\partial t} + \frac{\nabla p_1(r,t)}{\rho_0(r)} = 0 \quad (4.9)$$

Колебания в среде также удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{d\rho(r,t)}{dt} + \rho(r,t) \text{div} \mathbf{v}(r,t) = 0. \quad (4.10)$$

Таким образом, колебания в среде подчиняются уравнениям (4.7), (4.9), (4.10). В силу уравнения (4.7)  $\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p \frac{dS}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} + 0$  для уравнения

состояния имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right),$$

где  $c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$ . Тогда уравнение непрерывности приводится к виду

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (4.11)$$

Подставим выражения (4.8) в (4.11), учитывая  $p_0(r)=p_0=\text{const}$ , имеем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(p_0 + p_1) \right) + (\rho_0 + \rho_1) c^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \\ & = \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p_1 \right) + \rho_0 c^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho_1 c^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 c^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где пренебрегли величинами второго порядка малости  $\mathbf{v} \cdot \nabla p_1$  и  $\rho_1 c^2 (\nabla \cdot \mathbf{v})$ . Далее, берем производную по  $t$  в (4.12) и подставляем уравнение Эйлера (4.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \rho_0 (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \rho_0 (\nabla \cdot (\frac{-\nabla p_1}{\rho_0})) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \rho_0 (\nabla \rho_0^{-1} \cdot \nabla p_1) - \rho_0 \rho_0^{-1} (\nabla \cdot \nabla p_1) = \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{(\nabla \rho_0 \cdot \nabla p_1)}{\rho_0} - \Delta p_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким образом, получили скалярное уравнение линейной акустики в среде с переменной плотностью  $\rho_0(r)$  и фазовой скоростью  $c(r)$ . В случае слабо меняющейся плотности,  $\nabla \rho_0(r)$  - мало и, пренебрегая величиной второго порядка малости  $\frac{(\nabla \rho_0 \cdot \nabla p_1)}{\rho_0}$ , получаем стандартное волновое уравнение, которое при наличии точечного источника, генерирующего импульс  $f(t)$ , имеет вид (4.2).

В дальнейшем будем рассматривать двумерную прямую и обратную задачу в квадратной области  $Q$ , в центре которой располагается искомая неоднородность в виде круга, обозначенная цифрой 1 на рисунке 4.4. Значения скорости волны внутри и вне круга будем считать постоянными, но не равными. Неоднородность облучается с четырех сторон плоскими зондирующими импульсами, обозначенными стрелками. По периметру квадрата располагаются приемники излучения, обозначенные цифрой 2. Численные методы решения описанной прямой и обратной задачи основаны на подходах, описанных в главе 1.

Рассмотрим также задачу распространения и рассеяния волны в трехмерном пространстве для неоднородности в виде цилиндра и плоского падающего перпендикулярно оси цилиндра зондирующего импульса (см. рисунок 4.7). Если ось цилиндра направлена вдоль оси  $Y$ , то уравнения задачи не зависят от переменной  $y$ , и поэтому задача эквивалентна прямой двумерной задаче распространения волны в рассмотренном в предыдущем абзаце случае. В трехмерном случае для цилиндра известны аналитические методы решения прямой задачи. Поэтому открывается возможность решения прямой задачи как численно методом конечных разностей, так и независимо аналитически.

Выпишем аналитическое решение прямой задачи в случае неоднородности в виде бесконечного цилиндра в виде рядов по специальным функциям. Для волн, гармонических по времени вида

$$p(r, t) = \mathbf{Re}\{u(r) \cdot e^{i\omega t}\},$$

где  $\omega$  - частота колебаний, волновое уравнение сводится к уравнению Гельмгольца относительно комплекснозначной функции  $u(r)$

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

где волновое число  $k = \frac{\omega}{c}$ . В трехмерном случае решения уравнения Гельмгольца удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда, если

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} |r| \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial |r|} + iku \right) = 0. \quad (4.14)$$

Здесь  $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и предел берется равномерно по всем направлениям. Если рассмотреть два линейно независимых сферически симметричных решения уравнения Гельмгольца  $u_1 = \frac{e^{-ik|r|}}{|r|}$  и  $u_2 = \frac{e^{ik|r|}}{|r|}$  только  $u_1$  удовлетворяет условию излучения. Этому решению уравнения Гельмгольца соответствует  $p_1(r, t) = \mathbf{Re}\{u_1(r) \cdot e^{i\omega t}\} = \frac{\cos(\omega t - k|r|)}{|r|}$ , имеющий вид расходящейся волны.

Рассмотрим простейшую задачу рассеяния на теле  $\Omega \subset R^3$  падающей звуковой волны. Предположим, что внутри тела  $\Omega \subset R^3$ , имеющего границу  $S$ , скорость распространения звука равна  $c(r) \equiv c_\Omega = \text{const}$  и плотность  $\rho(r) \equiv \rho_\Omega = \text{const}$ . Вне тела  $\Omega$  скорость звука равна  $c(r) \equiv c_0 = \text{const}$  и плотность равна  $\rho(r) \equiv \rho_0 = \text{const}$ . Предположим, что падающее поле  $u^i(r) (r \notin \Omega \subset R^3)$  представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси OZ:  $u^i(r) = e^{-ikz} = e^{-ik|r|\cos\theta}$ . Полное поле вне области  $\Omega (r \notin \Omega \subset R^3)$  обозначим через  $u(r)$ . Оно представляет собой сумму падающей волны и неизвестного рассеянного поля  $u^s(r)$ , т.е.  $u(r) = u^i(r) + u^s(r)$ , где  $r \notin \Omega \subset R^3$ . Эти функции вне области  $\Omega$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца с волновым числом  $k = \frac{\omega}{c_0}$ . Внутри области  $\Omega (r \in \Omega \subset R^3)$  полное поле обозначим

через  $u^\Omega(r)$ . Оно удовлетворяют уравнению Гельмгольца внутри области  $\Omega$  с волновым числом  $k_\Omega = \frac{\omega}{c_\Omega}$ . На границе  $S$  области  $\Omega$  поле  $u(r)$  и поле  $u^\Omega(r)$

удовлетворяют условиям сопряжения

$$u = u^\Omega, \quad \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\rho_\Omega} \cdot \frac{\partial u^\Omega}{\partial \nu}, \quad (4.15)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  - производная по внешней нормали на границе  $S$ .

Задача рассеяния на теле  $\Omega \subset R^3$ , состоит в нахождении рассеянного поля  $u^s(r)$  вне тела  $\Omega \subset R^3$ , удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда (4.14) на бесконечности.

Для областей  $\Omega$ , имеющих простую форму, решение поставленной задачи может быть выписано в аналитическом виде [206]. Рассмотрим  $\Omega$  в виде бесконечного цилиндра радиуса  $R$  (см. рисунок 4.7). Введем цилиндрические координаты, т.ч. точка с координатами  $(x, y, z)$  будет иметь координаты  $(|r|, y, \theta)$ .

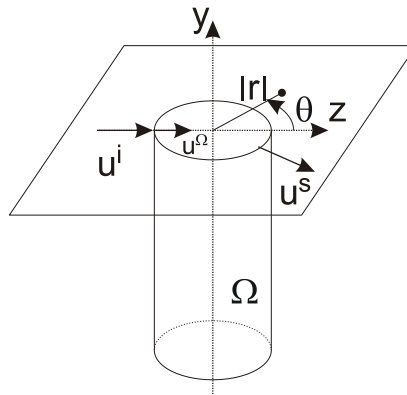


Рисунок 4.7 Схема численного эксперимента в трехмерном случае

В нашем случае падающая плоская волна не зависит от координаты  $y$  и может быть представлена в виде ряда

$$u^i(|r|, \theta) = e^{-ik|r|\cos\theta} = \sum_{m \geq 0} \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot J_m(k|r|),$$

где  $T_m = \cos(m\theta)$ ,  $\delta_m = \begin{cases} 1, m=0 \\ 2, m>0 \end{cases}$ ,  $J_m(x)$ - функция Бесселя первого рода. Внутри области  $\Omega$  решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию сопряжения (4.15), имеет вид

$$u^\Omega(|r|, \theta) = \sum_{m \geq 0} F_m \cdot \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot J_m(k|r|),$$

где

$$F_m = \frac{J_m(kR) \cdot H'_m(kR) - J'_m(kR) \cdot H_m(kR)}{J_m(k_\Omega R) \cdot H'_m(kR) - C \cdot J'_m(k_\Omega R) \cdot H_m(kR)}.$$

Решение поставленной задачи рассеяния волна  $u^s(r)$  (которая является решением уравнения Гельмгольца вне области  $\Omega$ , удовлетворяющая условию излучения (4.14) и такая, что  $u^i(r) + u^s(r)$  удовлетворяет условию сопряжения (4.15)) будет иметь вид

$$u^s(|r|, \theta) = \sum_{m \geq 0} D_m \cdot \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot H_m(k|r|), \quad (4.16)$$

где

$$D_m = \frac{C \cdot J_m(kR) \cdot J'_m(k_\Omega R) - J'_m(kR) \cdot J_m(k_\Omega R)}{J_m(k_\Omega R) \cdot H'_m(kR) - C \cdot J'_m(k_\Omega R) \cdot H_m(kR)},$$

где  $C = \frac{k_\Omega \rho_0}{k \rho_\Omega} = \frac{c_0 \rho_0}{c_\Omega \rho_\Omega}$ ,  $H_m(x)$ - функция Ханкеля второго рода. Коэффициент  $C$ ,

равняется отношению акустических сопротивлений внутри неоднородности и вне ее. Он определяет величину и фазу отраженной волны.

Предположим теперь, что падающее поле представляет собой плоскую волну в виде короткого импульса, распространяющегося вдоль оси  $OZ$ :

$$p^i(r, t) = f\left(t - \frac{z}{c_0}\right),$$

где функция  $f(t)$  отлична от нуля на интервале  $(t_*, t_* + \tau)$ , где  $\tau$ - длительность импульса. Будем рассматривать функцию  $f(t)$  в виде конечного ряда Фурье на отрезке  $(-T, T)$ , где  $T$  - выбирается из условия полного прохождения импульса интересующей нас области.  $t=0$  – соответствует началу прохождения импульса через точку  $x=y=z=0$ .



$$f(t) = \sum_{n=-N}^N f_n \exp(i\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{\pi n}{T}. \quad (4.17)$$

Пользуясь линейностью уравнения Гельмгольца и условий сопряжения, можно решать задачу рассеяния по формулам (4.16) ( $k_n = \frac{\omega_n}{c_0}$ ) отдельно для каждой гармоники  $\omega_n$  - соотношения (4.17) и получать решения  $u^s(r, \omega_n)$ . Общим решением поставленной задачи на интервале  $(-T, T)$ , будет сумма решений, полученных для рассматриваемых гармоник. Полученное решение является периодической функцией по времени с периодом  $2T$ . На интервале  $(-T, T)$   $p(r, t)$  будет совпадать с искомым решением.

#### 4.2.2 Численный эксперимент по решению обратной задачи волновой томографии при слабо меняющейся плотности

Рассмотрим неоднородность, имеющую вид бесконечного цилиндра, с осью вдоль ОУ и диаметром 12 см. Скорость и плотность внутри цилиндра постоянны,  $c_\Omega = 1600$  м/с. В качестве источника излучения использовалась плоская волна, падающая на неоднородность перпендикулярно оси цилиндра (рисунок 4.7). Выделив приемники, расположенные на сторонах квадрата  $20 \times 20$  см вокруг неоднородности в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, в них были проведены расчеты волнового поля (прямой задачи) по формуле (4.16). Скорость распространения звука вне неоднородности равнялась 1500 м/с. Размер шага сетки выбирался достаточным для хорошей аппроксимации распространения импульса волны длиной 7 мм явной разностной схемой, что привело к размеру сетки расчетов  $1000 \times 1000$  точек для рассматриваемого квадрата.

Обратная задача решалась по данным зондирования неоднородности с четырех перпендикулярных направлений плоской волной (четыре источника) методами, изложенными в главе 1. Фронт падающей волны параллелен сторонам квадрата. На рисунке 4.2 изображен график короткого импульса в зависимости от времени, который рассматривался в качестве зондирующего.

Одна из задач, стоявшая в работе, - оценить точность вычислений на основе конечноразностных схем. Для этого решалась прямая задача конечноразностным методом в двумерном случае и независимым методом по аналитическим формулам (4.16) эквивалентная трехмерная задача для цилиндра. На рисунке 4.8а приведены графики поля на дальней по направлению падающей волны границе, полученные численными и аналитическими методами для случая одинаковой плотности внутри и вне цилиндра. Видно очень хорошее согласие в расчетах.

Другая задача, которая ставилась в работе, проверить надежность методов решения обратной задачи. Для этого обратная задача решалась на основе модельных экспериментальных данных, полученных независимым методом по аналитическим формулам. На рисунке 4.8б приведены для сравнения результаты реконструкции по данным численного решения прямой задачи, а на рисунке 4.8в - по данным аналитического решения прямой задачи. Не удивительно, что результаты хорошо согласуются, т. к. результаты решения прямой задачи практически совпали.

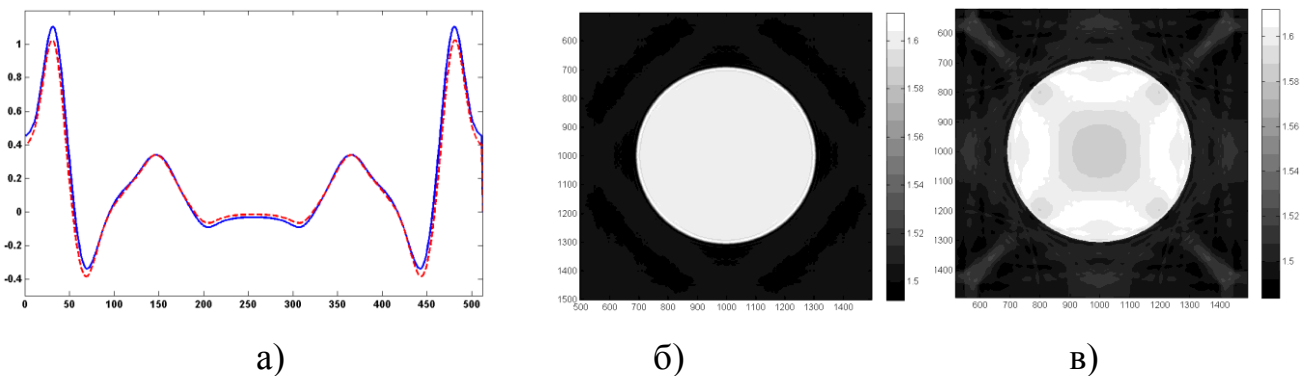
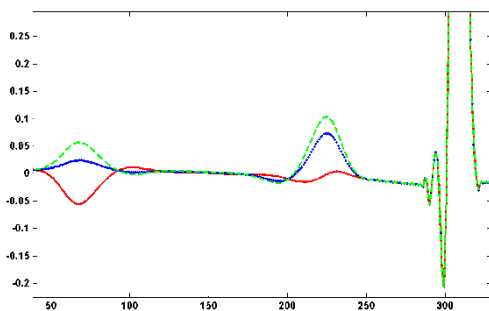


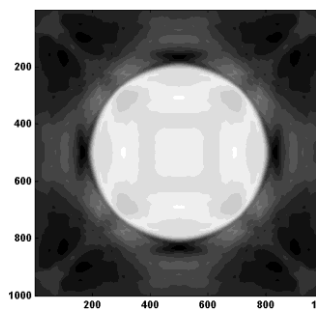
Рисунок 4.8 Решение задачи в предположении, что плотность среды одинакова во всем пространстве: а) графики волны, полученные численным и аналитическим решением прямой задачи; б) поле скоростей, восстановленное по данным численного решения прямой задачи; в) поле скоростей, восстановленное по данным аналитического решения прямой задачи

Как следует из формулы (4.13) одним из параметров, влияющих на распространение ультразвуковых волн, является плотность среды. В настоящей работе методами математического моделирования исследовано влияние плотности

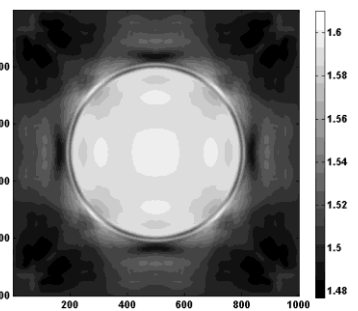
на возможность реконструкции неоднородностей для медицинских сред, имеющих вариацию плотности в 10%-20%. На рисунке 4.9а приведены графики поля на боковой по направлению падающей волны границе, полученные аналитическими методами для случаев: 1) плотности внутри и вне цилиндра равны, акустическое сопротивление внутри больше  $c_{\Omega}\rho_{\Omega} > c_0\rho_0$  (зеленый пунктир), 2) плотность внутри меньше, чем вне цилиндра, акустические сопротивления равны  $c_{\Omega}\rho_{\Omega} = c_0\rho_0$  (синие точки), 3) плотность и акустическое сопротивление внутри меньше, чем вне цилиндра  $c_{\Omega}\rho_{\Omega} < c_0\rho_0$  (красная сплошная). Видно, что отраженная волна имеет разную фазу, а при равных акустических сопротивлениях отражение исчезает при приближении к нормальному углу падения к поверхность цилиндра. Однако преломленные волны (крайние справа на графике) имеют амплитуду в 10-20 раз большую и практически совпадают. На рисунке 4.9б-в приведены результаты реконструкции методами главы 1 без учета плотности по экспериментальным данным, полученным из аналитических формул для разных плотностей внутри и снаружи цилиндра. На рисунке 4.9б приведены результаты при равных акустических сопротивлениях, на рисунке 4.9в — когда акустическое сопротивление внутри меньше, чем вне цилиндра, на рисунке 4.8в — когда плотности внутри и вне цилиндра равны, акустическое сопротивление внутри больше. Видно, что во всех трех случаях получаются похожие результаты, что связано с тем, что преломленные волны, в которых содержится основная часть энергии, практически совпадают. На рисунке 4.9в появилась дополнительная граница круга, т. к. отражение в противофазе, а на рисунке 4.9б — граница размыта, т. к. отражение слабое.



а)



б)



в)

Рисунок 4.9 Решение задачи в предположении, что плотности внутри и вне цилиндра различны: а) вид отраженной и преломленной волн для  $\rho_{\Omega} = 1 \text{ г/см}^3$  (зеленый пунктир),  $\rho_{\Omega} = 0.9375 \text{ г/см}^3$  (синие точки),  $\rho_{\Omega} = 0.8 \text{ г/см}^3$  (красная сплошная); б) восстановленное поле скоростей для  $\rho_{\Omega} = 0.9375 \text{ г/см}^3$ ; в) восстановленное поле скоростей для  $\rho_{\Omega} = 0.8 \text{ г/см}^3$

Проведённые модельные расчёты позволяют сделать следующие выводы:

1. Решение прямой задачи в двумерном случае в аналитической и в конечно-разностной постановках показали хорошее согласие в расчетах волнового поля в неоднородной среде.

2. В предположении, что плотность среды одинакова для неоднородности и окружающего пространства, решения задачи восстановления поля скоростей для входных данных, полученных аналитически и численно - практически не отличаются. Полученные результаты являются независимым тестом программного обеспечения для решения обратных задач ультразвуковой томографии.

3. Проведенные модельные расчеты в области параметров близких к ультразвуковой диагностике заболеваний молочной железы, показали, что восстановление поля скоростей на основе волновой модели (не учитывающей плотность) не сильно чувствительно к наличию разницы в 10%-20% в плотности вещества. Удаётся с небольшими артефактами восстанавливать как форму неоднородного объекта, так и абсолютные значения скорости распространения волны. Это оправдывает применение волновой модели в задаче ультразвуковой томографии.

### **4.3 Сравнение различных томографических схем сбора экспериментальных данных**

#### **4.3.1 Послойные томографические схемы с полными данными**

Рентгеновские томографы используют схему на прохождение, в которой источники и приёмники располагаются по разные стороны от исследуемого объекта, излучение проходит сквозь объект. Все существующие в медицине ультразвуковые приборы работают по схеме на отражение, когда источники и приёмники располагаются с одной стороны исследуемого объекта и улавливается отражённый от внутренних органов ультразвуковой импульс в небольшом диапазоне углов. В таких системах одни и те же ультразвуковые преобразователи (трансдюсеры) являются и источниками, и приёмниками сигнала.

Важнейшим вопросом проектирования ультразвуковых томографов является выбор эффективной схемы томографических исследований. Решению этого вопроса и посвящён настоящий раздел [47, 74, 79, 127].

Представляется естественным ожидать, что использование в томографических комплексах схем, в которых данные, получены с большого количества ракурсов, позволит более детально восстанавливать структуру неоднородного объекта по сравнению с обычными, однокурсными УЗИ диагностическими приборами. С помощью математического моделирования исследуем возможности различных схем томографии — на отражение и на прохождение, для широкого и узкого диапазона углов измерения, с использованием нескольких положений источников, окружающих объект с разных сторон. Для решения обратной задачи будем использовать методы, изложенные в главе 1.

Сначала исследуем эту проблему для послойной (2.5D) томографии на модельных задачах. В схеме с полными данными детекторы располагаются на всей границе исследуемой области. Размер расчётной области в двумерных модельных задачах положим  $200 \times 200$  мм, размер разностной сетки —  $640 \times 640$  точек. Центральная длина волны зондирующего импульса  $\lambda = 5$  мм. Расстояние между детекторами составляет  $\lambda/2 = 2,5$  мм. Внутри объекта скорость звука  $v(r)$  изменяется в пределах  $1,43 - 1,6$  км/с, скорость звука в окружающей среде  $v_0 = 1,5$  км/с. Время  $T$  регистрации сигналов составляет 250 мкс. График зондирующего импульса приведён на рисунке 1.7. Используется 8 источников  $S$ ,

по 2 на каждой стороне квадрата. Приёмники располагаются на всех сторонах квадрата с шагом 2,5 мм.

Исходные данные для решения обратной задачи получены путём решения прямой задачи распространения ультразвука в неоднородной среде с заданным согласно рисунку 4.10а распределением скорости звука  $c(\mathbf{r})$ . На рисунке 4.10б показано восстановленное изображение.

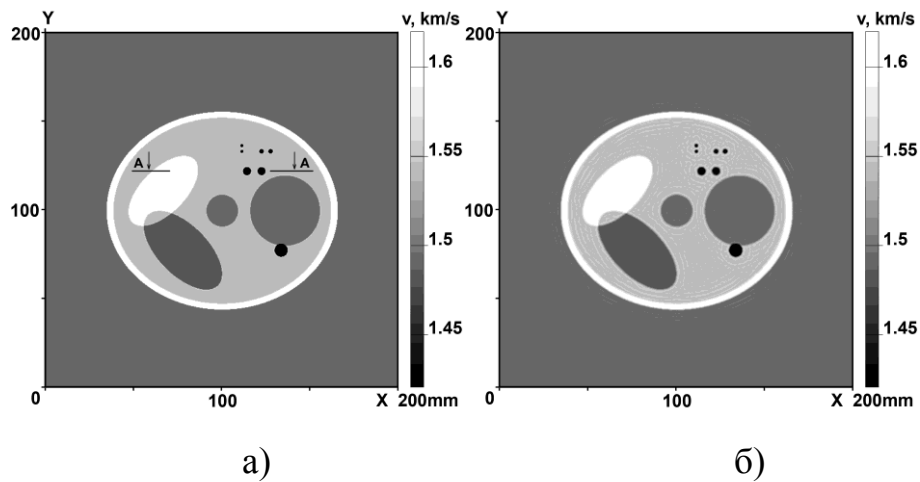


Рисунок 4.10 Томографическая схема с полными данными: слева — фантом; справа — восстановленное изображение

На рисунке 4.11 приведены графики сечения точного и восстановленного изображения скорости звука по оси А–А. Видно, что хорошо восстанавливаются не только границы неоднородных включений, но и абсолютное значение скорости звука.

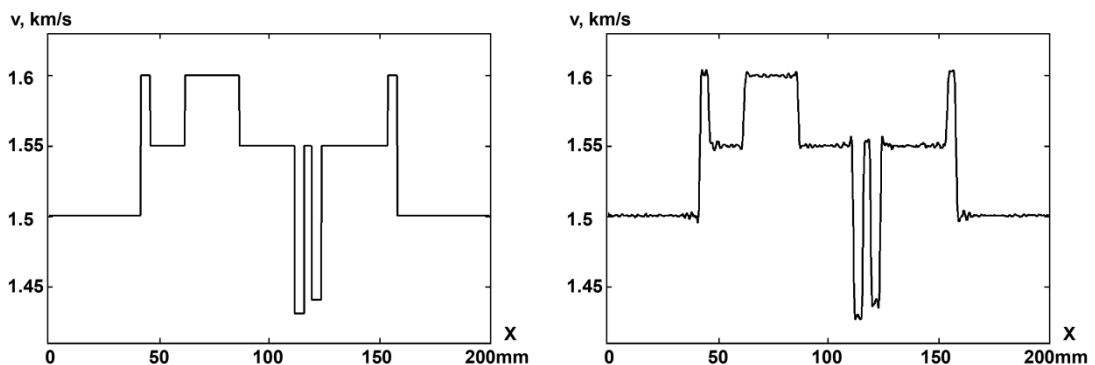


Рисунок 4.11 Сечения скорости звука по оси А–А: слева — точное; справа — восстановленное изображение

### 4.3.2 Послойные томографические схемы на прохождение

Рассмотрим задачу послойной томографии на прохождение. В схеме на прохождение источники и приёмники располагаются по разные стороны от объекта. Приёмники регистрируют акустические волны, прошедшие сквозь объект. На рисунке 4.12 приведена схема расположения источников и приёмников в модельной задаче на прохождение. Источник ультразвука располагается последовательно в 8 положениях  $S$  на границе области, как и в разделе 4.3.1. Приёмники, соответствующие каждому положению источника  $S$ , расположены с противоположной стороны от исследуемого объекта. Расстояние между соседними приёмниками составляет 2,5 мм.

Проведём прямую  $S O S'$ , проходящую через источник  $S$  и центр  $O$  исследуемой области. При каждом положении источника  $S$  в схеме на прохождение для регистрации сигнала используются только те приёмники  $D$ , для которых угол  $D O S'$  не превосходит  $\alpha$ . Приведём примеры восстановленных изображений для  $\alpha=45^\circ$  и  $\alpha=60^\circ$ .

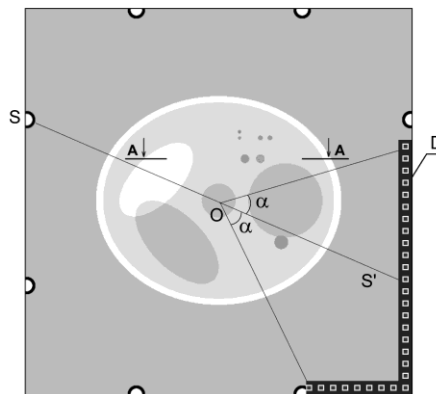


Рисунок 4.12 Схема расположения источников и приёмников в томографических исследованиях на прохождение

Для модельных расчётов по схеме на прохождение использовался фантом, приведённый на рисунке 4.10а. Восстановленные изображения при  $\alpha=45^\circ$  и  $\alpha=60^\circ$  приведены на рисунке 4.13. Из сравнения изображений на рисунке 4.10 и рисунке 4.13 видно, что самые мелкие включения, которые имеют размер 2 мм, на рисунке 4.13 уже практически неразличимы, что означает, что томографические

схемы с полными данными позволяют получать результаты с большей точностью, чем схемы на прохождении.

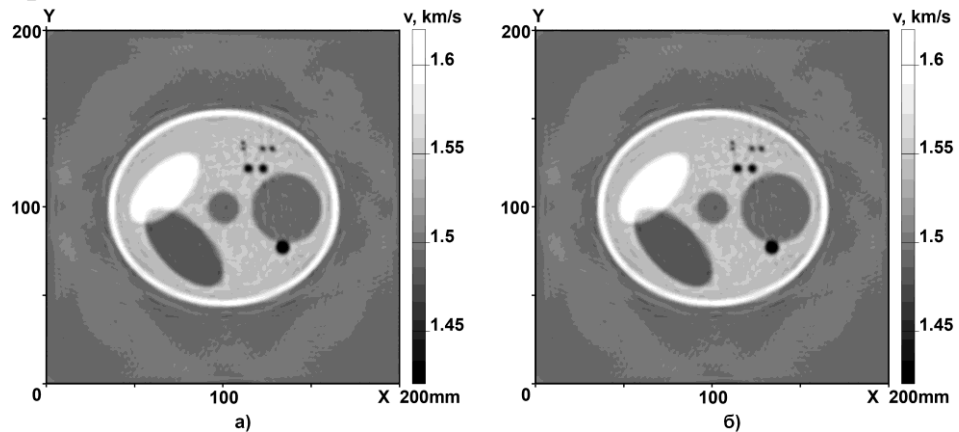


Рисунок 4.13 Восстановленное изображение по схеме на прохождении:

а) —  $\alpha=45^\circ$ ; б) —  $\alpha=60^\circ$

На рисунке 4.14 приведён график распределения скорости звука на линии А–А для восстановленного изображения при  $\alpha=60^\circ$  (сплошная линия) и для фантома (пунктирная). Видно, что и разрешающая способность, и точность восстановления абсолютного значения скорости звука в схеме на прохождении намного хуже, чем в схеме с полными данными (рисунок 4.11).

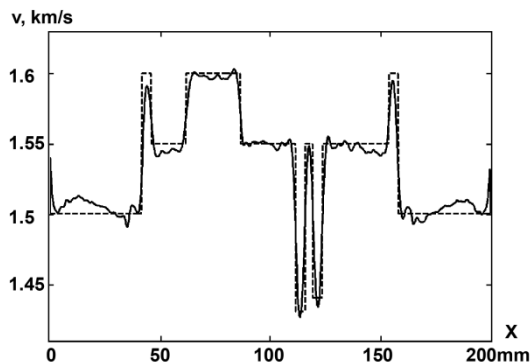


Рисунок 4.14 График сечения А–А распределения скорости звука, рассчитанного по схеме на прохождении,  $\alpha=60^\circ$

### 4.3.3 Послойные томографические схемы на отражение

Диагностические системы, работающие на отражение, широко используются как в промышленной диагностике, так и в медицине.



Томографические схемы на отражение возникают, например, тогда, когда проходящую волну невозможно зарегистрировать из-за сильного поглощения ультразвука в среде, или когда разместить приёмники или источники со всех сторон исследуемого объекта оказывается невозможно — например, в сейсмических исследованиях [6, 114, 162].

Схема расположения источников и приёмников для модельной задачи на отражение приведена на рисунке 4.15. Источник ультразвука располагается последовательно в 24 положениях  $S$  на границе области. Приёмники, соответствующие каждому положению источника  $S$ , располагаются с той же стороны от исследуемого объекта, что и источник  $S$ . При каждом положении источника  $S$  в схеме на отражение используются только приёмники из области  $R$ , для которых угол  $R O S$  не превосходит  $\alpha$ . Расчёты проводились при  $\alpha=45^\circ$ . В модельных расчётах на отражение приёмники располагались с шагом 0,3 мм — в каждой точке разностной сетки.

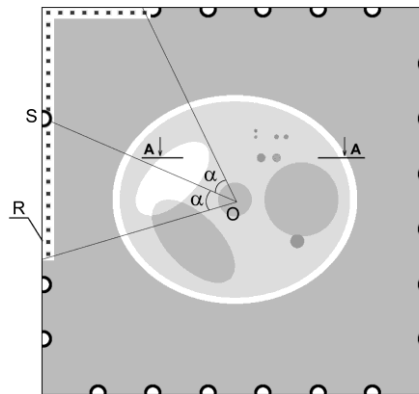


Рисунок 4.15 Схема расположения источников и приёмников в томографических исследованиях на отражение

Восстановленное по схеме на отражение изображение приведено на рисунке 4.16 слева. Это изображение показывает, какой результат можно получить в рамках данной модели в идеальных условиях, при очень большом количестве приёмников и отсутствии погрешности.

На рисунке 4.16 справа приведён график распределения скорости звука на линии А-А. Как видно из рисунков, в схеме на отражение абсолютное значение скорости звука в среде не восстанавливается. Точность реконструкции

скоростного разреза в схеме на отражение (рисунок 4.16) несопоставима с результатом, полученным в полном диапазоне углов (рисунок 4.10) и в схеме на прохождение (рисунок 4.13). В томографических схемах на отражение можно пытаться восстанавливать только границы неоднородностей, и то с большой ошибкой.

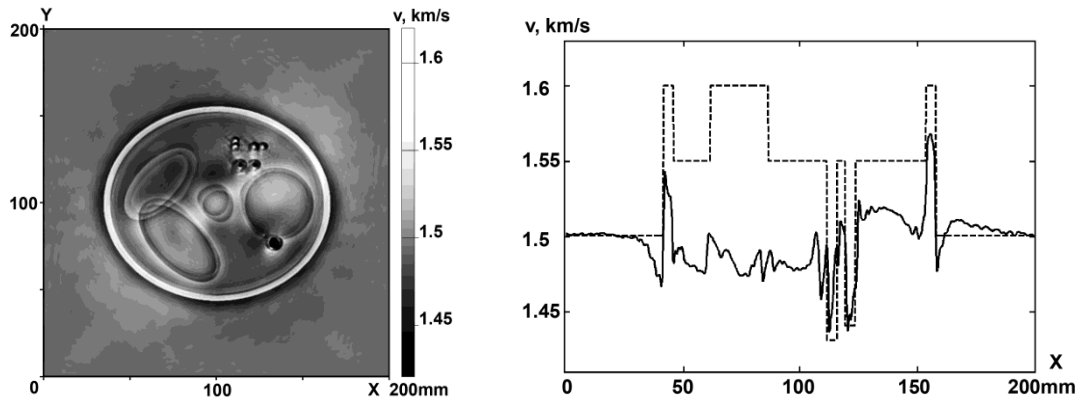


Рисунок 4.16 Восстановленное изображение в схеме на отражение: слева — изображение скорости звука  $c(\mathbf{r})$ , справа — график скорости звука по линии А–А

Ситуация становится ещё хуже, если скорость звука внутри объекта варьируется в широких пределах. При увеличении диапазона изменения скорости звука в 2 раза (если скорость звука внутри фантома составляет 1,6 км/с вместо 1,55 км/с при скорости звука в окружающей среде 1,5 км/с) в результате реконструкции по схеме на отражение получается изображение, показанное на рисунке 4.17. Качество восстановленного изображения ухудшается. Как видно, увеличение вариации скорости звука внутри объекта приводит к появлению характерных артефактов, таких как удвоение границ и т.п.

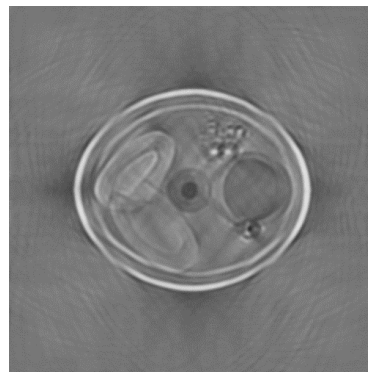


Рисунок 4.17 Восстановленное 2D изображение в схеме на отражение при увеличенной вариации скорости звука внутри объекта

Схемы на отражение является характерными не только для медицинских ультразвуковых исследований. Аналогичные схемы возникают, например, при электромагнитном зондировании приповерхностных слоёв Земли, при поиске мин, сейсморазведке, в инженерной сейсмике. Во всех этих задачах используется диагностика на отражение, где источники и приёмники расположены преимущественно только с одной стороны от объекта.

Результаты восстановления в схеме на отражение лучше, если требуется обнаружить небольшие компактные включения, которые находятся в однородной среде. Такая задача оказывается намного проще — можно считать всю среду однородной, а неоднородности — источниками отражённого сигнала, которые нужно обнаружить [198].

Отражённый сигнал не несёт детальной информации об абсолютном значении скорости звука внутри объекта. В схеме на отражение можно определить положение границы неоднородностей, но не само значение скорости звука. В задаче диагностики рака молочной железы это означает, что видимые на отражение неоднородности крайне трудно характеризовать, т.е. определить, к какому типу ткани они относятся и являются ли злокачественной опухолью. Из-за того, что скорость звука неизвестна, даже изображение границ оказывается сдвинутым вследствие рефракции.

Существуют работы, в которых авторы пытаются решать обратные задачи ультразвуковой томографии поэтапно. На первом этапе решают задачу на прохождение для приближённого вычисления скорости звука. Как было показано выше, восстановленный таким образом скоростной разрез намного хуже, чем скоростной разрез, полученный по полным данным — как на отражение, так и на прохождение. Затем на втором этапе, используя приближённый скоростной разрез, полученный на прохождение, корректируется реконструированное изображение, полученное на отражение (refraction-corrected reflection [212]). Такая

сложная конструкция используется авторами по той причине, что они используют параболическое приближение, которое неприменимо для обратной задачи с полными данными, в которой нужно учитывать волны, распространяющиеся в различных направлениях. Более перспективным является решение обратной задачи с полными данными, то есть те алгоритмы, которые предложены в настоящей диссертации.

#### 4.3.4 Исследование томографических схем в 3D

В предыдущем параграфе исследовались возможности решения обратных задач ультразвуковой томографии в послойном (2.5D) варианте. Реальная задача ультразвуковой томографии является трёхмерной. В трёхмерной постановке источники и приёмники расположены на некоторой поверхности, окружающей исследуемый объект.

В этом параграфе сделана попытка оценить возможности различных томографических схем непосредственно в трёхмерном варианте. Поскольку трёхмерные обратные задачи являются очень сложными с вычислительной точки зрения, то для сокращения времени расчётов размер исследуемого объекта был уменьшен до  $\approx 60$  мм. Расчётная область  $\Omega$  представляет собой куб размером  $H \times H \times H$ , где  $H=100$  мм. При шаге разностной сетки 0.3 мм количество точек сетки составляет  $320 \times 320 \times 320$ .

Схема трёхмерного вычислительного эксперимента показана на рисунке 4.18. В модельных расчётах использовалось 24 положения источника  $S$  в двух плоскостях  $z=h_0=0.33H$  и  $z=h_1=0.66H$ . Длина волны зондирующего импульса  $\lambda$  равна 5 мм, диапазон значений скорости звука внутри фантома 1,43 – 1,6 км/с, скорость звука в окружающей среде — 1,5 км/с.

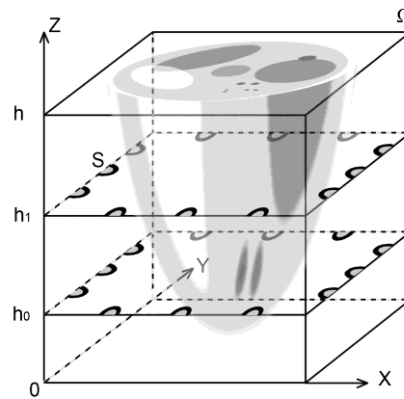


Рисунок 4.18 Трёхмерная задача с полными данными. Схема расположения источников

В томографической схеме с полными данными приёмники располагались на всех гранях куба  $\Omega$ , в том числе и на нижней грани  $z=0$  и верхней грани  $z=H$ , с шагом 2 мм. Каждая грань куба, таким образом, является массивом из  $54 \times 54$  детекторов. Сечения восстановленного трёхмерного распределения скорости звука в плоскостях  $z=\text{const}$  показаны на рисунке 4.19. Видно, что в схеме с полными данными хорошо восстанавливаются даже самые мелкие включения, диаметр которых в этом примере составляет 1 мм.

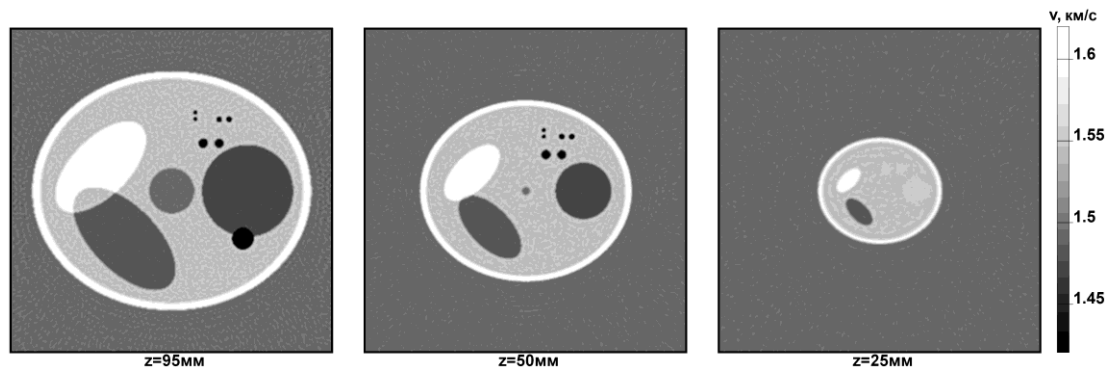


Рисунок 4.19 Сечения 3D изображения, восстановленного по схеме с полными данными

В модельной задаче на прохождение приёмники  $R$  располагались только на противоположной от источников  $S$  грани куба, как показано на рисунке 4.20. Такая схема аналогична схеме рентгеновской томографии на прохождение. Для каждой из боковых граней куба данные с детекторов снимаются для 6 положений

источников. Эксперимент повторяется для всех 4 боковых граней куба  $\Omega$ , таким образом, всего используется 24 положения источника.

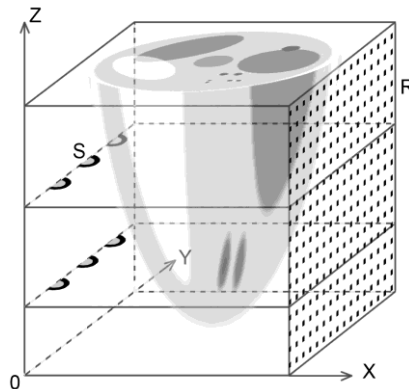


Рисунок 4.20 Схема расположения источников и приёмников в модельной 3D задаче на прохождение

Восстановленные по схеме на прохождение изображения в плоскостях  $z=\text{const}$  показаны на рисунке 4.21.

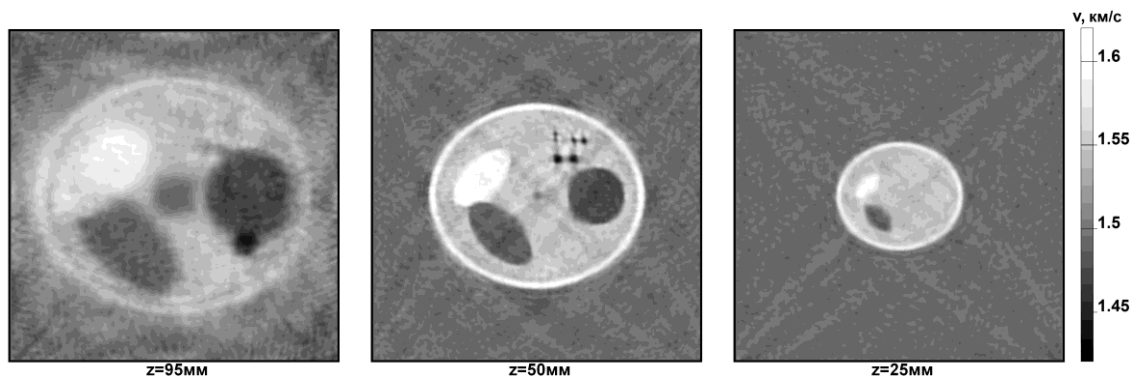


Рисунок 4.21 Сечения 3D изображения, восстановленного по схеме на прохождение

Как видно из сравнения рисунков 4.19 и 4.21, качество восстановленных изображений в схеме на прохождение хуже, чем в схеме с полным диапазоном углов. Мелкие детали изображения (они имеют диаметр 1 мм) уже не различаются.

В модельной задаче, реализующей трёхмерную томографическую схему на отражение, приёмники R располагаются на той же грани куба  $\Omega$ , что и источник

S, как показано на рисунке 4.22. Такая схема соответствует обследованию объекта с разных сторон с помощью двумерного массива ультразвуковых трансдюсеров, содержащего источники и приёмники вместе. Похожая схема используется в существующих УЗИ аппаратах.

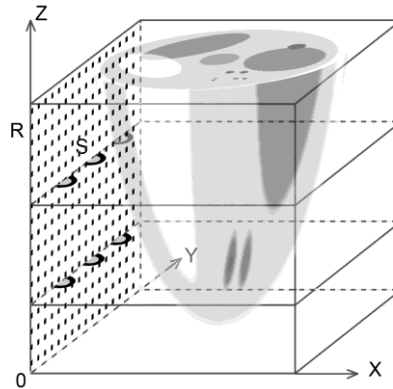
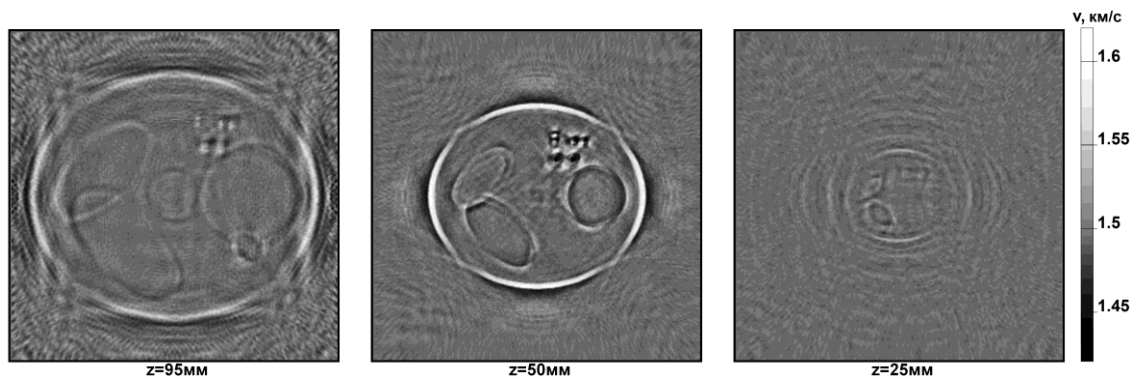


Рисунок 4.22 Схема расположения источников и приёмников в модельной 3D задаче на отражение

Восстановленное по схеме на отражение изображение показано на рисунке 4.23. Как и в рассмотренном ранее 2D варианте, модельные расчёты показывают, что возможности томографических исследований 3D объектов в рамках схемы на отражение весьма ограничены. Можно определить лишь границы неоднородностей, но не распределение скорости звука внутри объекта. Отражённые от нижней части объекта волны не попадают на приемники. Этим можно объяснить то, что изображение нижнего слоя (рисунок 4.23 справа) оказывается хуже, чем изображение центрального слоя.



Рисунок

нок 4.23 Сечения 3D изображения, восстановленного по схеме на отражение

Таким образом, как видно из проведённых модельных расчётов, томографические схемы с полным диапазоном углов обладают безусловными преимуществами по сравнению со схемами на прохождение или на отражение. В схеме с полным диапазоном данных хорошо восстанавливается не только форма неоднородных включений, но и пространственное распределение скорости звука. Точность восстановления с полными данными заметно выше, чем в томографических схемах на прохождение. В схеме на отражение восстановление абсолютного значения скорости невозможно, можно пытаться восстанавливать только границы неоднородностей. Эти выводы справедливы как для 2D, так и для 3D томографической реконструкции.

Наибольший интерес представляет обсуждение 3D схемы ультразвуковой томографии для диагностики рака молочной железы. В трёхмерном варианте томографии в этом случае источники и приёмники не могут располагаться на верхней границе области (где расположена грудная клетка). Мы получаем задачу томографии с неполными данными. Расположим приёмники на всех остальных границах расчётной области — куба  $\Omega$ , а источники — на боковых гранях куба, как и ранее (рисунок 4.24 слева).

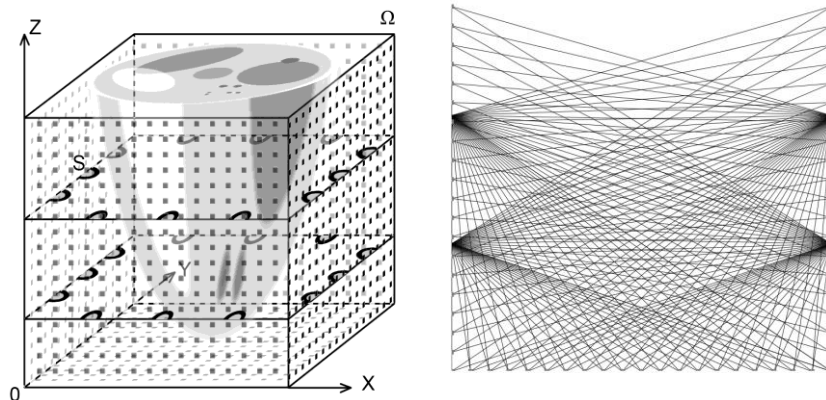


Рисунок 4.24 Трёхмерная задача с неполными данными:

слева — первый вариант схемы расположения источников и приёмников

справа — схема расположения лучей в вертикальном сечении



На рисунке 4.24 справа представлена схема лучей, где каждый луч соединяет источник и приёмник. Такие схемы являются очень информативными для рентгеновской томографии. В ультразвуковой томографии имеют место эффекты дифракции, рефракции, и т.п. Тем не менее, используя схему лучей (рисунок 4.24 справа), соответствующую расположению источников на рисунке 4.24 слева, становится очевидным, что информации для реконструкции изображения вблизи верхней границы  $Z=H$  намного меньше, чем в средней и нижней части области. Количество "проекций", т.е. путей распространения волны от источников к приёмникам, в области около верхней границы значительно меньше.

На рисунке 4.25 приведены сечения реконструированного 3D изображения в плоскостях  $z=\text{const}$ . Видно, что качество изображения при приближении к границе области  $z=H$  заметно снижается.

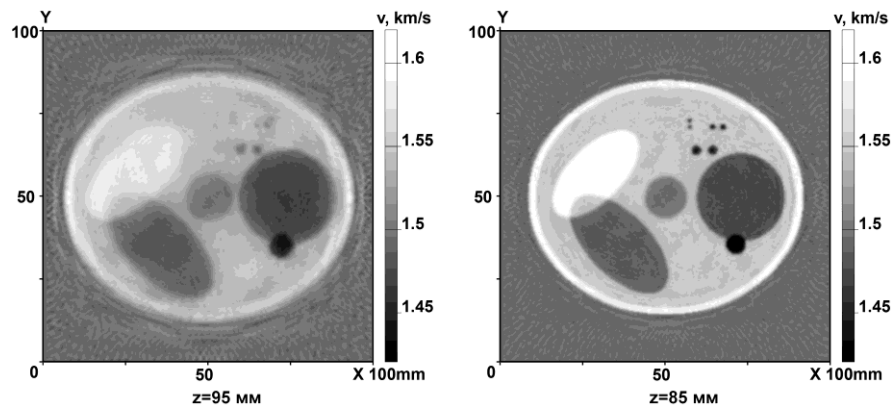


Рисунок 4.25 Восстановленные сечения: слева — при  $z=95$  мм; справа — при  $z=85$  мм

Чтобы компенсировать недостаток количества проекций, переместим источники ближе к верхней границе, согласно рисунку 4.26 слева. Как видно из схемы лучей, приведённой на рисунке 4.26 справа, количество “проекций” по всему объёму расчётной области при таком варианте расположения источников примерно одинаково. Проведём модельные расчёты с новым расположением источников. Восстановленное изображение приведено на рисунке 4.27. Качество восстановленного изображения вблизи верхней границы лишь незначительно отличается от всей остальной области.

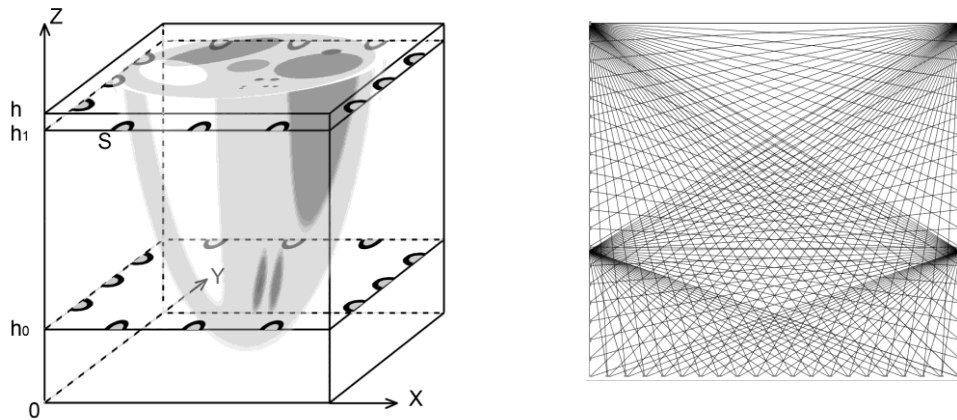


Рисунок 4.26 Трёхмерная задача с неполными данными:  
слева — второй вариант схемы расположения источников,  
справа — схема расположения лучей в вертикальном сечении

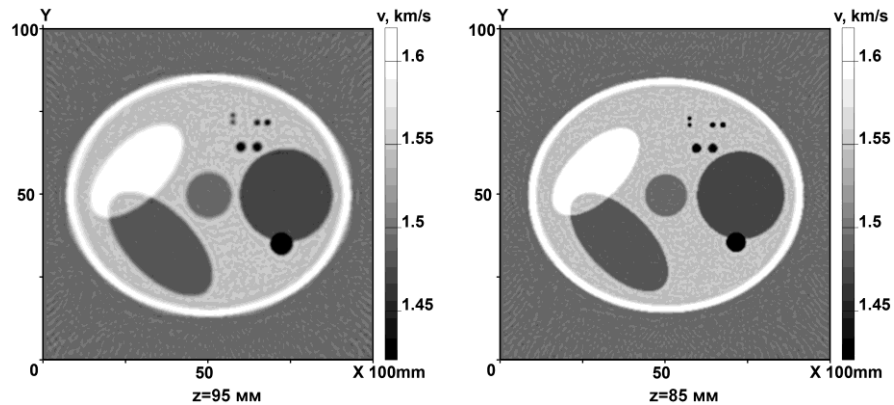


Рисунок 4.27 Восстановленные изображения в 3D схеме  
с расположением источников согласно рисунку 4.26 слева

Приведённые сечения получены при относительно небольшом количестве источников (24 источника, расположенных согласно рисунку 4.26 слева) и относительно большому количеству приёмников, расположенных на всех плоскостях, кроме  $z=H$ , так что расстояние между соседними приёмниками составляет 2 мм.

#### 4.4 Оптимизация параметров медицинских ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы

С помощью математического моделирования определим оптимальные значения основных параметров ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы. Среди таких параметров: длина волны зондирующих импульсов, количество и расположение источников и приёмников и другие.

#### **4.4.1 Разрешение ультразвукового томографа, длина волны**

Длина волны (или длительность зондирующего импульса и его полоса частот) ультразвукового излучения является важным параметром. При выборе оптимального для ультразвуковых томографов диапазона длин волн нужно учитывать следующий фактор. Большинство исследователей приходит к выводу, что на настоящий момент ультразвуковые томографы для диагностики рака молочной железы должны обнаруживать неоднородности размером порядка 3 мм и отличать их от окружающих тканей. Такой разрешающей способности достаточно для задач диагностики онкологических заболеваний на ранней стадии. Скорость звука внутри неоднородности необходимо определить с точностью до нескольких процентов, поскольку в мягких тканях скорость звука в опухоли и здоровой ткани отличается не более чем на 10-20%.

Существует два основных фактора, которые влияют на выбор длины волны ультразвукового излучения. Важным фактором является уровень поглощения, который зависит от длины волны, или, что то же самое, от частоты излучения. Несмотря на то, что высокие частоты, в диапазоне 1 – 10 МГц, широко используются в диагностической УЗИ аппаратуре, использование таких высоких частот в томографической схеме является проблематичным, поскольку требуется более высокая точность измерений. Во-вторых, разработка аппаратуры и её защищённость от помех сильно усложняется при увеличении частоты.

Поглощение ультразвука в мягких тканях растёт пропорционально частоте [134]. Средний коэффициент ослабления ультразвука в мягких тканях составляет примерно 1 дБ/см/МГц. Таким образом, при глубине просвечиваемой ткани 10 –

20 см на частоте 1 МГц ослабление сигнала составит 10 – 20 дБ, и измеряемое акустическое давление уменьшится до 10 раз. При длине волны порядка 5 мм (300 кГц) ослабление сигнала составит всего 2 – 3 раза. Это означает, что с уменьшением частоты уменьшается и погрешность экспериментальных данных, что в обратных задачах эквивалентно потенциальному повышению разрешения.

Покажем, что при длине волны порядка 5 мм вполне можно достичь разрешения порядка 3 мм. Проиллюстрируем этот факт следующими модельными расчётами 3D задач с полными данными.

Схема расположения источников в модельной задаче показана на рисунке 4.18. Для реконструкции изображения используется 24 источника, расположенных в плоскостях  $z=0,33H$  и  $z=0,66H$ . Приёмники располагаются на всех гранях куба с шагом 2 мм. Зондирующий импульс задаётся согласно рисунку 1.7. Проведём модельные расчёты при длине волны зондирующего импульса 5 мм и 10 мм. На рисунке 4.28 приведены примеры восстановленного изображения в 3D схеме с полными данными при длине волны 5 мм и 10 мм. На рисунке 4.29 приведены увеличенные фрагменты изображений.

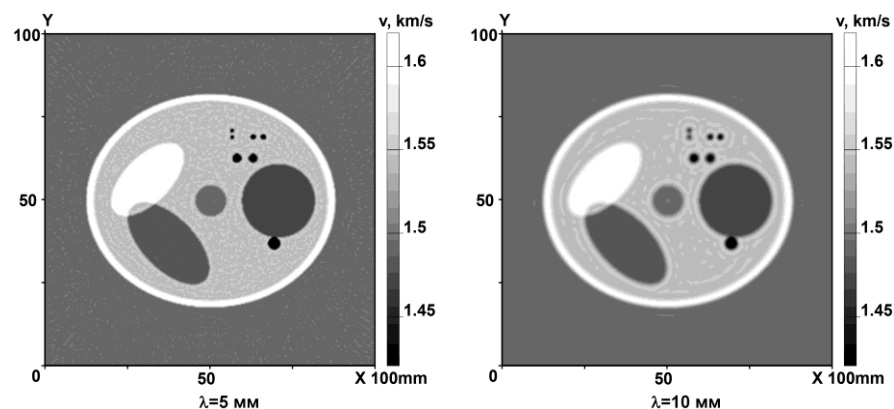


Рисунок 4.28 Восстановленные сечения в плоскости  $z=\text{const}$ :  
слева — длина волны 5 мм; справа — длина волны 10 мм

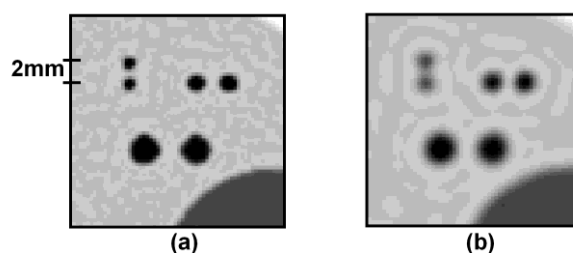


Рисунок 4.29 Увеличенные фрагменты восстановленных изображений:

а) — длина волны 5 мм; б) — длина волны 10 мм

Видно, что при  $\lambda=10$  мм восстановление деталей размером 2 мм уже не является удовлетворительным. Поэтому оптимальной длиной волны является  $\lambda \approx 5$  мм. Отметим, что такое высокое пространственное разрешение удаётся получать при очень низком контрасте скорости распространения звука в неоднородностях, который составляет не более 10%.

#### 4.4.2 Количество источников и приёмников

Проведём модельные расчёты с целью определения оптимального количества приёмников и расстояния между ними, и для определения необходимого количества источников. Общее количество приёмников и общее количество источников не являются независимыми величинами. Проиллюстрировать это проще всего на послойных томографических схемах. В нижеследующей модельной задаче источники и приёмники располагались в одной плоскости — согласно схеме, приведённой на рисунке 3.1. На рисунке 4.30а показано, что хорошей реконструкции в решении двумерной задачи можно добиться при небольшом количестве источников при условии, что расстояние между детекторами достаточно мало (4 источника, расстояние между детекторами 2,5 мм). Уменьшение количества детекторов резко ухудшает реконструируемое изображение.

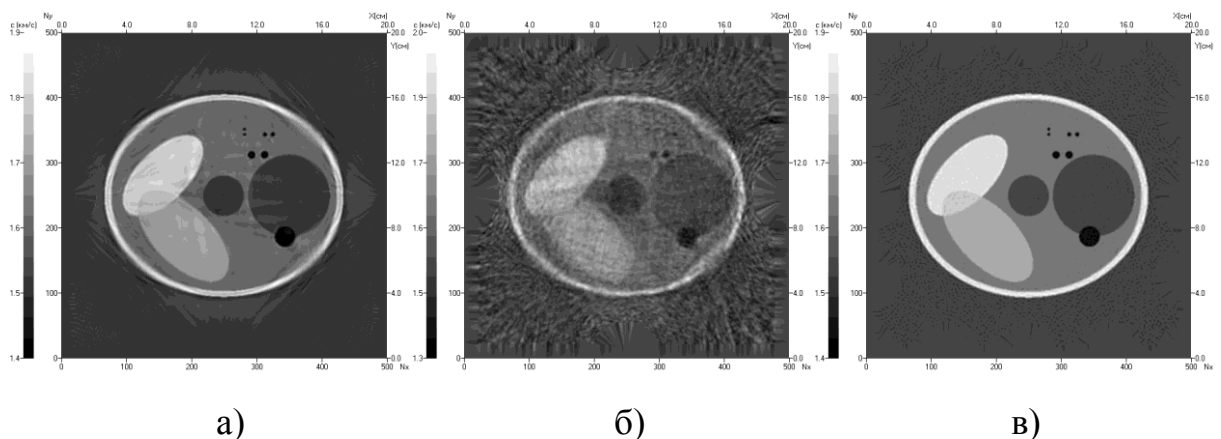


Рис 4.30 Модельные расчёты с разным количеством источников и детекторов:

- а) — 4 источника, шаг между детекторами 2.5мм;
- б) — 4 источника, шаг между детекторами 15мм;
- в) — 16 источников, шаг между детекторами 15мм

На рисунке 4.30б приведено реконструированное изображение, полученное с теми же четырьмя источниками, но при шаге между детекторами 15 мм. При фиксированном расстоянии между детекторами качество изображения можно улучшить, если увеличить количество источников. На рисунке 4.30в приведено реконструированное изображение, полученное при расстоянии между детекторами 15 мм, но при 16 положениях источников.

Таким образом, хорошие результаты реконструкции можно получать при относительно небольшом количестве источников и очень большом количестве детекторов. Если расстояние между детекторами увеличивается, для получения качественных реконструированных изображений необходимо существенно увеличивать количество источников.

С точки зрения вычислительных затрат предпочтительнее конфигурация с небольшим количеством источников и большим количеством приёмников. Из многочисленных модельных расчётов следует, что оптимальным является расстояние между приемниками не более половины длины волны. На физическом уровне строгости при расстоянии между детекторами менее  $\lambda/2$  можно детально контролировать форму волнового фронта, и, следовательно, достаточно точно определить акустическое поле внутри объекта, что очень важно для качественной реконструкции томографических изображений. В настоящее время разработаны как одномерные, так и двумерные массивы приёмников ультразвукового излучения, в которых характерные расстояния между индивидуальными приёмниками составляют порядка  $\lambda/2$  и менее [89, 132].

#### 4.4.3 Размер сетки, точность регистрации входных данных

Для обеспечения высокого разрешения и корректного функционирования алгоритма реконструкции необходимо решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке. Для волнового уравнения выбрана одна из простейших явная разностная схема аппроксимации второго порядка точности по времени и по пространству. Выбор именно этой схемы обусловлен тем, что разработанные численные методы достаточно хорошо распараллеливаются на суперкомпьютерах. Для устойчивого моделирования процесса распространения волны в этой разностной схеме необходимо как минимум 13 – 15 точек на длину волны. Для длины волны 5 мм шаг сетки должен составлять около 0,4 мм. Тогда при размерах области расчётов  $200 \times 200 \times 200$  мм получаем требуемое количество точек разностной сетки не менее  $500 \times 500 \times 500$ .

Качество реконструированных томографических изображений зависит от погрешности входных данных. Можно различать систематические ошибки, в первую очередь связанные с погрешностью модели, и ошибки измерения. Очевидно, что систематические ошибки нужно стараться уменьшать настолько, насколько это возможно. К сожалению, идеальных моделей, которые полностью совпадают с реальными физическими процессами, не существует. Всё, что касается ошибок измерения, нужно максимально оптимизировать на этапе проектирования приборов.

Уровень ошибок измерения данных зависит как от случайных факторов, таких как наводки, шумы аппаратуры и т. д., так и от параметров установки, которые вполне можно оптимизировать. К таким параметрам относится частота оцифровки сигнала, количество уровней оцифровки. Оба эти фактора влияют на погрешность входной информации. Обсудим, как можно оптимизировать процесс регистрации данных на примере оцифровки ультразвукового сигнала.

**Частота оцифровки ультразвукового сигнала.** Для цифровой обработки сигналы с детекторов — акустическое давление  $u(t)$  как функцию от времени — необходимо дискретизировать по времени и по уровню. На рисунке 4.31 приведена схема оцифровки, в которой на один период волны ультразвукового

сигнала приходится 9 отсчётов, по горизонтали отложено время, по вертикали — амплитуда сигнала. На выходе оцифровки получаются отсчёты, представляющие собой средние значения сигнала за период отсчёта  $\Delta t$ .

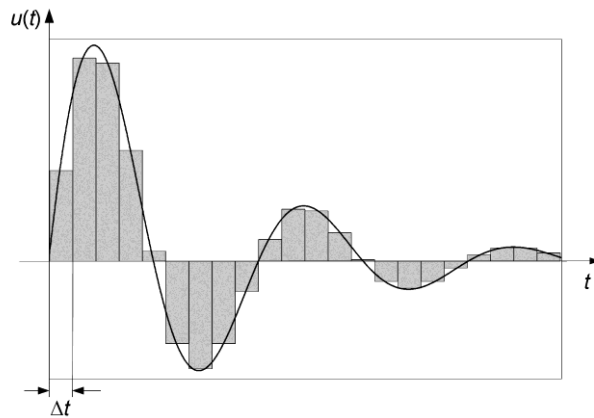


Рисунок 4.31 Иллюстрация частоты оцифровки сигналов детекторов.

Диапазон возможных значений частоты оцифровки ограничен сверху частотными характеристиками АЦП, используемых при регистрации и оцифровке ультразвукового сигнала. Для рассматриваемых частот сигнала до 0,5 МГц частота оцифровки в 20 отсчетов на период сигнала, т.е. 10 МГц, для современной микроэлектроники не является большой проблемой. С другой стороны, как показывают модельные расчеты, при больших частотах оцифровки разрешающая способность уже не увеличивается, поэтому использование слишком больших частот оцифровки не имеет смысла.

Для выбора оптимальных параметров дискретизации были проведены модельные расчёты для послонной томографической схемы. Использовались 4 источника, расположенных на серединах сторон квадратной расчётной области. На рисунке 4.32 приведены реконструированные изображения для 10 и 1 отсчёта на период волны по времени, т.е. частот оцифровки 3 и 0.3 МГц. Хорошее качество реконструкции удаётся получить при 10 отсчётах на период волны.



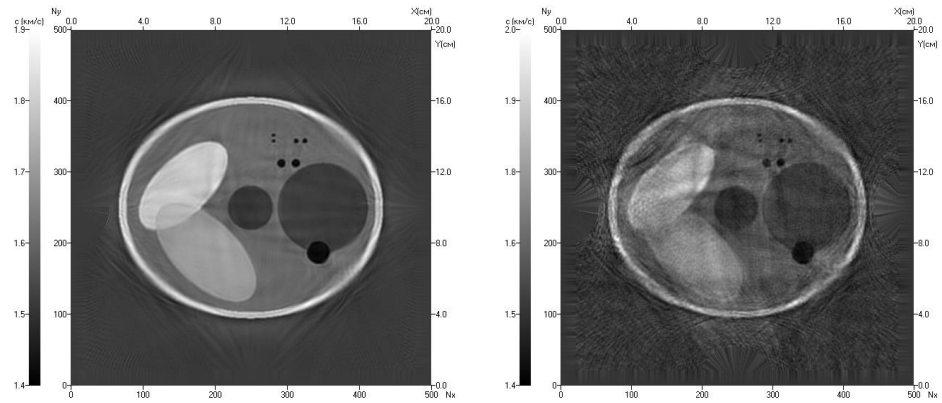


Рисунок 4.32 Модельные расчеты для разного количества отсчётов по времени:  
слева — 10 отсчётов; справа — 1 отсчёт на период волны

При дальнейшем увеличении частоты оцифровки качество реконструкции уже не улучшается. Удивительным фактом является то, что даже при одном отсчёте на период удаётся грубо восстановить основные характеристики неоднородностей. Это объясняется тем, что недостаток отсчетов по времени можно компенсировать избытком отсчетов по пространству, т.е. увеличением количества приёмников

**Количество уровней оцифровки сигнала.** Цифровое представление физической величины всегда отличается от её реального значения. Это отличие является погрешностью оцифровки, которую приближённо можно определить через количество уровней оцифровки сигнала. На рисунке 4.33 приведена схема оцифровки, в которой используется шаг квантования по уровню  $\Delta y$ . По горизонтали отложено время, по вертикали — амплитуда сигнала. В результате округления входных данных до ближайшего уровня, мы получаем оцифрованный сигнал  $y(t)$ . Разность между оцифрованным сигналом и точным средним значением сигнала  $u(t)$  за период отсчёта  $\Delta t$  составляет погрешность оцифровки —  $\varepsilon$ . Погрешность оцифровки не превосходит  $\pm 0,5\Delta y$ .

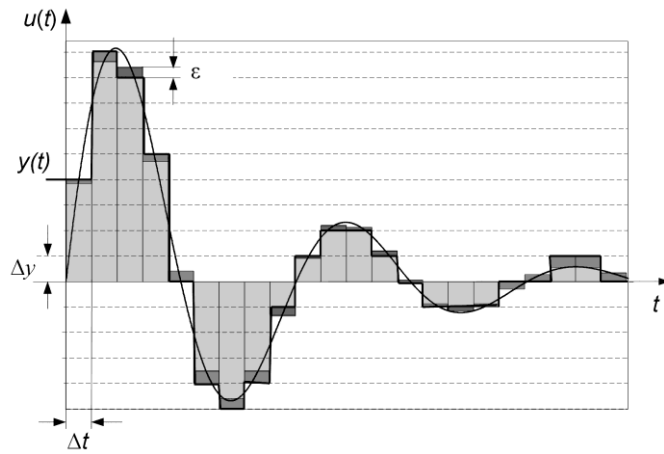


Рисунок 4.33 Иллюстрация погрешности оцифровки сигнала

Диапазон возможных значений количества уровней оцифровки ограничен сверху характеристиками АЦП устройств, используемых при регистрации ультразвукового сигнала. Для современных устройств количество уровней оцифровки может достигать величины 256 – 65536 (8 – 16 бит). Как показывают модельные расчеты, при количестве уровней оцифровки больше 1024 (10 бит) качество реконструкции стабилизируется и при дальнейшем увеличении количества уровней уже не улучшается, поэтому использование большего числа уровней не имеет смысла. Таким образом, устройство оцифровки данных томографического комплекса должно обеспечивать точность оцифровки как минимум 10 бит.

Общую погрешность оцифровки можно уменьшать как увеличением точности оцифровки (уменьшением  $\Delta y$ ), так и повышением частоты оцифровки, т.е. уменьшением  $\Delta t$ . Можно рассматривать несколько усреднённых по времени отсчётов как один отсчёт с более низкой частотой и большей точностью оцифровки.

**Уровень погрешности входных данных.** Погрешность входных данных складывается из целого ряда факторов, таких как случайные ошибки, погрешности при оцифровке данных и т.д. Очевидно, что чем меньше уровень погрешности входных данных, тем выше качество реконструкции изображения. Для определения допустимого уровня погрешности входных данных проведём

модельные расчёты. В модельных задачах сигналы на детекторах  $u(t)$  рассчитывались как решение прямой задачи распространения ультразвука. Возмущённые данные  $u_\delta(t_i)$  на каждом из детекторов генерировались с помощью датчика псевдослучайных чисел:  $u_\delta(t_i) = u(t_i) + \delta \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i$  — случайная величина со стандартным нормальным распределением, выбираемая с частотой оцифровки сигнала (10 МГц).

Определим предельное значение погрешности, при которой можно качественно восстановить изображение. Для этого проведём модельные расчёты с неточными входными данными. Уровень погрешности входных данных  $\delta$  будем оценивать относительно максимальной амплитуды сигнала на детекторах  $\max_{S,t} |u|_{ST}$ , которая принимается за 100%. На рисунке 4.34 приведены смоделированные входные данные  $u_\delta(t)$  на детекторах при уровне погрешности  $\delta=3\%$  и  $\delta=10\%$ .

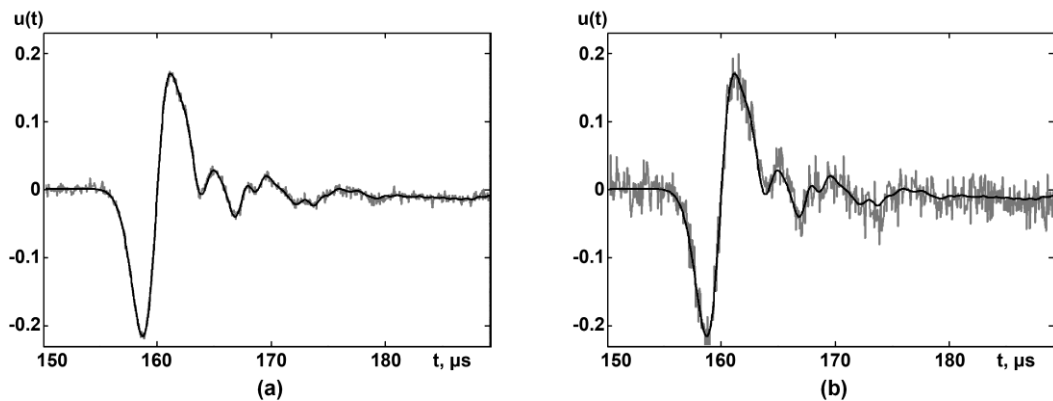


Рисунок 4.34 Входные данные с погрешностью: а) —  $\delta=3\%$ ; б) —  $\delta=10\%$

Приведём результаты модельных расчётов с погрешностью для трёхмерной томографической схемы с полными данными (рисунок 4.18). Источники расположены в плоскостях  $Z=0,33h$  и  $Z=0,66h$ , расстояние между приёмниками составляет 2,5 мм. На рисунке 4.35 приведены решения модельной задачи для возмущённых данных с уровнем погрешности 3% и 10%.

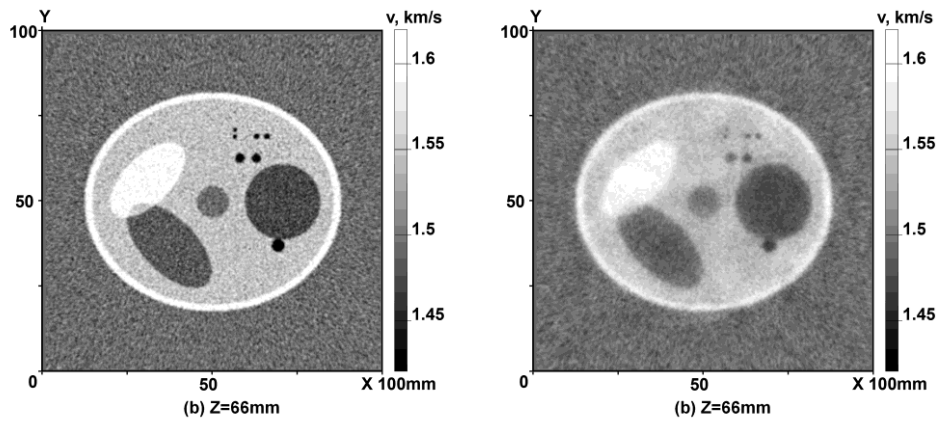


Рисунок 4.35 Восстановленные изображения при уровне погрешности 3% и 10%

Из представленных рисунков видно, что при уровне погрешности 3% удаётся получить реконструированное изображение высокого разрешения. При погрешности 10% реконструированное изображение ещё содержит информацию обо всех элементах фантома, но разрешающая способность заметно ухудшается.

Сравнение изображений (рисунок 4.36) показывает, что качество восстановления изображения заметно улучшается при уменьшении погрешности, и задача томографической аппаратуры — сделать эту погрешность как можно меньше. Таким образом, ориентиром при проектировании должен служить суммарный уровень погрешности входных данных не более 5 – 10%.

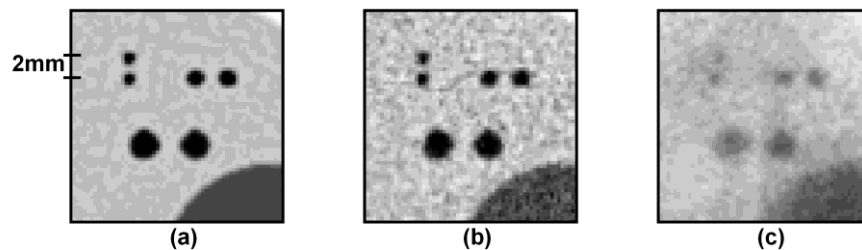


Рисунок 4.36 Увеличенные фрагменты изображений, полученных с разной погрешностью: а)  $\delta=0$ ; б)  $\delta=3\%$ ; в)  $\delta=10\%$

Случайную погрешность можно в некоторой степени компенсировать увеличением количества приёмников или повторными измерениями, увеличивая общее количество отсчётов. Среднеквадратичное отклонение уменьшается пропорционально квадратному корню из количества отсчётов.

Таким образом, посредством математического моделирования определены оптимальные значения параметров ультразвуковых томографов:

- 1) длина волны излучения  $\approx 5$  мм,
- 2) частота оцифровки сигнала по времени — от 10 до 20 отсчётов на период основной частоты сигнала,
- 3) количество уровней оцифровки сигнала — не менее 1024,
- 4) уровень погрешности входных данных — не более 10%,
- 5) количество источников — не менее 20,
- 6) расстояние между приёмниками — от половины длины волны до двух длин волн,
- 7) размер области ультразвукового зондирования  $\approx 20 \times 20 \times 20$  см,
- 8) количество точек сетки по пространственным координатам — 500.

#### 4.5 Выводы

1. В большинстве работ, посвященных проблеме исследования различных схем волновой томографии, обсуждаются задачи реконструкции 3D объектов в послойном варианте. В настоящей диссертации задача волновой томографии исследуется не только в послойном варианте, но и в трёхмерном варианте. Показано, что наиболее перспективным направлением является разработка трёхмерных томографических комплексов, в которых по входным данным восстанавливается трёхмерная неизвестная функция.

2. Как видно из проведённых модельных расчётов, томографические схемы с полным диапазоном углов обладают безусловными преимуществами по сравнению со схемами на прохождение или на отражение. В схеме с полным диапазоном данных хорошо восстанавливается не только форма неоднородных включений, но и пространственное распределение скорости звука. Точность восстановления с полными данными заметно выше, чем в томографических схемах на прохождение. В схеме на отражение восстановление абсолютного

значения скорости невозможно, можно пытаться восстанавливать только границы неоднородностей.

3. В трехмерных задачах волновой томографии нередко решается обратная задача с неполными данными. Как показано в диссертации, специальное расположение источников позволяет получать надёжную реконструкцию трёхмерного распределения скорости звука.

4. Хорошие результаты реконструкции можно получать при относительно небольшом количестве источников и очень большом количестве детекторов. Если расстояние между детекторами увеличивается, для получения качественных реконструированных изображений необходимо существенно увеличивать количество источников.

5. В реальности разрешающая способность томографического комплекса зависит как от погрешности входных данных, так и от частоты зондирующих импульсов. Выбор низких частот зондирующих импульсов в диссертации нацелен на то, чтобы уменьшить поглощение и максимально уменьшить погрешность входных данных. Качество реконструированных изображений напрямую зависит от того, насколько детально можно зарегистрировать фазу акустических волн. Оптимальным является расположение детекторов с шагом порядка  $\lambda/2$ , что для частот порядка 300–500 кГц составляет порядка 2 мм. Получаемое при этом разрешение не хуже 2-3 мм.

## Глава 5

### Суперкомпьютерные технологии

#### в решении коэффициентных обратных задач волновой томографии

В главе 5 впервые исследованы методы и подходы применения суперкомпьютерных технологий в решении обратных задач волновой томографии. Приведено описание разработанного для суперкомпьютеров общего назначения на CPU комплекса программ ПОУТИМ для ультразвуковых томографических исследований в медицине и комплекса программ для кластеров на графических картах. Исследуются вопросы масштабируемости, эффективности, производительности разработанного программного комплекса для ультразвуковых томографических исследований в медицине.

Требование повышения разрешающей способности диагностики приводит к необходимости усложнения используемых математических моделей. В связи с этим рассматриваемую задачу приходится исследовать в нелинейной волновой томографической постановке для диагностики трехмерных объектов. Решение задач в такой постановке связано с огромным объемом вычислений, что представляет серьезную проблему даже для современных суперкомпьютеров. С последующим развитием и усложнением модели, с увеличением технических возможностей ультразвуковых томографических установок (уменьшением длины волны, увеличением числа трансдюсеров и т.д.) объем необходимых вычислений будет только возрастать. Вместе с тем, развитие вычислительной техники идет по пути все большего распараллеливания вычислений. Поэтому чрезвычайно важно разрабатывать именно такие методы и алгоритмы, которые бы позволяли распараллеливать решение задачи на большом числе вычислительных узлов [55].

Однако, как известно [2, 26, 75], увеличение вычислительных узлов само по себе еще не обеспечивает уменьшение времени расчетов. Одна из серьезных проблем в использовании супер-ЭВМ, которая будет рассмотрена в работе, состоит в выборе оптимальной схемы распараллеливания задачи для обеспечения

масштабируемости программного обеспечения, повышения эффективности. Эта проблема исследуется в настоящем разделе.

Отметим, что поскольку разработанные в предыдущих разделах алгоритмы в задаче волновой томографии включают явную разностную схему, то вычисления значений во всех точках сетки на следующем шаге по времени не зависят друг от друга и могут быть выполнены параллельно как SIMD-алгоритм. Поэтому задача может эффективно распараллеливаться на широком диапазоне архитектур процессоров: общего назначения, векторных, массивно-параллельных, графических и т.п. Пример эффективного распараллеливания в задаче моделирования распространения волн от точечного источника для более сложной физической модели трехмерной упругой среды рассмотрен в работе [60].

## **5.1 Применение суперкомпьютеров общего назначения для решения задач волновой томографии в послойных моделях**

### **5.1.1 Описание комплекса программ решения прямой и обратной задачи ультразвуковой томографии для послойных 2.5D моделей на суперкомпьютерах общего назначения**

В работе разработано и реализовано программное обеспечение для послойных 2.5D ультразвуковых томографических исследований в медицине (ПОУТИМ) на суперкомпьютерах общего назначения на CPU процессорах. Данный комплекс состоит из трех программных компонентов (блоков). Первый блок комплекса программ ПОУТИМ предназначен для решения прямой задачи расчета рассеяния ультразвуковых волн на заданных неоднородностях в выделенном слое при заданных параметрах расчетной модели. Программа решения прямой задачи сначала задает объект, для которого далее моделируются экспериментальные данные ультразвукового томографического исследования.

Второй блок ПОУТИМ предназначен для решения обратной задачи восстановления структуры неоднородности исследуемого объекта в выделенном



слое на основе экспериментальных данных рассчитанной прямой задачи (т.е. вычисляет скорость распространения ультразвуковой волны в каждой точке области вычислений). Правильность восстановления структуры объекта оценивается визуально путем сравнения изображений модельного исходного и восстановленного объектов.

Третий блок ПОУТИМ предназначен для вывода результатов решения обратной задачи (блок визуализации).

Комплекс программ обеспечивает проведение вычислений при задании:

1. различных модельных объектов;
2. различного количества источников излучения;
3. различного количества приемников излучения;
4. различных частот излучения.

Таким образом, описываемые программы позволяют проводить моделирование для послойных 2.5D ультразвуковых томографических исследований в медицине.

Комплекс программ ПОУТИМ разработан на языке C++, предназначен для эксплуатации на высокопроизводительных кластерных компьютерных системах, большинство из которых работает под управлением одного из клонов ОС Linux. Для межпроцессорного обмена был выбран программный интерфейс MPI (Message Passing Interface). Для трансляции программ требуется наличие компилятора с языка C++ с библиотекой MPI.

Отладка программ и расчеты модельных задач проводились на суперкомпьютерах «Чебышев» и «Ломоносов» Суперкомпьютерного комплекса Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Требования на количество задействованных вычислительных ядер варьируются в зависимости от параметров решаемой задачи. Свойство масштабируемости программ позволяет решать одну и ту же программу, используя различное число ресурсов вычислительного кластера, позволяя широко варьировать соотношение задействованных ресурсов и времени решения задачи.

**Описание блока решения прямой задачи.** Блок решения прямой задачи комплекса программ ПОУТИМ предназначен для расчета экспериментальных данных, получаемых в ходе моделирования ультразвукового томографического исследования объекта. Распространение акустического поля описывается скалярным волновым уравнением, которое имеет вид (1.3). Для аппроксимации волнового уравнения используем явную разностную схему (1.27). Расчетная область является прямоугольником размера  $N_x \times N_y$  точек, а источники излучения и приемники расположены на сторонах этого прямоугольника (рисунок 1.3). Таким образом, целью данного блока является расчет значения рассеянного модельной неоднородностью поля  $u(r, t)$  на сторонах прямоугольника как функция от времени до максимального момента времени  $T_{max}$ . В дальнейшем по вычисленным экспериментальным данным программа решения обратной задачи восстанавливает трехмерную структуру объекта по слоям.

Основными входными данными данного блока являются параметры расчета: размер области счета, количество и положения источников излучения, длина интервала времени расчета, длина волны излучения. Вначале расчетов внутри расчетной области вычисляется модельная неоднородность. Выходными данными являются значения поля на границе области расчета как функция времени. К выходным данным можно также отнести изображение модельных неоднородностей объекта, получаемое с помощью блока визуализации. Таким образом, алгоритм работы блока решения прямой задачи может быть представлен так, как это показано на рисунке 5.1.

Программа решения прямой задачи комплекса ПОУТИМ реализует логический программный блок решения прямой задачи рассеяния ультразвуковых волн на заданных неоднородностях в выделенном слое при заданных параметрах расчетной модели. В общих чертах работу программы можно описать следующими шагами структуры (рисунок 5.2):

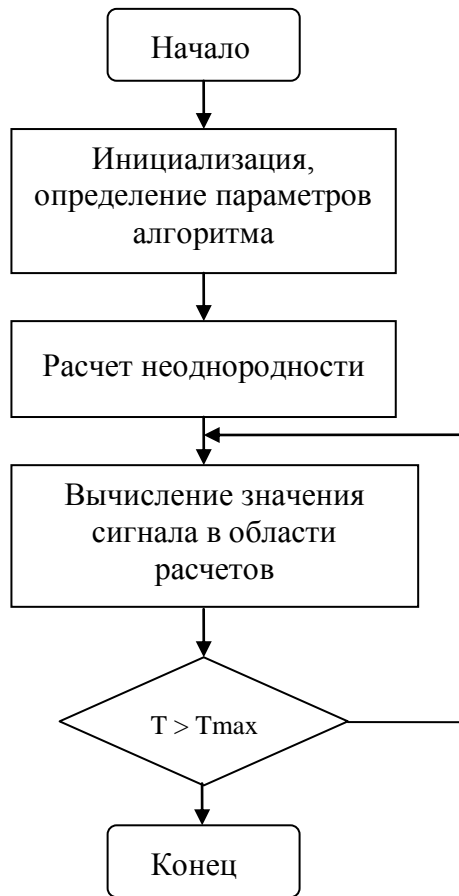


Рисунок 5.1 Алгоритм работы блока решения прямой задачи

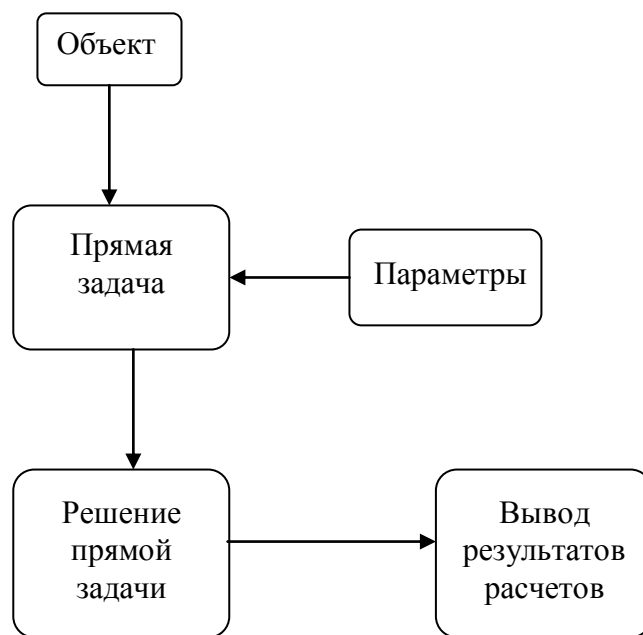


Рисунок 5.2 Структура программы решения прямой задачи

Программа решения прямой задачи состоит из следующих файлов:

1. *Konrazd.cpp* – основная часть, реализующая алгоритмы ПОУТИМ;
2. *SetObjects.cpp* – процедура задания структуры исследуемого объекта;
3. *SourcePosition.cpp* – процедура задания положения источников излучения;
4. *structs.h* – описание служебных структур;
5. *Parameters.h* – файл задания параметров алгоритма.

Входные параметры алгоритма общие для прямой и обратной задачи для удобства задания вынесены в отдельный включаемый файл *Parameters.h*. Входными данными для блока решения прямой задачи являются также положение источников излучения, задаваемое процедурой *SourcePosition* и структура моделируемого объекта, которая описывается в процедуре *SetObjects*. Для обеспечения гибкости задания объекта для прямой задачи, операторы расчета объекта вынесены в отдельную процедуру в отдельном файле *SetObjects.cpp*. Структура моделируемого объекта задается программным способом, т.е. в процедуре *SetObjects* задается скорость звука в каждой точке моделируемого объекта и его положение.

Выходными данными для блока решения прямой задачи являются значения поля на границе области расчета как функция времени. Числовые значения поля не предназначены для непосредственной интерпретации человеком при их визуализации и сохраняются в файле в формате чисел с плавающей запятой двойной точности. Количество файлов зависит от количества источников излучения. В каталоге *ExMMM* создаются файлы с именами *Ex.vNe*, где *N* – номер источника, по одному файлу на каждый источник излучения. Здесь *MMM* – десятичные числа от 000 до *N\_SLICES-1*, *MMM* – номер слоя, в котором производились вычисления, *N\_SLICES* – число слоев, в которых будут производиться вычисления.

**Описание блока решения обратной задачи.** Блок решения обратной задачи комплекса программ ПОУТИМ предназначен для решения обратных задач, возникающих при 3D ультразвуковых томографических исследованиях в медицине. Данная программа позволяет восстанавливать внутреннюю структуру исследуемого объекта по экспериментальным данным, полученным либо с помощью программы решения прямой задачи комплекса ПОУТИМ, либо в ходе реального эксперимента. Программа восстанавливает трехмерную структуру объекта по слоям, т.е. в каждом слое вычисляет скорость распространения ультразвуковой волны в каждой точке области вычислений.

Метод решения обратной задачи изложен в главе 1. Расчет распространения звуковой волны (расчет «в прямом времени») выполняется так же как в прямой задаче по формуле (1.27). Для расчета «в обратном времени» в сопряженной задаче используется явная разностная схема аналогичная (1.27). Задача решается итерационным методом путем вычисления на каждом шаге значения градиента по скорости функционала невязки. Градиент может быть представлен в виде (1.28), а невязка на текущей итерации в виде (1.29).

Основными входными данными данного блока являются параметры расчета: размер области счета, количество и положения источников излучения, длина интервала времени расчета, длина волны излучения, максимальное количество итераций, а также значения поля на границе области расчета как функция времени, полученные в результате работы блока решения прямой задачи, т.е. экспериментальные данные. Выходными данными являются файлы со значениями скорости распространения звука в каждой точке области расчета в каждом слое. Таким образом, алгоритм работы блока решения обратной задачи может быть представлен так, как это показано на рисунке 5.3.

В общих чертах работу программы решения обратной задачи можно описать следующими шагами (рисунок 5.4)

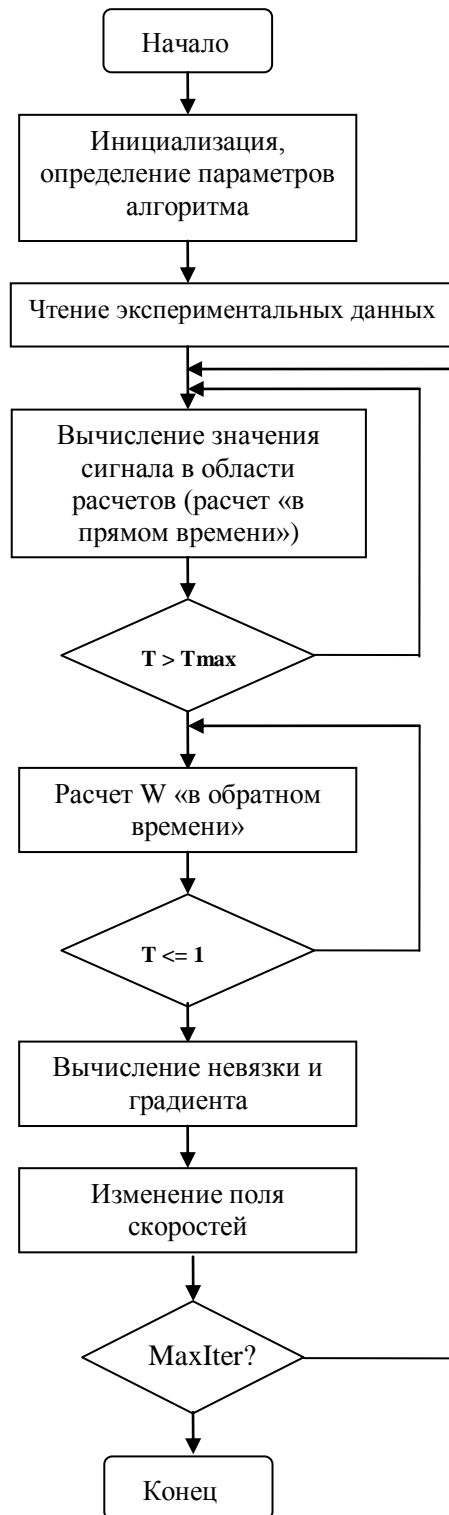


Рисунок 5.3 Алгоритм работы блока решения обратной задачи

Программа решения обратной задачи комплекса программ ПОУТИМ состоит из следующих файлов:

1. *Konraz.cpp* – основная часть, реализующая алгоритмы ПОУТИМ;

2. *SourcePosition.cpp* – процедура задания положения источников излучения;
3. *structs.h* – описание служебных структур;
4. *Parameters.h* – файл задания параметров алгоритма.

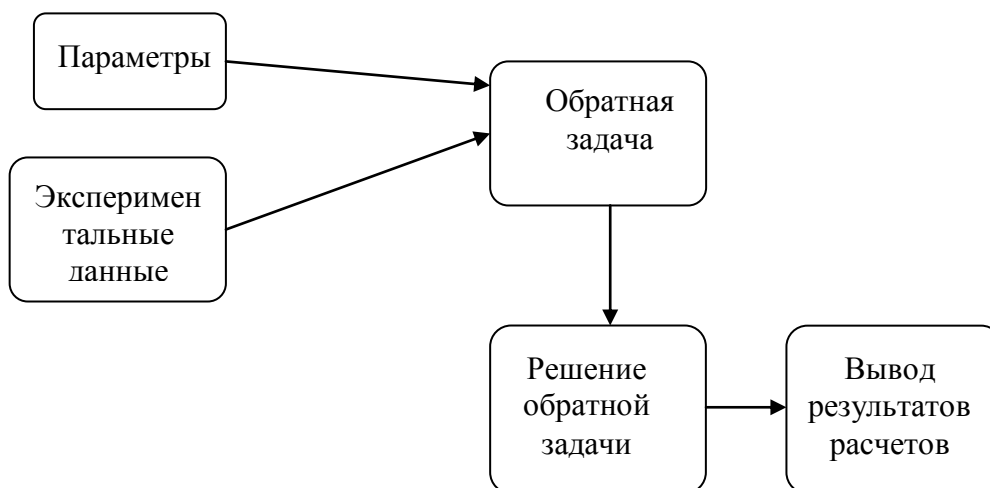


Рисунок 5.4 Структура программы решения обратной задачи

Входными данными для блока решения обратной задачи являются параметры алгоритма, задаваемые во включаемом файле *Parameters.h*, положение источников излучения, задаваемое процедурой *SourcePosition*, а также значения поля на границе области расчета, полученные в результате работы блока решения прямой задачи, расположенные в каталоге *ExMMM*. Данные, рассчитанные блоком решения прямой задачи, должны быть получены при тех же параметрах алгоритма, что используются при решении обратной задачи.

Выходными данными для блока решения обратной задачи являются значения скорости распространения звука в каждой точке области расчета. Кроме того в конце каждой итерации в каталоге *OutMMM* (*MMM* – десятичные числа от 000 до  $N\_SLICES-1$ , *MMM* – номер слоя, в котором производились вычисления) создается файл промежуточных результатов с именем *NNNN.vvc* (*NNNN* – номер итерации), содержащий текущие значения скорости в каждой точке области расчета в формате чисел с плавающей запятой. Это позволяет возобновить

обработку при прерывании программы (например, при истечении выделенного времени счета). По окончании вычислений файлы с вычисленными значениями скорости распространения звука могут быть переданы на персональный компьютер и просмотрены.

Для корректной работы программ решения прямой и обратной задач требуется использовать одинаковые параметры, которые записаны в файле *Parameters.h*. Для задания параметров программ следует отредактировать файл *Parameters.h* путем установки соответствующих значений операторов препроцессора *#define*. Изменяемыми параметрами являются:

1. MAX\_SLICES – общее количество слоев регистрации данных по вертикали.
2. N\_SLICES – количество слоев регистрации данных для конкретной задачи.
3. NX\_ALL – количество точек сетки по координате X.
4. NY\_ALL – количество точек сетки по координате Y.
5. NITER\_SOU – количество источников.
6. NX\_PAR – количество областей для распараллеливания по горизонтали.
7. NY\_PAR – количество областей для распараллеливания по вертикали.
8. IMP\_WIDTH – длина волны излучения (в мм).
9. NUM\_LEVEL\_IMP – количество уровней оцифровки сигнала.
10. STEP\_DETECT\_SPACE – шаг регистрации сигналов по пространству (в мм).
11. N\_PERIOD\_TIME – количество отсчетов данных по времени на период волны
12. ERROR\_LEVEL – уровень относительной погрешности входных данных.
13. X\_BEG – начало области ультразвукового зондирования по X (в мм).
14. X\_END – конец области ультразвукового зондирования по X (в мм).
15. Y\_BEG – начало области ультразвукового зондирования по Y (в мм).



16. Y\_END – конец области ультразвукового зондирования по Y (в мм).
17. Z\_BEG – начало области ультразвукового зондирования по Z (в мм).
18. Z\_END – конец области ультразвукового зондирования по Z (в мм).
19. END\_ITER – количество итераций по градиенту.

Для задания структуры объекта служит процедура

void SetObjects (int Slice, int kPar, int iPar, double \*c), которая расположена в файле SetObjects.cpp. Значение параметров процедуры:

Slice – номер слоя, целая переменная (0 ... N\_SLICES-1);

kPar – номер части вычислительной сетки по координате Y, целая переменная (0 ... NY\_PAR -1);

iPar – номер части вычислительной сетки по координате X, целая переменная (0 ... NX\_PAR -1);

c – выходной параметр: вещественный массив двойной точности, содержащий значения скорости объекта для части вычислительной сетки, заданной переменными Slice, kPar, и iPar.

Для задания положения источников излучения служит процедура

void SourcePosition(int NiterSou,int NxAll,int NyAll,int iterSou,int &ISouAll,int &JSouAll), которая расположена в файле SourcePosition.cpp. Данная процедура вычисляет положение источника по его порядковому номеру. Значение параметров процедуры:

NiterSou – общее число источников излучения, целая переменная;

NxAll – число узлов сетки вычисления по X, целая переменная;

NyAll – число узлов сетки вычисления по Y, целая переменная;

iterSou – текущий номер источника, целая переменная (0... NITER\_SOU-1);

ISouAll – выходной параметр, координата X источника, целая переменная;

JSouAll – выходной параметр, координата Y источника, целая переменная.

**Описание блока визуализации.** Блок визуализации комплекса программа ПОУТИМ предназначен для визуализации результатов расчетов, произведенных программами решения прямой и обратной задач комплекса ПОУТИМ. Программа решения прямой задачи помимо экспериментальных данных создает и сохраняет модельные значения скоростного разреза исследуемый объект во внутреннем формате. В процессе работы программы решения обратной задачи (восстановление структуры исследуемого объекта по вычисленным экспериментальным данным) на каждой итерации создаются файлы значения скорости распространения ультразвуковой волны в каждой точке области вычислений. Программа визуализации позволяет преобразовать данные значений скорости звука в области расчета во внутреннем формате прямой и обратной задач в изображение на экране и, при необходимости, записать изображение в файл. В качестве выходного формата изображения был выбран формат BMP.

Входными данными программы визуализации являются выходные файлы программ решения прямой и обратной задач. При использовании выходных файлов прямой задачи *ObjMMM*, где *MMM* – номер слоя, производится визуализация модельной структуры исследуемого объекта. При использовании выходных файлов результатов с именем *NNNN.vvc* (*NNNN* – номер итерации) обратной задачи, визуализируются восстановленные изображения значения скорости в каждой точке области расчета исследуемого объекта.

### **5.1.2 Особенности организации параллельных вычислений в послойных моделях**

Как было отмечено, эффективным методом решения проблемы огромного объема вычислений и огромного объема данных является использование параллельных вычислений на многопроцессорных системах. Возможность эффективного использования параллельных вычислений при решении обратной задачи определяется структурой алгоритма, возможностью выделения большого числа максимально вычислительно независимых блоков.

В послойной 2.5D схеме волновой томографии 3D объекта рассматривается набор двумерных задач, каждая из которых представляет собой коэффициентную обратную задачу для двумерного уравнения гиперболического типа. Этот подход подробно исследован [41, 43, 46, 130]. Рассмотрение слоев в совокупности описывает трехмерную структуру объекта (рисунок 5.5). При таком подходе вычисления в каждом слое производятся независимо. Следовательно, распараллеливание вычислений по слоям является максимально эффективным.

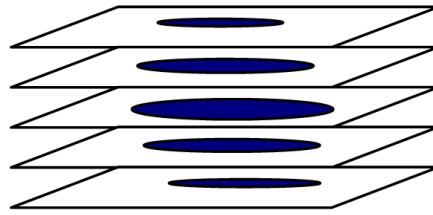


Рисунок 5.5 Представление структуры объекта в томографии по слоям

Дальнейшее распараллеливание вычислений выполняется по источникам излучения. Как видно из постановки (1.3), (1.4), задача решается для различных положений источника. Количество таких положений в реальном эксперименте может достигать нескольких десятков. Заметим, что основной объем вычислений, т.е. решение основной (1.3), (1.4) и «сопряженной» (1.19), (1.20) задач для разных положений источника выполняется независимо. Это говорит о том, что структура рассматриваемого алгоритма такова, что имеется возможность эффективного распараллеливания вычислений для каждого слоя задачи по источникам.

Рассмотрим возможность дальнейшего распараллеливания при проведении вычислений для выбранного слоя и заданного источника. Необходимо найти градиент  $\Phi'_c(u(c))$  по формуле (1.22) для функционала невязки. Для этого находим поля  $u(r,t)$  и  $w(r,t)$  основной и «сопряженной» задач соответственно. Для вычисления  $u(r,t)$  используется явная разностная схема (1.27) для уравнения (1.3) в области, не содержащей источников. Аналогичная схема используется для уравнения (1.19).

Применение явных схем очень эффективно с точки зрения распараллеливания. Воспользуемся известным методом распараллеливания по

пространству [121]. Как видно из схем, вычисление значения в точке на новом слое по времени зависит только от ближайших соседних точек на текущем и предыдущем слоях. Предлагаемый способ распараллеливания по пространству состоит в том, что общее поле вычислений размером  $NYALL \times NXALL$  точек разбивается на  $NYPAR \times NXPAR$  одинаковых частей, вычисления в которых производятся различными вычислительными ядрами (рисунок 5.6).

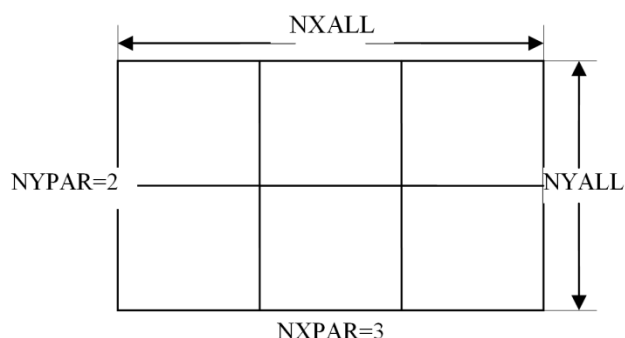


Рисунок 5.6 Разбиение поля вычислений на независимые части

Для вычисления точки на каждой границе части необходимо знать значения на соответствующей границе соседней части с предыдущего слоя по времени. Поэтому добавим с каждой стороны части строку или столбец значений соответствующей границы соседней части (рисунок 5.7).

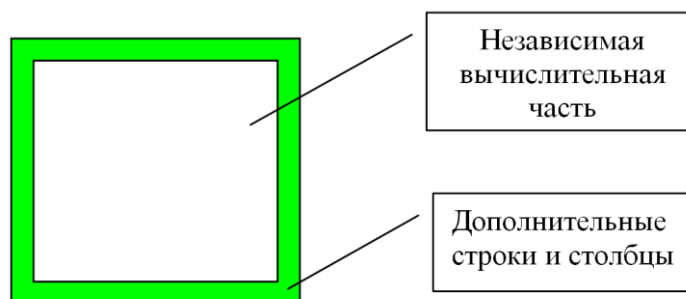


Рисунок 5.7 3 Структура области вычислений каждого процесса

Таким образом, каждый процесс выполняет вычисления для нового временного слоя во внутренней области своей выделенной части общего поля независимо от других, после чего происходит обмен граничными значениями с «соседями».

В целом, описанные выше подходы в задаче томографии теоретически

обеспечивают высокую эффективность и масштабируемость решения поставленной задачи. Первичное распараллеливание производится по слоям трехмерной томографии. Вычисления в каждом таком слое могут быть распараллелены по различным источникам сигнала, которые в свою очередь могут быть разбиты на независимые вычислительные части (рисунок 5.8).

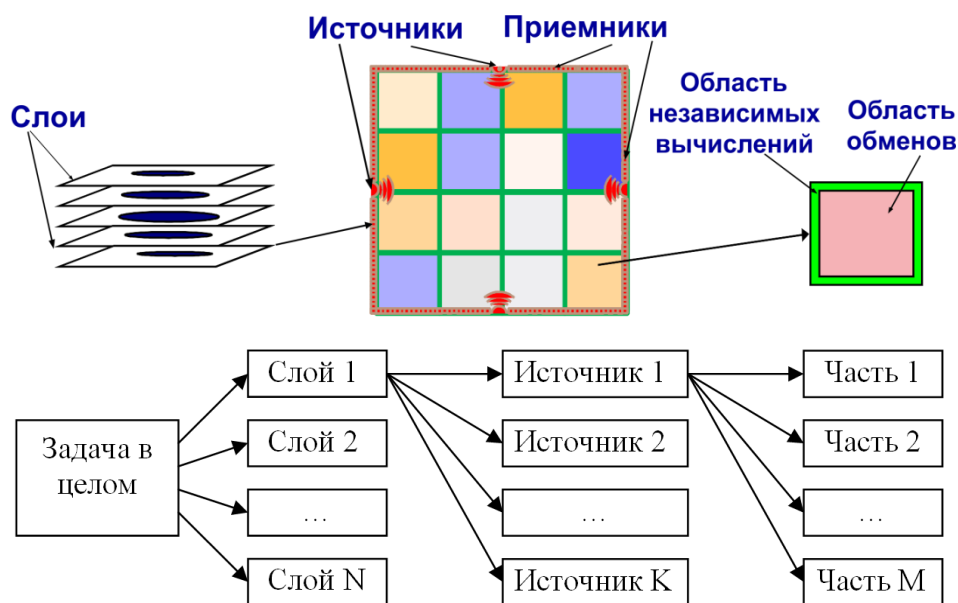


Рисунок 5.8 Схема распараллеливания

При решении реальных задач ультразвуковой томографии размер вычислительной сетки может достигать нескольких тысяч точек по каждой координате, количество источников – нескольких десятков, количество слоев – нескольких десятков. Вычислительные ресурсы (память, вычислительная мощность) необходимые для решения такой задачи в разумные сроки многократно превышают возможности отдельно взятого вычислительного ядра. Программа с предлагаемой архитектурой хорошо масштабируема и позволяет практически неограниченно наращивать ресурсы вычислительного кластера. Например, если требуется произвести расчеты на сетке  $2048 \times 2048$  точек в 50 слоях при наличии 8 источников излучения, используемый подход к распараллеливанию вычислений позволяет легко масштабировать вычисления, меняя количество вычислительных частей для расчета каждого слоя. При разбиении слоя на 16 частей по координатам X и Y получаем распараллеливание

задачи на  $50 \times 8 \times 16 \times 16 = 102400$  процессов. Однако, с тем же успехом, можно разбить слой на 8 частей по координате X и Y. В таком случае мы получаем число задействованных процессоров  $50 \times 8 \times 8 \times 8 = 25600$  соответственно. Таким образом, предложенная схема распараллеливания позволяет свободно маневрировать, меняя соотношение время расчета/используемые ресурсы для достижения максимальной эффективности даже для очень большого числа процессов.

### 5.1.3 Оптимизация процедуры параллельных вычислений на слое

Как видно из архитектуры программы, распараллеливание по слоям и источникам достаточно очевидно и его высокая эффективность не вызывает сомнения. Поэтому более подробно рассмотрим распараллеливание процесса вычислений в отдельно взятом томографическом слое при фиксированном положении источника. Для нахождения градиента согласно (1.22) необходимо знание полей  $u(r,t)$  и  $w(r,t)$  в любой точке слоя  $r$  в каждый момент времени из заданного диапазона  $(0, T)$ . Из структуры алгоритма следует, что для этого необходимо провести вычисление  $u(r,t)$  в «прямом» времени, а затем, используя полученные граничные значения, провести вычисление  $w(r,t)$  в «обратном» времени. На первый взгляд кажется естественным сохранять значения  $u(r,t)$  при расчете в «прямом» времени, чтобы далее использовать их при расчете градиента. Однако, оценим необходимый объем памяти для сохранения  $u(r,t)$ . Если отдельный процесс проводит вычисления на прямоугольной области размера  $N_x \times N_y$  точек с количеством слоев по времени  $N_t$ , то необходимо хранить  $N_x \times N_y \times N_t$  - значений типа *double*.  $N_t$  - обычно раза в 3 больше  $N_x$  - количества точек вдоль одной оси на всей области расчетов задачи. Кроме того, для областей, прилегающих к границе всего томографического слоя, необходимо хранить экспериментальные данные задачи на границе. С учетом всех накладных расходов это приводило к тому, что для вычислительных узлов с памятью  $\sim 1$  Гб и размером томографического слоя  $1000 \times 1000$  точек, требовалось разбивать весь

слой минимум на  $7 \times 7$  вычислительных частей, для того чтобы данные одной части поместились в память одного вычислительного узла кластера. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация, когда задача может решаться только на большом числе процессов, что не всегда приемлемо.

Для преодоления этой проблемы был предложен алгоритм, при котором поле  $u(r,t)$  не сохраняется при прямом проходе, а сохраняются только граничные значения. При расчетах в «обратном» времени поля  $w(r,t)$ , одновременно вычисляем  $u(r,t)$  в «обратном» времени, используя сохраненные граничные значения. Такая схема расчетов приводит к увеличению количества вычислений на  $\sim 30-50\%$ , однако позволяет свободно маневрировать с имеющимися вычислительными узлами.

Возможность корректного вычисления  $u(r,t)$  в «обратном» времени по сохраненным граничным значениям легко следует из следующих соображений. Пусть задан вектор  $u_{ijk}$ , где  $i=0, \dots, N_x$ ,  $j=0, \dots, N_y$ ,  $k=0, 1, 2$ , причем для всех внутренних точек выполняется соотношение (1.27). Зададим вектор  $v_{ijk}$ , где  $i=0, \dots, N_x$ ,  $j=0, \dots, N_y$ ,  $k=0, 1, 2$ , причем пусть  $v_{ijk} = u_{ijk}$  при  $k=1, 2$ , а также при выполнении хотя бы одного условия  $(i=0)$ ,  $(i=N_x)$ ,  $(j=0)$ ,  $(j=N_y)$ . Пусть для всех внутренних точек  $v_{ijk}$  выполняется соотношение аналогичное (1.27). Тогда  $v_{ijk} = u_{ijk}$  во всех точках.

Как мы писали выше, для распараллеливания вычислений в отдельном слое использовался метод распараллеливания по пространству, который состоит в том, что общее поле вычислений размером  $NYALL \times NXALL$  точек матрицы разбивается на  $NYPAR \times NXPAR = M$  частей-блоков размером  $Nxbl \times Nybl$ , вычисления в которых производятся различными вычислительными ядрами параллельно ( $M$  - ядер) (рисунок 5.6).

Один из основных принципов разбиения на блоки состоит в выравнивании загрузки процессов. Для минимизации времени ожидания процессом данных с соседних процессов расчёты всех блоков должны быть завершены синхронно, поэтому следует разбивать матрицу на блоки с равным объёмом вычислений. В

нашем случае явной разностной схемы, одинаковой во всех точках, используем простейший вариант разбиения на блоки одинакового размера.

Для минимизации межпроцессорных обменов следует минимизировать периметр блоков (в данном случае периметр равен  $2(Ny_{bl} + Nx_{bl})$  по отношению к их площади (в данном случае площадь равна  $Ny_{bl} * Nx_{bl}$ ). Как известно, минимум периметра у прямоугольника заданной площади достигается при  $Ny_{bl} = Nx_{bl}$ . Это требование было проверено экспериментально на модельных задачах. Для этого были проведены эксперименты на сетках размером  $502 \times 502$  и  $1002 \times 1002$ , результаты которых приведены в таблице 5.1 и 5.2. В верхней строке указаны значения  $NXPAR \times NYPAR$  для различных разбиений матрицы по процессам, в нижней - время расчета 10 итераций. При перестановке значений  $NXPAR$  и  $NYPAR$  результат не меняется. Из данных таблиц видно, что чем ближе значения  $NXPAR$  и  $NYPAR$  друг к другу, тем меньше время счета.

Таблица 5.1 Сравнение вариантов разбиения сетки,  
размер сетки –  $502 \times 502$ , число процессов 36

Разбиение матрицы	1×36	2×18	3×12	6×6
Время, с	83	59	55	49

Таблица 5.2 Сравнение вариантов разбиения сетки,  
размер сетки –  $1002 \times 1002$ , число процессов 64

Разбиение матрицы	1×64	2×32	4×16	8×8
Время, с	692	386	254	220

#### 5.1.4 Исследование масштабируемости программы 2D волновой томографии

Исследуем масштабируемость программы, после чего определим и реализуем способы оптимизации MPI-коммуникаций для улучшения масштабируемости.



Основными параметрами, которые могут влиять на время работы программы, являются (рисунок 5.6): NXALL и NYALL – размеры двумерной сетки, на которой происходят вычисления всей задачи в слое; NXPAR и NYPAR – число областей разбиения сетки слоя по каждому измерению; NITER\_SOU – число различных положений источника в слое. Вычисления в каждой области выполняются в рамках отдельного процесса. При этом общее число процессов, используемое при выполнении программы в слое, должно быть равно  $NITER\_SOU \times NXPAR \times NYPAR$ .

Без ограничения общности, пусть число положений источника далее всегда равно 4 ( $NITER\_SOU=4$ ). Все дальнейшие исследования и замеры времени выполняются для 10 итераций итерационного процесса решения обратной задачи в одном слое. Значения NXALL и NYALL совпадают и равны 1002. Значения NXPAR и NYPAR также совпадают и могут варьироваться от 1 до 11. При таких значениях параметров число процессов может изменяться от  $4 = 4 \times 1 \times 1$  до  $484 = 4 \times 11 \times 11$ . Такие значения параметров близки к требуемым на практике.

Для первоначального кода программы было проведено исследование масштабируемости при выбранных значениях входных параметров. Результаты экспериментов приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 Время выполнения программы. NXALL=NYALL=1002

Число процессов	16	36	64	100	144	196	256
Время, сек	665	343	267	192	187	201	220

По результатам, приведенным в этой таблице, видно, что при увеличении числа процессов задача сначала хорошо масштабируется, однако достаточно быстро время не только перестает уменьшаться, но и начинает увеличиваться. Это означает, что накладные расходы на коммуникации начинают расти быстрее, нежели уменьшается объем вычислений, который приходится на каждый процесс. Более подробное исследование MPI-вызовов, используемых в программе,

поможет определить, почему возникают такие накладные расходы, а также найти возможные пути оптимизации.

Для исследования времени выполнения MPI-вызовов был использован профилировщик mpiP [69, 207]. Данный программный инструмент позволяет получить общее представление о структуре коммуникаций, в частности: определить процент времени по каждому процессу, который был потрачен на все MPI-вызовы, процент времени, потраченного на выполнение отдельных MPI-вызовов, объем передаваемой информации и т.д.

Результаты, полученные с помощью данного профилировщика, приведены в таблице 5.4. В строках указано: 1) число процессов, которое было использовано в программе; 2) время выполнения всей программы, в секундах; 3) доля времени выполнения всей программы, которое пришлось на обработку MPI-вызовов; 4) доля времени обработки MPI-вызовов, которое пришлось на выполнение только вызовов MPI\_Vcast.

Таблица 5.4 Данные профилировки программы. NXALL=NYALL=1002

Число процессов	16	64	144	256
Время, сек	665	267	187	220
% времени на MPI	10,4	47,6	93	92,7
% MPI_Vcast от MPI	79	97,1	98,1	95,7

Как видно из данной таблицы, при достаточно большом числе процессов на обработку MPI-вызовов тратится почти все время выполнения программы, более того, при увеличении числа процессов практически все это время затрачивается на выполнение только операций MPI\_Vcast (здесь учитываются все операции MPI\_Vcast в программе). Следующей MPI-операцией после MPI\_Vcast, которая использует больше всего времени в данной программе, является MPI\_Allreduce, однако на нее затрачивается всего несколько процентов, поэтому в первую очередь необходимо провести оптимизацию именно вызовов MPI\_Vcast.

Анализ исходного кода показывает, что MPI\_Bcast используется только в трех небольших внутренних циклах программы. Таким образом, узкое место программы локализовано. Все три цикла устроены практически одинаково:

```
for (int i = 0; i < prNumber; i++) {
    MPI_Bcast(sides[i].u,    Tx    *    sizeof(double),    MPI_BYTE,    i,
MPI_COMM_WORLD);
    <несколько аналогичных коллективных операций MPI_Bcast>},
```

где prNumber – общее число процессов;  $T_x = (NXALL-2)/NXPAR+2$ . Каждый процесс рассылает некоторый набор данных по всем остальным процессам. Отличие трех циклов заключается только в том, что в одном из них рассылается чуть бóльший объем данных, однако это отличие несущественно. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только один цикл, и все описанные преобразования будут аналогичным образом применяться к другим циклам.

Также с помощью mpiP удалось определить, что вычисления и основные коммуникации между процессами распределены достаточно равномерно – время, затрачиваемое на выполнение MPI\_Bcast, а также на сами вычисления, практически одинаковое у всех процессов. Это облегчает оптимизацию, поскольку в противном случае отдельное внимание необходимо было бы сосредоточить на оптимизации нагрузок между процессами, для того чтобы каждый процесс выполнял одинаковый объем работ.

### **5.1.5 Оптимизация программ реконструкции 2D изображений в волновой томографии**

После определения узкого места в программе, необходимо попытаться определить, можно ли и каким образом модифицировать этот фрагмент программы для того, чтобы уменьшить время его выполнения. Как было сказано ранее, в программе происходят вычисления для нескольких различных положений

источника, при этом на каждое положение выделяется одинаковое число процессов, которые предназначены для вычислений только в рамках этого положения. В данном исследовании было использовано 4 различных положения источника, соответственно, для вычислений по каждому источнику выделяется по  $prNumber/4$  процессов. В тех циклах, которые являются узким местом, в первоначальной версии программы для простоты кода проводилась рассылка граничных данных области по всем остальным процессам, включая и процессы с другим положением источника с помощью коммуникатора `MPI_COMM_WORLD`. Однако алгоритм программы устроен таким образом, что вычисления для разных источников независимы, и пересылать данных между ними не нужно.

Это приводит к *первой оптимизации*: нет необходимости делать рассылку по всем процессам, нужно передавать данные только процессам с тем же положением источника. Для реализации этого нужно создать 4 коммуникатора, по одному на каждое положение источника, и делать рассылку только по соответствующему коммуникатору. В данном случае достаточно с помощью команды `MPI_Comm_split()` разбить коммуникатор `MPI_COMM_WORLD`, после чего заменить его в циклах на новый созданный коммуникатор. Такая оптимизация реализуется просто, но позволяет сократить объем передаваемых данных в 4 раза.

Далее, из структуры алгоритма ясно, что в циклах, которые являются узким местом программы, на самом деле необходима передача данных только процессам-соседям по сетке, в то время как в действительности происходит передача всем процессам с тем же положением источника. Соответственно, для дальнейшей *второй оптимизации* программы необходимо заменить коллективную рассылку данных на рассылку только по соседям. В этом случае использование вместо `MPI_COMM_WORLD` коммуникаторов меньшего размера, что применялось при первой оптимизации, становится уже не актуальным.

Данная оптимизация немного сложнее и требует замену вызовов `MPI_Bcast` на коммуникации типа «точка-точка». Также необходимо учитывать, что число

соседей у процессов может быть разное. После внесенных изменений оптимизированный цикл выглядит следующим образом:

```

for (int i = 0; i <= 8; i++) {
    if (neighs[i] != -1) { // then send and resv
        MPI_Irecv(sides[neighs[i]].u,Tx,MPI_DOUBLE,neighs[i],0,MPI_COMM_WORL
D,
        &reqs[0]);
        <несколько аналогичных операций MPI_Irecv>
        MPI_Send(sides[nProc].u,Tx,MPI_DOUBLE,neighs[i],0,MPI_COMM_WORLD);
        <несколько аналогичных коллективных операций MPI_Send>
        int ret = MPI_Waitall(5,reqs,stats);
    }
}

```

Массив `neighs` содержит ранги процессов-соседей, с которыми текущему процессу необходимо обменяться данными. Каждый процесс инициирует асинхронный прием сообщений от всех соседей, а затем в синхронном режиме отправляет свои данные соседям. После получения и отправки всех сообщений одному процессу-соседу происходит ожидание завершения асинхронных вызовов с помощью вызова `MPI_Waitall`. В данном случае использование асинхронного приема сообщений используется для избегания тупиковых ситуаций [8].

Использование такой оптимизации позволяет значительно ускорить работу программы за счет существенного уменьшения объема передаваемых данных. Причем, если при использовании первой оптимизации объем передаваемых данных при увеличении числа процессов продолжал расти с той же скоростью, что и в изначальной, неоптимизированной версии программы, то в данном случае объем передаваемых данных увеличивается гораздо медленнее.

Сравнение первой и второй (`opt_v2`) оптимизаций программы приведено в таблице 5.5.

Таблица 5.5 Сравнение первого и второго вариантов оптимизации.

NXALL=NYALL=1002

Число процессов	144	196	256	324	400	484
Время, сек, opt_v1	118	114	120	134	148	168
Время, сек, opt_v2	82	67	62	58	59	60

Более подробные данные по выполнению MPI-вызовов приведены в таблице 5.6.

Таблица 5.6 Данные по MPI, первый и второй варианты оптимизации.

NXALL=NYALL=1002

Число процессов	196		484	
Версия программы	opt_v1	opt_v2	opt_v1	opt_v2
Время, сек	114	67	168	60
% времени на MPI	77.15	63.8	93.5	88.8
Объем передаваемых данных, байт	4.26e+11	5.54e+10	1.67e+12	9.57e+10

Анализируя результаты в таблице 5.6, можно увидеть, что при увеличении числа процессов объем передаваемых данных в варианте opt\_v2 действительно увеличивается медленнее, чем в варианте opt\_v1: на 196 процессах объем данных меньше в 7.7 раз, а на 484 процессах – уже в 17.5 раз.

Дальнейшее исследование показало, что использование синхронной передачи сообщений с помощью MPI\_Send не является оптимальным вариантом, поскольку на синхронизацию в MPI\_Send (т.е., ожидание начала передачи) тратится достаточно много времени. Это происходит из-за того, что приходится ожидать вызов MPI\_Irecv на другом процессе. Более того, после обмена сообщениями с каждым соседом из-за MPI\_Waitall приходится ожидать завершения всех приемов сообщений от данного соседа, что также требует значительного времени. Поэтому было решено провести *третью оптимизацию* (opt\_v3): использовать только асинхронный прием и передачу, а также вынести MPI\_Waitall из тела цикла. В таком случае будет использован только один вызов

MPI\_Waitall после запуска всех MPI\_Isend и MPI\_Irecv, для ожидания завершения всех операций. Измененный фрагмент выглядит следующим образом:

```

int mpi_comms = 10;
int neighs_num = 9;
int neigh_count = 0;
for (int i = 0; i < neighs_num; i++) {
if (neighs[i] != -1) { // then send and resv
    MPI_Irecv(sides[neighs[i]].u,Tx,MPI_DOUBLE,neighs[i],0,MPI_COMM_WOR
LD, &reqs[mpi_comms*neigh_count+0]);
    <несколько аналогичных операций MPI_Irecv>
    MPI_Isend(sides[nProc].u,Tx,MPI_DOUBLE,neighs[i],0,MPI_COMM_WORLD
,&reqs[mpi_comms*neigh_count+5]);
    <несколько аналогичных операций MPI_Isend>
    neigh_count++;
}}
int ret = MPI_Waitall(neigh_count*mpi_comms,reqs,stats);

```

где mpi\_comms отражает число коммуникаций между двумя процессами (всего 5 вызовов MPI\_Isend и 5 вызовов MPI\_Irecv), neigh\_count – число соседей, с которыми уже были инициированы все операции приема и передачи. Данные переменные нужны для корректной работы вызова MPI\_Waitall.

Использование данного приема позволяет получить выигрыш во времени, сопоставимый с выигрышем от предыдущей оптимизации (таблица 5.7).

Таблица 5.7 Сравнение второго и третьего вариантов оптимизации.

NXALL=NYALL=1002

Число процессов	144	196	256	324	400	484
Время, сек, opt_v2	82	67	62	58	59	60
Время, сек, opt_v3	67	48	43	33	30	28

Таким образом, только изменение порядка и способа выполнения коммуникаций привело к ускорению в среднем в 1.5-2 раза. В таблице 5.8 дана информация о том, как изменились данные по выполнению MPI-вызовов.

Таблица 5.8 Данные по MPI, второй и третий варианты оптимизации.

NXALL=NYALL=1002

Число процессов	196		484	
Версия программы	opt_v2	opt_v3	opt_v2	opt_v3
Время, сек	67	48	60	28
% времени на MPI	63.8	42.5	88.8	79.05
Объем передаваемых данных, байт	5.54e+10	5.54e+10	9.57e+10	9.57e+10

Очевидно, что в данном случае объем передаваемых данных остается тем же самым. Однако доля времени выполнения всей программы, которое пришлось на обработку MPI\_вызовов, значительно снижается, что и приводит к уменьшению общего времени выполнения.

В заключении приведем сравнение всех рассмотренных вариантов программы (см. рисунок 5.9). Для варианта basic подсчитаны не все значения, поскольку время счета при увеличении числа процессов начинает существенно расти, однако увидеть общую динамику это не мешает. Видно, что в исходном варианте и после первой оптимизации при увеличении числа процессов время выполнения почти сразу начинает увеличиваться. В следующих вариантах оптимизации этого уже не наблюдается: время продолжает существенно уменьшаться и при большом числе процессов.

Все осуществленные оптимизации являются достаточно простыми и могут быть легко реализованы, однако, несмотря на простоту, они позволили ускорить работу программы на порядок, а также обеспечить сильную масштабируемость программы, то есть масштабируемости при фиксированном размере задачи.



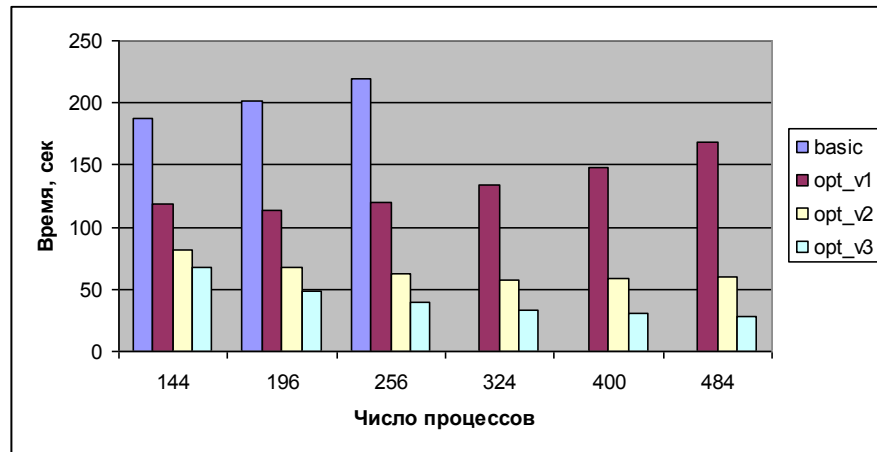


Рисунок 5.9 Сравнение исходного и оптимизированных версий программы.

$$NXALL=NYALL=1002$$

Более подробно проблемы оптимизации программ реконструкции 2D изображений в волновой томографии обсуждаются в работах [26, 76].

### 5.1.6 Исследование эффективности и производительности программ на процессорах общего назначения

Рассмотрим вопросы эффективности вычислительной системы в рассматриваемой задаче ультразвуковой томографии. Для явной, 7-точечной, 4-связной в плоскости  $(x,y)$  разностной схемы, используемой в предлагаемых алгоритмах, при разбиении на квадратные параллельно обрабатываемые вычислительными ядрами части-блоки одного слоя, возникает 4-связная сетка межпроцессорных обменов. На каждом процессоре (вычислительном ядре) для одного шага разностной схемы по времени выполняется  $\sim Nxbl^2$  арифметических операций и производится передача и приём  $\sim Nxbl$  данных в 4 направлениях, где  $Nxbl \times Nxbl$  – размер части-блока. Для обеспечения масштабируемости коммуникационная сеть кластера должна содержать, как минимум, такое же число связей, тогда все передачи данных могут выполняться параллельно.

В связи с тем, что вычисления на различных слоях и для различных источников проводятся практически независимо, то представляет интерес

исследование эффективности вычислительной системы при вычислении только на одном слое в послойной 2.5D томографической схеме. Будем рассматривать эффективность в зависимости от количества вычислительных ядер  $N_{proc}$  на один слой. При заданном размере слоя  $NXALL \times NXALL$  размер блока  $Nxbl$  связан с количеством ядер  $N_{proc}$  формулой  $Nxbl^2 = NXALL^2 / N_{proc}$ . Качественно опишем параметрическую модель процесс вычислений для нашей задачи.

Исходными параметрами, определяющими конфигурацию системы, являются:

- $V$  – объём данных одного блока,  $V = Nxbl * Nxbl = NXALL * NXALL / N_{proc}$ ;
- $Vc$  – объём кэша вычислительного узла;
- $Vm$  – объём данных, не поместившихся в кэш  $Vm = V - \min(V, Vc)$ ;
- $Vc$  – производительность вычислений в кэше (cache bandwidth);
- $Vm$  – производительность вычислений в памяти (memory bandwidth);
- $Lcomm$  – задержка распространения сообщений (comm latency);
- $Vcomm$  – производительность коммуникационной сети (comm bandwidth).

Времена выполнения одного шага явной разностной схемы для одного процесса с точностью до коэффициентов равны:

- $T_{cache} = \min(V, Vc) / Vc$  – для операций в кэше,
- $T_{mem} = Vm / Vm$  – для операций в памяти,
- $T_{comm} = 4 * Nxbl / Vcomm$  – для коммуникаций.

Общее время выполнения вычислений имеет вид

$$T(N_{proc}) = (Lcomm + Tcomm + Tcache + Tmem) * N_t, \quad (5.1)$$

где  $N_t$  – число шагов по времени разностной схемы.

Рассмотрим эффективность  $E(N_{proc})$  функционирования каждого процесса в выбранной схеме распараллеливания в зависимости от количества вычислительных ядер  $N_{proc}$  на один слой. С точностью до коэффициента эффективность можно понимать как отношение времени  $T_0(N_{proc})$  расчетов задачи на  $N_{proc}$  процессах с пиковой производительностью к времени  $T(N_{proc})$  расчета на  $N_{proc}$  процессах в выбранной схеме распараллеливания. Типично пиковой

производительностью системы является производительность вычислений в кэш-памяти.

$$E(N_{proc}) = \frac{T_0(N_{proc})}{T(N_{proc})} = \frac{K}{N_{proc} \cdot T(N_{proc})}, \quad (5.2)$$

где  $K$  – некоторый постоянный коэффициент,  $T(N_{proc})$  - из (5.1) (зависит от  $N_{proc}$ ).

На рисунке 5.10 приведено качественное поведение графика теоретической зависимости эффективности  $E$  от  $N_{proc}$ , построенное с использованием формул (5.1), (5.2) (сплошная линия), размер сетки слоя NXALL = 1002. При построении графика в модели использованы типичные значения параметров для процессоров общего назначения.

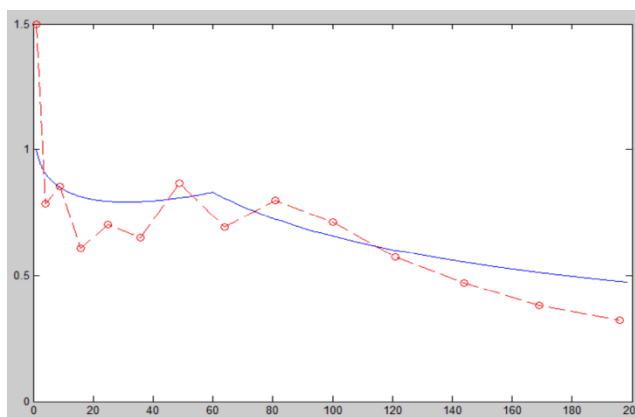


Рисунок 5.10 График зависимости эффективности  $E$  от  $N_{proc}$  на одном слое: теоретическая зависимость (сплошная линия) и экспериментальная зависимость (пунктирная линия)

Ниже в таблице 5.9 приведены результаты тестирования разработанной программы в рассматриваемой задаче ультразвуковой томографии, проведённые на суперкомпьютере «Ломоносов».

Таблица 5.9 Результаты тестирования на суперкомпьютере «Ломоносов»

Число ( $N_{proc}$ ) процессов	1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	11×11	12×12	13×13	14×14
Время (с) расчетов 15 итераций	1893	903	370	291	162	121	67	64	44	40	41	42	44	45

На основании данных приведенных в таблице 5.9, на рисунке 5.10 пунктиром приведен экспериментально полученный график эффективности в зависимости от числа процессов. Видно, что графики теоретической и экспериментальной кривых имеют похожие закономерности.

Первоначально при увеличении количества ядер на слой эффективность несколько падает, поскольку при малом количестве ядер объем обменов по границам блоков невелик (для 1 ядра на слой отсутствуют вообще). Далее эффективность начинает расти, что связано с увеличением доли вычислений в кэше. При дальнейшем увеличении числа процессов эффективность падает из-за увеличения ожидания процессом данных с соседних процессов.

Зависимость эффективности вычислений от количества процессов на слой зависит от параметров конкретной вычислительной системы. Тем не менее, существует некоторое пороговое значение количества процессов на слой (в нашей программе примерно 100 процессов), выше которого эффективность падает. Этот пик эффективности связан с расчетами в кэше. На современных вычислительных системах производительность арифметического устройства и кэш-памяти во много (10-100) раз выше производительности памяти, и соответствие размера данных размеру кэша оказывает сильное влияние на эффективность [121].

Знание этого порогового значения количества процессов в рассматриваемой задаче особенно важно в том случае, если количество доступных процессоров ограничено. Поскольку правильное распределение процессоров по слоям влияет на производительность вычислительной системы. Например, если доступно 200 вычислительных узлов, то использование их всех для вычисления на одном слое или использование менее 50 узлов на слой было бы не эффективно.

Для вычислительных систем, в которых возможно параллельное выполнение обмена данными и вычислений, использование этой возможности должно приводить к существенному повышению эффективности расчетов. Однако проведенные эксперименты с неблокирующими коммуникационными

операциями не привели к сокращению времени расчетов, что требует дополнительных исследований.

На рисунке 5.11 пунктиром приведен график функции  $1/T$ , где  $T(N_{proc})$  время расчетов  $N_{proc}$  процессов на одном слое. Этот график описывает также производительность или ускорение вычислительной системы. Как видно, производительность растет с линейной скоростью и выше вплоть до 100 процессов на слой. Далее производительность ухудшается.

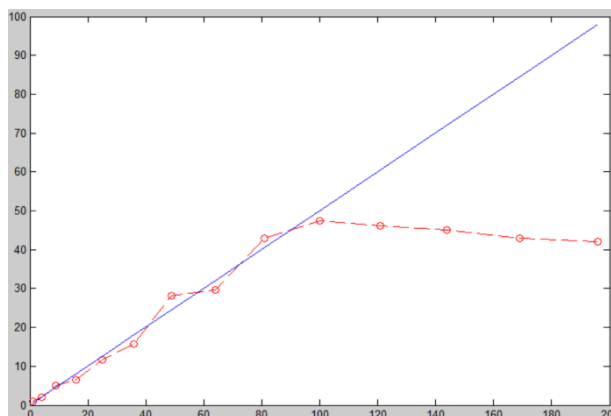


Рисунок 5.11 Зависимость производительности системы от числа процессов на один слой (пунктир)

### 5.1.7 Тестирование программы в конфигурации, обеспечивающей одновременную работу 20480 процессов

Рассматриваемая программа решения прямых и обратных задач томографической диагностики тестировалась в конфигурации, обеспечивающей одновременную работу 20480 процессов на суперкомпьютере «Ломоносов». Экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 3D объекте с модельными неоднородностями в послойной 2.5D схеме на 40 слоях. Результаты расчетов подробно описаны в разделе 1.4. Здесь остановимся на вопросах распараллеливания на суперкомпьютере в этой задаче. На рисунке 5.12 приведены только для одного слоя модельное сечение (слева) и результаты реконструкции (справа) функции скорости распространения ультразвуковой волны  $c(x, y, z)$  в исследуемом объекте как функции от  $x, y$  для

фиксированного  $z = z_i$ . Расстояние между сечениями  $z_i$  ( $i = 1, \dots, 40$ ) по оси  $z$  составляло 5 мм. Потемнение в каждой точке рисунка пропорционально  $c(x, y, z)$ . Минимальный размер неоднородности 3мм. Вариация скорости  $c(x, y, z)$  не превышала 20%. В ходе экспериментальных исследований программы решалась прямая задача распространения ультразвуковой волны в каждом слое. По полученным данным без внесения дополнительного шума решалась обратная задача восстановления функции  $c(x, y, z)$  в каждом слое. Расчет прямой и обратной задачи производился одновременно на 40 слоях. Параметры расчетной модели: длина волны излучения 5.0 мм; шаг регистрации сигналов по пространству 2.4 мм; размер области ультразвукового зондирования по горизонтали 200×200 мм, по вертикали 200 мм.

Для решения обратной задачи использовался итерационный процесс с начального приближения  $c(x, y, z) = const = c_0$  – известной скорости вне области неоднородности. Количество итераций 700, время расчета около 4 часов. За 700 итераций функционал невязки уменьшился в 10000 раз. Расчеты проводились на сетке 1000×1000 точек в 40 слоях для 8 источников излучения. Распараллеливания по пространству по координатам  $X$  и  $Y$  состояло в том, что общее поле вычислений размером 1000×1000 точек разбивалось на  $NyPar \times NxPar$  одинаковых частей ( $NyPar = 8, NxPar = 8$ ), вычисления в которых проводятся различными вычислительными ядрами. В результате получили распараллеливание задачи на  $40 \times 8 \times 8 \times 8 = 20480$  процессов. В соответствие с предыдущим разделом такое разбиение по процессам позволяет достичь высокой эффективности. Относительная эффективность распараллеливания на 20480 процессов составила около 60% (если сравнивать ускорение расчетов по отношению к расчетам на 1 вычислительном ядре).

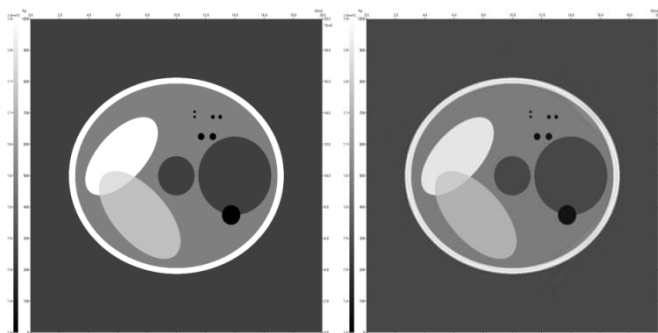


Рисунок 5.12 Слева - модельные сечения 3D объекта,  
справа - восстановленные сечения 3D объекта

**Выводы.** Раздел 5.1 посвящен проблемам использования суперкомпьютеров общего назначения в задаче волновой томографии. Приведено описание разработанного для суперкомпьютеров общего назначения на CPU комплекса программ ПОУТИМ для ультразвуковых томографических исследований в медицине. Предложена архитектура программы, позволяющая выделить несколько уровней параллелизма задачи и большое количество независимых параллельных процессов в общем потоке задачи.

Предлагаемый подход позволяет легко практически неограниченно распараллеливать вычисления. Кроме того, предложенный подход позволяет свободно маневрировать, меняя соотношение (время расчета)/(количество вычислительных узлов) для достижения максимальной эффективности.

Проведены оптимизации исходного кода, которые позволили ускорить работу программы на порядок, а также обеспечить гораздо более высокую масштабируемость. При разработке программы использована технология MPI.

Показано, что максимальная производительность каждого ядра (и производительность всей системы при ограниченном количестве ядер) достигается при определенном значении количества процессов на слой  $N_{proc} = N_{opt}$ , которое может быть определено для конкретной системы. При отклонении  $N_{proc}$  от оптимального значения, как в большую, так и в меньшую сторону, эффективность будет падать. Исходя из этого, следует сначала выбирать  $N_{proc}$ , а затем, исходя из имеющихся ресурсов системы, выбирать число параллельно рассчитываемых на системе слоев.

Продемонстрирована возможность эффективного использования разработанного программного обеспечения для большого числа процессоров. Программа обеспечивает высокий уровень масштабирования для нескольких десятков тысяч процессов кластерной вычислительной системы «Ломоносов».

Как показали результаты многочисленных расчетов на вычислительных системах общего назначения НИВЦ МГУ «Чебышев» и «Ломоносов», структура программы достаточно эффективно ложится на эти кластерные системы.

## **5.2 Возможности GPU-кластеров для решения обратных задач волновой томографии**

В предыдущем разделе проведены исследования применения суперкомпьютерных кластеров на процессорах общего назначения для решения обратных задач волновой томографии в послойных моделях. Однако, ввиду большой размерности рассматриваемых обратных задач, особенно в трехмерном случае, их решение под силу только достаточно мощным суперкомпьютерам общего назначения. Такой суперкомпьютер, способный производить несколько расчётов трёхмерных задач в день при эксплуатации томографического комплекса, будет крайне дорогим и громоздким. Расчёты с использованием процессоров общего назначения удобно производить на мощных суперкомпьютерах на этапе математического моделирования.

Высокопроизводительные вычисления немислимы без параллельных архитектур [25]. Графические процессоры стали первой широкодоступной архитектурой, в которой применяется массовый параллелизм. Благодаря огромным объёмам выпуска и, следовательно, низкой цене, они стали оптимальным решением для широкого круга вычислительных задач. Из распространённых на сегодня систем графические процессоры имеют самую низкую стоимость в пересчёте на один ТФлопс пиковой производительности вычислений, и находятся на первых местах по энергоэффективности. Всё это делает GPU привлекательным средством для построения параллельных вычислительных систем, от мощных персональных компьютеров, оснащённых несколькими графическими ускорителями, до суперкомпьютеров с тысячами вычислительных узлов. Последние модели графических карт объединяют на одной плате по два GPU-устройства, что позволяет установить даже в



относительно недорогой персональный компьютер до четырёх устройств. Вычислительная конфигурация необходимая для решения задач ультразвуковой томографии может быть реализована в рамках одной стойки с потребляемой мощностью 10-20 кВт, что делает возможным установку небольших, но высокопроизводительных суперкомпьютеров непосредственно в медицинских учреждениях и решение задач ультразвуковой томографии на практике за приемлемое для медицинских исследований время.

В настоящее время графические процессоры успешно применяются для ускорения расчётов в различных областях науки [5]. Суперкомпьютеры на графических процессорах уже использовались для решения задач УЗ томографии при восстановлении трехмерных объектов по двумерным сечениям. [186]. Всё большее распространение приобретают относительно мощные многопользовательские графические суперкомпьютерные комплексы [175]. Такой комплекс используется как для реконструкции томографических изображений, так и для проведения исследований с использованием полученных данных, например, их классификации и т.д. [124]. Суперкомпьютерный комплекс может включать структуру, используемую для реконструкции изображений, как подмножество.

В разделе 5.2 впервые исследованы методы и подходы применения GPU-кластеров в решении обратных задач волновой томографии. Приведено общее описание разработанного для ультразвуковых томографических исследований в медицине комплекса программ для кластеров на графических картах.

### **5.2.1 Общее описание комплекса программ решения прямой и обратной 3D задачи ультразвуковой томографии на GPU суперкомпьютерах**

В диссертации разработан и реализован комплекс программ для кластеров на графических картах для 3D ультразвуковых томографических исследований в медицине. Комплекс программ осуществляет решение как прямой, так и обратной задачи. Программы написаны на языке C++. Для программирования GPU

используется интерфейс OpenCL, для обмена данными между узлами - интерфейс MPI. Число запускаемых процессов MPI должно соответствовать числу используемых GPU процессоров, а число источников в задаче должно совпадать с количеством GPU процессоров (или быть кратно). Программа выполняется в ОС Linux 64bit суперкомпьютера «Ломоносов». Настройки компиляции на суперкомпьютере «Ломоносов» использовались следующие:

```
mpicxx -fpack-struct=1 -I/opt/old-opt/software/cuda/include -w1,-L/opt/old-opt/software/cuda_drv,libOpenCL.so
```

При отсутствии файлов экспериментальных данных out/Ex\* программа автоматически решает прямую задачу. Выходными данными решения прямой задачи являются акустическое давление  $u$  на приёмниках как функция от времени.

Эти данные используются в качестве входных экспериментальных данных для решения обратной задачи. Выходными данными при решении обратной задачи является массив скоростного разреза. Скоростной разрез выдается в нескольких сечениях для каждой итерации, трёхмерная функция текущего приближения скоростного разреза сохраняется и обновляется в файле restart.dat рабочего каталога. Таким образом, вычисления могут быть остановлены и затем продолжены.

При запуске программы решения обратной задачи можно задать следующие входные параметры (в противном случае берутся значения по умолчанию):

-maxi n. – Макс. количество итераций n, по достижении которого расчёт заканчивается.

Расчёт также может быть остановлен на текущей итерации созданием файла с именем "stop" в рабочем каталоге.

-size x,y,z. – Размер расчётной области в точках по x,y,z.

-rcv x,n. – Размер куба x (в точках сетки), на котором расположены приёмники, и расстояние n между приёмниками в точках сетки.

-phys x,y,z. – Физический размер области в миллиметрах, вместе с -size определяет шаг сетки.

-imp beg, end. – Начало beg и конец импульса end в микросекундах.

-mixt  $t_0$ ,  $dt$ . – Начальный момент времени  $t_0$  и промежуток времени  $dt$  (в шагах по времени).

-v0  $v$ . – Скорость звука в окружающей объект среде  $v$ , км/с.

-dtdx  $n$ . – Отношение шага сетки по  $x$  к шагу по времени.

-tbuf  $n$ . – Количество запоминаемых шагов по времени по отношению к размеру области в точках.

-lamd  $l$ . – Начальный шаг метода градиентного спуска.

-nsrc  $x_1, y_1, m_1, x_2, y_2, m_2, x_3, y_3, m_3$ . – Задание до трёх множеств источников в виде двумерных массивов по  $x*y$  элементов на гранях  $m$  куба.

-xsrc  $x_1, y_1, dx_1, dy_1, x_2, y_2, dx_2, dy_2, x_3, y_3, dx_3, dy_3$ . – Начальные положения  $x$ ,  $y$  и расстояния  $dx$ ,  $dy$  между элементами массивов источников -nsrc

-group  $n$ . – Число источников  $n$ , обрабатываемых на каждом GPU.

-objss  $dx, dy, dz, scale$  – положение и размер тестового объекта для прямой задачи

-velmin  $v$ . – Минимальная допустимая скорость звука в решении, км/с

-velmax  $v$ . – Максимальная допустимая скорость звука в решении, км/с

-bufmode  $n$ . – Режим хранения граничных и экспериментальных данных - оперативная память или диск.

## 5.2.2 Архитектура и особенности программирования графических процессоров

Современные GPU объединяют на одной плате несколько вычислительных ядер (или мультипроцессоров, MP), кэш-память (локальную память каждого ядра) и массив высокопроизводительной глобальной оперативной памяти, к которой имеют доступ все мультипроцессоры (рисунок 5.13). Графические процессоры NVidia типично содержат 10 – 20 мультипроцессоров. Каждый из них содержит сотни арифметико-логических устройств (АЛУ) и способен обрабатывать сотни (типично 512 – 1024) параллельных потоков, что позволяет достичь огромной пиковой производительности GPU в несколько терафлопс.

Оперативная память GPU имеет объём 1 – 4 ГБайт и пропускную способность 150 – 300 ГБайт/с, в то время как системная память (RAM), используемая обычно в компьютерах, имеет значительно более низкую пропускную способность, 8 – 15 ГБайт/с, но больший объём. Во многих задачах пропускная способность памяти является узким местом, особенно в последнее время, когда с развитием электроники производительность и количество арифметических устройств в составе процессоров растёт непропорционально быстрее производительности оперативной памяти.

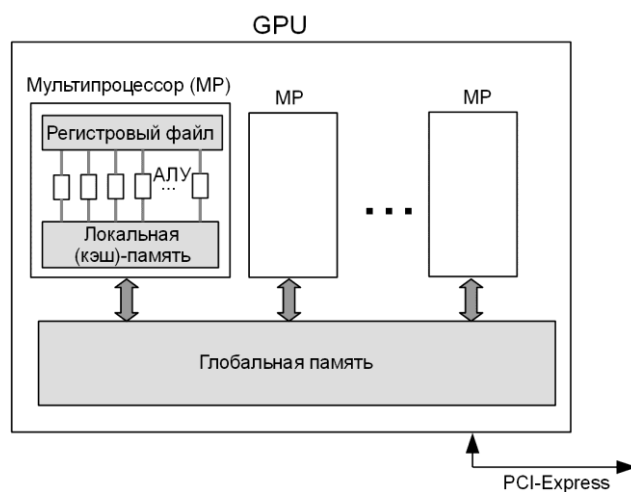


Рисунок 5.13 Блок-схема графического процессора

За счёт наличия высокопроизводительной оперативной памяти современные графические процессоры позволяют получить существенный выигрыш на data-intensive задачах, которые содержат относительно немного арифметических операций и много операций обращения в память. Именно к таким задачам относится явная разностная схема, используемая в диссертации при решении обратной задачи волновой томографии.

Однако, объём оперативной памяти, установленной на GPU, ограничен, и в случае частого обращения к системной памяти компьютера, наиболее узким местом GPU становится интерфейс PCI-Express, осуществляющий связь с компьютером. Этот интерфейс имеет относительно низкую пропускную способность (единицы ГБайт/с), что делает невыгодным выполнение на GPU задач, требующих постоянного доступа к большому объёму оперативной памяти

— большому, чем установлено на GPU. Это ограничение принято во внимание при построении алгоритма расчёта обратной задачи ультразвуковой томографии. В разработанном алгоритме время обращения к системной памяти составляет несколько процентов от общего времени вычислений.

Таким образом, задача практически уместается во внутренней оперативной памяти GPU, и только за счёт более быстрой памяти графические процессоры позволяют ускорить расчёты по сравнению с персональным компьютером теоретически в 20 – 30 раз. Реальное ускорение может достигать 50–100 раз за счёт более эффективной компиляции кода на GPU, больших регистровых файлов и т.п.

При разработке программ на GPU был использован интерфейс OpenCL, который применим для широкого класса параллельных вычислительных устройств, включая современные многоядерные процессоры. Также OpenCL позволяет легко синхронизировать работу центрального процессора и GPU.

### **5.2.3 Первый уровень распараллеливания вычислений по источникам излучения**

Как видно из постановки, в эксперименте используются различные положения источников. Суммарный градиент функционала невязки метода градиентного спуска на каждой итерации равен сумме градиентов, полученных при решении подзадачи для каждого источника. Заметим, что основной объём вычислений суммарного градиента, т.е. решение основной и «сопряженной» задач для каждого положения источника, выполняется независимо в каждой подзадаче. Это говорит о том, что структура рассматриваемого алгоритма такова, что имеется возможность эффективного распараллеливания вычислений по источникам. Предлагаемая структура вычислений предполагает, что каждая графическая карта проводит расчеты для одного источника (одной подзадачи). Обмены между картами происходят только после каждой итерации для суммирования градиентов каждой подзадачи. Это позволяет распараллелить

задачу на число узлов GPU, равное числу положений источников, практически без потерь эффективности.

Схема параллельных расчётов для нескольких источников одного шага метода градиентного спуска приведена на рисунке 5.14. Входными данными для каждой подзадачи  $i$  (для каждого источника  $i$ ) являются приближение скорости  $c_0$  на текущей итерации и экспериментальные данные для выбранного источника  $src_i$ . Далее для каждой подзадачи независимо проводится вычисление распространения волны в прямом и обратном времени на сетке размера  $n^3T$  по явной разностной схеме, где  $n$  – число точек расчетной сетки по одной координате,  $T$  – число точек сетки по времени. Выходные данные подзадачи – частичные градиенты  $grad_i$  размера  $n^3$ . Затем выходные данные каждой подзадачи  $grad_i$  необходимо просуммировать и вернуть каждой подзадаче обновленное значение скорости  $c_1$  размера  $n^3$ . Суммирование  $grad_i$  со всех узлов и раздача обратно узлам выполняется при помощи MPI. Данные, передаваемые между узлами, имеют объём менее 0.1% от размерности задачи, поэтому такое распараллеливание оказывается очень эффективным и по времени занимает менее 2% от времени расчета каждого узла. Таким образом, эффективность распараллеливания по источникам равна практически 100% для числа карт вплоть до нескольких сотен.

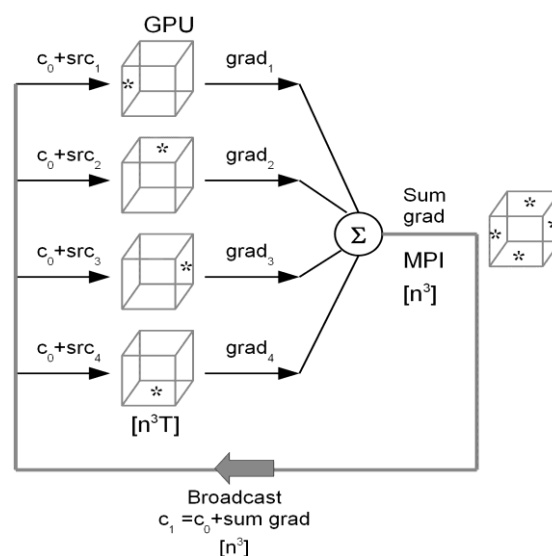


Рисунок 5.14 Схема параллельных расчётов для нескольких источников одного шага градиентного спуска

При недостаточном количестве GPU в системе на каждом GPU могут выполняться последовательно подзадачи для нескольких источников.

#### 5.2.4 Особенности второго уровня распараллеливание явной разностной схемы для одного источника

Типичный способ моделирования распространения волн во времени конечно-разностным методом на многопроцессорной системе состоит в том, что объём данных делится на области, обрабатываемые каждым процессором, и для каждого шага по времени производится обмен граничными данными между соседними процессорами (рисунок 5.15). Этот способ описан в разделе 5.1 и успешно реализован при решении задач волновой томографии на процессорах общего назначения.

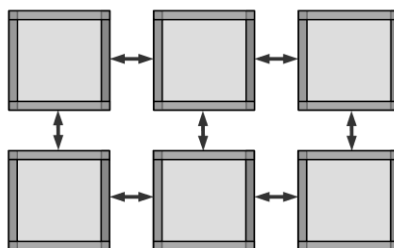


Рисунок 5.15 Распараллеливание разностной схемы на многопроцессорной системе

На графических процессорах схема расчётов с обменами граничными данными (рисунок 5.15) может быть реализована лишь между различными GPU устройствами, но не между ядрами (мультипроцессорами) в составе одного устройства. В отличие от многоядерных и многопроцессорных систем общего назначения, синхронизация и обмен данными между различными ядрами GPU как правило невозможны, поэтому для эффективного распараллеливания на GPU задача должна быть разделена на достаточно большое число полностью независимых блоков. Графические процессоры ориентированы на

распараллеливание по данным, когда каждый из блоков обрабатывает свою область данных — например, часть изображения, не пересекающуюся с другими частями. Правильное прочтение данных одним ядром, если они были записаны другим ядром, в GPU не гарантируется, поэтому выходные данные не должны пересекаться с входными данными.

Принимая во внимания эти особенности графических процессоров, можно обозначить два распространённых метода вычисления разностных схем на GPU. Первый метод состоит в записи результатов расчёта каждого шага по времени во внешнюю оперативную память. После того, как все результаты для одного шага по времени будут получены, можно начать вычисление следующего шага. Такой метод эффективен для 3D задач. Для 2D задач затраты времени на перезапись значений в памяти и перезапуск вычислений после каждого шага разностной схемы по времени оказываются очень велики, поскольку каждый поток выполняет всего лишь несколько операций, после чего завершается.

Второй метод состоит в том, что каждым потоком обрабатывается несколько ( $m$ ) шагов по времени, но при этом нужно в каждом блоке загрузить больше исходных данных — достаточных для выполнения всех  $m$  шагов (рисунок 5.16).

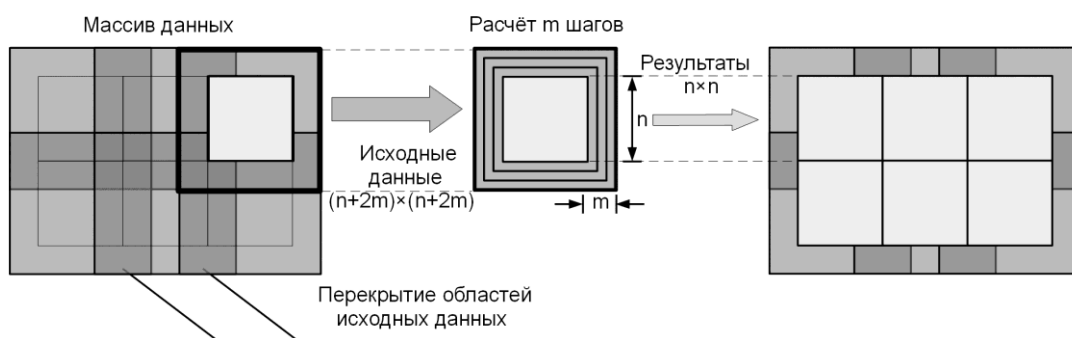


Рисунок 5.16 Распараллеливание 2D разностной схемы на GPU

При таком способе распараллеливания расчётов области выходных данных каждого блока не пересекаются, но области исходных данных пересекаются, эти пересечения приходится обчитывать повторно, и за счёт этого производительность в некоторой степени будет потеряна. Для получения  $n \times n$  результатов нужно загрузить  $(n+2m) \times (n+2m)$  исходных данных. Такой подход



может быть эффективен для 2D задач, но в 3D задачах объём данных как функция загруженного количества шагов  $A=(n+2m)^3$  растёт настолько быстро, а размер  $n$ , при котором этот объём данных уместится в локальную память GPU (её объём типично составляет 16 – 64 КБайт) настолько мал, что такой способ оказывается невыгодным — время загрузки и обчёта дополнительных данных оказывается больше времени записи одного шага по времени ( $n^3$ ) в память.

**Организация вычислений 3D обратной задачи ультразвуковой томографии на GPU кластерах.** Общее число неизвестных в обратной задаче ультразвуковой томографии в трехмерном пространстве составляет порядка  $10^8$ . Вычислительная процедура решения рассматриваемой обратной задачи имеет высокую степень параллелизма по данным, поскольку новые значения во всех точках сетки дискретизации явной разностной схемы, за исключением граничных, для нового временного слоя как в «прямой» (1.3), (1.4), так и в «сопряженной» (1.19), (1.20) задаче вычисляются по одинаковой схеме и не зависят друг от друга. Такие алгоритмы хорошо ложатся на SIMD-архитектуры (Single instruction, multiple data). Это приводит к следующей схеме распараллеливания в 3D случае.

При вычислении распространения волн  $u$  и  $w$  в 3D по явной разностной схеме трёхмерный объём данных для текущего момента времени обрабатывается последовательно по оси  $Z$ , это так называемый “z-marching” метод (рисунок 5.17). При проведении расчетов вся область размера порядка  $400 \times 400$  в плоскости  $XY$  разбивается на прямоугольные блоки размера  $32 \times 16$  точек сетки. Выбор размера блока определяется используемым типом GPU. Каждый мультипроцессор (MP) GPU обрабатывает отдельный блок  $32 \times 16 \times Z_n$  точек сетки последовательно по слоям, номер слоя увеличивается вдоль оси  $Z$  от 1 до  $Z_n$ , где  $Z_n = n$  – размер расчётной области вдоль оси  $Z$ . Обращение к данным происходит последовательно по двумерным сечениям. При использовании типичных разностных схем с шаблоном  $3 \times 3 \times 3$  точек по  $X \times Y \times Z$  на каждом шаге по оси  $Z$  загружается следующее сечение для  $z=z_0+1$  и выгружаются результаты для  $z=z_0$ . При последовательных послойных расчетах автоматически активно используются

регистры и кэш-память GPU. За счёт кэширования обращения к соседним элементам одного и того же сечения не требуют дополнительного времени. Каждый из параллельных потоков вычисляет результаты для точек  $(x,y,z)$  где  $x,y$  — фиксированы.

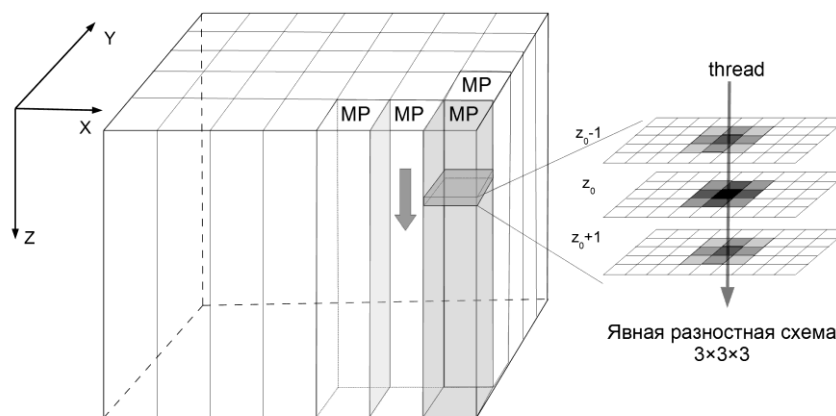


Рисунок 5.17 Последовательная обработка данных по оси Z

Для вычисления градиента по формуле (1.22) необходимы значения  $u$  и  $w$  в соответствующих точках  $(x,y,z,t)$ . Задача для  $u$  решается последовательно по времени — из значений  $u(t-2)$ ,  $u(t-1)$  вычисляется  $u(t)$ . Задача для  $w$  решается также последовательно по времени, но в обратном направлении —  $w(t)$  вычисляется из  $w(t+1)$ ,  $w(t+2)$ , экспериментальных данных  $U(t)$  и значений волнового поля  $u|_S(t)$  на границе  $S$ , где расположены детекторы. Для того, чтобы начать вычисление  $w(t)$  с последнего шага по времени  $t=T$ , необходимо вычислить сначала  $u(t)$  для всех  $t$  в диапазоне  $t_0 \leq t \leq T$ .

Вычисления осуществляются в два этапа (рисунок 5.18). На первом этапе решается задача (1.3), (1.4) с начальными условиями для  $u$ , моделируется распространение ультразвуковой волны от источника. Полученные на границе  $S$  расчётной области значения  $u|_S(t)$  запоминаются. Для гашения волн, отражённых от границы расчётной области, за границей  $S$  располагаются ещё несколько слоёв разностной сетки  $d$  с высоким поглощением. На втором этапе расчётов одновременно в обратном направлении по времени решаются задачи (1.3) для  $u$  и (1.19), (1.20) для  $w$  при заданных граничных значениях  $u|_S(t)$ , сохранённых в

памяти на первом этапе, и известных граничных условиях для  $w$ , получаемых из экспериментальных данных.

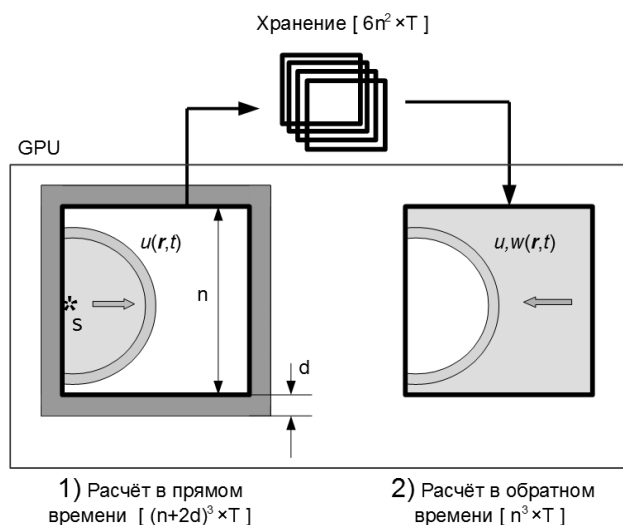


Рисунок 5.18 Схема расчётов в прямом и обратном времени

Остановимся на методах использования памяти. Общий размер граничных данных порядка  $n^2 \times T$ , где число шагов по времени  $T \sim 3 \times n$ . Кроме того, необходимо хранить данные для двух шагов по времени явной разностной схемы, размер которых порядка  $n^3$ . Таким образом, особенность алгоритма такова, что при общем размере задачи  $n^3 \times T$  необходимо хранить относительно небольшой объем данных порядка 0.1% от числа вычисляемых значений. Тем не менее, этот объем данных не помещается в памяти GPU. Поэтому используется следующий подход. В памяти GPU хранятся только данные для двух шагов по времени (размер порядка  $n^3$ ), а во внешней памяти - данные только для границ, размер которых порядка  $n^2 \times T$ . Это позволяет эффективно использовать высокую производительность графической памяти, поскольку для расчета одного нового слоя по времени используется порядка  $n^3$  данных двух предыдущих шагов по времени из памяти GPU и только порядка  $n^2$  данных из внешней системной памяти вне GPU. Ввиду малого объема данных, время обмена данными по медленному каналу с внешней памятью составляет около 2% по сравнению со временем расчетов нового слоя по времени.

Типичный суммарный объём граничных и экспериментальных данных ~5-10 Гб. Если доступный объём системной памяти невелик, то эти данные могут храниться даже на диске. В этом случае время обмена с диском сопоставимо со временем расчета слоя по времени, поэтому считывание с диска происходит параллельно расчетам. Во время обработки на GPU текущего шага по времени параллельно с диска считываются данные для следующего шага и т.д. Таким образом, запись и чтение граничных данных не оказывает влияния на производительность при типичных размерностях задачи. Выбор режима считывания с диска или из памяти выбирается пользователем до начала расчетов в зависимости от параметров задачи.

Для дальнейшего распараллеливания вычислений обрабатываемый объём данных  $N^3$  может быть разделён между несколькими графическими процессорами. При этом каждым GPU так же, как и в однопроцессорном варианте, решается задача для  $u, w$  с той лишь разницей, что данные на границе раздела массива данных должны быть переданы с другого GPU, а не из системной памяти, где хранятся данные для внешних границ расчётной области  $S$ . Передаваемый объём граничных данных остаётся в десятки раз меньшим, чем обрабатываемый на GPU объём данных, и практически не влияющим на производительность вычислений.

При использовании метода расчёта разностной схемы последовательно по оси  $Z$  (рисунок 5.17) трёхмерный массив данных делится между GPU-устройствами также по оси  $Z$  (рисунок 5.19). Тогда пересылку данных для границы раздела области можно осуществлять параллельно с расчётом внутренней части области.

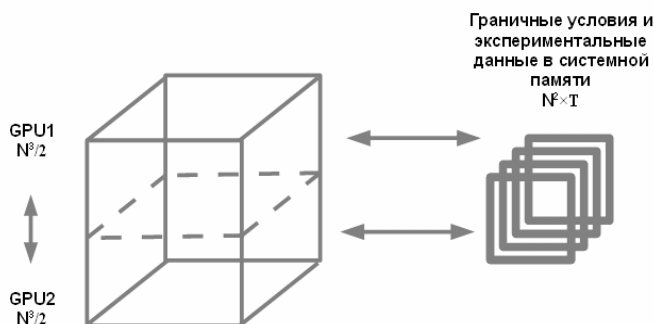


Рисунок 5.19 Схема распараллеливания расчётов для одного источника на несколько GPU

Для проведения модельных расчётов в настоящей работе использовался суперкомпьютер Суперкомпьютерного центра Московского государственного университета [37, 128]. Расчёты проводились на GPU NVIDIA Tesla X2070. Использование суперкомпьютера позволило решать обратную задачу восстановления трёхмерной функции скорости  $v(x,y,z)$  за время порядка 2 часов. Количество задействованных GPU-устройств соответствовало количеству источников ультразвука. Количество источников может достигать нескольких сотен в реальных задачах томографии в медицине. В этом случае задавая параметр программы теоретически можно использовать несколько сотен карт GPU с высокой эффективностью, поскольку объем передаваемых между узлами данных по MPI составляет менее 2% по времени.

### 5.2.5 Сравнение вычислительных возможностей кластеров на GPU и на процессорах общего назначения в задачах волновой томографии

В таблице 5.10 приведены времена расчетов на 1 GPU суперкомпьютера «Ломоносов» для 4 источников 20 итераций для размеров сетки  $500 \times 500$  и  $1000 \times 1000$  точек. Ниже приведены для сравнения результаты аналогичных расчетов на процессорах общего назначения суперкомпьютера «Ломоносов» для различных разбиений области расчетов на подобласти. Как видно, время работы одного процессора GPU совпадает со временем расчета на ~25-35 ядрах для размера сетки  $500 \times 500$  точек и на 13-20 ядрах для размера сетки  $1000 \times 1000$  точек.

Таблица 5.10 Время выполнения 20 итераций программы

Размер сетки расчетов		500×500	1000×1000
Время, сек. (GPU)		98	695
Время,	Число процессов		

сек.	$16(=4 \times 2 \times 2)$	214	
(CPU)	$144(=4 \times 6 \times 6)$	17	94
	$400(=4 \times 10 \times 10)$		22
	$784(=4 \times 14 \times 14)$		14

### 5.3 Выводы

1. Рассматриваемые в диссертации обратные задачи являются нелинейными и с вычислительной точки зрения очень сложными. Для их реализации необходимо использовать суперкомпьютеры. Суперкомпьютеры общего назначения на CPU процессорах наиболее подходят как мощное вычислительное средство для математического моделирования на этапе проектирования томографических комплексов.

2. Задачи ультразвуковой томографии в послойном 2.5D варианте можно эффективно решать как с использованием суперкомпьютеров общего назначения, так и суперкомпьютеров на GPU. Алгоритмы решения 3D задач ультразвуковой томографии непосредственно в 3D варианте, когда неизвестным являются значения искомым функций на трёхмерной сетке, с вычислительной точки зрения намного сложнее. Для эффективного решения таких задач на CPU суперкомпьютере система либо должна быть снабжена достаточным количеством каналов доступа к памяти, либо число ядер должно быть достаточным для размещения данных в кэш-памяти. Такая система будет очень громоздкой и дорогой. Поэтому наиболее перспективным направлением для выполнения таких расчётов является разработка специализированных суперкомпьютеров на GPU.

3. Для реализации 3D алгоритмов количество GPU в суперкомпьютере совпадает с количеством источников. Внутренней памяти каждого GPU должно быть достаточно, чтобы разместить все данные для одного источника – для трёх шагов по времени моделируемых ультразвуковых полей, скорости звука, поглощения и градиента. Объём этих данных составляет 2 – 2,5 Гбайт при

размерности задачи до  $400^3$  на каждом GPU. Задачу большей размерности целесообразно распараллеливать на несколько GPU для одного источника.

4. Суперкомпьютер на современных графических картах вполне уместится в одну стойку. Как показали модельные расчёты, такой суперкомпьютер обеспечивает реконструкцию скоростного разреза в трёхмерных задачах ультразвуковой томографии за время, приемлемое для медицинских исследований. Выигрыш во времени по сравнению с персональным компьютером составляет не менее 1000 раз.

5. Графические карты и суперкомпьютеры на GPU непрерывно совершенствуются. Не оставляет сомнения, что через несколько лет производительность суперкомпьютеров увеличится в несколько раз, в то время как энергопотребление станет значительно ниже. Всё это говорит в пользу применения GPU-кластеров как вычислителей в составе разрабатываемых в настоящее время ультразвуковых томографических комплексов.

## Заключение

На основании проведенной в диссертации работы можно сделать следующие выводы.

1. Основная цель диссертации, состоящая в разработке и реализации эффективных методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения нелинейных 3D задач волновой томографии в моделях, учитывающих как дифракционные эффекты, так и поглощение, успешно достигнута. Эта проблема имеет фундаментальное и прикладное значение, является актуальной и сложной в научном и вычислительном плане.

2. Осуществлена постановка прямых и обратных задач нелинейной волновой томографии как коэффициентных обратных задач в скалярных моделях гиперболического типа как для послойной 2.5D постановки, так и в 3D случае. Постановка прямых и обратных задач осуществляется в математических моделях, учитывающих как волновые эффекты дифракции, рефракции, переотражения, так и поглощение различного типа. Обратные задачи ставятся как задачи минимизации функционала невязки. Среди приложений, к наиболее перспективным задачам относится разработка принципиально новых ультразвуковых томографических комплексов диагностики рака груди.

3. Рассмотрены дифференциальный и интегральный подходы к решению обратных задач волновой томографии, проведен сравнительный анализ этих подходов. Впервые показано, что дифференциальный подход, основанный на прямом вычислении производной Фреше функционала невязки, имеет преимущества в вычислительном плане по сравнению с интегральным подходом, основанном на представлении функции Грина. Показано, что по сравнению с интегральным подходом в дифференциальном подходе в трехмерных задачах волновой томографии требуется примерно в  $N^5$  раз меньше вычислительных операций, где  $N$  - число точек по одной координате.

4. Линеаризованные приближения в интегральном подходе значительно сокращают объем вычислений, но они имеют ограниченные возможности для



сложных неоднородных сред. Однако в некоторых рассмотренных в диссертации специальных обратных задачах для систем синтезирования апертуры линеаризованные приближения позволяют восстанавливать структуру изображений с высоким разрешением. В задаче реконструкции изображения поверхности Земли с помощью РЛС с синтезированной апертурой для узкополосных источников разработанные алгоритмы позволили увеличить разрешение в сотни раз. Эффективность алгоритмов проиллюстрирована обработкой реальных данных, полученных с космического аппарата "Алмаз". Разработан комплекс программ для обработки больших массивов данных. В другой задаче синтезирования апертуры для широкополосных источников в линеаризованном интегральном подходе со специальными экспериментальными данными впервые предложен и теоретически обоснован метод обращения, позволивший эффективно решать обратную задачу в 3D.

5. Наиболее значимые результаты получены в дифференциальном подходе к решению нелинейных коэффициентных обратных задач волновой томографии. Центральным моментом построения алгоритмов в дифференциальном подходе является точное представление для производной Фреше функционала невязки. Впервые получено представление для производной Фреше для нелинейной задачи томографии в моделях, учитывающих как волновые эффекты, так и поглощение. Разработаны эффективные алгоритмы решения обратных задач, базирующиеся на возможности прямого вычисления градиента функционала невязки с помощью решения сопряженной задачи. В строгой математической постановке доказана дифференцируемость функционала невязки в нормированных пространствах.

6. Разработаны итерационные численные методы решения задач волновой томографии, которые из-за огромного объема вычислений могут быть реализованы только на суперкомпьютерах. Методы основаны на явных разностных схемах второго порядка точности и предполагают многократное решение прямой задачи распространения волн. Разработаны численные методы как на основе условий прозрачности на границе, так и с граничными условиями Неймана, получаемыми из решения внешней краевой задачи.

7. Впервые создан комплекс высокомасштабируемых программ для высокопроизводительных CPU суперкомпьютеров для решения нелинейных задач волновой томографии в послойной 2.5D схеме. С точки зрения приложений комплекс программ ориентирован на ультразвуковую томографию мягких тканей в медицине. Получено свидетельство на регистрацию программы. Впервые проведен масштабный вычислительный эксперимент на 20480 ядрах CPU суперкомпьютера по реконструкции модельной 3D неоднородности в 2.5D схеме по 40 сечениям на сетках  $1000^2$  точек, получено разрешение  $\sim 2$ мм.

8. Впервые разработаны алгоритмы и создан комплекс масштабируемых программ решения обратных задач ультразвуковой томографии для GPU-кластеров, которые по своим физическим характеристикам вполне могут входить в состав ультразвуковых томографических комплексов. Важным результатом является впервые продемонстрированная возможность решения задач волновой томографии непосредственно в 3D схеме. Проведены модельные расчеты трехмерных задач ультразвуковой томографии на сетках до  $500^3$  точек с числом неизвестных до  $10^8$ .

9. Впервые проведено полномасштабное математическое моделирование с целью определения оптимальных томографических схем функционирования ультразвуковых томографов, выбору оптимальных параметров установки, источников, приемников, длины волны, геометрии и т.д. Показано, что требуемое для медицины разрешение  $\sim 2$ -3мм при контрасте по скорости  $< 20\%$ , можно получать для сравнительно низкого диапазона частот  $\sim 0.3$ -0.5 МГц.

10. Методами математического моделирования впервые проведено исследование применимости послойных 2.5D схем в решении 3D задач ультразвуковой томографии. Продемонстрировано, что из-за волнового характера излучения задачи волновой томографии предпочтительно решать как 3D задачи. В моделях с поглощением показана возможность одновременного определения двух неизвестных функций коэффициентной обратной задачи - скорости и поглощения. Проведено сравнение различных схем волновой томографии: на отражение, на прохождение, с полными и неполными данными.

Продемонстрировано преимущество методов ультразвуковой томографии в сравнении с медицинскими УЗИ аппаратами.

### **Рекомендации по использованию результатов**

Полученные результаты позволяют рекомендовать при решении обратных задач волновой томографии использовать дифференциальный подход, основанный на прямом вычислении производной Фреше функционала невязки, поскольку он имеет преимущества в вычислительном плане по сравнению с более традиционным интегральным подходом.

При решении обратных задач волновой томографии можно рекомендовать использовать именно трехмерные модели, поскольку волновой характер излучения в пространстве лишь приближенно может быть описан в послойной модели. Проблемы, связанные с ростом объема вычислений в трехмерной модели, постепенно будут решены за счет прогресса как в методах вычислений, так и в производительности вычислительной техники.

Разработанные численные методы решения задач волновой томографии, комплексы программ и результаты математического моделирования можно рекомендовать для разработки и проектирования принципиально новых томографических комплексов — 3D ультразвуковых томографов.

Для проведения расчетов в задаче волновой томографии на этапе разработки и отладки методов, алгоритмов и проектирования томографов могут быть эффективно использованы суперкомпьютеры общего назначения. Однако из-за физических параметров их нельзя использовать в составе томографических комплексов. Для этих целей, как показано в диссертации, можно рекомендовать использовать GPU-кластеры.

Разработанные методы и алгоритмы решения обратных задач волновой томографии можно рекомендовать для применения в неразрушающем контроле промышленных изделий, инженерной сейсмике, гидроакустике и т.д. Наиболее интересным приложением развитых методов является диагностика мягких тканей в медицине, а именно дифференциальная диагностика рака молочной железы.

### Список литературы

1. Агаян Г.М., Виноградов Н.С., Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Диагностика трехмерных сред методами синтезированной апертуры // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 8, № 1, 2007. С. 154-159.
2. Агаян Г.М., Воеводин В.В., Романов С.Ю. О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 14, № 1, 2013. С. 533-542.
3. Агаян Г.М., Романов С.Ю. Моделирование на суперкомпьютере в задаче ультразвуковой диагностики с помощью аналитических решений // Научный сервис в сети Интернет: все грани параллелизма Труды Международной суперкомпьютерной конференции. Москва. 2013. С. 195-201.
4. Агаян Г.М., Романов С.Ю. Суперкомпьютерное моделирование в задаче ультразвуковой диагностики с применением аналитических подходов // Вестник УГАТУ, Т. 17, № 5(58), 2013. С. 260-269.
5. Адинец А.В., Воеводин В.В. Графический вызов суперкомпьютерам // Открытые системы, Т. 4, 2008. С. 35-41.
6. Алексеев А.С., Глинский Б.М., Собисевич А.Л. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН; Гео, Филиал изд-ва СО РАН, 2004. 387 с.
7. Антипов В.Н., Горайнов В.Т., Кулин А.Н. и др. Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенны. Москва: Радио и связь, 1988.
8. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
9. Бадалян В.Г., Базулин Е.Г., Вopilкин А.Х., Кононов Д.А., Самарин П.Ф., Тихонов Д.С. Ультразвуковая дефектометрия металлов с применением голографических методов. М: Машиностроение, 2008.

10. Базулин Е.Г. О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов // Акуст. журн., Т. 59, № 2, 2013. С. 235-254.
11. Байков С.В., Бабин Л.В., Молотилов А.М., Нейман С.И., Риман В.В., Свет В.Д., Селянин А.И. Физико-технические аспекты получения ультразвуковых изображений структур мозга через толстые кости черепа. 2. Экспериментальные исследования // Акустический журнал, Т. 49, № 4, 2003. С. 465-473.
12. Байков С.В., Молотилов А.М., Свет В.Д. Физико-технические аспекты получения ультразвуковых изображений структур головного мозга через толстые кости черепа. 1. Теоретические и модельные исследования // Акустический журнал, Т. 49, № 3, 2003. С. 332-341.
13. Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, Т. 43, № 8, 2003. С. 1201–1209.
14. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. Москва: Ленанд, 2012. 309 с.
15. Батраков Д.О., Батракова А.Г., Головин Д.В., Кравченко О.В., Почанин Г.П. Определение толщин слоев дорожной одежды методом георадиолокационного зондирования // Физические основы приборостроения, Т. 3, № 2(11), 2014. С. 46–57.
16. Белишев М.И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // ДАН СССР, Т. 297, № 3, 1987. С. 524—527.
17. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. Мат. ин-та АН СССР, Т. 115, 1971. С. 28-38.
18. Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в мягких биотканях по

- модельным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн., Т. 60, № 4, 2014. С. 443–456.
19. Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн., Т. 61, № 2, 2015. С. 254–273.
  20. Буров В.А., Шуруп А.С., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Моделирование функционального решения задачи акустической томографии для данных от квазиточечных преобразователей // Акустический журнал, Т. 59, № 3, 2013. С. 391–407.
  21. Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журн., Т. 57, № 6, 2011. С. 723-730.
  22. Ватульян А.О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Доклады Академии наук, Т. 422, № 2, 2008. С. 182-184.
  23. Виноградов Н.С., Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Об одной задаче волновой томографии // Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ: многоядерный компьютерный мир – 15 лет РФФИ: Труды Всероссийской научной конференции. Новороссийск. 2007. С. 129–133.
  24. Воеводин В., Жуматий С., Соболев С., Антонов А., Брызгалов П., Никитенко Д., Стефанов К., Воеводин В. Практика суперкомпьютера «Ломоносов» // Открытые системы. СУБД., Т. 7, 2012. С. 36-39.
  25. Воеводин В.В., Воеводин В.В. Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Петербург, 2002.
  26. Воеводин В.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Разработка высокоэффективных масштабируемых программ в задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 13, № 1, 2012. С. 307-315.

27. Гайкович П.К., Хилько А.И., Гайкович К.П. Метод многочастотной ближнеполюсной акустической томографии объёмных неоднородностей морского дна // Известия высших учебных заведений. Радиофизика, Т. 54, № 6, 2011. С. 431-443.
28. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщённые функции: выпуск 5-е изд. Москва: Гос. изд-во физико-мат. лит-ры, 1962. 656 с.
29. Глинский Б.М., Караваев Д.А., Ковалевский В.В., Мартынов В.Н. Численное моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана "гора Карабетова" вибросейсмическими методами // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 11, № 1, 2010. С. 95-104.
30. Глинский Б.М., Собисевич А.Л., Хайретдинов М.С. Опыт вибросейсмического зондирования сложно построенных геологических структур (на примере грязевого вулкана Шуго) // Докл. РАН., Т. 413, № 3, 2007. С. 1-5.
31. Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В. Об одной обратной задаче сейсмологии // Вестн. МГУ Сер. 15. Выч. мат. и киб., Т. 4, 1994. С. 16–21.
32. Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Об одной задаче волновой диагностики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., Т. 2010, № 1. С. 7–13.
33. Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Обратные задачи волновой диагностики дорожного полотна // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 10, № 1, 2009. С. 275–280.
34. Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Обратные задачи волновой диагностики дорожного полотна // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 10, № 1, 2009. С. 275-280.

35. Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Прикладное программное обеспечение для 3D ультразвуковых томографических исследований в медицине // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, № 2012618943 от 03.10.2012, РФ, ФГБОУ ВПО МГУ.
36. Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Решение задачи волновой диагностики дорог на суперкомпьютере // В кн.: Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. 2009. С. 222–229.
37. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю. Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 15, № 2, 2014. С. 274-285.
38. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А. Обратная задача акустической диагностики трехмерных сред // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 7, № 1, 2006. С. 113-121.
39. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А. Обратные задачи диагностики с синтезированной апертурой // Параллельные вычислительные технологии ПаВТ'2007 Труды международной научной конференции. Челябинск. 2007. С. 109–114.
40. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Итерационные методы решения обратных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 16, № 4, 2015. С. 464–475.
41. Гончарский А.В., Романов С.Ю. О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, Т. 52, № 2, 2012. С. 263-269.
42. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 7, № 1, 2006. С. 36-40.



43. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 12, № 1, 2011. С. 317–320.
44. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной трехмерной задаче диагностики в волновом приближении // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, Т. 40, № 9, 2000. С. 1364-1367.
45. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Разработка методов компьютерной томографии в нелинейном волновом приближении с использованием суперкомпьютеров // Научный сервис в сети Интернет: технологии параллельного программирования Труды Всероссийской научной конференции. Москва. 2006. С. 172–175.
46. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗИ-томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 13, № 1, 2012. С. 235-238.
47. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Суперкомпьютерные технологии для проектирования медицинских томографов // В кн.: Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. Москва: Издательство Московского университета, 2012. С. 42–49.
48. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. Москва: Изд-во МГУ, 1989.
49. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с.
50. Евдокимов Ю.К., Темьянов Б.К. Обратная операторная задача для гиперболических систем в акустическом зондировании // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, Т. 4-2, 2012. С. 121-125.
51. Ефимов А.В., Кудря А.И., Толстов Е.Ф. Алгоритмы обработки сигналов в сверхширокополосных РСА / В кн. «Цифровая обработка сигналов в РСА».

Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2005.

52. Золотарев В.В. Гидролокаторы с синтезированной апертурой для автономного подводного робота // Подводные исследования и робототехника, Т. 1, № 3, 2007. С. 12–20.
53. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование задачи идентификации положения полости в упругом препятствии по рассеянному звуковому полю // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки, Т. 3, 2011. С. 74-86.
54. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с.
55. Коваленко А.Г., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Решение обратной задачи диагностики дорог на реконфигурируемой вычислительной системе с применением языка COLAMO // Труды Всероссийской Суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ: масштабируемость, параллельность, эффективность». Новороссийск. 2009. С. 217–223.
56. Кокурин М.Ю. О редукции нелинейной обратной задачи для гиперболического уравнения на плоскости к линейному интегральному уравнению // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 10, № 1, 2009. С. 300-305.
57. Комаров А.А., Кондратенков Г.С.и.д. Радиолокационные станции воздушной разведки. Москва: Воениздат, 1983.
58. Кондратенков Г.С., Фролов А.Ю. Радиовидение. Радиолокационные системы дистанционного зондирования Земли: Учебное пособие для вузов. М.: «Радиотехника», 2005.
59. Кругликов А.А., Лазоренко Г.И., Шаповалов В.Л., Хакиев З.Б., Явна В.А. Компьютерное моделирование распространения акустических колебаний в насыпях железных дорог // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения, Т. 3, 2012. С. 135-140.

60. Кучунова Е.В., Садовский В.М. Численное исследование распространения сейсмических волн в блочных средах на многопроцессорных вычислительных системах // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 9, № 1, 2008. С. 66-76.
61. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980.
62. Лаврентьев М.М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР, Т. 160, № 1, 1965. С. 32-35.
63. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973.
64. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
65. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986.
66. Мансон Д.С., Джемкин У.К., Брайен Д.Д. Томографический подход к описанию принципа работы РЛС с синтезированием апертуры в режиме избирательного картографирования поверхности Земли // ТИИЭР, Т. 71, 1983. С. 1-2.
67. Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Об обратной задаче волновой диагностики дорожных покрытий // Параллельные вычислительные технологии Труды международной научной конференции. Нижний Новгород. 2009. С. 624–630.
68. Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т. 9, № 1, 2008. С. 338-345.
69. Описание средства профилировки mpip. URL: <http://mpip.sourceforge.net/>
70. Описание суперкомпьютера “Ломоносов”. URL: <http://parallel.ru/cluster/lomonosov.html>

71. Пикалов В.В., Баландин А.Л., Родионов Д.Г., Власенко М.Г., Князев Б.А. Терагерцовая томография низкоконтрастных объектов: алгоритмы и экспериментальные измерения // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика, Т. 5, № 4, 2010. С. 91-9.
72. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.
73. Романов С.Ю. Интегральный и дифференциальный подходы в задачах волновой томографии // Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее Труды 13-ой Международной суперкомпьютерной конференции. Москва. 2011. С. 80-83.
74. Романов С.Ю. Исследование томографических схем низкочастотной ультразвуковой диагностики на суперкомпьютерах // Суперкомпьютерные дни в России Труды международной конференции. Москва. 2015. С. 199–205.
75. Романов С.Ю. Исследование эффективности и масштабируемости программы решения задач ультразвуковой томографии // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений Труды Международной суперкомпьютерной конференции. Москва. 2012. С. 137–144.
76. Романов С.Ю. К вопросу об масштабируемости программы для обратной задачи волновой томографии // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, № 2-1, 2013. С. 160-167.
77. Романов С.Ю. Моделирование на суперкомпьютере в задачах волновой томографии с учетом поглощения // Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров Труды XVI Международной суперкомпьютерной конференции. Москва. 2014. С. 160–167.
78. Романов С.Ю. Моделирование на суперкомпьютере в коэффициентных обратных задачах волновой томографии с учетом поглощения // Вестник УГАТУ, Т. 19, № 1(67), 2015. С. 224–231.
79. Романов С.Ю. Решение на суперкомпьютере задач 3D нелинейной волновой томографии со сверхвысоким разрешением // Научный сервис в сети Интернет: все грани параллелизма Труды Международной

- суперкомпьютерной конференции. Москва. 2013. С. 388–394.
80. Романов С.Ю. Сравнение подходов в задачах волновой диагностики // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах Материалы XI Всероссийской конференции. Н. Новгород. 2011. С. 267–271.
  81. Смагин Н.В., Пыльнов Ю.В., Преображенский В.Л., Перно Ф. Диагностика и доплерография потоков жидкости с помощью обращения волнового фронта ультразвука // Акуст. журн., Т. 55, № 4-5, 2009. С. 653-661.
  82. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Матвиенко А.Н., Романов С.Ю. и др. Задача цифровой реконструкции изображений РЛС с синтезированной апертурой // ДАН СССР, Т. 322, № 5, 1992. С. 884-886.
  83. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. Москва: Академия, 2007.
  84. Школьный ЛА, редактор. Радиолокационные системы воздушной разведки. Дешифрирование радиолокационных изображений. Москва: Изд. ВВИА им. проф Н.Е. Жуковского, 2008.
  85. Элаши Ш., Бикнэлл Т. Радиолокационные станции с синтезированием апертуры для космической съемки поверхности планеты: области применения, методы конструкторские разработки // ТИИЭР, Т. 70, № 10, 1982. С. 44-89.
  86. Alpert B., Greengard L., Hagstrom T. Boundary Conditions for the Time-Dependent Wave Equation // Journal of Computational Physics , Vol. 180, 2002. pp. 270–296.
  87. Andre M., Wiskin J., Borup D., Johnson S., Ojeda-Fournier H., Olson L. Quantitative volumetric breast imaging with 3D inverse scatter computed tomography // Conf. Proc. IEEE Eng. Med. Biol. Soc. 2012. pp. 1110–1113.
  88. Angell T.S., Kleinman R.E., Hettlich F. The resistive and conductive problems for the exterior Helmholtz equation // SIAM J. Appl. Math., Vol. 50, 1990. pp. 1607–1622.
  89. Arnau A, editor. Piezoelectric Transducers and Applications. Springer, 2008.

P.319.

90. Ashfaq M., Ermert H., Hiltawsky K. Method and holder for spiral computer tomography using ultrasound // EP 1281354, 2003.
91. Backushinsky A., Goncharsky A., Romanov S., Seatzu S. On the identification of velocity in seismics and in acoustic sounding // Pubblicazioni dell'istituto di analisa globale e applicazioni, Serie "Problemi non ben posti ed inversi», Vol. 71, 1994.
92. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V. Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.
93. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Y., Kozlov A.I. On stable iterative methods of gradient type for the inverse medium scattering problem // Inverse Problems in Science and Engineering, Vol. 13, No. 3, 2005. pp. 203-218.
94. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Y., Smirnova A.B. Iterative Methods for Ill-Posed Problems. An Introduction. Ill-Posed Problems Series vol 54. Berlin: De Gruyter, 2011.
95. Barber B.C. Theory of digital imaging from orbital synthetic aperture radar // IJRS, Vol. 11, 1983.
96. Baysal E., D K.D., Sherwood J.W.C. Reverse time migration // Geophysics, Vol. 48, 1983. pp. 1514-1524.
97. Beilina L., Clason C. An adaptive hybrid FEM/FDM method for an inverse scattering problem in scanning acoustic microscopy // SIAM J. Sci. Comput., Vol. 28, 2006. pp. 382–402.
98. Beilina L., Johnson C. Hybrid FEM/FDM method for inverse scattering problem // In: Numerical Mathematics and Advanced Applications: Proc. ENUMATH 2001. Berlin: Springer, 2001. pp. 545–557.
99. Beilina L., Klivanov M.V., Kokurin M.Y. Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem // J. Math. Sci., Vol. 167, 2010. pp. 279–325.

100. Beilina L., Klivanov M.V. Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
101. Beilina L. Adaptive hybrid FEM/FDM methods for inverse scattering problems // *Inverse Problems Inform. Technol.*, Vol. 1, 2002. pp. 73–116.
102. Bochud N., Rus G. Probabilistic inverse problem to characterize tissue-equivalent material mechanical properties // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, Vol. 59, 2012. pp. 1443–1456.
103. Borup D.T., Johnson S.A., Kim W.W., Berggren M.J. Nonperturbative diffraction tomography via Gauss-Newton iteration applied to the scattering integral equation // *Ultrasound Imaging*, Vol. 14, 1992. pp. 69-85.
104. Bryan T.A., Holtz B.E., Perleberg G.F., Diani F.P., Hardie G.S., Robertson J.C. High-resolution three dimensional ultrasound imaging device // U.S. patent 5,673,697, 1997.
105. Cardarelli E. Seismic transmission tomography: determination of the elastic properties of building structures (some examples) // *Annali di Geofisica*, Vol. 43, 2000. pp. 1075-1089.
106. Chambers D.H., Mast J., Azevedo S.G., Wuebbeling F., Natterer F., Duric N., Littrup P.J., Holsapple E. Diagnostic analysis of ultrasound data // U.S. patent 6,984,210. 2006.
107. Chang C.H., Huang S.W., Yang H.C., Chou Y.H., Li P.C. Reconstruction of ultrasonic sound velocity and attenuation coefficient using linear arrays: clinical assessment // *Ultrasound Med. Biol.*, Vol. 33, 2007. pp. 1681–1687.
108. Chavent G. Deux resultats sur le probleme inverse dans les equations aux derivees partielles du deuxieme ordre an t et sur l'unicite de la solution du probleme inverse de la diffusion // *C. R. Acad. Sci., Paris I*, Vol. 270, 1970. pp. 25-28.
109. Chen J., Liu F., Anh V., Shen S., Liu Q., Liao C. The analytical solution and numerical solution of the fractional diffusion-wave equation with damping // *Appl. Math. Comput.*, Vol. 219, 2012. pp. 1737–1748.

110. Chen W., Holm S. Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency // *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 115, 2004. pp. 1424–1430.
111. Chen W., Holm S. Modified Szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law // *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 114, 2003. pp. 2570–74.
112. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Berlin: Springer, 1998.
113. Cox S.J., Overton M.L. Perturbing the critically damped wave equation // *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 56, 1996. pp. 1353–1362.
114. Delbos F., Gilbert J.C., Glowinski R., Sinoquet D. Constrained optimization in seismic reflection tomography: a Gauss–Newton augmented Lagrangian approach // *Geophys. J. Int.*, Vol. 164, 2006. pp. 670–684.
115. Dione D.P., Staib L.H., Smith W. Three-dimensional ultrasound computed tomography imaging system // U.S. patent 7,025,725, 2006.
116. Duric N., Littrup P., Li C., Roy O., Schmidt S., Janer R., Cheng X., Goll J., Rama O., Bey-Knight L., Greenway W. Breast ultrasound tomography: Bridging the gap to clinical practice. // *Proc. SPIE. Medical Imaging: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*, Vol. 8320, 2012. P. 83200O.
117. Duric N., Littrup P., Poulo L., Babkin A., Pevzner R., Holsapple E., Rama O., Glide C. Detection of breast cancer with ultrasound tomography: first results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) prototype // *Medical Physics*, Vol. 34, 2007. pp. 773-785.
118. Duric N., Littrup P.J., Babkin A., Chambers D., Azevedo S., Kalinin A., Pevzner R., Tokarev M., Holsapple E., Rama O., Duncan R. Development of Ultrasound Tomography for Breast Imaging: Technical Assessment // *Medical Physics*, Vol. 32, 2005. pp. 1375–1386.
119. Engquist B., Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Math. Comput.*, Vol. 31, 1977. P. 629.



120. Evans L.C. Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.
121. Foster I. Designing and building parallel programs: concepts and tools for parallel software engineering. Reading: Addison Wesley, 1995.
122. Gaul L. The influence of damping on waves and vibrations // Mech. Syst. Signal Process., Vol. 13, 1999. pp. 1–30.
123. Gemmeke H., Berger L., Birk M., Gobel G., Menshikov A., Tcherniakhovski D., Zapf M., Ruiter N.V. Hardware setup for the next generation of 3D ultrasound computer tomography // IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec., 2010. pp. 2449–2454.
124. Germain C., Breton V., Clarysse P., Gaudeau Y., Glatard T., Jeannot E., Legré Y., Loomis C., Magnin I., Montagnat J., et al. Grid-enabling medical image analysis // J Clin Monit Comput. , Vol. 19(4-5), 2005. pp. 339-349.
125. Glide C.K., Duric N., Littrup P. Novel approach to evaluating breast density utilizing ultrasound tomography // Med. Phys., Vol. 34, 2007. pp. 744–753.
126. Glide-Hurst C.K., Duric N., Littrup P. Volumetric breast density evaluation from ultrasound tomography images // Medical Physics, Vol. 35, 2008. pp. 3988-3997.
127. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // Ultrasonics, Vol. 67, 2016. pp. 136–150.
128. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // Wave Motion, Vol. 51, No. 3, 2014. pp. 389-404.
129. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Phys. Med. Biol., Vol. 59, No. 8, 2014. pp. 1979–2004.
130. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Probl., Vol. 29, No. 7, 2013. P. 075004.
131. Hanstead P.D. A new technique for ultrasonic imaging // Brit. J. NDT, Vol. 21, No. 4, 1979. pp. 212 – 213.

132. Heckel T., Brekow G., Mrasek H. Ultrasonic Testing With Matrix Arrays, Applications in Non-Destructive Testing // ECNDT. 2006. P. Th.2.6.4.
133. Hemmsen M.C., Hansen P.M., Lange T., Hansen J.M., Hansen K.L., Nielsen M.B., Jensen J.A. In vivo evaluation of synthetic aperture sequential beamforming // *Ultrasound in Med. & Biol.*, Vol. 38, No. 4, 2012. pp. 708–716.
134. Hendee W.R., Ritenour E.R. *Medical Imaging Physics*. New York: Wiley, 2002.
135. Herman GT, editor. *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications*. Berlin and New York: Springer-Verlag, 1979. 252 pp.
136. Hesse M.C., Salehi L., Schmitz G. Nonlinear simultaneous reconstruction of inhomogeneous compressibility and mass density distributions in unidirectional pulse-echo ultrasound imaging // *Phys. Med. Biol.*, Vol. 58, 2013. pp. 6163–6178.
137. Holm S., Sinkus R. A unifying fractional wave equation for compressional and shear waves // *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 127, 2010. pp. 542–548.
138. Holtzman J.C.E.A. *Radar Image simulation: validation of the point scattering method*. Kansas. 1978.
139. Hounsfield G.N. *Computed Medical Imaging // Nobel Lectures, Physiology or Medicine 1971—1980*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1992.
140. Huang L., Quan Y. Sound-speed tomography using first-arrival transmission ultrasound for a ring array // *Proc. SPIE*, Vol. 6513, 2007. P. 651306.
141. Huang L., Quan Y. Ultrasound pulse-echo imaging using the split-step Fourier propagator // *Proc. SPIE*, Vol. 6513, 2007. P. 651305.
142. Jensen J.A. *Ultrasound Imaging and Its Modelin // In: Imaging of Complex Media with Acoustic and Seismic Waves. Topics in Applied Physics. 84*. Berlin: Springer, 2002. pp. 135-166.
143. Jiřík R., Peterlík I., Fousek J., Kratochvíla J., Jan J., Zapf M., Ruitter N.V. *Synthetic Aperture Focusing in 3D Ultrasound Transmission Tomography // Proceedings of Biosignal 2010: Analysis of Biomedical Signals and Images*. Brno University of Technology. 2010.

144. Jiřík R., Peterlík I., Ruiter N., Fousek J., Dapp R., Zapf M., Jan J. Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, Vol. 59, 2012. pp. 254–264.
145. Jiřík R., Ruiter N., Jan J., Peterlík I. Regularized image reconstruction for ultrasound attenuation transmission tomography // Radioengineering, Vol. 2, 2008. pp. 125–132.
146. Johnson S.A., Berggren M., Borup D.T., Hanover B.K., Hanover R., Kammeyer M., Olsen S.C., Pattee J., Setinsek F.L., Stewart K.D., Wiskin J.W. Breast scanning system // U.S. patent 7,771,360., 2005.
147. Johnson S.A., Borup D.T., Wiskin J.W., Natterer F., Wubeling F., Zhang Y., Olsen S.C. Apparatus and method for imaging with wavefields using inverse scattering techniques // U.S. patent 6,005, 916, 1999.
148. Kabanikhin S.I., Bakanov G.V. The optimizational method for solving the discrete inverse problem for hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. , Vol. 6, No. 4, 1996. pp. 513–530.
149. Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. Direct Methods of Solving Inverse Hyperbole Problems. Utrecht: VSP, 2004.
150. Karaman M., Li P.C., O'Donnell M. Synthetic aperture imaging for small scale systems // IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control, Vol. 42, 1995. pp. 429–442.
151. Kaupp V.H., Waite W.P., MacDonald H.C. SAR simulation. Fayetteville: University of Arkansas, 1982.
152. Korneev V.A., Johnson L.R. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion. 1. Theory and numerical results // Geophys. J. Int., Vol. 115, 1993. pp. 230-250.
153. Kuzhuget A.V., Beilina L., Klibanov M.V., Sullivan A., Nguyen L., Fiddy M.A. Blind backscattering experimental data collected in the field and an approximately globally convergent inverse algorithm // Inv. Probl., Vol. 28, 2012. P. 095007.

154. Langenberg K.J., Berger M., Kreutter T., Mayer K., Schmitz V. Synthetic aperture focusing technique signal processing // *NDT International*, Vol. 19, No. 3, 1986. pp. 177-189.
155. Lavarello R.J., Oelze M.L. Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted born iterative method // *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. 28, 2009. pp. 1643–1653.
156. Li C., Duric N., Littrup P., Huang L. In vivo breast soundspeed imaging with ultrasound tomography // *Ultrasound Med. Biol.*, Vol. 35, No. 10, 2009. pp. 1615–1628.
157. Li S., Jackowski M., Dione D.P., Varslot T., Staib L.H., Mueller K. Refraction corrected transmission ultrasound computed tomography for application in breast imaging // *Med. Phys.*, Vol. 37, 2010. pp. 2233-2246.
158. Madsen E.L., Sathoff H.J., Zagzebski J.A. Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tissue like materials // *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 74, 1983. pp. 1346–55.
159. Magginess M.G., Kay L. Ultrasonic imaging in solids // *Radio a. Electron. Engine.*, Vol. 41, No. 2, 1971. pp. 91–93.
160. Maia N.M., Silva J.M., Ribeiro A.M. On a general model for damping // *J. Sound Vib.*, Vol. 218, 1998. pp. 749–767.
161. Mokhtari-Dizaji M., Vahed M., Gity M. The application of discriminant analysis in differentiation of fibroadenoma and ductal carcinoma of breast tissue using ultrasound velocity measurement // *Iran. J. Radiat. Res.*, Vol. 1, No. 3, 2003. P. 163.
162. Murphy G.E., Amoco B.P., Gray S.H. Manual seismic reflection tomography // *Geophysics*, Vol. 64, 1999. pp. 1546-1552.
163. Naili S., Vu M.B., Grimal Q., Talmant M., Desceliers C., Soize C., Haiat G. Influence of viscoelastic and viscous absorption on ultrasonic wave propagation in cortical bone: application to axial transmission // *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 127, 2010. pp. 2622–2634.

164. Natterer F., Sielschott H., Dorn O., Dierkes T., Palamodov V. Fréchet Derivatives for Some Bilinear Inverse Problems // *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 62, No. 6, 2002. pp. 2092–2113.
165. Natterer F., Wubbeling F. A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography // *Inverse Problems*, Vol. 11, 1995. pp. 1225-1232.
166. Natterer F. Acoustic mammography in the time domain *Inst. Appl. Math. Preprint* 2008. URL: [www.math.uni-muenster.de/num/Preprints/files/80.pdf](http://www.math.uni-muenster.de/num/Preprints/files/80.pdf)
167. Natterer F. An algorithm for 3D ultrasound tomography *Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction // Lecture Notes in Physics*, Vol. 486, 1997. pp. 216–225.
168. Natterer F. Incomplete data problems in wave equation imaging // *Inverse Problems Imaging*, Vol. 4, 2010. pp. 685–691.
169. Natterer F. Numerical Solution of Bilinear Inverse Problems // *Preprints "Angewandte mathematik und informatik" Munster*. 1996. No. 19/96-N.
170. Natterer F. Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // In: *Contemporary Mathematics*. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society, 2011. pp. 151–162.
171. Natterer F. Reflectors in wave equation imaging // *Wave Motion*, Vol. 45, 2008. pp. 776–784.
172. Natterer F. Sonic Imaging // In: *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. New York: Springer-Verlag, 2015. pp. 1253–1278.
173. Natterer F. Ultrasonic image reconstruction via plane wave stacking: Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging. Technical Report, Fachbereich Mathematik und Informatik, (), Munster, 2005.
174. Natterer F. Ultrasound mammography with a mirror // *Phys. Med. Biol.*, Vol. 55, 2010. P. N275.
175. NVidia Grid: виртуализированное графическое ускорение URL: <http://www.nvidia.ru/object/nvidia-grid-ru.html>

176. Oliver C.J. Review article. Synthetic - aperture radar imaging // J.Phys. D: Appl. Phys., Vol. 22, 1989. pp. 871 - 890.
177. Pestov L.N., Bolgova V.M., Danilin A.N. Numerical recovering of a speed of sound by the bc-method in 3D // Acoustical Imaging, Vol. 31, 2012. pp. 201-209.
178. Pestov L.N. On reconstruction of the speed of sound from a part of boundary // Journal of inverse and ill-posed problems, Vol. 7, No. 5, 1999. pp. 481–486.
179. Pestov L. On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Vol. 22, No. 2, 2014. pp. 245–250.
180. Pike R., Sabatier P. Scattering: scattering and inverse scattering in pure and applied science. San Diego: Academic Press, 2008.
181. Pratt R.G., Huang L., Duric N., Littrup P. Sound-speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data // Proc. SPIE. 6510 Medical Imaging: Physics of Medical Imaging, Vol. 6510, 2007. P. 65104S.
182. Proceedings of the 1988. IEEE National Radar Conference. Ann Arbor Michigan. 1988.
183. Quan Y.L., Harris J.M. Seismic attenuation tomography using the frequency shift method // Geophysics, Vol. 62, 1997. pp. 895–905.
184. Ramm A.G. Multidimensional Inverse Scattering Problems. London: Longman Group, 1992.
185. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. Inverse Problems for Maxwell's Equations. Utrecht: VSP, 1994.
186. Roy O., Jovanovic I., Hormati A., Parhizkar R., Vetterli M. Sound Speed Estimation Using Wave-based Ultrasound Tomography: Theory and GPU Implementation // Proc. SPIE , Medical Imaging 2010: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy, Vol. 7629, 2010. P. 76290J.
187. Royer D., Dieulesaint E. Elastic Waves in Solids:I. Berlin: Springer, 1996.

188. Ruitter N.V., Schwarzenberg G.F., Zapf M., Menshikov A., Gemmeke H. Results of an experimental study for 3D ultrasound CT. Vol 1. // In: NAG/DAGA Int. Conf. on Acoustics. 2009. pp. 305–309.
189. Sanpanich A., Greesuradej P., Aootaphao S., Pintavirooj C., Sangworasil M., Tosranon P. 3D ultrasonic reflection tomography with matrix linear array transducer // "The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering". Bangkok. 2008. pp. 351-355.
190. Scherzinger A.L., Belgam R.A., Carson P.L., Meyer C.R., Sutherland J.V., Bookstein F.L., Silver T.M. Assessment of ultrasonic computed tomography in symptomatic breast patients by discriminant analysis // *Ultrasound Med. Biol.*, Vol. 15, 1989. pp. 21–28.
191. Schickert M., Krause M., Muller W. Ultrasonic Imaging of Concrete Elements Using Reconstruction by Synthetic Aperture Focusing Technique // *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol. 15, No. 3, 2003. pp. 235-246.
192. Schiffner M.F., Schmitz G. Plane Wave Pulse-Echo Ultrasound Diffraction Tomography with a Fixed Linear Transducer Array // *Acoustical Imaging*, Vol. 31, 2012. pp. 19-30.
193. Schmidt S., Duric N., Li C., Roy O., Huang Z.F. Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for acoustic imaging of media and application to tomographic imaging of the breast // *Med. Phys.*, T. 38, 2011. C. 998-1007.
194. Sherwin C.W., Ruina J.P., Rawcliffe D. Some early developments in synthetic aperture radar systems. : // *IRE Trans Mil Elect ; MIL-62*, 1962. pp. 111–115.
195. Shialin W.U. A digital fast correlation approach to produce SIASAT SAR imagery // In: *IEEE Inter. radar conf.* Arlington. 1980. pp. 153-160.
196. Shutilov V.A. *Fundamental Physics of Ultrasound*. New York: Gordon and Breach, 1988.
197. Stotzka R., Kaiser W.A., Gemmeke H. Ultrasonic tomograph // *US 6,786,868*,

- 2004.
198. Stotzka R., Ruiter N.V., Mueller T.O., Liu R., Gemmeke H. High resolution image reconstruction in ultrasound computer tomography using deconvolution // Proc. SPIE, Vol. 5750, 2005. pp. 315–325.
  199. Szabo T. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 96, 1994. pp. 491–500.
  200. Thomson R. Transverse and longitudinal resolution of the synthetic aperture focusing technique // Ultrasonics, Vol. 22, 1984. pp. 9–15.
  201. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Dordrecht: Kluwer, 1995.
  202. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. New York: Dover, 1990.
  203. Tonn R. The determination of the seismic quality factor-Q from Vsp data—a comparison of different computational methods // Geophys. Prospect., Vol. 39, 1991. pp. 1–27.
  204. Treeby B.E., Cox B.T. Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional Laplacian // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 127, 2010. pp. 2741–2748.
  205. vanDongen K.W.A., Wright W.M.D. A forward model and conjugate gradient inversion technique for low-frequency ultrasonic imaging // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 120, No. 4, 2006. pp. 2086–2095.
  206. Varadan V.V., Ma Y., Varadan V.K., Lakhtakia A. Scattering of waves by spheres and cylinders // In: Field representations and Introduction to Scattering. Amsterdam (North-Holland). 1991. pp. 211-324.
  207. Vetter J.S., McCracken M.O. Statistical scalability analysis of communication operations in distributed applications // In: Proc. of the 8th ACM SIGPLAN Symp. on Principles and Practice of Parallel Programming (PPOPP-2001). New York: ACM, 2001. pp. 123–132.



208. Vunson D.C., Visentin R.L. A Signal Processing View of Strip-Mapping Synthetic Aperture Radar // IEEE, Vol. 37, No. 12, 1989.
209. Waters K.R., Mobely J., Miller J.G. Causality-imposed (Kramers–Kronig) relationships between attenuation and dispersion // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, Vol. 52, 2005. pp. 822–833.
210. Weiwad W., Heinig A., Goetz L., Hartmann H., Lampe D., Buchmann J., Millner R., Spielmann R., Heywang-Koebrunner S.H. Direct measurement of sound velocity in various specimens of breast tissue // Invest. Radiol., Vol. 35, 2000. P. 21.
211. Wiskin J., Borup D., Andre M., Johnson S., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J. Three-dimensional nonlinear inverse scattering: Quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 133, 2013. P. 3229.
212. Wiskin J., Borup D., Johnson S., Berggren M., Robinson D., Smith J., Chen J., Parisky Y., Klock J. Inverse scattering and refraction corrected reflection for breast cancer imaging // Proc. SPIE. 2010. Vol. 7629, Medical Imaging 2010: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. P. 76290K.
213. Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M., Abbott T., Hanover R. Full wave non-linear inverse scattering // In: Acoustical Imaging vol 28 ed M Andre. Dordrecht: Springer, 2007. pp. 183–193.
214. Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M. Non-linear inverse scattering: High resolution quantitative breast tissue tomography // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 131, No. 5, 2012. pp. 3802-3813.
215. Yilmaz O. Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data (Investigations in Geophysics vol 10). Tulsa, OK: Society of Exploration Geophysicists, 2001.