МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Горницкий Андрей Александрович

СУЩЕСТВЕННЫЕ СИГНАТУРЫ И МОНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Специальность 01.01.06 —
«математическая логика, алгебра и теория чисел»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент Д.А. Тимашев

Москва — 2019

Оглавление

Введение

В теории представлений простых комплексных групп и алгебр Ли важной задачей является построение "хороших" базисов в неприводимых конечномерных представлениях. Однако здесь возникает вопрос, какие базисы считать хорошими. Примером "хороших" базисов (хоть и не для простой, а для редуктивной группы Ли) могут служить базисы Гельфанда-Цейтлина (см., например, [3, Глава X, §67]).

Как известно, неприводимые рациональные представления группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ задаются наборами из n целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n)$. При ограничении такого представления на подгруппу $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$, вложенную уголком в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, представление распадается в сумму неприводимых представлений $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$, каждое из которых встречается в разложении однократно. Продолжая этот процесс, то есть ограничивая полученные неприводимые представления для $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ на $\mathrm{GL}_{n-2}(\mathbb{C})$ и т.д., мы получим разложение пространства представления в сумму неприводимых представлений $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, то есть одномерных подпространств. Выбирая в каждом таком подпространстве по вектору, мы получаем *базис Гельфанда-Цейтлина* для представления, задаваемого набором λ. В результате все базисные векторы являются собственными для максимального тора $T \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и параметризуются таблицами целых чисел, которые называются *таблицами Гельфанда-Цейтлина* и имеют следующий вид:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\lambda_{n,1} & & \lambda_{n,2} & & \ldots & & \lambda_{n,n} \\
& \lambda_{n-1,1} & & \ldots & & \lambda_{n-1,n-1} & \\
& & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
& & \lambda_{2,1} & & \lambda_{2,2} & & \\
& & & \lambda_{1,1} & & &
\end{array}
$$

где на числа в таблице наложены следующие условия:

$$\lambda_{k,i} \geq \lambda_{k-1,i} \geq \lambda_{k,i+1}, \qquad i = 1, \ldots, k-1.$$

Здесь набор $(\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,k})$, $k = 1, \ldots, n$, задает неприводимое представление группы $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$, в котором лежит соответствующий этой таблице вектор. В частности, $\lambda = (\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,n})$.

Стоит отметить, что базисы неприводимых представлений простой группы Ли $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ тоже можно получить с помощью конструкции Гельфанда-Цейтлина. Каждое неприводимое представление $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ получается ограничением на эту подгруппу некоторого неприводимого представления $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Представления $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, которые задаются наборами λ и λ', приводят к одному представлению группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, если наборы λ и λ' отличаются друг от друга сдвигом на целое число, т.е. $\lambda_i = \lambda'_i + k$, $i = 1, \ldots, n$; $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом неприводимые представления $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ взаимно однозначно соответствуют, например, наборам λ с $\lambda_n = 0$.

Укажем некоторые "хорошие" свойства базисов Гельфанда-Цейтлина. Во-первых, таблицы Гельфанда-Цейтлина, параметризующие базисные векторы, образуют полугруппу Σ относительно сложения таблиц. Более того, ограничиваясь полиномиальными представлениями $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, т.е. представлениями с $\lambda_i \geq 0$, мы получаем, что любая таблица Гельфанда-Цейтлина представления, задаваемого набором $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, представляется в виде суммы таблиц представлений весов $\omega_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i})$, которые являются фундаментальными весами при ограничении на подгруппу $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. То есть полугруппа Σ порождена таблицами, отвечающими векторам базисов "фундаментальных" представлений.

Во-вторых, рациональный конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$, натянутый на полугруппу Σ, задается линейными неравенствами с коэффициентами ± 1 перед координатами.

В-третьих, полугруппа Σ насыщена, то есть любая целая точка, лежащая в конусе $\Sigma_{\mathbb{Q}}$, отвечает базисному вектору некоторого представления.

В итоге базис любого неприводимого представления, задаваемого набором

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n), \quad \lambda_i \geq 0,$$

параметризуется целыми точками некоторого сечения конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}$.

Следует отметить, что базисы Гельфанда-Цейтлина не являются *мономиальными*, т.е. они не получаются применением к старшему вектору представления мономов из универсальной обертывающей алгебры, составленных из понижающих операторов (см. раздел 1.1). Возникает естественный вопрос о существовании мономиальных базисов, обладающих схожими свойствами.

Существуют различные подходы к построению мономиальных базисов в неприводимых представлениях простых алгебр Ли. Например, для любого приведенного разложения самого длинного элемента группы Вейля можно получить базис в каждом неприводимом представлении, применяя в определенном порядке, соответствующем разложению, понижающие операторы, отвечающие простым корням, к старшему вектору (см. [10]). Такие базисы, которые мы называем *струнными базисами*, параметризуются целыми точками в рациональном полиэдральном конусе, называемом *струнным конусом*. Таким образом, полугруппа целых точек струнного конуса является конечно порожденной и насыщенной. Однако явное описание полугруппы здесь неизвестно.

Другим частным случаем мономиальных базисов являются *базисы ПБВ-типа* (см. раздел 1.1). Вообще, базис ПБВ-типа получается при применении к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих положительным корням, пронумерованным в определенном порядке, причём, в отличие от струнных базисов, понижающие операторы, отвечающие одному и тому же корню, могут повторяться только подряд. Векторы, полученные таким образом, порождают пространство неприводимого представления в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта, но они линейно зависимы, и из них нужно выбрать базис. Это достигается с помощью введения линейного мономиального порядка на множестве мономов от понижающих операторов и выбора тех векторов, которые не выражаются линейно через векторы, отвечающие более младшим мономам. Следовательно, нумерация положительных корней и выбор мономиального порядка задают в каждом неприводимом представлении некоторый базис. Такие базисы параметризуются *существенными сигнатурами* $\sigma = (\lambda; p_1, \ldots, p_N)$ (см. Определение 1.2), где λ обозначает старший вес представления, а целое число p_i (*экспонента*) показывает сколько раз нужно применять понижающий оператор, отвечающий i-ому корню, к старшему вектору. Известно, что существенные сигнатуры всегда образуют полугруппу (см. предложение 1.4).

Базисы ПБВ-типа, обладающие некоторыми хорошими свойствами, можно получить, например, используя параметризацию Люстига канонического базиса в квантованной обертывающей алгебре (см. [11],[6]). Каждое приведенное разложение самого длинного элемента группы Вейля определяет нумерацию положительных корней. Эта нумерация, а также некоторый взвешенный обратный правый лексикографический порядок на $\mathbb{Z}^N$, определяют полугруппу существенных сигнатур, которая параметризует базис ПБВ-типа. Мы называем этот базис *базисом Люстига ПБВ-типа*. Известно, что полугруппа существенных сигнатур в этом случае является конечно порожденной и насыщенной ([6]), но явного описания этой полугруппы нет.

Естественным требованием для мономиального порядка на сигнатурах является согласованность с фильтрацией Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ-фильтрацией) на универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли. Согласованность с ПБВ-фильтрацией означает, что сперва сигнатуры сравниваются по суммарной степени $\sum p_i$, поэтому этим свойством обладают в точности однородные мономиальные порядки. В 2005 г. Э.Б. Винберг ([13]) поставил задачу нахождения "хорошего" базиса ПБВ-типа, отвечающего какому-нибудь *однородному* порядку на множестве сигнатур. Мы называем такие базисы *однородными базисами ПБВ-типа*. Им была сформулирована гипотеза о существовании таких базисов, для которых полугруппа существенных сигнатур будет насыщенной, порождаться сигнатурами фундаментальных весов, а также задаваться хорошими неравенствами (см. Гипотезы 1, 2, 3 в разделе 1.1). В дальнейшем такие базисы исследовались в работах Фейгина-Фурье-Литтельмана [7],[8], Бакхауса-Куса [5] и автора [15],[18]. Существование таких "хороших" базисов было доказано для алгебр Ли типов A_n, C_n, G_2, B_3, D_4 (см. [7],[8],[15],[5],[18], соответственно).

Кажется правдоподобным, что для остальных простых алгебр Ли таких базисов не существует (см. раздел 3.1). Поэтому имеет смысл ослабить некоторые требования к "хорошему" базису. В работе [12] строятся базисы ПБВ-типа для *неоднородного* мономиального порядка на множестве сигнатур в каждом неприводимом представлении для всех алгебр Ли типа B_n и явно описываются полугруппы существенных сигнатур. В работе автора [19] строятся подобные базисы и доказываются аналоги гипотез Винберга о полугруппе существенных сигнатур для всех алгебр Ли ортогональных серий B_n и D_n (независимо от [12] и совершенно другим методом).

Приведем краткое содержание и основные результаты диссертации. В **главе** 1 мы объясняем подход Э.Б. Винберга к построению базисов в конечномерных неприводимых представлениях простых алгебр Ли, а также формулируем три гипотезы Винберга о структуре и параметризации этих базисов. Для построения базиса нужно зафиксировать некоторую нумерацию положительных корней и линейный мономиальный порядок на $\mathbb{Z}^N$. Мы доказываем, следуя Винбергу, что множество существенных сигнатур, которое параметризует полученный базис, всегда обладает структурой полугруппы (см. Следствие 1.7). Этот факт является следствием того, что каждую существенную сигнатуру можно рассматривать, как младший член регулярной функции на группе G, которая инвариантна относительно максимальной унипотентной подгруппы U, т.е. как младший член многочлена $f \in \mathbb{C}[G]^U$.

Важнейшей из гипотез Винберга является гипотеза (см. гипотезу 1 и ее обобщение) о конечной порожденности полугруппы существенных сигнатур. В случае, если эта гипотеза верна, то существенные сигнатуры, порождающие полугруппу всех существенных сигнатур, являются младшими членами элементов конечного SAGBI базиса подалгебры $\mathbb{C}[G]^U$. В **главе** 2 мы находим необходимое и достаточное условие для того, чтобы эта гипотеза или ее обобщения были верны (см. предложение 2.2). Следствием этого утверждения является достаточное условие истинности гипотезы, которое удобно проверять (см. теорему 2.3 и следствие 2.4).

А именно, мы фиксируем набор доминантных весов $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ и интересуемся вопросом, порождают ли существенные сигнатуры со старшими весами из этого набора всю полугруппу существенных сигнатур. Существенная сигнатура σ может многими способами представляться в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами из $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. В разделе 2.2 мы вводим операции (*допустимые операции*), которые позволяют из одного такого разложения получать другие, меняя одно или два слагаемых в разложении, и доказываем следующую теорему (см. теорему 2.3, [19, Theorem 3.3]):

***Теорема* 0.1.** *Предположим, что следующие два условия выполнены:*

($*$) *любые два представления любой сигнатуры σ в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами из $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ получаются друг из друга с помощью допустимых операций;*

($**$) *для любых двух весов λ_i, λ_j любая существенная сигнатура старшего веса $\lambda_i + \lambda_j$ представима в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами в $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.*

Тогда полугруппа существенных сигнатур порождается существенными сигнатурами со старшими весами из $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

Эта теорема (при некоторых предположениях) позволяет в вопросе о конечной порожденности ограничиваться представлениями "высоты" 2, то есть представлениями со старшими весами $\lambda_i + \lambda_j$.

В **главе** 3 мы строим базисы ПБВ-типа для всех неприводимых представлений алгебр Ли $\mathfrak{g}$ типов B_n и D_n по некоторому неоднородному мономиальному порядку на $\mathbb{Z}^N$, пользуясь результатами главы 2. Эти базисы не совпадают с базисами Люстига ПБВ-типа, однако наши базисы близки к ним в следующем смысле. Наш подход можно также использовать для построения базисов ПБВ-типа в случаях алгебр Ли типов A_n и C_n. Тогда полученные базисы совпадают с базисами

Люстига ПБВ-типа для некоторого приведенного разложения самого длинного элемента группы Вейля. Для построенных базисов неприводимых представлений алгебр Ли типов B_n и D_n мы доказываем следующую теорему (см. теорему 3.22, [19, Theorem 4.21]):

***Теорема* 0.2.** *Следующие утверждения верны для алгебр Ли типов D_n, B_n ($n \geq 2$):*

Для некоторых явно заданных нумерации положительных корней и мономиального порядка на сигнатурах полугруппа существенных сигнатур Σ насыщена и порождена существенными сигнатурами со старшими весами в

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_{n-1}, 2\omega_n, \omega_{n-1} + \omega_n\} \quad \textit{для } D_n$$

и в

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n\} \quad \textit{для } B_n\textit{, соответственно.}$$

Здесь мы использовали стандартную нумерацию фундаментальных весов, описанную в главе 3. Таким образом, доказаны гипотезы о конечной порожденности и насыщенности полугруппы существенных сигнатур по отношению к выбранной нумерации и (неоднородному) мономиальному порядку.

Кроме того, мы явно находим неравенства, задающие полугруппы существенных сигнатур для алгебр Ли D_n и B_n (см. теоремы 3.23, 3.24, [19, Theorems 4.22, 4.23]). Следствием этих неравенств является

***Теорема* 0.3.** *Полугруппы существенных сигнатур для алгебр Ли типов D_n, B_n ($n \geq 2$) задаются явными неравенствами с коэффициентами ± 1 (или 0) перед экспонентами сигнатур.*

Построение мономиальных базисов ПБВ-типа и доказательство этих теорем проводится методом математической индукции. Основная идея доказательства состоит в использовании стандартных регулярных вложений $SO_{2n} \subset SO_{2n+1}$ и $SO_{2n} \subset SO_{2n+2}$. Такие вложения позволяют рассматривать корни D_n как корни B_n и D_{n+1}. Это, в свою очередь, позволяет "продлить" нумерацию корней и порядок на сигнатурах с D_n на D_{n+1} и B_n так, что утверждения теорем остаются верными, если они были таковыми для D_n. Базой индукции является случай $D_2 = A_1 + A_1$.

Наконец, **глава** 4 посвящена алгебре Ли типа G_2. Мы строим однородные базисы ПБВ-типа для всех неприводимых представлений алгебры Ли типа G_2. Для построенных базисов мы доказываем следующую теорему (см. теоремы 4.1, 4.3, [15, Теоремы 1, 2]):

***Теорема* 0.4.** *Полугруппа существенных сигнатур для алгебры Ли типа G_2 насыщена, порождена существенными сигнатурами фундаментальных старших весов, а также задается явными неравенствами с коэффициентами $+1$ (или 0) перед экспонентами сигнатур.*

Таким образом доказаны все гипотезы Винберга для алгебры Ли типа G_2.

Мы пользуемся результатами главы 2, доказывая, что полугруппа существенных сигнатур порождена сигнатурами фундаментальных старших весов. После этого мы находим неравенства, задающие рациональный конус, порожденный этими сигнатурами. Для этого мы находим образующие двойственного конуса с помощью стандартного алгоритма. Наконец, мы доказываем насыщенность полугруппы существенных сигнатур, используя явное описание существенных сигнатур фундаментальных весов.

Цель работы

В каждом конечномерном неприводимом представлении простых алгебр Ли типов B_n, D_n, G_2 построить базис ПБВ-типа так, чтобы выполнялись гипотезы Винберга или их обобщения.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. На защиту выносятся следующие положения:

1. Общий критерий того, когда полугруппа существенных сигнатур Σ порождается сигнатурами фундаментальных старших весов. А также обобщение этого критерия для проверки порожденности этой полугруппы сигнатурами со старшими весами из фиксированного набора. Достаточные условия для выполнения этого критерия, которые удобно проверять.

2. Однородный базис ПБВ-типа, для которого верны все гипотезы Винберга, существует в каждом неприводимом представлении алгебры Ли типа G_2. Полугруппа Σ, во-первых, насыщена, во-вторых, порождена сигнатурами фундаментальных старших весов и, в-третьих, задается явными неравенствами.

3. Базисы ПБВ-типа, для которых верны обобщенные гипотезы Винберга, существуют во всех неприводимых представлениях алгебр Ли типов B_n и D_n. Полугруппы Σ, во-первых, насыщены, а во-вторых, порождены сигнатурами старших весов, "близких" к фундаментальным. Эти полугруппы задаются явными неравенствами.

Основные методы исследования

В работе используются методы структурной теории полупростых групп и алгебр Ли, теории представлений, алгебраической геометрии и коммутативной алгебры, выпуклой геометрии и комбинаторики.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории групп и алгебр Ли, теории представлений и алгебраической геометрии.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах механико-математического факультета МГУ, всероссийских и международных конференциях:

- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» (2015-2018 гг., неоднократно)
- Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры (2019 г.)
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, 10-14 апреля 2017 г.
- Четвертая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 27 января - 1 февраля 2014 г.
- Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 30 января - 4 февраля 2017 г.

Основные обозначения

- основное поле — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$;
- G — односвязная простая комплексная алгебраическая группа;
- $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли, являющаяся касательной алгеброй группы G;
- $T \subset G$ — максимальный тор;
- $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра, касательная алгебра тора T;
- $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ — решетка весов тора T;
- $B \subset G$ — борелевская подгруппа, содержащая тор T;
- $U \subset B$ — максимальная унипотентная подгруппа группы G, унипотентный радикал группы B;
- $\mathfrak{u}$ — касательная алгебра группы U;
- U^- — максимальная унипотентная подгруппа группы G, противоположная U;
- $\mathfrak{u}^-$ — касательная алгебра группы U^-;
- U_α — одномерная унипотентная подгруппа, отвечающая корню α;
- Δ_+ — система положительных корней относительно тора T, отвечающая борелевской подгруппе B;

- $\alpha_i \in \Delta_+, i = 1, \ldots, N$ — положительные корни;
- $\omega_i \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}, i = 1, \ldots, n$ — фундаментальные веса;
- $V(\lambda) = V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ — пространство неприводимого конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ старшего веса λ;
- v_λ — старший вектор в пространстве $V(\lambda)$;
- $V(\lambda)^*$ — сопряженный к $V(\lambda)$ модуль;
- λ^* — старший вес модуля $V(\lambda)^*$.

Глава 1. Мономиальные базисы и гипотезы Э.Б. Винберга

В этой главе мы рассматриваем конечномерные представления простых комплексных алгебр Ли, объясняем метод Э.Б. Винберга построения базисов в таких представлениях с помощью понятия сигнатуры, а также формулируем гипотезы Винберга, касающиеся структуры этих базисов.

1.1. Базисы ПБВ-типа

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли. Рассмотрим треугольное разложение этой алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^-\oplus\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{u}$, где $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}$ — отрицательная и положительная максимальные нильпотентные подалгебры, а $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра. Максимальные нильпотентные подалгебры линейно порождаются корневыми векторами: $\mathfrak{u} = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+\rangle$, $\mathfrak{u}^- = \langle e_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+\rangle$, где Δ_+ — система положительных корней, а $e_{\pm\alpha}$ — корневые векторы. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — фундаментальные веса относительно выбранной системы положительных корней.

Пространство неприводимого представления алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ мы обозначаем через $V(\lambda) = V_\mathfrak{g}(\lambda)$. В каждом таком представлении есть единственная прямая, аннулируемая подалгеброй $\mathfrak{u}$. Старший вектор, то есть ненулевой вектор этой прямой, мы обозначаем через v_λ.

Под *мономиальным* базисом в $V(\lambda)$ мы понимаем базис, состоящий из векторов вида $e_{-\alpha_{i_1}} \ldots e_{-\alpha_{i_k}} \cdot v_\lambda$, где $\alpha_i \in \Delta_+$, с точностью до пропорциональности. Под базисом *ПБВ-типа* (ПБВ означает Пуанкаре-Биркгоф-Витт) в $V(\lambda)$ мы понимаем мономиальный базис, состоящий из векторов вида $e_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots e_{-\alpha_N}^{p_N} \cdot v_\lambda$, $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, с точностью до пропорциональности, при некоторой фиксированной нумерации положительных корней $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$.

Определение 1.1. Пусть λ — доминантный вес. *Сигнатурой* старшего веса λ назовем набор

$$\sigma = (\lambda; p_1, \ldots, p_N), \text{ где } \quad p_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Положим

$$v(\sigma) = \frac{e_{-\alpha_1}^{p_1}}{p_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{e_{-\alpha_N}^{p_N}}{p_N!} \cdot v_\lambda.$$

Будем называть вес $\lambda - \sum p_i\alpha_i$ вектора $v(\sigma)$ *весом* сигнатуры σ, а числа $(p_1, \ldots, p_N)$ — *экспонентами* сигнатуры σ.

Таким образом мы определяем множество сигнатур для каждого доминантного веса. Векторы $v(\sigma)$, отвечающие сигнатурам веса λ, линейно порождают $V(\lambda)$, что является следствием теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Однако эти векторы линейно зависимы, в частности вектор $v(\sigma)$ может быть нулевым. Мы хотим выделить базис из векторов $v(\sigma)$. Для этого мы вводим мономиальный линейный порядок на множестве сигнатур. Пусть

$$\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N), \quad \sigma' = (\lambda'; p'_1, \dots, p'_N),$$

$$\lambda = \sum k_i\omega_i, \quad \lambda' = \sum k'_i\omega_i, \qquad k_i, k'_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Сначала мы сравниваем наборы $(k_1, \dots, k_n)$ и $(k'_1, \dots, k'_n)$ с помощью степенного лексикографического порядка. Мы полагаем $\sigma < \sigma'$, если $(k_1, \dots, k_n) <(k'_1, \dots, k'_n)$. Если $\lambda = \lambda'$, то мы сравниваем наборы $(p_1, \dots, p_N)$ и $(p'_1, \dots, p'_N)$ с помощью какого-нибудь зафиксированного мономиального порядка на $\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$.

Определение 1.2. Сигнатура σ называется *существенной*, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau < \sigma\rangle$.

***Предложение* 1.3.** *Множество векторов $\{v(\sigma) \mid \sigma$ существенна$\}$ является базисом пространства $V(\lambda)$.*

Доказательство очевидно. Таким образом для каждой нумерации положительных корней и мономиального линейного порядка на $\mathbb{Z}^N$ мы получаем базис в каждом представлении $V(\lambda)$, параметризованный существенными сигнатурами старшего веса λ.

Обозначим через $\mathfrak{t}_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{t}$ решетку кокорней, порожденную двойственной системой корней, а двойственную ей решетку весов — через $\mathfrak{t}^*_\mathbb{Z}$. Следующее утверждение принадлежит Э. Б. Винбергу.

***Предложение* 1.4.** *Существенные сигнатуры образуют подполугруппу $\Sigma = \Sigma_\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{t}^*_\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^N$.*

Доказательство мы дадим в следующем разделе (см. следствие 1.7). Таким образом базисы ПБВ-типа, введенные выше, описываются полугруппой существенных сигнатур Σ. Эти базисы (включая базисы Люстига ПБВ-типа) и струнные базисы являются частными случаями базисов, получающихся с помощью бирациональных последовательностей (см. [6]).

Винберг сформулировал некоторые гипотезы о структуре полугруппы существенных сигнатур. (На самом деле все эти гипотезы были сформулированы для *однородного* порядка на $\mathbb{Z}^N$.) Первая гипотеза Винберга звучит так:

***Гипотеза* 1.** *Существуют такие нумерация положительных корней и мономиальный линейный порядок на $\mathbb{Z}^N$, что полугруппа Σ порождается существенными сигнатурами фундаментальных старших весов.*

Из гипотезы 1 следует, что можно найти существенные сигнатуры любого старшего веса λ, зная существенные сигнатуры для старших весов ω_i.

Сформулируем также обобщенную гипотезу для некоторого зафиксированного набора доминантных весов $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, содержащего все фундаментальные веса:

Гипотеза 1′. *Полугруппа Σ (для выбранных нумерации положительных корней и мономиального порядка на сигнатурах) порождена существенными сигнатурами со старшими весами в $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.*

Перейдем к формулировке остальных гипотез. Пусть $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ — рациональный выпуклый конус, натянутый на Σ.

Гипотеза 2. *Полугруппа Σ насыщена, то есть $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \bigcap (\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N)$.*

Гипотеза 2 утверждает, что базисы неприводимых представлений параметризуются целыми точками сечений некоторого многогранного конуса.

Известно (см. [6]), что для базисов Люстига ПБВ-типа и струнных базисов полугруппа Σ конечно порождена и насыщена. Но в этих случаях трудно явно описать полугруппу Σ, в частности, порождающие полугруппы Σ неизвестны.

Конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ задается линейными неравенствами (их конечное число при выполнении гипотезы $1'$).

Гипотеза 3. *Существуют такой набор подмножеств $M_i \subset \{1, \ldots, N\}$ и такой набор элементов картановской подалгебры $l_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$, что множество существенных сигнатур $\sigma = (\lambda; p_1, \ldots, p_N)$ задается неравенствами:*

$$\sum_{j \in M_i} p_j \leq \lambda(l_i),$$

Гипотеза 3 уточняет вид многогранного конуса из гипотезы 2.

Гипотезы 1, 2, 3 (для некоторого однородного порядка на сигнатурах) были доказаны для алгебр Ли типов A_n и C_n ([7], [8]).

Гипотезы 1, 2 были также доказаны в случаях B_3, D_4 ([5], [18]). Более того, были описаны неравенства, задающие полугруппу Σ.

Наконец, полугруппа Σ было явно описана в случае B_n для некоторой нумерации положительных корней и неоднородного мономиального порядка, при котором гипотезы $1'$ (для некоторого набора доминантных весов) и 2 верны ([12]).

Для алгебры Ли G_2 в диссертации найдены неравенства, задающие полугруппу существенных сигнатур, а также доказаны гипотезы 1, 2, 3 (см. главу 4). Эти результаты получены для некоторого однородного порядка на множестве сигнатур. Таким образом, построены однородные базисы ПБВ-типа, для которых верны гипотезы Винберга.

Для алгебр Ли типов B_n и D_n в диссертации найдены порождающие полугруппы существенных сигнатур Σ (см. теорему 3.22), а также неравенства, задающие конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$, а значит и полугруппу существенных сигнатур Σ (см. теорему 3.24 и теорему 3.23). Другими словами доказаны гипотезы $1'$ и 2 для B_n и D_n по отношению к выбранной нумерации и (неоднородному) мономиальному порядку. Таким образом, построены базисы ПБВ-типа, для которых верны аналоги гипотез Винберга.

1.2. Полугруппа существенных сигнатур

Пусть G — простая односвязная комплексная алгебраическая группа с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, U — максимальная унипотентная подгруппа в G, для которой $\operatorname{Lie} U = \mathfrak{u}$, T — максимальный тор с касательной алгеброй $\mathfrak{t}$. Тогда тор T действует правыми сдвигами на однородном пространстве G/U. Пусть $B = T \leftthreetimes U$ — борелевская подгруппа. Имеем

$$\mathbb{C}[G/U] = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{C}[G]_{\lambda}^{(B)},$$

где $\mathbb{C}[G]_{\lambda}^{(B)} = \{f \in \mathbb{C}[G] | f(gtu) = \lambda(t)f(g), \forall g \in G, t \in T, u \in U\}$. Каждое такое подпространство конечномерно и изоморфно, как G-модуль (по отношению к действию G левыми сдвигами), пространству $V(\lambda^*)$ линейных функций на $V(\lambda)$ (см. [4, теорема 3]). Изоморфизм устроен следующим образом:

$$V(\lambda^*) \ni \omega \longmapsto f_{\omega}, \quad \text{где} \quad f_{\omega}(g) = \langle \omega, g v_{\lambda} \rangle.$$

Хорошо известен следующий факт:

***Предложение* 1.5.** *$\mathbb{C}[G/U]$ порождена как алгебра подпространствами $\mathbb{C}[G]_{\omega_i}^{(B)}$.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство

$$M = \langle f |\ f \in \mathbb{C}[G]_{\lambda}^{(B)} \cdot \mathbb{C}[G]_{\mu}^{(B)} \rangle$$

для любой пары доминантных весов λ, μ. Очевидно, что M инвариантно, отлично от 0 (т. к. алгебра $\mathbb{C}[G/U]$ не имеет делителей нуля), и $M \subset \mathbb{C}[G]_{\lambda+\mu}^{(B)}$. Поскольку $\mathbb{C}[G]_{\lambda+\mu}^{(B)}$ неприводимо, $M = \mathbb{C}[G]_{\lambda+\mu}^{(B)}$. Так как ω_i порождают решетку весов, то утверждение доказано. □

Пусть U^- — максимальная отрицательная унипотентная подгруппа, то есть $\operatorname{Lie} U^- = \mathfrak{u}^-$. Функция f_{ω} однозначно определяется своим ограничением на плотное открытое множество $U^- \cdot T \cdot U$, причем

$$f_{\omega}(u^- \cdot t \cdot u) = \langle \omega, u^- t u v_{\lambda} \rangle = \langle \omega, \lambda(t) u^- v_{\lambda} \rangle = \lambda(t) f_{\omega}(u^-), \quad \forall u \in U, u^- \in U^-, t \in T.$$

Далее, $U^- = U_{-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot U_{-\alpha_N}$ ([9, гл. X, §28, п.1]), где $U_{-\alpha} = \{\exp(z e_{-\alpha}) \mid z \in \mathbb{C}\}$. Поэтому

$$u^- = \exp(z_1 e_{-\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \exp(z_N e_{-\alpha_N}).$$

Таким образом получаем:

$$f_{\omega}(u^-) = \left\langle \omega, \prod_{i=1}^{N} \exp(z_i e_{-\alpha_i}) \cdot v_{\lambda} \right\rangle = \sum_{\sigma = (\lambda; p_1, \ldots, p_N)} \prod z_i^{p_i} \langle \omega, v(\sigma) \rangle.$$

***Предложение* 1.6.** *Сигнатура σ существенна тогда и только тогда, когда $\prod z_i^{p_i}$ является младшим членом $f_{\omega}|_{U^-}$ для некоторого $\omega \in V(\lambda^*)$ в смысле мономиального порядка на сигнатурах.*

Доказательство. Пусть $\prod z_i^{p_i}$ является младшим членом. Тогда соответствующая функция ω принимает нулевое значение на всех векторах $v(\tau)$, $\tau < \sigma$, и ненулевое значение на $v(\sigma)$. Поэтому $v(\sigma)$ не выражается через $v(\tau)$, $\tau < \sigma$, и значит σ существенна.

Обратно, пусть σ существенна. Рассмотрим функцию ω, равную нулю на векторах $v(\tau)$ для всех существенных τ, кроме σ. Очевидно, что $f_\omega|_{U^-}$ имеет нужный младший член. □

***Следствие* 1.7.** *Существенные сигнатуры образуют полугруппу относительно покоординатного сложения.*

Доказательство. При перемножении функций на U^- младшие члены перемножаются и ни с чем не сокращаются. □

Глава 2. Метод доказательства Гипотезы 1 и ее обобщений

В данной главе мы объясняем наш общий подход к доказательству гипотезы 1 и ее обобщений.

2.1. Критерий для доказательства Гипотезы 1 и ее обобщений

Зафиксируем набор доминантных весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Пусть S — полугруппа доминантных весов, порожденная $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Обозначим через $\Sigma^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)} = \Sigma_{\mathfrak{g}}^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}$ полугруппу существенных сигнатур, порожденную существенными сигнатурами старших весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Через $\Sigma(S)$ обозначим полугруппу существенных сигнатур со старшим весом из S.

Мы хотим установить необходимое и достаточное условие для выполнения равенства $\Sigma(S) = \Sigma^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}$.

Положим $X = \operatorname{Spec} \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[G/U]_{\lambda}^{(B)}$. Тогда (см. [2])

$$X \simeq \overline{G(v_{\lambda_1} + \ldots + v_{\lambda_m})} \subseteq V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_m) = V.$$

Пусть $I \lhd \mathbb{C}[V]$ — идеал нулей X, а x_i — координаты на V, отвечающие базису

$$\{v(\sigma_i) \mid \sigma_i \text{ существенна}\}.$$

Таким образом, мы имеем сюръективный гомоморфизм алгебр

$$\phi: \quad \mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[X],$$

такой что $\ker(\phi) = I$.

Рассмотрим произвольный моном $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ в $\mathbb{C}[V]$. Введем обозначение $\operatorname{sign}(x_{i_1} \ldots x_{i_k}) = \sigma_{i_1} + \ldots + \sigma_{i_k} = \sigma$. Мы называем σ *сигнатурой монома* $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$. Таким образом, на алгебре $\mathbb{C}[V]$ возникает градуировка полугруппой $\Sigma^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}$. Степень однородного многочлена $h \in \mathbb{C}[V]$ относительно этой градуировки мы также обозначаем $\operatorname{sign}(h)$. Имеем:

$$\mathbb{C}[V] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[U^- \cdot T].$$

На алгебре $\mathbb{C}[U^- \cdot T]$ есть градуировка группой $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^* \oplus \mathbb{Z}^N$. Степень любого однородного многочлена $h \in \mathbb{C}[U^- \cdot T]$ относительно этой градуировки мы также обозначаем $\operatorname{sign}(h)$. Для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[V]$ или $f \in \mathbb{C}[U^- \cdot T]$ обозначим младший (относительно заданных градуировок и мономиального порядка на сигнатурах, введенного в разделе 1.1) член этого многочлена через $\mathrm{lt}(f)$.

Отображение ϕ не является гомоморфизмом градуированных алгебр, однако оно согласовано с убывающими фильтрациями, определенными соответствующими градуировками. На алгебрах $\mathbb{C}[V]$, $\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[U^- \cdot T]$ есть более грубая градуировка группой $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$. Отображение ϕ является гомоморфизмом градуированных алгебр по отношению к грубой градуировке. Заметим, что однородные компоненты $\mathbb{C}[V]$ и $\mathbb{C}[X]$ относительно грубой градуировки конечномерны.

Пусть $\mathrm{lt}(I)$ — идеал, порожденный $\mathrm{lt}(f), f \in I$. Обозначим через J идеал в $\mathbb{C}[V]$, порожденный биномами

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} - x_{j_1} \dots x_{j_l} \quad \text{где} \quad \mathrm{sign}(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \mathrm{sign}(x_{j_1} \dots x_{j_l}).$$

Пусть f — регулярная функция на V, то есть многочлен от переменных $\{x_i\}$. Тогда $\phi(f)$ — функция на X, следовательно, многочлен от переменных $\{z_j\}$, $j = 1, \dots, N$ (координаты на U^-) и $\{t_k\}$, $k = 1, \dots, n$ (координаты на T, отвечающие фундаментальным весам). Таким образом, для любого монома $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ сигнатуры $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N)$ младший член $\phi(x_{i_1} \dots x_{i_s})$ есть $z^\sigma := t^\lambda \prod z_j^{p_j}$, где $t^\lambda := t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$, $\lambda = \sum k_i \omega_i$.

***Лемма* 2.1.** $\mathrm{lt}(I) \subset J$.

Доказательство. Пусть $f \in I$, тогда $\phi(f) = 0$. Пусть $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N) = \mathrm{sign}(\mathrm{lt}(f))$. Младший член $\phi(\mathrm{lt}(f))$ больше, чем z^σ, так как $\phi(f) = 0$. Следовательно, $\mathrm{lt}(f)$ является линейной комбинацией мономов сигнатуры σ с суммой координат, равной нулю, поэтому $\mathrm{lt}(f) \in J$. □

***Предложение* 2.2.** $\Sigma(S) = \Sigma^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{lt}(I) = J$.

Доказательство. Равенство $\Sigma(S) = \Sigma^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ означает, что для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[V]$ имеем $\mathrm{sign}(\mathrm{lt}(\phi(f))) = \mathrm{sign}(\mathrm{lt}(\phi(x_{i_1} \dots x_{i_k})))$ для некоторого монома $x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Предположим, что $\Sigma(S) = \Sigma^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ и пусть $f \in J$. Покажем, что $f \in \mathrm{lt}(I)$.

Можно считать многочлен f однородным в смысле градуировки сигнатурами. Обозначим $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_N) = \mathrm{sign}(f)$. Поскольку $f \in J$, то $\mathrm{lt}(\phi(f)) > z^\sigma$. По предположению существует такой моном $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, что $\mathrm{lt}(\phi(x_{i_1} \dots x_{i_k})) = \mathrm{lt}(\phi(f))$. Таким образом, для некоторой константы c имеем $\mathrm{lt}(\phi(f_1)) > \mathrm{lt}(\phi(f))$, где $f_1 = f - c x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Очевидно, $\mathrm{lt}(f_1) = f$. Вычитая из многочлена f_s ($s = 1, 2, \dots$) некоторый моном с подходящей константой, мы получаем многочлен f_{s+1}, такой что $\mathrm{lt}(\phi(f_{s+1})) > \mathrm{lt}(\phi(f_s))$ и $\mathrm{lt}(f_s) = f$. Этот процесс остановится, поскольку существует лишь конечное число существенных сигнатур фиксированного старшего веса. Следовательно, мы получим многочлен f_m, такой что $\phi(f_m) = 0$ и $\mathrm{lt}(f_m) = f$. Таким образом $f \in \mathrm{lt}(I)$.

Обратно, пусть $\mathrm{lt}(I) = J$. Рассмотрим многочлен $f \in \mathbb{C}[V]$. Мы хотим найти такой моном $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, что $\mathrm{sign}(\mathrm{lt}(\phi(x_{i_1} \dots x_{i_k}))) = \mathrm{sign}(\mathrm{lt}(\phi(f)))$. Можно считать, что f является многочленом с максимальной сигнатурой $\mathrm{sign}(\mathrm{lt}(f))$ среди многочленов из $\phi^{-1}\phi(f)$. Обозначим $h = \mathrm{lt}(f)$. Если $h \notin J$, то мы можем взять в качестве $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ любой моном h. В противном случае $h \in J$. Тогда по предположению существует такой многочлен $f' \in I$, что $h = \mathrm{lt}(f')$. Имеем $\phi(f - f') = \phi(f)$ и $\mathrm{sign}(\mathrm{lt}(f - f')) > \mathrm{sign}(\mathrm{lt}(f))$. Получили противоречие с предположением относительно f. $\square$

2.2. Способ проверки критерия

В этом разделе мы собираемся объяснить, как можно проверить равенство $\mathrm{lt}(I) = J$. Для того, чтобы доказать равенство этих идеалов достаточно проверить два свойства:

1. идеал J порожден многочленами степени 2;

2. для любых двух весов λ_i, λ_j всякая существенная сигнатура старшего веса $\lambda_i + \lambda_j$ лежит в $\Sigma^{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}$.

В самом деле, если первое свойство выполняется, то для доказательства равенства $\mathrm{lt}(I) = J$ достаточно доказать, что если $f \in J$ однородный многочлен (относительно градуировки сигнатурами) степени 2, то $f \in \mathrm{lt}(I)$. Из доказательства предложения 2.2 (здесь $\mathrm{sign}(f)$ имеет старший вес $\lambda_i + \lambda_j$) следует, что это верно, если выполняется второе свойство.

Теперь мы собираемся объяснить, как проверить первое свойство. Пусть

$$\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k$$

есть разложение $\sigma \in \Sigma^{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}$ в сумму существенных сигнатур со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

Рассмотрим следующие операции:

(1) замена пары сигнатур σ_i, σ_j на такую пару существенных сигнатур σ'_i, σ'_j со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, что $\sigma_i + \sigma_j = \sigma'_i + \sigma'_j$;

(2) замена пары сигнатур σ_i, σ_j на такую существенную сигнатуру σ'_s со старшим весом в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, что $\sigma_i + \sigma_j = \sigma'_s$;

(3) замена сигнатуры σ_s на такую пару существенных сигнатур σ'_i, σ'_j со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, что $\sigma_s = \sigma'_i + \sigma'_j$.

Мы называем такие операции *допустимыми*. Очевидно, идеал J порожден биномами степени 2 тогда и только тогда, когда для любой сигнатуры $\sigma \in \Sigma^{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}$ мы можем получить данное разложение $\sigma_1 + \ldots + \sigma_k$ сигнатуры σ из любого другого разложения $\tau_1 + \ldots + \tau_l$, применяя допустимые операции.

Второе свойство может быть проверено следующим образом. Во-первых, мы вычисляем число сигнатур старшего веса $\lambda_i + \lambda_j$, которые могут быть представлены как суммы существенных сигнатур со старшими весами в $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ для всех i, j. Затем, мы сравниваем полученное число с $\dim V(\lambda_i + \lambda_j)$, которая может быть найдена, например, по формуле размерностей Вейля. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

***Теорема* 2.3.** *Предположим, что следующие два условия выполнены:*

(∗) *для любой сигнатуры* $\sigma \in \Sigma^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}$ *мы можем получить данное разложение* $\sigma = \sigma_1+\ldots+\sigma_k$ *в сумму существенных сигнатур со старшими весами в* $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}$ *из любого другого такого разложения* $\sigma = \tau_1+\ldots+\tau_l$*, применяя допустимые операции;*

(∗∗) *для любых двух весов* λ_i, λ_j *любая существенная сигнатура старшего веса* $\lambda_i+\lambda_j$ *представима в виде суммы существенных сигнатур со старшими весами в* $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}$.

Тогда $\Sigma(S) = \Sigma^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}$.

Обозначим через Σ^f полугруппу, порожденную существенными сигнатурами фундаментальных старших весов. Для $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\} = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ теорема выше утверждает следующее:

***Следствие* 2.4.** *Предположим, что выполнены следующие два свойства:*

1. *для любой сигнатуры* $\sigma \in \Sigma^f$ *мы можем получить данное разложение* $\sigma = \sigma_1+\ldots+\sigma_k$ *в сумму существенных сигнатур фундаментальных старших весов из любого другого такого разложения* $\sigma = \tau_1+\ldots+\tau_k$*, применяя допустимые операции (здесь применимы только допустимые операции первого типа);*

2. *для любых двух фундаментальных весов* ω_i, ω_j *любая существенная сигнатура старшего веса* $\omega_i+\omega_j$ *представима в виде суммы двух существенных сигнатур старших весов* ω_i *и* ω_j.

Тогда $\Sigma = \Sigma^f$.

2.3. Пример

В качестве примера применения предыдущего следствия мы докажем гипотезу 1 для алгебр Ли типа A_n.

Обозначим через $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1}$ веса тавтологического представления $V(\omega_1) = \mathbb{C}^{n+1}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ типа A_n. Тогда положительные корни имеют вид $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, $i<j, i,j \in \{1,\ldots,n+1\}$, а фундаментальные веса выражаются следующим образом: $\omega_k = \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_k$, $k = 1,\ldots,n$. Корневые векторы $e_{-(\varepsilon_i-\varepsilon_j)}$ суть матрицы (a_{kl}), где $a_{kl}=1$, если $k=j, l=i$, и $a_{kl}=0$ в противном случае. Каждую сигнатуру алгебры Ли A_n мы представляем целочисленной матрицей размера $(n+1)\times(n+1)$ с нулевыми элементами на главной диагонали и выше. А именно (j,i)-тый элемент $(i<j)$ равен экспоненте сигнатуры, отвечающей корню $\varepsilon_i-\varepsilon_j$.

Упорядочим множество положительных корней A_n. Будем считать, что $\varepsilon_i-\varepsilon_j > \varepsilon_k-\varepsilon_l$, если либо $i<k$, либо $i=k$ и $j>l$. Будем сравнивать сигнатуры фиксированного старшего веса, сравнивая наборы экспонент с помощью степенного обратного лексикографического порядка.

При введенных выше нумерации положительных корней и порядке на сигнатурах легко описать существенные сигнатуры фундаментальных старших весов. Существенная сигнатура старшего веса ω_i — это матрица из нулей и единиц с ненулевыми элементами только в первых i столбцах и последних $n+1-i$ строках, причем в каждой строке или столбце стоит не более одной единицы, и каждая единица с большим номером столбца обязательно имеет меньший номер строки. Следуя работе [7], опишем также эти существенные сигнатуры с помощью путей Дика. *Путь Дика* — это последовательность отрицательных корней

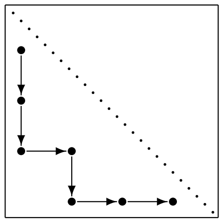
$$\mathbf{p} = (\beta(0), \beta(1), \ldots, \beta(k)), k \geq 0,$$

где элементы удовлетворяют следующему условию:

$$\text{если} \quad \beta(s) = -(\varepsilon_p - \varepsilon_q) \quad \text{то}$$

$$\beta(s+1) = -(\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_q) \quad \text{или} \quad \beta(s+1) = -(\varepsilon_p - \varepsilon_{q+1}).$$

Каждый отрицательный корень соответствует элементу матрицы, который находится ниже главной диагонали. Таким образом, путь Дика — это последовательность элементов матрицы ниже главной диагонали, где каждый следующий элемент правее или ниже предыдущего:



Существенная сигнатура старшего веса ω_i — это матрица с ненулевыми элементами только в первых i столбцах и последних $n+1-i$ строках, причем сумма элементов на любом пути Дика не превосходит 1.

Мы собираемся доказать гипотезу 1 с помощью следствия 2.4. Проверим первое условие этого следствия.

Пусть $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k$ — разложение некоторой сигнатуры в сумму существенных сигнатур фундаментальных старших весов.

Мы будем применять допустимые операции к этому разложению с целью получить другое разложение сигнатуры σ, содержащее некоторую существенную сигнатуру σ_0 фундаментального старшего веса, которая зависит только от самой сигнатуры σ (и не зависит от выбранного разложения сигнатуры σ). Тогда сигнатура σ_0 может быть получена из любого разложения сигнатуры σ, что позволит завершить доказательство утверждения индукцией по k.

Пусть σ_1 — сигнатура старшего веса ω_i с минимальным i, т.е. среди $\sigma_m, m = 1, \ldots, k$, не существует сигнатур старшего веса ω_j, где $j < i$. Из всех сигнатур разложения выберем сигнатуру с самым маленьким номером строки ненулевого элемента в первых i столбцах. Если таких сигнатур несколько, то возьмем из них любую сигнатуру с минимальным номером столбца, скажем s, этого ненулевого элемента. Если этой сигнатурой оказалась сигнатура σ_1, то обозначим $\sigma'_j = \sigma_j$, $j = 1, \ldots, k$. Иначе будем считать, что мы взяли сигнатуру σ_2. Поменяем местами столбцы с номерами от 1 до i у сигнатур σ_1, σ_2. Мы получим сигнатуры σ'_1, σ'_2. Очевидно, что σ'_1, σ'_2 — существенные сигнатуры и $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma'_1 + \sigma'_2$. Мы получили сигнатуру σ'_1 старшего веса ω_i, у которой номер строки и столбца ненулевого элемента с минимальным номером строки однозначно определен сигнатурой σ. Положим $\sigma'_j = \sigma_j$, если $j > 2$.

Далее мы повторяем эту процедуру. Из всех сигнатур σ'_j выберем сигнатуру с минимальным номером строки ненулевого элемента в первых $s-1$ столбцах. Если таких сигнатур несколько, то возьмем любую сигнатуру с минимальным номером s' столбца этого элемента. Пусть это сигнатура σ'_l. Поменяем местами столбцы с номерами от 1 до $s-1$ у сигнатур σ'_1 и σ'_l. Мы получим существенные сигнатуры σ''_1 и σ''_l, причем $\sigma'_1+\sigma'_l=\sigma''_1+\sigma''_l$. Сигнатура σ''_1 имеет два ненулевых элемента (в столбцах s и s'), которые однозначно определяются сигнатурой σ.

Поскольку номера столбцов $s, s', s'', \ldots$ постоянно уменьшаются, то процесс завершится. В итоге на некотором p-м шаге мы получим существенную сигнатуру $\sigma_1^{(p)}$, которая зависит только от σ.

Для завершения доказательства гипотезы 1 нужно проверить второе условие из следствия 2.4. Можно посчитать количество сигнатур старшего веса $\omega_i+\omega_j$, представимых в виде суммы существенных сигнатур старших весов ω_i и ω_j, а потом сравнить полученное число с размерностью $\dim V(\omega_i+\omega_j)$. Таким образом доказательство гипотезы 1 сводится к чисто комбинаторной задаче, которая может быть решена многими способами. Ниже мы предлагаем эскиз одного из возможный решений этой задачи.

Легко видеть, что сигнатура старшего веса $\omega_i+\omega_j$ может быть представлена в виде суммы существенных сигнатур старших весов ω_i, ω_j $(i \leq j)$ тогда и только тогда, когда для этой сигнатуры выполняются следующие условия:

1. ненулевые элементы могут находиться только в первых i столбцах и последних $n+1-i$ строках (в прямоугольнике размера $(n+1-i)\times i$, расположенном в нижнем левом углу матрицы) и в первых j столбцах и последних $n+1-j$ строках (в прямоугольнике размера $(n+1-j)\times j$, расположенном в нижнем левом углу матрицы);
2. суммы элементов на любом пути Дика не превосходит 2;
3. сумма элементов на любом пути Дика, который пересекает только один из прямоугольников, описанных в первом условии, не превосходит 1.

Рассмотрим более общую ситуацию. Обозначим через $B(n_1, n_2, k_1, k_2)$ число способов так расставить неотрицательные целые числа в матрице размера $m \times m, m \gg 0$, что выполняются следующие условия:

1. ненулевые элементы есть только в первых k_1 столбцах и последних n_1 строках (в прямоугольнике размера $n_1 \times k_1$, расположенном в нижнем левом углу матрицы) или в первых n_2 столбцах и последних k_2 строках (в прямоугольнике размера $k_2 \times n_2$, расположенном в нижнем левом углу матрицы);
2. суммы элементов на любом пути Дика не превосходит 2;
3. сумма элементов на любом пути Дика, который пересекает только один из прямоугольников, описанных в первом условии, не превосходит 1.

В этих обозначениях число сигнатур алгебры A_n старшего веса $\omega_i+\omega_j$, которые представляются в виде суммы существенных сигнатур старших весов ω_i и ω_j, — это $B(n+1-i,j,i,n+1-j)$.

Верна следующая рекуррентная формула:

***Лемма* 2.5.**

$$B(n_1,n_2,k_1,k_2)+B(n_1,n_2,k_1-1,k_2-1)=B(n_1-1,n_2-1,k_1,k_2)+$$
$$+B(n_1,n_2,k_1,k_2-1)+B(n_1,n_2,k_1-1,k_2).$$

Доказательство. Легко видеть, что верно равенство:

$$B(n_1,n_2,k_1,k_2)=\sum_{s=0}^{k_1}\sum_{l=0}^{k_2}B(n_1-1,n_2-1,s,l).$$

В самом деле, $B(n_1-1,n_2-1,s,l)$ — число способов расставить с выполнением условий 1-3 числа в матрице так, что имеется ненулевой элемент в $(m+1-n_1)$-ой строке и $(s+1)$-ом столбце и еще один ненулевой элемент в n_2-ом столбце и $(m-l)$-ой строке. Поэтому общая сумма равна в точности $B(n_1,n_2,k_1,k_2)$.

Заменив все слагаемые в рекуррентной формуле, кроме $B(n_1-1,n_2-1,k_1,k_2)$, на эти суммы, мы получаем тождество. $\square$

Решение этого рекуррентного уравнения дается формулой

$$B(n_1,n_2,k_1,k_2)=\frac{(n_1+1)(n_2+1)-k_1k_2}{(n_1+1)(n_2+1)}C_{n_2+k_2}^{k_2}C_{n_1+k_1}^{k_1}.$$

Таким образом $B(n+1-i,j,i,n+1-j)=\frac{j-i+1}{j+1}C_{n+1}^{j}C_{n+2}^{i}$. Это число и есть размерность $\dim V(\omega_i+\omega_j)$ (см. [1]).

То есть и второе условие в следствии 2.4 выполнено, а значит гипотеза 1 верна.

Глава 3. Ортогональные алгебры Ли

В этой главе мы доказываем (см. теорему 3.22), что для некоторого фиксированного мономиального линейного порядка на множестве сигнатур и нумерации на множестве положительных корней полугруппа Σ насыщена и порождена существенными сигнатурами старших весов ω_i ($i = 1, \ldots, n$) и $2\omega_n$ для алгебры Ли B_n, и существенными сигнатурами старших весов ω_i ($i = 1, \ldots, n$), $2\omega_{n-1}$, $2\omega_n$, $\omega_{n-1} + \omega_n$ для алгебры Ли D_n, то есть:

$$\Sigma_{B_n} = \Sigma_{B_n}^{(\omega_1,\ldots,\omega_n,2\omega_n)}, \tag{3.1}$$

$$\Sigma_{D_n} = \Sigma_{D_n}^{(\omega_1,\ldots,\omega_n,2\omega_{n-1},2\omega_n,\omega_{n-1}+\omega_n)}. \tag{3.2}$$

Нумерация фундаментальных весов здесь такая же, как в [1, Таблица 1]. Кроме того, мы находим неравенства, задающие конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ для D_n и B_n (см. теоремы 3.23 и 3.24, соответственно).

3.1. Выбор мономиального порядка

Как было сказано, выбор нумерации положительных корней и мономиального порядка на множестве сигнатур задает базис в каждом конечномерном неприводимом представлении с помощью существенных сигнатур. Хотелось бы построить однородный базис ПБВ-типа в каждом неприводимом представлении алгебр Ли типов B_n и D_n. Однако уже для алгебры D_5 не существует однородного порядка, для которого Σ порождается сигнатурами фундаментальных весов. Это можно проверить на компьютере, перебирая всевозможные порядки (см. [17]). Оказывается, что и для всех алгебр Ли D_n при $n > 4$ ситуация аналогичная.

Пусть $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ — стандартная подалгебра Леви с системой корней Δ', и $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Через λ' обозначим ограничение веса λ на $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}'$. Сигнатуры веса λ' для $\mathfrak{g}'$ можно отождествить с сигнатурами веса λ для $\mathfrak{g}$, носители которых содержатся в Δ', т. е. у которых $p_i = 0$ при $\alpha_i \notin \Delta'$. Нумерация положительных корней для $\mathfrak{g}'$ получается из нумерации положительных корней для $\mathfrak{g}$ с помощью опускания корней $\alpha_i \notin \Delta'$. Мы будем сравнивать две сигнатуры алгебры $\mathfrak{g}'$ путем сравнения соответствующих им сигнатур алгебры $\mathfrak{g}$.

***Предложение* 3.1.** *Сигнатура $\sigma = (\lambda; p_1, \ldots, p_N)$ с условием $p_i = 0$ при $\alpha_i \notin \Delta'$ существенна для $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда она существенна для $\mathfrak{g}'$.*

Доказательство. $V(\lambda')$ вкладывается в $V(\lambda)$ как представление алгебры $\mathfrak{l}$, порожденное вектором v_λ. Пусть σ несущественна для $\mathfrak{g}'$. Тогда $v(\sigma)$ выражается в $V(\lambda')$ через $v(\tau_i)$, $\tau_i < \sigma$, но тогда аналогичное выражение имеет место и для $v(\sigma)$ в $V(\lambda)$. Обратно, пусть σ несущественна для $\mathfrak{g}$, тогда $v(\sigma)$ выражается в $V(\lambda)$ через $v(\tau_i)$, $\tau_i < \sigma$. Но носитель (т.е. множество корней α_i с $p_i \neq 0$) каждой сигнатуры τ_i должен содержаться в Δ', иначе векторы $v(\tau_i)$ и $v(\sigma)$ будут иметь разный вес. Значит $v(\sigma)$ выражается через $v(\tau_i)$ и в $V(\lambda')$. $\square$

***Следствие* 3.2.** *Для алгебр Ли типов D_n ($n > 4$) и E_n ($n = 6, 7, 8$) не существует мономиального линейного порядка, согласованного с ПБВ-фильтрацией, при котором полугруппа Σ порождена сигнатурами фундаментальных старших весов.*

Для алгебры типа D_n (соотв. B_n) доминантные веса $\omega_{n-1}+\omega_n, 2\omega_{n-1}, 2\omega_n$ (соотв. $2\omega_n$) "близки" к фундаментальным, в частности, через них выражаются представления во внешних степенях $\bigwedge^p \mathbb{C}^{2n}, p = n-1, n$ (соотв. $\bigwedge^n \mathbb{C}^{2n+1}$). Поэтому мы собираемся доказывать Гипотезу 1' для набора весов, описанного в начале главы, а также отказываемся от условия согласованности мономиального порядка с ПБВ-фильтрацией (однородности).

3.2. Обозначения

Упростим обозначения:

$$\Sigma_{B_n}^{(\cdot)} := \Sigma_{B_n}^{(\omega_1,\ldots,\omega_n,2\omega_n)}, \quad \Sigma_{D_n}^{(\cdot)} := \Sigma_{D_n}^{(\omega_1,\ldots,\omega_n,2\omega_{n-1},2\omega_n,\omega_{n-1}+\omega_n)},$$

$$\Sigma'_{D_n} := \Sigma_{D_n}^{(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},\omega_{n-1}+\omega_n,\omega_{n-1},2\omega_{n-1})}, \quad \Sigma''_{D_n} := \Sigma_{D_n}^{(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},\omega_{n-1}+\omega_n,\omega_n,2\omega_n)}.$$

Сперва мы доказываем, что полугруппа Σ насыщена и (3.2) выполняется для D_2. Затем мы показываем (см. предположение индукции ниже), что если Σ насыщена и свойство (3.2) выполнено для D_n, то Σ насыщена и свойство (3.2) (соотв. (3.1)) выполнено для D_{n+1} (соотв. B_n).

Мы вводим некоторые обозначения и напоминаем базовые факты о представлениях ортогональных алгебр Ли.

Положим $\widehat{\omega}_p = \omega_p$ при $p \neq n-1$, $\widehat{\omega}_{n-1} = \omega_{n-1} + \omega_n$ для D_n.

Пусть $\widehat{\omega}_p = \omega_p$ при $p \neq n$, $\widehat{\omega}_n = 2\omega_n$ для B_n.

Напомним, что $V(\omega_1)$ — стандартное представление $\mathfrak{so}_{2n+1}$ (соответственно $\mathfrak{so}_{2n}$) в $\mathbb{C}^{2n+1}$ (соответственно $\mathbb{C}^{2n}$).

Пусть $\pm\varepsilon_i$ ($i = 1, \ldots, n$) — ненулевые веса представления $V(\omega_1)$ алгебры Ли D_n или B_n. Тогда положительные корни D_n суть

$$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad i < j, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

а положительные корни B_n суть

$$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad i < j, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\varepsilon_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Фундаментальные веса и веса $\widehat{\omega}_i$ выражаются через ε_i следующим образом (для B_n и D_n):

$$\widehat{\omega}_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{для} \quad B_n, \quad i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{для} \quad D_n;$$

$$\omega_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n);$$

$$\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) \quad \text{для} \quad D_n.$$

Обозначим через $e_{\pm i}$ собственные векторы в $V(\omega_1)$ с собственными значениями $\pm\varepsilon_i$, e_0 обозначает собственный вектор с нулевым собственным значением (для B_n).

Пусть $\Sigma_X(\lambda)$ — множество существенных сигнатур старшего веса λ для простой алгебры Ли типа X. Для произвольной сигнатуры σ обозначим через $\overline{\sigma}$ набор экспонент этой сигнатуры, положим $\overline{\Sigma}_X(\lambda) = \{\overline{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma_X(\lambda)\}$. Мы обозначаем через $\overline{\alpha}_i$ набор экспонент с координатой, равной 1, отвечающей корню α_i, и с нулевыми координатами на остальных местах. Пусть $V_X(\lambda)$ — неприводимое представление алгебры Ли типа X со старшим весом λ.

Имеем:

$$V_{B_n}(\widehat{\omega}_p) = \bigwedge\nolimits^p \mathbb{C}^{2n+1}, \quad v_{\widehat{\omega}_p} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p, \quad p = 1, \ldots, n,$$

$$V_{D_n}(\widehat{\omega}_p) = \bigwedge\nolimits^p \mathbb{C}^{2n}, \quad v_{\widehat{\omega}_p} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p, \quad p < n,$$

$$V_{D_n}(2\omega_{n-1}) \oplus V_{D_n}(2\omega_n) = \bigwedge\nolimits^n \mathbb{C}^{2n}, \quad v_{2\omega_{n-1}} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge e_{-n}, \quad v_{2\omega_n} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge e_n.$$

Представление $V_{B_n}(\omega_n)$ разлагается в сумму 2^n одномерных весовых подпространств с весами $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \ldots \pm \varepsilon_n)$. Представление $V_{D_n}(\omega_{n-1})$ ($V_{D_n}(\omega_n)$) разлагается в сумму 2^{n-1} одномерных весовых подпространств весов $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \ldots \pm \varepsilon_n)$ с нечетным (четным) количеством минусов.

Теперь мы формулируем *предположение индукции* для D_n:

- свойства $(*)$, $(**)$ (см. теорему 2.3) выполняются для Σ'_{D_n} и Σ''_{D_n},
- полугруппа Σ_{D_n} насыщена,
- выполняется следующее свойство:

$$\Sigma'_{D_n} \cup \Sigma''_{D_n} = \Sigma^{(\cdot)}_{D_n}. \tag{$\dagger$}$$

Разложение ($\dagger$) является техническим средством, которое мы используем в доказательствах.

3.3. Алгебра Ли D_2

Мы собираемся доказать, что предположение индукции верно для D_n. База индукции — случай $n = 2$. Таким образом мы начинаем с алгебры Ли типа $D_2 = A_1 + A_1$.

Пусть β_1, β_2 — простые корни D_2. Имеем:

$$\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Пронумеруем положительные корни D_2 следующим образом:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Мы сравниваем сигнатуры $\sigma = (\lambda; p_1, p_2)$ с фиксированным старшим весом λ с помощью лексикографического порядка на наборах (p_2, p_1).

Существенные сигнатуры старшего веса ω_1 имеют вид (старший вес опущен):

$$1.\ (0,0) \quad 2.\ (1,0).$$

Существенные сигнатуры старшего веса ω_2 имеют вид (старший вес опущен):

$$1.\ (0,0) \quad 2.\ (0,1).$$

***Лемма* 3.3.** *Предположение индукции верно для D_2.*

Доказательство. Зафиксируем некоторый доминантный вес $\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$. Поскольку любое неприводимое представление алгебры $D_2 = A_1 + A_1$ является тензорным произведением неприводимых представлений A_1, имеем:

$$\dim V_{D_2}(k\omega_1 + l\omega_2) = \dim V_{A_1}(k\omega) \cdot \dim V_{A_1}(l\omega) = (k+1) \cdot (l+1),$$

где мы обозначили через ω фундаментальный вес A_1.

Очевидно, что любая сигнатура $(k\omega_1 + l\omega_2; p_1, p_2)$, где $p_1 = 0, \ldots, k$, $p_2 = 0, \ldots, l$, представима в виде суммы существенных сигнатур старших весов ω_1 и ω_2. Число таких сигнатур в точности $(k+1)\cdot(l+1)$. Следовательно, $\Sigma_{D_2} = \Sigma^f$. Более того, любая существенная сигнатура представима в виде суммы существенных сигнатур фундаментальных старших весов единственным образом. Полугруппа Σ_{D_2} задается следующими неравенствами:

1. $k \geq 0$,
2. $l \geq 0$,
3. $p_1 \leq k$,
4. $p_2 \leq l$.

Аргументы выше показывают, что свойства $(*)$, $(**)$, $(\dagger)$ верны и Σ_{D_2} насыщена. $\square$

Таким образом мы можем начинать индуктивную процедуру с D_2.

3.4. Переход от D_n к B_n

В этом разделе мы считаем, что зафиксированы такие мономиальный порядок на сигнатурах и нумерация положительных корней для D_n, что предположение индукции для D_n верно.

Мы доказываем, что Σ_{B_n} насыщена и свойства $(*)$, $(**)$ выполнены для B_n с

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}\} = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n\},$$

где мы обозначили фундаментальные веса для B_n теми же буквами, что и для D_n.

Мы делаем шаг индукции, доказывая предположение индукции для D_{n+1} в следующем разделе.

Имеется стандартное регулярное вложение SO_{2n} в SO_{2n+1}, при котором имеет место следующее разложение D_n-модулей:

$$V_{B_n}(\omega_1) = V_{D_n}(\omega_1) \oplus \langle e_0 \rangle.$$

Поскольку D_n и B_n имеют одинаковую подалгебру Картана, мы можем рассматривать любой корень D_n как корень B_n.

Сперва мы хотим продлить мономиальный порядок и нумерацию положительных корней с D_n на B_n. Мы нумеруем короткие положительные корни B_n после длинных, которые, в свою очередь, являются положительными корнями D_n:

$$\text{положительные корни } D_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n.$$

Мы продолжаем мономиальный порядок следующим образом (на сигнатурах фиксированного старшего веса):

$$(\sigma, k_1, \ldots, k_n) < (\sigma', k_1', \ldots, k_n'),$$

если либо $(k_1, \ldots, k_n) < (k_1', \ldots, k_n')$ в смысле степенного лексикографического порядка, либо $(k_1, \ldots, k_n) = (k_1', \ldots, k_n')$ и $\sigma < \sigma'$ в D_n.

Сейчас мы собираемся описать множества существенных сигнатур B_n старших весов λ_i. Для любой сигнатуры σ алгебры D_n мы рассматриваем набор ее экспонент $\overline{\sigma}$ как набор $(\overline{\sigma}, 0, \ldots, 0)$ для B_n.

***Лемма* 3.4.**

$$\overline{\Sigma}_{B_n}(\omega_p) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_p) \sqcup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-1}) + \overline{\varepsilon}_p), \quad p = 1, \ldots, n,$$

$$\overline{\Sigma}_{B_n}(2\omega_n) = (\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \overline{\varepsilon}_n) \sqcup (\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1}) + 2\overline{\varepsilon}_n) \sqcup \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n),$$

где $\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_0) := \{(0, \ldots, 0)\}$.

Доказательство. Для любого $p < n$ имеем разложение D_n-модулей:

$$V_{B_n}(\omega_p) = \bigwedge\nolimits^p \mathbb{C}^{2n+1} = \bigwedge\nolimits^p \mathbb{C}^{2n} \oplus e_0 \wedge \bigwedge\nolimits^{p-1} \mathbb{C}^{2n} = V_{D_n}(\widehat{\omega}_p) \oplus e_0 \wedge V_{D_n}(\omega_{p-1}),$$

где первое слагаемое порождено векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_p)$, а второе слагаемое порождено векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-1}) + \overline{\varepsilon}_p$. Сигнатуры σ, у которых $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_p)$, являются существенными для продленного мономиального порядка, поскольку они имеют нулевые координаты, отвечающие коротким корням ε_i. Сигнатуры σ, у которых $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-1}) + \overline{\varepsilon}_p$, являются минимальными сигнатурами среди тех, для которых векторы $v(\sigma)$ линейно порождают $V_{B_n}(\omega_p)$ по модулю $V_{D_n}(\widehat{\omega}_p)$, поэтому они существенные. Это доказывает первое равенство при $p < n$.

Теперь мы хотим доказать равенство:

$$\overline{\Sigma}_{B_n}(\omega_n) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_n) \sqcup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon}_n).$$

Имеем разложение D_n-модулей:

$$V_{B_n}(\omega_n) = V_{D_n}(\omega_n) \oplus V_{D_n}(\omega_{n-1}),$$

где первое слагаемое порождено векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_n)$, а второе слагаемое порождено векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon}_n$. Сигнатуры σ, у которых $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_n)$, являются существенными для D_n и имеют нулевые координаты, отвечающие корням ε_i, поэтому они существенные для продленного мономиального порядка. Сигнатуры σ, у которых $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon}_n$, являются минимальными среди тех сигнатур, для которых векторы $v(\sigma)$ линейно порождают $V_{B_n}(\omega_n)$ по модулю $V_{D_n}(\omega_n)$, поэтому они существенные.

Последнее равенство, которое нам нужно доказать, имеет вид:

$$\overline{\Sigma}_{B_n}(2\omega_n) = (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}+\omega_n) + \overline{\varepsilon}_n) \sqcup (\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1}) + 2\overline{\varepsilon}_n) \cup \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n).$$

Имеем

$$V_{B_n}(2\omega_n) = \bigwedge\nolimits^n \mathbb{C}^{2n+1} = \bigwedge\nolimits^n \mathbb{C}^{2n} \oplus e_0 \wedge \bigwedge\nolimits^{n-1} \mathbb{C}^{2n}.$$

Более того, $\bigwedge^n \mathbb{C}^{2n} = V_{D_n}(2\omega_{n-1}) \oplus V_{D_n}(2\omega_n)$. Поэтому

$$V_{B_n}(2\omega_n) = e_0 \wedge V_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) \oplus V_{D_n}(2\omega_{n-1}) \oplus V_{D_n}(2\omega_n).$$

Рассуждения, близкие к предыдущим, завершают доказательство. □

По Лемме 3.4 у нас есть биективные отображения (мы забываем экспоненты, отвечающие корням ε_i):

$$\psi : \Sigma_{B_n}(\omega_p) \to \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_p) \sqcup \Sigma_{D_n}(\omega_{p-1}), \quad p = 1, \ldots, n,$$

$$\psi : \Sigma_{B_n}(2\omega_n) \to \Sigma_{D_n}(\omega_{n-1}+\omega_n) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_n).$$

Предположим, что у нас есть два разложения некоторой сигнатуры σ алгебры B_n старшего веса $\lambda = \sum k_i\omega_i = \sum l_i\varepsilon_i$:

$$\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k = \sigma'_1 + \ldots + \sigma'_l,$$

где σ_i и σ'_j — существенные сигнатуры B_n со старшими весами в $\{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n\}$. Тогда мы можем применить отображение ψ к этим разложениям и получим две сигнатуры алгебры D_n:

$$\psi(\sigma_1) + \ldots + \psi(\sigma_k) \quad \text{и} \quad \psi(\sigma'_1) + \ldots + \psi(\sigma'_l).$$

Мы утверждаем, что эти две сигнатуры совпадают. Очевидно, эти две сигнатуры имеют одинаковые экспоненты, поэтому мы должны проверить, что у них совпадают старшие веса. Обозначим через s_i координаты σ, отвечающие корням ε_i. Легко видеть, что старшие веса обеих сигнатур D_n есть $\sum k'_i\omega_i = \sum l'_i\varepsilon_i$, где $l'_i = l_i - s_i$. Следовательно,

$$k_i' = k_i - s_i + s_{i+1}, \quad i < n, \quad k_n' = k_{n-1} - s_{n-1} + k_n - s_n. \tag{3.3}$$

Поэтому старшие веса совпадают и

$$\psi(\sigma_1) + \ldots + \psi(\sigma_k) = \psi(\sigma_1') + \ldots + \psi(\sigma_l').$$

Таким образом, мы имеем корректно определенный сюръективный гомоморфизм полугрупп:

$$\psi : \Sigma_{B_n}^{(\cdot)} \to \Sigma_{D_n}^{(\cdot)}.$$

Из равенств (3.3) следует, что для любых $\sigma, \sigma' \in \Sigma_{B_n}^{(\cdot)}$, если $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$, и σ, σ' имеют одинаковый старший вес, то $\sigma = \sigma'$.

Заметим, что по лемме 3.4 для любой сигнатуры $\sigma \in \Sigma_{B_n}^{(\cdot)}$ выполняются неравенства $k_i \geq s_i$.

Пусть $\tau \in \Sigma_{D_n}^{(\cdot)}$ — произвольная сигнатура старшего веса $\sum k_i'\omega_i$, s_i — некоторые неотрицательные целые числа, а k_i — целые числа, определенные уравнениями (3.3).

***Лемма* 3.5.** *Пусть $k_i \geq s_i$. Тогда существует единственная сигнатура $\sigma \in \Sigma_{B_n}^{(\cdot)}$ старшего веса $\sum k_i\omega_i$, такая что $\psi(\sigma) = \tau$, и числа s_i являются экспонентами σ, отвечающими корням ε_i.*

Мы называем числа s_i *параметрами подъема* для τ.

Доказательство. Очевидно, что если сигнатура σ существует, то она единственна.

Неравенства $k_i \geq s_i$, где $k_i, s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, задают конус в $\mathbb{R}^{2n}$. Полугруппа целых точек в этом конусе порождена следующими векторами, которые описаны ниже значениями своих ненулевых координат:

1. $k_i = 1$ (n векторов при $i = 1, \ldots, n$),

2. $k_i = s_i = 1$ (n векторов при $i = 1, \ldots, n$).

Мы можем рассматривать эти векторы и, следовательно, любую целую точку в конусе, как набор экспонент существенной сигнатуры алгебры B_n старшего веса $\sum k_i\omega_i$ с экспонентами s_i, отвечающими коротким корням, и нулевыми экспонентами, отвечающими длинным корням.

Поскольку выполнено свойство ($\dagger$) для D_n мы можем зафиксировать некоторое разложение сигнатуры $\tau = \tau_1 + \ldots + \tau_m$, где τ_i — существенные сигнатуры со старшими весами в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \widehat{\omega}_{n-1}, \omega_{n-1}, 2\omega_{n-1}\}$ или в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \widehat{\omega}_{n-1}, \omega_n, 2\omega_n\}$. Пусть $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 + \ldots + \tilde{\sigma}_p$ — разложение сигнатуры старшего веса $\sum k_i\omega_i$ с нулевыми экспонентами, отвечающими длинным корням, и экспонентами s_i, отвечающими коротким корням, в сумму сигнатур $\tilde{\sigma}_i$ фундаментальных старших весов, отвечающих порождающим векторам полугруппы целых точек. Сигнатуры $\psi(\tilde{\sigma})$ и τ имеют одинаковый старший вес. Следовательно, для любой сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$ старшего веса $\omega_j, j < n-1$ можно найти сигнатуру τ_k, такую что $\psi(\tilde{\sigma}_i)$ и τ_k имеют одинаковый старший вес. Этот факт также верен для сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$ со старшим весом ω_{n-1} в силу нашего выбора разложения для τ. Комбинируя (если необходимо) некоторые пары сигнатур $\tilde{\sigma}_i$ старшего веса ω_n в сигнатуры старшего веса $\widehat{\omega}_n$, можно получить разложение с $p = m$, такое что $\psi(\tilde{\sigma}_i)$ и τ_i имеют одинаковый старший вес. По лемме 3.4 существует существенная сигнатура σ_i, такая что σ_i и $\tilde{\sigma}_i$ имеют одинаковый старший вес, экспоненты, отвечающие коротким корням, и $\psi(\sigma_i) = \tau_i$. Положим $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m$. □

***Следствие* 3.6.** *Для любой сигнатуры $\sigma \in \Sigma^{(\cdot)}_{B_n}$ и любого разложения сигнатуры $\psi(\sigma) = \tau_1+\ldots+\tau_m$, где все $\tau_i \in \Sigma'_{D_n}$ или все $\tau_i \in \Sigma''_{D_n}$, существует такое разложение $\sigma = \sigma_1+\ldots+\sigma_m$, что $\psi(\sigma_i) = \tau_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Следует из доказательства леммы 3.5. □

***Лемма* 3.7.** *Свойство $(*)$ выполнено для $\Sigma^{(\cdot)}_{B_n}$.*

Доказательство. Для произвольной сигнатуры σ алгебры B_n мы обозначаем через $s_i(\sigma)$ экспоненты σ, отвечающие корням ε_i. Предположим, что у нас есть два разложения некоторой сигнатуры $\sigma \in \Sigma^{(\cdot)}_{B_n}$ старшего веса $\lambda = \sum k_i\omega_i$:

$$\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k = \sigma'_1 + \ldots + \sigma'_l,$$

где σ_i и σ'_j — существенные сигнатуры алгебры B_n со старшими весами в $\{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n\}$.

Применим отображение ψ к этим разложениям:

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1) + \ldots + \psi(\sigma_k) = \psi(\sigma'_1) + \ldots + \psi(\sigma'_l).$$

Из свойства (†) следует, что применяя допустимые операции к этим разложениям, можно получить другие два разложения сигнатуры $\psi(\sigma)$, такие что все сигнатуры лежат в Σ'_{D_n} или в Σ''_{D_n}. В самом деле, можно заменить пару сигнатур со старшими весами $\{\omega_{n-1}, \omega_n\}$, $\{2\omega_{n-1}, 2\omega_n\}$, $\{2\omega_{n-1}, \omega_n\}$, $\{\omega_{n-1}, 2\omega_n\}$ на сигнатуру со старшим весом $\widehat{\omega}_{n-1}$ в первом случае или на пару сигнатур с весами $\{\widehat{\omega}_{n-1}, \widehat{\omega}_{n-1}\}$, $\{\widehat{\omega}_{n-1}, \omega_{n-1}\}$, $\{\widehat{\omega}_{n-1}, \omega_n\}$, соответственно. По следствию 3.6 мы можем поднять любую такую допустимую операцию в B_n. Таким образом, мы можем считать, что все сигнатуры $\psi(\sigma_i), \psi(\sigma'_j)$ лежат в Σ'_{D_n} или в Σ''_{D_n}.

Поскольку для Σ'_{D_n} и Σ''_{D_n} выполнено свойство $(*)$, и любая допустимая операция над разложениями сигнатур из Σ'_{D_n} или из Σ''_{D_n} поднимается до допустимой операции в $\Sigma^{(\cdot)}_{B_n}$, мы можем считать, что $k = l$ и

$$\psi(\sigma_1) = \psi(\sigma'_1), \quad \ldots, \quad \psi(\sigma_l) = \psi(\sigma'_l).$$

Можно считать, что в разложении σ нет сигнатур со старшим весом ω_n. В самом деле, если σ_1 имеет старший вес ω_n, то по лемме 3.4 σ'_1 также имеет старший вес ω_n, а тогда $\sigma_1 = \sigma'_1$, и мы можем завершить доказательство индукцией по l. Аналогично, можно считать, что нет сигнатур старшего веса $\widehat{\omega}_n$ с $s_n = 0$ или $s_n = 2$.

Пусть σ_1 имеет старший вес $\widehat{\omega}_j$, причем $k_i = 0, i < j$. Тогда либо $\sigma'_1 = \sigma_1$, и доказательство завершается по индукции, либо σ'_1 имеет старший вес $\widehat{\omega}_{j+1}$ и $s_{j+1}(\sigma'_1) = 1$. Тогда существует такая сигнатура в левом разложении σ, скажем σ_2, со старшим весом $\widehat{\omega}_{j+1}$, что $s_{j+1}(\sigma_2) = 1$. Мы меняем местами экспоненты σ_1 и σ_2, отвечающие длинным корням, и получаем две новые сигнатуры $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$. Очевидно, $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_1'$ и по лемме 3.4 $\tilde{\sigma}_1$ существенная. Следовательно, замена пары сигнатур σ_1, σ_2 на пару сигнатур $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ является допустимой операцией. Индукция по l завершает доказательство. □

***Лемма* 3.8.** *Свойство* $(**)$ *выполнено для* $\Sigma_{B_n}^{(\cdot)}$.

Доказательство. Для доказательства свойства $(**)$ мы посчитаем число сигнатур в $\Sigma_{B_n}(\lambda_p) + \Sigma_{B_n}(\lambda_q)$ и сравним его с $\dim V_{B_n}(\lambda_p + \lambda_q)$ для всех пар λ_p, λ_q, кроме $\lambda_p = \lambda_q = \omega_n$.

Рассмотрим, например, пару ω_p, ω_q. По лемме 3.4 мы имеем следующие равенства:

$$|\Sigma_{B_n}(\omega_p) + \Sigma_{B_n}(\omega_q)| = |\Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_p + \widehat{\omega}_q)| + |\Sigma_{D_n}(\omega_{p-1} + \widehat{\omega}_q)| + \\ + |\Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_p + \omega_{q-1})| + |\Sigma_{D_n}(\omega_{p-1} + \omega_{q-1})|, \quad p \neq q;$$

$$|\Sigma_{B_n}(\omega_p) + \Sigma_{B_n}(\omega_p)| = |\Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_p + \widehat{\omega}_p)| + |\Sigma_{D_n}(\omega_{p-1} + \widehat{\omega}_p)| + |\Sigma_{D_n}(\omega_{p-1} + \omega_{p-1})|.$$

Поскольку свойство $(**)$ выполнено для Σ'_{D_n} и Σ''_{D_n}, мы должны проверить следующие равенства:

1. $\dim V_{B_n}(\omega_p + \omega_q) = \dim V_{D_n}(\widehat{\omega}_p + \widehat{\omega}_q) + \dim V_{D_n}(\widehat{\omega}_p + \omega_{q-1}) + \dim V_{D_n}(\omega_{p-1} + \widehat{\omega}_q) +$
$$+ \dim V_{D_n}(\omega_{p-1} + \omega_{q-1}), \quad p \neq q;$$
2. $\dim V_{B_n}(2\omega_p) = \dim V_{D_n}(2\widehat{\omega}_p) + \dim V_{D_n}(\widehat{\omega}_p + \omega_{p-1}) + \dim V_{D_n}(2\omega_{p-1})$.

Легко проверить, что равенства выше являются тождествами.

Мы используем те же рассуждения для пар $2\omega_n, \omega_p$, $p \neq n$. Для пар $2\omega_n$, $2\omega_n$ и $2\omega_n, \omega_n$ мы дополнительно используем свойство (†), из которого следует, что

$$\Sigma_{D_n}(2\omega_{n-1}) + \Sigma_{D_n}(2\omega_n) \subset \Sigma_{D_n}(2\widehat{\omega}_{n-1}) = \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}),$$

$$\Sigma_{D_n}(2\omega_{n-1}) + \Sigma_{D_n}(\omega_n) \subset \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1} + \omega_{n-1}) = \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \Sigma_{D_n}(\omega_{n-1}),$$

$$\Sigma_{D_n}(2\omega_n) + \Sigma_{D_n}(\omega_{n-1}) \subset \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1} + \omega_n) = \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \Sigma_{D_n}(\omega_n).$$

В [1, Справ. разд., §2, Таблица 5] можно найти формулы для размерностей $\dim V_{B_n}(\lambda_i + \lambda_j)$ и $\dim V_{D_n}(\lambda_i + \lambda_j)$. Легко проверяется, что аналогичные равенства для оставшихся пар λ_i, λ_j также верны. Поэтому свойство $(**)$ выполнено. Заметим, что эти равенства также следуют из правил ветвления для ортогональных алгебр Ли [3, Глава XVIII, §129]. □

***Следствие* 3.9.** *Полугруппа существенных сигнатур для* B_n *порождена существенными сигнатурами со старшими весами в* $\{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n\}$.

Обозначим через $(\sharp')$ неравенства, которые задают полугруппу Σ_{D_n}. Пусть $\sum k_i'\omega_i$ обозначает старший вес сигнатуры D_n. Обозначим через $(\natural)$ неравенства, полученные из $(\sharp')$ заменой k_i' на k_i, s_i по формулам (3.3).

***Предложение* 3.10.** *Полугруппа Σ_{B_n} задается неравенствами ($\natural$) и $k_i \geq s_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma_{B_n}$ — сигнатура старшего веса $\sum k_i\omega_i$. Тогда по следствию 3.9 имеем $\sigma \in \Sigma_{B_n}^{(\cdot)}$. Значит неравенства $k_i \geq s_i$ выполнены, где s_i — экспоненты, отвечающие коротким корням. Неравенства ($\natural$) выполнены, потому что неравенства ($\sharp'$) выполнены для $\psi(\sigma)$.

Обратно, пусть неравенства ($\natural$) и $k_i \geq s_i$ выполнены для некоторой сигнатуры σ старшего веса $\sum k_i\omega_i$. Пусть τ — такая сигнатура D_n старшего веса $\sum k_i'\omega_i$, где k_i' определены равенствами (3.3), что τ и σ имеют одинаковые экспоненты, отвечающие длинным корням. Сигнатура τ существенная, так как неравенства ($\sharp'$) выполнены. Тогда, поскольку неравенства $k_i \geq s_i$ выполнены, можно поднять сигнатуру τ до сигнатуры σ' старшего веса $\sum k_i\omega_i$ с параметрами подъема s_i по лемме 3.5. Очевидно, что $\sigma = \sigma'$. Поэтому $\sigma \in \Sigma_{B_n}$. $\square$

***Следствие* 3.11.** *Полугруппа Σ_{B_n} насыщена.*

3.5. Переход от D_n к D_{n+1}

В этом разделе мы делаем шаг индукции. Мы предполагаем, что зафиксированы такие мономиальный порядок на сигнатурах и нумерация положительных корней для D_n, что предположение индукции выполняется для D_n. Мы доказываем предположение индукции для D_{n+1}.

Имеется стандартное регулярное вложение D_n в D_{n+1}, при котором имеет место следующее разложение D_n-модулей:

$$V_{D_{n+1}}(\omega_1) = V_{D_n}(\omega_1) \oplus \langle e_{n+1}\rangle \oplus \langle e_{-(n+1)}\rangle.$$

Поскольку подалгебра Картана D_{n+1} содержит подалгебру Картана D_n и нормализует D_n, мы можем рассматривать корни D_n как корни D_{n+1}. Сперва мы хотим продлить мономиальный порядок и нумерацию положительных корней с D_n на D_{n+1}. Мы продолжаем нумерацию корней следующим образом:

$$\text{положительные корни } D_n, \varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_1 + \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}.$$

Мы продолжаем мономиальный порядок следующим образом (на сигнатурах фиксированного старшего веса):

$$(\overline{\sigma}, k_1, \ldots, k_{n+1}, l_1, \ldots, l_{n+1}) < (\overline{\sigma}', k_1', \ldots, k_{n+1}', l_1', \ldots, l_{n+1}'),$$

если либо $(l_1, \ldots, l_{n+1}) < (l_1', \ldots, l_{n+1}')$ в смысле степенного лексикографического порядка, либо $(l_1, \ldots, l_{n+1}) = (l_1', \ldots, l_{n+1}')$ и $(k_1, \ldots, k_{n+1}) < (k_1', \ldots, k_{n+1}')$ в смысле степенного лексикографического порядка, либо $(k_1, \ldots, k_{n+1}, l_1, \ldots, l_{n+1}) = (k_1', \ldots, k_{n+1}', l_1', \ldots, l_{n+1}')$ и $\sigma < \sigma'$ в смысле мономиального порядка для D_n.

Сейчас мы собираемся описать множества существенных сигнатур D_{n+1} старших весов λ_i. Для любой сигнатуры σ алгебры D_n мы рассматриваем ее набор экспонент $\overline{\sigma}$ как набор $(\overline{\sigma}, 0, \ldots, 0)$ для D_{n+1}.

Лемма **3.12.**

$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(\omega_p) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_p) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-1}) + \overline{\varepsilon_p - \varepsilon_{n+1}}) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-1}) + \overline{\varepsilon_p + \varepsilon_{n+1}}) \cup$$
$$\cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-2}) + \overline{\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_{n+1}} + \overline{\varepsilon_p + \varepsilon_{n+1}}), \quad p < n;$$

$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(\omega_n) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}),$$
$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(\omega_{n+1}) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}),$$
$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(2\omega_n) = \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1}) + 2(\overline{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}})),$$
$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(2\omega_{n+1}) = \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1}) + 2(\overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}})),$$

$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(\widehat{\omega}_n) = \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}} + \overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}) \cup$$
$$\cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}) \cup$$
$$\cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-2}) + \overline{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n+1}} + \overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}),$$

$$\text{где} \quad \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_0) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{-1}) := \{(0, \ldots, 0)\},$$
$$\overline{\varepsilon_0 - \varepsilon_{n+1}} := (0, \ldots, 0).$$

Доказательство. Для любого $p < n$ имеем имеем разложение D_n-модулей:

$$V_{D_{n+1}}(\omega_p) = V_{D_n}(\widehat{\omega}_p) \oplus e_{n+1} \wedge V_{D_n}(\omega_{p-1}) \oplus e_{-(n+1)} \wedge V_{D_n}(\omega_{p-1}) \oplus e_{n+1} \wedge e_{-(n+1)} \wedge V_{D_n}(\omega_{p-2}),$$

где первое слагаемое порождено векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_p)$, второе и третье слагаемые порождены векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-1}) + \overline{\varepsilon_p \mp \varepsilon_{n+1}}$ соответственно, а последнее слагаемое порождено по модулю предыдущих слагаемых векторами $v(\sigma), \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{p-2}) + \overline{\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_{n+1}} + \overline{\varepsilon_p + \varepsilon_{n+1}}$. Можно показать, что все эти сигнатуры σ существенные по отношению к продленному мономиальному порядку, используя аргументы, как в лемме 3.4. Следовательно, первое равенство верно.

Следующие два равенства похожи на равенства из леммы 3.4:

$$\overline{\Sigma}_{B_n}(\omega_n) = \overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\omega_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n}),$$

Мы доказываем их, используя аргументы из леммы 3.4, заменяя ε_n на $\varepsilon_n \pm \varepsilon_{n+1}$.

Теперь мы доказываем равенство

$$\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(2\omega_{n+1}) = \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) + \overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}) \cup (\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1}) + 2(\overline{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}})).$$

Старший вектор $V_{D_n}(2\omega_n)$ суть $v_{2\omega_n} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, а старший вектор $V_{D_{n+1}}(2\omega_{n+1})$ суть $v_{2\omega_n} \wedge e_{n+1}$. Сигнатуры $\sigma, \overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n)$ имеют нулевые экспоненты, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$, следовательно они минимальны среди тех сигнатур, для которых $v(\sigma)$ порождают $V_{D_n}(2\omega_n) \wedge e_{n+1}$. Поэтому они существенные для продленного мономиального порядка.

Сигнатуры σ, у которых экспонента, отвечающая корню $\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}$, равна единице, суть минимальные сигнатуры весов $\sum_{i=1}^n k_i\varepsilon_i+0\cdot\varepsilon_{n+1}$, $k_i\in\{-1,0,1\}$. Применяя понижающий оператор, отвечающий корню $\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}$, к старшему вектору $e_1\wedge\ldots\wedge e_{n+1}$, получаем вектор $e_1\wedge\ldots\wedge e_{n-1}\wedge e_{-n}\wedge e_n+e_1\wedge\ldots\wedge e_{n-1}\wedge e_{-(n+1)}\wedge e_{n+1}$. Второе слагаемое имеет вид $v_{\widehat{\omega}_{n-1}}\wedge e_{-(n+1)}\wedge e_{n+1}$, где $v_{\widehat{\omega}_{n-1}}$ — старший вектор для $V_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})$. Векторы $v(\sigma)$, $\overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})+\overline{\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}}$ порождают $V_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})\wedge e_{-(n+1)}\wedge e_{n+1}$ по модулю $\bigwedge^n\mathbb{C}^{2n}$, где $\mathbb{C}^{2n}=\langle e_{\pm1},\ldots,e_{\pm n}\rangle$. Поэтому соответствующие сигнатуры существенные.

Аналогично, сигнатуры σ, у которых экспонента, отвечающая корню $\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}$, равна двойке, суть минимальные сигнатуры весов $\sum_{i=1}^n k_i\varepsilon_i-\varepsilon_{n+1}$, $k_i\in\{-1,0,1\}$. Применяя два понижающих оператора, отвечающих корню $\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}$, к старшему вектору $e_1\wedge\ldots\wedge e_{n+1}$, получаем вектор $e_1\wedge\ldots\wedge e_{n-1}\wedge e_{-n}\wedge e_{-(n+1)}=v_{2\omega_{n-1}}\wedge e_{-(n+1)}$, где $v_{2\omega_{n-1}}$ — старший вектор для $V_{D_n}(2\omega_{n-1})$. Векторы $v(\sigma)$, $\overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1})+2(\overline{\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}})$ порождают $V_{D_n}(2\omega_{n-1})\wedge e_{-(n+1)}$. Поэтому соответствующие сигнатуры существенные.

Таким образом все сигнатуры в правой части являются существенными. По второму равенству из леммы 3.4 число этих сигнатур равно $\dim V_{B_n}(2\omega_n)$. Поскольку $\dim V_{B_n}(2\omega_n)=$ $=\dim V_{D_{n+1}}(2\omega_{n+1})$ мы нашли все существенные сигнатуры старшего веса $2\omega_{n+1}$. Доказательство для $\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(2\omega_n)$ аналогично.

Доказательство последнего равенства аналогично доказательству первого. Имеем разложение D_n-модулей:

$$V_{D_{n+1}}(\widehat{\omega}_n)=V_{D_n}(2\omega_n)\oplus V_{D_n}(2\omega_{n-1})\oplus e_{n+1}\wedge V_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})\oplus \\ \oplus e_{-(n+1)}\wedge V_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})\oplus e_{n+1}\wedge e_{-(n+1)}\wedge V_{D_n}(\omega_{n-2}),$$

аналогичное разложению для первого равенства, где первое слагаемое в правой части $V_{D_n}(\widehat{\omega}_p)=\bigwedge^p\mathbb{C}^{2n}$ заменено на $V_{D_n}(2\omega_n)\oplus V_{D_n}(2\omega_{n-1})=\bigwedge^n\mathbb{C}^{2n}$. □

***Лемма* 3.13.** *Свойство* $(\dagger)$ *выполнено для* D_{n+1}.

Доказательство. Достаточно показать, что сумма любых двух сигнатур со старшими весами в $\{\omega_n,\omega_{n+1},2\omega_n,2\omega_{n+1},\widehat{\omega}_n\}$ принадлежит $\Sigma'_{D_{n+1}}$ или $\Sigma''_{D_{n+1}}$.

Пусть, например, $\sigma\in\Sigma_{D_{n+1}}(2\omega_n)$ и $\sigma'\in\Sigma_{D_{n+1}}(2\omega_{n+1})$. Тогда по предыдущей лемме имеем:

$$\overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n),\ \text{или}\ \overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})+\overline{\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}},\ \ \text{или}\ \overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1})+2(\overline{\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}})$$

и

$$\overline{\sigma}'\in\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_n),\ \text{или}\ \overline{\sigma}'\in\overline{\Sigma}_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1})+\overline{\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}},\ \text{или}\ \overline{\sigma}'\in\overline{\Sigma}_{D_n}(2\omega_{n-1})+2(\overline{\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}}).$$

Из свойства $(\dagger)$ для D_n и описания $\overline{\Sigma}_{D_{n+1}}(\widehat{\omega}_n)$ следует, что в любом случае

$$\sigma+\sigma'\in\Sigma_{D_{n+1}}(\widehat{\omega}_n)+\Sigma_{D_{n+1}}(\widehat{\omega}_n).$$

Поэтому $\sigma+\sigma'$ принадлежит обоим $\Sigma'_{D_{n+1}}$ и $\Sigma''_{D_{n+1}}$.

Разбор остальных случаев аналогичен. □

По лемме 3.12 у нас есть сюръективные отображения (мы забываем экспоненты, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$):

$$\psi : \Sigma_{D_{n+1}}(\omega_p) \to \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_p) \sqcup \Sigma_{D_n}(\omega_{p-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(\omega_{p-2}), \quad p < n,$$

$$\psi : \Sigma_{D_{n+1}}(\omega_n) \to \Sigma_{D_n}(\omega_n) \sqcup \Sigma_{D_n}(\omega_{n-1}),$$

$$\psi : \Sigma_{D_{n+1}}(\omega_{n+1}) \to \Sigma_{D_n}(\omega_n) \sqcup \Sigma_{D_n}(\omega_{n-1}),$$

$$\psi : \Sigma_{D_{n+1}}(2\omega_n) \to \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_n),$$

$$\psi : \Sigma_{D_{n+1}}(2\omega_{n+1}) \to \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_n),$$

$$\psi : \Sigma_{D_{n+1}}(\widehat{\omega}_n) \to \Sigma_{D_n}(2\omega_n) \sqcup \Sigma_{D_n}(2\omega_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(\widehat{\omega}_{n-1}) \sqcup \Sigma_{D_n}(\omega_{n-2}).$$

Как и в предыдущем разделе мы можем продлить эти отображения до гомоморфизма полугрупп $\psi : \Sigma^{(\cdot)}_{D_{n+1}} \to \Sigma^{(\cdot)}_{D_n}$. В самом деле, предположим, что у нас есть два разложения некоторой сигнатуры σ со старшим весом $\lambda = \sum k_i\omega_i$ в $\Sigma^{(\cdot)}_{D_{n+1}}$:

$$\sigma_1 + \ldots + \sigma_k = \sigma'_1 + \ldots + \sigma'_l,$$

где σ_i и σ'_j — существенные сигнатуры D_{n+1} со старшими весами в

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}, 2\omega_n, 2\omega_{n+1}, \widehat{\omega}_n\}.$$

Тогда мы можем применить отображение ψ к этим разложениям и получить две сигнатуры в $\Sigma^{(\cdot)}_{D_n}$:

$$\psi(\sigma_1) + \ldots + \psi(\sigma_k) \quad \text{и} \quad \psi(\sigma'_1) + \ldots + \psi(\sigma'_l).$$

Мы утверждаем, что эти две сигнатуры совпадают. Очевидно, эти две сигнатуры имеют одинаковые экспоненты, поэтому мы должны проверить, что у них совпадают старшие веса. Обозначим через $s_i^{\pm}$ экспоненты σ, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$ соответственно. Заметим, что если $\sum_{i=1}^{n+1} k_i\omega_i = \sum_{i=1}^{n+1} l_i\varepsilon_i$, то старший вес обеих сигнатур в $\Sigma^{(\cdot)}_{D_n}$ суть $\sum_{i=1}^{n} k'_i\omega_i = \sum_{i=1}^{n} l'_i\varepsilon_i$, где

$$l'_i = l_i - s_i^- - s_i^+, \quad i \leq n.$$

Отсюда легко вывести, что

$$\begin{aligned} k'_i &= k_i - s_i^- - s_i^+ + s_{i+1}^- + s_{i+1}^+, \quad i < n, \\ k'_n &= k_{n-1} + k_n + k_{n+1} - s_n^- - s_n^+ - s_{n-1}^- - s_{n-1}^+. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Значит

$$\psi(\sigma_1) + \ldots + \psi(\sigma_k) = \psi(\sigma'_1) + \ldots + \psi(\sigma'_l).$$

Следовательно, мы имеем корректно определенный сюръективный гомоморфизм полугрупп:

$$\psi : \Sigma^{(\cdot)}_{D_{n+1}} \to \Sigma^{(\cdot)}_{D_n}.$$

Заметим, что по лемме 3.12 для наборов $\{k_i\}, \{k'_i\}, \{s_i^-\}, \{s_i^+\}$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} s_i^+ &\leq k_i, \quad i < n, \\ s_i^- + s_i^+ - s_{i+1}^+ &\leq k_i, \quad i < n \\ s_{n-1}^+ + s_{n-1}^- + s_n^- &\leq k_{n-1} + k_n, \\ s_n^- &\leq k_n, \\ s_n^+ &\leq k_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Эти неравенства вместе с неравенствами $s_i^{\pm}, k_i \geq 0$ определяют конус $C \subset \mathbb{R}^{3n+1}$. Рассмотрим следующие целые векторы в этом конусе, описанные ниже значениями ненулевых координат:

$$\begin{aligned} &1. \quad k_i = 1 \quad (n+1 \quad \text{векторов при} \quad i = 1, \ldots, n+1), \\ &2. \quad k_i = s_i^+ = 1 \quad (n-1 \quad \text{векторов при} \quad i = 1, \ldots, n-1), \\ &3. \quad k_i = s_i^- = 1 \quad (n \quad \text{векторов при} \quad i = 1, \ldots, n), \\ &4. \quad k_i = s_i^+ = s_{i-1}^- = 1 \quad (n-2 \quad \text{векторов при} \quad i = 2, \ldots, n-1), \\ &5. \quad k_{n+1} = s_n^+ = 1, \\ &6. \quad k_{n+1} = k_n = s_n^+ = s_{n-1}^- = 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

***Лемма* 3.14.** *Векторы* (3.6) *порождают полугруппу целых точек в конусе* C.

Доказательство. Мы начинаем с произвольной целой точки в конусе. Таким образом мы имеем наборы неотрицательных целых чисел $\{k_i\}, \{s_i^{\pm}\}$, удовлетворяющие неравенствам (3.5). Мы покажем, что можно вычесть один из векторов (3.6), чтобы снова получить целую точку в конусе. Мы приводим пошаговый алгоритм ниже. На каждом шаге легко убедиться, что неравенства (3.5) выполняются после вычитания.

1. Вычитаем вектор 3 с $i = n$ до тех пор, пока $s_n^- = 0$.

2. Вычитаем вектор 5 до тех пор, пока

   $s_n^+ = 0$

   или

   $s_{n-1}^- + s_{n-1}^+ - s_n^+ = k_{n-1}$. В последнем случае четвертое неравенство следует из третьего. Более того, имеем $s_n^+ \leq s_{n-1}^-$, так как в противном случае $s_{n-1}^+ = k_{n-1} + s_n^+ - s_{n-1}^- > k_{n-1}$. Противоречие с первым неравенством при $i = n-1$. Затем вычитаем вектор 6 до тех пор, пока $s_n^+ = 0$.

3. Вычитаем вектор 1 с $i = n, n+1$ до тех пор, пока $k_n = k_{n+1} = 0$.

4. Вычитаем вектор 3 с $i = n-1$ до тех пор, пока $s_{n-1}^- = 0$.

5. Вычитаем вектор 2 с $i = n-1$ до тех пор, пока

   $s^+_{n-1} = 0$

   или

   $s^-_{n-2} + s^+_{n-2} - s^+_{n-1} = k_{n-2}$. В последнем случае имеем $s^+_{n-1} \leq s^-_{n-2}$, так как иначе $s^+_{n-2} = k_{n-2} + s^+_{n-1} - s^-_{n-2} > k_{n-2}$. Противоречие с первым неравенством при $i = n-2$. Затем вычитаем вектор 4 с $i = n-1$ до тех пор, пока $s^+_{n-1} = 0$.

6. Вычитаем вектор 1 с $i = n-1$ до тех пор, пока $k_{n-1} = 0$.

   ……

Мы повторяем шаги 4-6, уменьшая i на 1 каждый раз. □

Пусть $\tau \in \Sigma^{(\cdot)}_{D_n}$ — сигнатура старшего веса $\sum k'_i\omega_i$, $s^\pm_i$ — некоторые неотрицательные целые числа. Пусть k_i — целые числа, удовлетворяющие уравнениям (3.4).

***Лемма* 3.15.** *Предположим, что неравенства (3.5) выполнены. Тогда существует единственная сигнатура $\sigma \in \Sigma^{(\cdot)}_{D_{n+1}}$ со старшим весом $\sum k_i\omega_i$, такая что $\psi(\sigma) = \tau$, и числа $s^\pm_i$ являются экспонентами σ, отвечающими корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$ соответственно.*

Мы называем числа $s^\pm_i$ *параметрами подъема* для τ.

Доказательство. Очевидно, что если σ существует, то она единственна.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.5. Неравенства (3.5), где $s^\pm_i, k_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ определяют конус C. Полугруппа целых точек в C порождена векторами (3.6). Мы можем рассматривать эти векторы и, следовательно, любую целую точку в C как существенную сигнатуру D_{n+1} старшего веса $\sum k_i\omega_i$ с экспонентами $s^\pm_i$, отвечающими корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$, и нулевыми экспонентами, отвечающими другим корням.

Зафиксируем разложение сигнатуры $\tau = \tau_1 + \ldots + \tau_m$, где τ_i — существенные сигнатуры со старшими весами в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 2\omega_{n-1}, \widehat{\omega}_{n-1}\}$ или в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_n, 2\omega_n, \widehat{\omega}_{n-1}\}$.

Пусть $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 + \ldots + \tilde{\sigma}_p$ — разложение сигнатуры старшего веса $\sum k_i\omega_i$ с экспонентами $s^\pm_i$, отвечающими корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$ и с нулевыми экспонентами, отвечающими остальным корням, через сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$, отвечающие порождающим векторам полугруппы целых точек конуса C. Сигнатуры $\psi(\tilde{\sigma})$ и τ имеют одинаковый старший вес. Следовательно, для любой сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$ старшего веса $\omega_j, j < n$ можно найти такую сигнатуру τ_k, что $\psi(\tilde{\sigma}_i)$ и τ_k имеют одинаковый старший вес. Этот факт также верен для сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$ старшего веса $\widehat{\omega}_n$ в силу нашего выбора разложения для τ. Объединяя (если нужно) некоторые пары сигнатур $\tilde{\sigma}_i$ старших весов ω_n, ω_{n+1} в сигнатуры старших весов $\widehat{\omega}_n, 2\omega_n, 2\omega_{n+1}$, можно получить такое разложение с $p = m$, что $\psi(\tilde{\sigma}_i)$ и τ_i имеют одинаковый старший вес. По лемме 3.12 существует существенная сигнатура σ_i, такая что σ_i и $\tilde{\sigma}_i$ имеют одинаковый старший вес и экспоненты, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$, и $\psi(\sigma_i) = \tau_i$. Положим $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m$. □

***Следствие* 3.16.** *Для любой сигнатуры $\sigma \in \Sigma^{(\cdot)}_{D_{n+1}}$ и любого разложения сигнатуры $\psi(\sigma) = \tau_1 + \ldots + \tau_m$, где все сигнатуры τ_i имеют старший вес в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 2\omega_{n-1}, \widehat{\omega}_{n-1}\}$ (соотв. в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_n, 2\omega_n, \widehat{\omega}_{n-1}\}$) и не более одной сигнатуры имеет вес ω_{n-1} (соотв. ω_n), существует такое разложение $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m$, что все σ_i имеют старший вес в $\{\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n, \widehat{\omega}_n\}$ или в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_{n+1}, 2\omega_{n+1}, \widehat{\omega}_n\}$ и $\psi(\sigma_i) = \tau_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma'_{D_{n+1}}$ и все τ_i имеют старшие веса в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 2\omega_{n-1}, \widehat{\omega}_{n-1}\}$. Рассмотрим сигнатуру $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 + \ldots + \tilde{\sigma}_p$ из доказательства предыдущей леммы, где $\sum k_i\omega_i$ — старший вес σ, и $s_i^{\pm}$ — экспоненты σ, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$.

Из доказательства предыдущей леммы следует, что для любой сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$ старшего веса $\widehat{\omega}_j, j \leq n$ можно найти такую сигнатуру τ_k, что $\psi(\tilde{\sigma}_i)$ и τ_k имеют одинаковый старший вес. Мы хотим заменить все сигнатуры (кроме, возможно, одной) $\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j$ старших весов ω_{n+1}, ω_n или ω_n, ω_n на такие сигнатуры, скажем $\tilde{\sigma}'_i$, старших весов $\widehat{\omega}_n$ или $2\omega_n$, что $\psi(\tilde{\sigma}'_i)$ имеет тот же старший вес, как и некоторая сигнатура τ_k. Тогда мы сможем завершить доказательство аналогично предыдущей лемме. Значит мы можем считать, что все сигнатуры $\tilde{\sigma}_i$ имеют старший вес ω_n или ω_{n+1}.

Число сигнатур $\tilde{\sigma}_i$ со старшим весом ω_n больше, чем число сигнатур со старшим весом ω_{n+1}, так как $\sigma \in \Sigma'_{D_{n+1}}$. Значит можно разбить эти сигнатуры на пары $\{\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j\}$ так, что старшие веса сигнатур в каждой паре суть ω_n, ω_{n+1} или ω_n, ω_n, и у нас есть не более одной сигнатуры старшего веса ω_n без пары. Более того, мы можем считать, что в каждой такой паре старшие веса сигнатур $\psi(\tilde{\sigma}_i), \psi(\tilde{\sigma}_j)$ суть ω_{n-1}, ω_n или $\omega_{n-1}, \omega_{n-1}$, так как $\tau_i \in \Sigma'_{D_n}$, а $\psi(\tilde{\sigma})$ и $\psi(\sigma)$ имеют одинаковый старший вес. В самом деле, для каждой пары $\{\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j\}$, в которой старший вес обеих сигнатур $\psi(\tilde{\sigma}_i)$, $\psi(\tilde{\sigma}_j)$ равен ω_n, имеем пару $\{\tilde{\sigma}'_i, \tilde{\sigma}'_j\}$, в которой старший вес обеих сигнатур $\psi(\tilde{\sigma}'_i), \psi(\tilde{\sigma}'_j)$ равен ω_{n-1}. Можно поменять местами любые сигнатуры старших весов ω_n из первой и из второй пар. Мы заменяем сигнатуры в каждой паре на сигнатуру старшего веса $\widehat{\omega}_n$ или $2\omega_n$. Тогда ψ-образ любой такой сигнатуры имеет старший вес $\widehat{\omega}_{n-1}$ или $2\omega_{n-1}$, следовательно существует сигнатура τ_i с таким же старшим весом.

Если $\sigma \in \Sigma''_{D_{n+1}}$ и (или) τ_i имеют старшие веса в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_n, 2\omega_n, \widehat{\omega}_{n-1}\}$, то рассуждения аналогичны. □

Предположение о сигнатурах со старшим весом ω_{n-1} (соотв. ω_n) существенно. В самом деле, пусть σ имеет старший вес $\widehat{\omega}_n$, и $\psi(\sigma) = \tau_1 + \tau_2$, где τ_i имеют старший вес ω_n. Тогда утверждение неверно.

***Лемма* 3.17.** *Свойство $(*)$ выполнено для $\Sigma'_{D_{n+1}}$ и $\Sigma''_{D_{n+1}}$*

Доказательство. Для произвольной сигнатуры σ алгебры D_{n+1} мы обозначаем через $s_i^{\pm}(\sigma)$ экспоненты σ, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$.

Предположим, что мы имеем два разложения некоторой сигнатуры σ в D_{n+1}:

$$\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k = \sigma'_1 + \ldots + \sigma'_l,$$

где σ_i и σ'_j — существенные сигнатуры для D_{n+1} со старшими весами в

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n, 2\omega_n, \widehat{\omega}_n\}$$

или в

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_{n+1}, 2\omega_{n+1}, \widehat{\omega}_n\}.$$

Используя аргументы, аналогичные аргументам в лемме 3.7, а также следствие 3.16, можно свести доказательство к случаю $k = l$ и

$$\psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_1'), \quad \ldots \quad , \quad \psi(\sigma_l) = \psi(\sigma_l').$$

Более того, можно считать, что все $\psi(\sigma_i)$ имеют старшие веса в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 2\omega_{n-1}, \widehat{\omega}_{n-1}\}$ или в $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_n, 2\omega_n, \widehat{\omega}_{n-1}\}$.

Предположим, что $\psi(\sigma_1)$ имеет старший вес $\omega_m, m < n-1$. Можно считать, что среди $\psi(\sigma_i)$ нет сигнатур со старшим весом $\omega_i, i < m$. По лемме 3.12 старшие веса обеих сигнатур σ_1, σ_1' лежат в $\{\omega_m, \omega_{m+1}, \widehat{\omega}_{m+2}\}$. Если $\sigma_1 = \sigma_1'$, то индукция по l завершает доказательство. В оставшихся случаях мы приводим алгоритм получения сигнатуры σ_1' в левом разложении или сигнатуры σ_1 в правом разложении с помощью допустимых операций. После этого доказательство завершается индукцией по l.

Обозначим старший вес сигнатуры σ_1 через λ. Мы приходим к одному из следующих случаев (по симметрии между σ_1 и σ_1' можно считать, что $\lambda \neq \widehat{\omega}_{m+2}$, так как, если обе сигнатуры σ_1 и σ_1' имеют старший вес $\widehat{\omega}_{m+2}$, то они совпадают по лемме 3.12):

1. $\lambda = \omega_m$,
2. $\lambda = \omega_{m+1}$, $s^+_{m+1}(\sigma_1) = 1$,
3. $\lambda = \omega_{m+1}$, $s^-_{m+1}(\sigma_1) = 1$.

В первом случае мы имеем такую сигнатуру старшего веса λ в правом разложении, скажем σ_2', что $s^\pm_i(\sigma_2') = 0$, $i = 1, \ldots, n,$. В самом деле, мы должны иметь сигнатуру старшего веса λ в правом разложении, но у всех таких сигнатур все $s^\pm_i = 0$, так как иначе мы получили бы противоречие с выбором веса ω_m. Во втором случае имеем такую сигнатуру старшего веса λ в правом разложении, скажем σ_2', что $s^+_{m+1}(\sigma_2') = 1$. В самом деле, мы должны иметь сигнатуру в правом разложении с $s^+_{m+1} = 1$. По лемме 3.12 все такие сигнатуры имеют старший вес ω_{m+1}. В обоих случаях мы можем поменять местами все экспоненты у сигнатур σ_1' и σ_2', кроме тех, которые отвечают корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_{n+1}$, и получить сигнатуру σ_1 в правом разложении. По лемме 3.12 легко убедиться, что полученные сигнатуры существенные. Значит операция допустима.

В третьем случае можно считать $s^-_{m+1}(\sigma_1') = s^+_{m+2}(\sigma_1') = 1$. Иначе мы получили бы первый или второй случай. Имеем такую сигнатуру старшего веса $\widehat{\omega}_{m+2}$, скажем σ_2, в левом разложении σ, что $s^+_{m+2}(\sigma_2) = 1$. Можно поменять местами все экспоненты у сигнатур σ_1 и σ_2, кроме тех, которые отвечают корню $\varepsilon_{m+2} + \varepsilon_{n+1}$, и получить сигнатуру σ_1' в левом разложении σ. Лемма 3.12 показывает опять, что полученные сигнатуры существенные, и операция допустима.

Из рассуждений выше следует, что доказательство можно свести к случаю, когда все $\psi(\sigma_i)$ имеют старшие веса в $\{\omega_{n-1}, \omega_n, 2\omega_{n-1}, 2\omega_n, \widehat{\omega}_{n-1}\}$. Пусть, например, $\psi(\sigma_1)$ имеет старший вес $2\omega_n$.

По лемме 3.12 можно считать, что старшие веса обеих сигнатур σ_1, σ_1' лежат в $\{\widehat{\omega}_n, 2\omega_{n+1}\}$. (Если старшие веса сигнатур σ_1, σ_1' лежат в $\{2\omega_n, \widehat{\omega}_n\}$, то рассуждения аналогичны.) Если $\sigma_1 = \sigma_1'$, то индукция по l завершает доказательство. Поэтому можно считать, что старшие веса σ_1, σ_1' суть $\widehat{\omega}_n, 2\omega_{n+1}$, соответственно, и $s_i^{\pm}(\sigma_1) = s_i^{\pm}(\sigma_1') = 0$. Поскольку все сигнатуры σ_i, σ_i' лежат в $\Sigma''_{D_{n+1}}$, то наборы старших весов сигнатур $\{\sigma_i\}$ и $\{\sigma_i'\}$ совпадают, и в левом разложении есть сигнатур старшего веса $2\omega_{n+1}$, скажем σ_2. Имеем $s_n^+(\sigma_2) \neq 2$, так как $\psi(\sigma_i) \in \Sigma''_{D_n}$. Можно поменять местами все экспоненты сигнатур σ_1 и σ_2 и получить сигнатуру σ_1' в левом разложении σ. Индукция по l завершает доказательство. В оставшихся случаях рассуждения аналогичны. □

***Лемма* 3.18.** *Свойство* $(**)$ *выполнено для* $\Sigma'_{D_{n+1}}$ *и* $\Sigma''_{D_{n+1}}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 3.8. □

***Следствие* 3.19.** *Полугруппа существенных сигнатур алгебры* D_{n+1} *порождена существенными сигнатурами со старшими весами в* $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}, \widehat{\omega}_n, 2\omega_n, 2\omega_{n+1}\}$.

Напомним, что в предыдущем разделе мы обозначали через $(\sharp')$ неравенства, задающие полугруппу Σ_{D_n}. Пусть $\sum k_i'\omega_i$ обозначает старший вес сигнатуры D_n. Обозначим через $(\sharp)$ неравенства, полученные из $(\sharp')$ заменой k_i' на $k_i, s_i^{\pm}$ по формулам (3.4).

***Предложение* 3.20.** *Полугруппа* $\Sigma_{D_{n+1}}$ *задается неравенствами* $(\sharp)$ *и* (3.5).

Доказательство. Аналогично предложению 3.10. □

***Следствие* 3.21.** *Полугруппа* $\Sigma_{D_{n+1}}$ *насыщена.*

3.6. Полученные результаты

Окончательно, у нас есть нумерация положительных корней для D_n и B_n:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_1 - \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_1 + \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{для } D_n,$$

$$\text{корни } D_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \quad \text{для } B_n.$$

И у нас есть мономиальный линейный порядок на множестве всех сигнатур. Мы сравниваем две сигнатуры алгебры D_n с одинаковым старшим весом следующим образом (мы переходим к следующему шагу, если на предыдущем шаге наборы экспонент совпадают):

1. сравниваем экспоненты, отвечающие корням $(\varepsilon_1 + \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)$, используя степенной лексикографический порядок,

2. сравниваем экспоненты, отвечающие корням $(\varepsilon_1 - \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$, используя степенной лексикографический порядок,

3. сравниваем экспоненты, отвечающие корням $(\varepsilon_1 + \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1})$, используя степенной лексикографический порядок,

4. сравниваем наборы экспонент, отвечающие корням $(\varepsilon_1 - \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-1})$, используя степенной лексикографический порядок,

   $\dots\dots$

5. сравниваем экспоненты, отвечающие корню $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$,

6. сравниваем экспоненты, отвечающие корню $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Мы сравниваем две сигнатуры алгебры B_n с одинаковым старшим весом следующим образом (мы переходим к следующему шагу, если на предыдущем шаге наборы экспонент совпадают):

1. сравниваем наборы экспонент, отвечающие корням $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, используя степенной лексикографический порядок,

2. сравниваем наборы экспонент, отвечающих длинным корням, по описанному выше правилу для D_n.

Окончательно, имеем:

***Теорема* 3.22.** *Следующие утверждения верны для алгебр Ли типов D_n, B_n ($n \geq 2$):*

Для выбранных нумерации положительных корней и мономиального порядка на сигнатурах полугруппа Σ насыщена и порождена существенными сигнатурами со старшими весами в

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n, 2\omega_{n-1}, 2\omega_n, \omega_{n-1} + \omega_n\} \quad \text{для } D_n$$

и в

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n, 2\omega_n\} \quad \text{для } B_n.$$

Пусть $p^{\pm}_{i,j} \geq 0$, $i < j$, — экспоненты сигнатуры D_n, отвечающие корням $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, соответственно, $\sum k_i\omega_i$ — доминантный вес. Можно легко вывести неравенства на $p^{\pm}_{i,j}$, k_i, определяющие полугруппу Σ_{D_n}, с помощью предложения 3.20 и неравенств, задающих Σ_{D_2}.

***Теорема* 3.23.** *Полугруппа Σ_{D_n} задается неравенствами:*

1. $p^+_{i,j} + \sum_{k=j+1}^n (p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+1,k} - p^-_{i+1,k}) \leq k_i$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\}$,

2. $p^-_{i+1,j} + \sum_{k=j}^n (p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+1,k} - p^-_{i+1,k}) \leq k_i$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\}$,

3. $p^-_{i,i+1} + \sum_{k=i+2}^n (p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+1,k} - p^-_{i+1,k}) \leq k_i$,
   $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

4. $p^-_{i,i+2} + p^+_{i,i+2} + p^-_{i+1,i+2} + \sum_{k=i+3}^n (p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+2,k} - p^-_{i+2,k}) \leq k_i + k_{i+1}$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}$,

5. $p^+_{i,i+1} + \sum_{k=i+2}^{n}(p^+_{i,k} + p^-_{i,k} + p^+_{i+1,k} + p^-_{i+1,k}) \le k_i + k_{n-1} + k_n + 2\sum_{j=i+1}^{n-2} k_j$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}$,

6. $p^+_{n-1,n} \le k_n$.

Пусть $s_i \ge 0$ — экспоненты сигнатуры B_n, отвечающие корням ε_i. Положим $p^\pm_{i,i} := \frac{1}{2}s_i$. Неравенства, задающие полугруппу Σ_{B_n}, можно легко вывести из предложения 3.10 и предыдущей теоремы.

***Теорема* 3.24.** *Полугруппа Σ_{B_n} задается неравенствами:*

1. $s_i - s_{i+1} + p^+_{i,j} + \sum_{k=j+1}^{n}(p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+1,k} - p^-_{i+1,k}) \le k_i$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\}$,

2. $s_i - s_{i+1} + p^-_{i+1,j} + \sum_{k=j}^{n}(p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+1,k} - p^-_{i+1,k}) \le k_i$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}, j \in \{i+2, \dots, n\}$,

3. $s_i - s_{i+1} + p^-_{i,i+1} + \sum_{k=i+2}^{n}(p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+1,k} - p^-_{i+1,k}) \le k_i$,
   $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

4. $s_i + p^-_{i+1,i+2} + \sum_{k=i+2}^{n}(p^+_{i,k} + p^-_{i,k} - p^+_{i+2,k} - p^-_{i+2,k}) \le k_i + k_{i+1}$,
   $i \in \{1, \dots, n-2\}$,

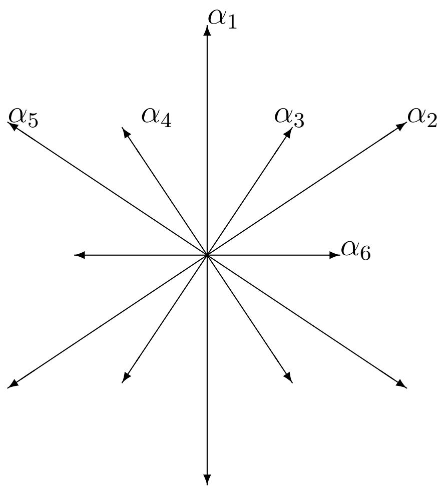
5. $s_i - p^-_{i,i+1} + \sum_{k=i+1}^{n}(p^+_{i,k} + p^-_{i,k} + p^+_{i+1,k} + p^-_{i+1,k}) \le k_i + k_n + 2\sum_{j=i+1}^{n-1} k_j$,
   $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

6. $s_i \le k_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Глава 4. Алгебра Ли G_2

В этом разделе мы доказываем гипотезы Винберга для алгебры G_2 при некотором однородном порядке на множестве сигнатур.

Пронумеруем положительные корни G_2, как показано на рисунке:



Мы будем сравнивать сигнатуры $\sigma = (\lambda; p_1, \ldots, p_6)$ и $\sigma' = (\lambda; p'_1, \ldots, p'_6)$ фиксированного старшего веса, сравнивая лексикографически наборы $(q_1, \ldots, q_6)$ и $(q'_1, \ldots, q'_6)$, где

$$q_i = \sum_{j=1}^{7-i} p_j,\ q'_i = \sum_{j=1}^{7-i} p'_j.$$

Очевидно, что такой мономиальный линейный порядок на множестве сигнатур согласован с ПБВ-фильтрацией.

4.1. Доказательство Гипотезы 1

Список всех существенных сигнатур со старшим весом ω_1 (мы опускаем весовую компоненту):

1. $(0,0,0,0,0,0)$ 2. $(0,0,0,0,0,1)$ 3. $(0,0,0,1,0,0)$ 4. $(0,0,1,0,0,0)$
5. $(0,1,0,0,0,0)$ 6. $(1,0,0,0,0,0)$ 7. $(1,0,0,0,0,1)$

Список всех существенных сигнатур со старшим весом ω_2 (мы опускаем весовую компоненту):

1. $(0,0,0,0,0,0)$	2. $(0,0,0,0,1,0)$	3. $(0,0,0,1,0,0)$	4. $(0,0,1,0,0,0)$
5. $(0,1,0,0,0,0)$	6. $(1,0,0,0,0,0)$	7. $(0,0,1,0,1,0)$	8. $(0,1,0,0,1,0)$
9. $(1,0,0,0,1,0)$	10. $(0,1,0,1,0,0)$	11. $(1,0,0,1,0,0)$	12. $(1,0,1,0,0,0)$
13. $(1,1,0,0,0,0)$	14. $(2,0,0,0,0,0)$		

***Теорема* 4.1.** *Полугруппа существенных сигнатур для G_2 порождена существенными сигнатурами фундаментальных старших весов.*

Доказательство. Мы пользуемся следствием 2.4. Пусть

$$\sigma = (\lambda; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),$$

и у нас есть два разложения в виде суммы существенных сигнатур фундаментальных старших весов:

$$\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k = \tau_1 + \ldots + \tau_k.$$

Мы хотим показать, что можно получить одно разложение из другого с помощью допустимых операций.

Можно заметить, что при уменьшении любой ненулевой координаты существенной сигнатуры фундаментального старшего веса мы получим снова существенную сигнатуру. Поэтому можно считать, что никакая сигнатура из одного разложения не "накрывает" никакую сигнатуру из другого разложения. Это значит, что нет двух сигнатур одного фундаментального старшего веса в разных разложениях σ, таких что все координаты одной сигнатуры не меньше соответствующих координат другой.

Предположим, что $p_6 \neq 0$. Тогда можно считать, что в левом разложении есть сигнатура $(\omega_1; 0,0,0,0,0,1)$, скажем σ_1, а в правом — сигнатура $(\omega_1; 1,0,0,0,0,1)$, скажем τ_1. Значит в левом разложении есть сигнатура, скажем $\sigma_2 = (\omega_i; s, \ldots)$, с ненулевой первой координатой. Проведем следующую допустимую операцию:

$$\sigma_2 + \sigma_1 = (\omega_i; s-1, \ldots) + \tau_1.$$

Очевидно, что сигнатура $(\omega_i; s-1, \ldots)$ существенная. Таким образом мы получили сигнатуру τ_1 в левом разложении. Индукция по k завершает доказательство. Итак, мы показали, что можно считать $p_6 = 0$.

Предположим, что $\sigma_1 = (\omega_2; 0,0,1,0,1,0)$. Тогда в правом разложении должна быть одна из сигнатур $(\omega_2; 1,0,0,0,1,0)$ или $(\omega_2; 0,1,0,0,1,0)$ (сигнатура $(\omega_2; 0,0,0,0,1,0)$ накрывается остальными). Поскольку $p_3 \neq 0$, то существует сигнатура τ_j с ненулевой третьей координатой ($(\omega_2; 0,0,1,0,0,0)$, $(\omega_2; 1,0,1,0,0,0)$ или $(\omega_1; 0,0,1,0,0,0)$). Легко видеть, что мы можем получить сигнатуру σ_1 в правом разложении:

$$(\omega_2; 1,0,0,0,1,0) + \tau_j = \sigma_1 + \ldots,$$

$$(\omega_2; 0,1,0,0,1,0) + \tau_j = \sigma_1 + \ldots,$$

где $\ldots$ — существенная сигнатура. Таким образом мы получили сигнатуру $(\omega_2; 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ в обоих разложениях. Значит можно считать, что этой сигнатуры нет в разложениях.

Аналогично, для $\sigma_1 = (\omega_2; 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ и $\sigma_1 = (\omega_2; 0, 1, 0, 0, 1, 0)$. Итак, можно считать, что $p_5 = 0$.

Пусть $\sigma_1 = (\omega_2; 0, 1, 0, 1, 0, 0)$, тогда в правом разложении должна быть одна из сигнатур $(\omega_1; 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ или $(\omega_2; 1, 0, 0, 1, 0, 0)$, так как $p_4 \neq 0$ и сигнатура $(\omega_2; 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ накрывается сигнатурой σ_1. Если у нас есть сигнатура $(\omega_1; 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ в правом разложении, и τ_i — произвольная сигнатура старшего веса ω_2, то мы можем получить сигнатуру $(\omega_2; 1, 0, 0, 1, 0, 0)$ или $(\omega_2; 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ в правом разложении:

$$(\omega_1; 0, 0, 0, 1, 0, 0) + \tau_i = (\omega_2; 1, 0, 0, 1, 0, 0) + \ldots$$

или

$$(\omega_1; 0, 0, 0, 1, 0, 0) + \tau_i = (\omega_2; 0, 0, 0, 1, 0, 0) + \ldots,$$

где $\ldots$ — некоторая существенная сигнатура старшего веса ω_1. Таким образом мы получаем в правом разложении либо сигнатуру $(\omega_2; 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, которая накрывается сигнатурой σ_1, или сигнатуру $(\omega_2; 1, 0, 0, 1, 0, 0)$. Можно считать, что в правом разложении есть сигнатура $(\omega_2; 1, 0, 0, 1, 0, 0)$. Тогда:

$$(\omega_2; 1, 0, 0, 1, 0, 0) + \tau = (\omega_2; 0, 1, 0, 1, 0, 0) + \ldots,$$

где τ — произвольная сигнатура с ненулевой второй координатой в правом разложении, а $\ldots$ — некоторая существенная сигнатура. Значит, мы получили сигнатуру $(\omega_2; 0, 1, 0, 1, 0, 0)$ в правом разложении.

Следовательно, мы можем считать, что в разложениях σ нет сигнатуры $(\omega_2; 0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Таким образом, можно считать, что в разложениях σ участвуют только сигнатуры с номерами 3-6 старшего веса ω_1 и 3-6, 11-14 старшего веса ω_2. Теперь легко видеть, что мы можем получить одно разложение из другого, применяя допустимые операции. Таким образом первый пункт следствия 2.4 доказан. Для доказательства второго пункта достаточно посчитать количество существенных сигнатур старших весов $2\omega_1, \omega_1 + \omega_2$ и $2\omega_2$, которые представляются в виде суммы существенных сигнатур фундаментальных старших весов, и убедиться, что их количества совпадают с размерностями соответствующих представлений. □

Таким образом мы доказали Гипотезу 1.

4.2. Описание конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}$

Будем искать неравенства, задающие конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$. Для этого рассмотрим двойственный конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}^{\vee}$, то есть те линейные функции, которые принимают неотрицательные значения на $\Sigma_{\mathbb{Q}}$. Найдем образующие этого конуса и тогда получим искомые неравенства. Пусть $\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$. Будем считать, что элементы конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ задаются векторами, у которых восемь координат — (k^*, l^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*). Двойственный конус задается неравенствами:

1. $k^* \geq 0, l^* \geq 0$

2. $k^* + p_i^* \geq 0 \quad (i \neq 5)$

3. $k^* + p_1^* + p_6^* \geq 0$

4. $l^* + p_i^* \geq 0 \quad (i \neq 6)$

5. $l^* + p_1^* + p_i^* \geq 0 \quad (i \neq 6)$

6. $l^* + p_2^* + p_4^* \geq 0$

7. $l^* + p_2^* + p_5^* \geq 0$

8. $l^* + p_3^* + p_5^* \geq 0$

***Теорема* 4.2.** *Векторы*

1.	$(1,0,0,0,0,0,0,-1)$	*9.*	$(1,1,0,0,0,-1,-1,-1)$
2.	$(0,1,0,0,0,0,-1,0)$	*10.*	$(1,1,0,0,-1,-1,0,-1)$
3.	$(0,0,1,0,0,0,0,0)$	*11.*	$(1,1,0,-1,-1,0,0,-1)$
4.	$(0,0,0,1,0,0,0,0)$	*12.*	$(1,2,0,-1,-1,-1,-1,-1)$
5.	$(0,0,0,0,1,0,0,0)$	*13.*	$(1,2,-1,-1,-1,-1,-1,0)$
6.	$(0,0,0,0,0,1,0,0)$		
7.	$(0,0,0,0,0,0,1,0)$		
8.	$(0,0,0,0,0,0,0,1)$		

являются образующими конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}^{\vee}$.

Доказательство. Эти векторы были получены с помощью стандартного алгоритма поиска образующих конуса. Нужно взять какие-либо 7 неравенств и превратить их в равенства, получив систему из 7 линейных уравнений. Среди всех таких систем выбрать системы максимального ранга (то есть с одномерным пространством решений). Среди базисных решений таких систем выбрать векторы, лежащие в конусе. Это и есть образующие. □

Таким образом конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ задается неравенствами ($\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$):

1. $p_i \geq 0$

2. $p_5 \leq l$

3. $p_6 \leq k$

4. $p_2 + p_3 + p_6 \leq k + l$

5. $p_3 + p_4 + p_6 \leq k + l$

6. $p_4 + p_5 + p_6 \leq k + l$

7. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \leq k + 2l$

8. $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \leq k + 2l$

Следовательно, гипотеза 3 будет доказана, если мы докажем насыщенность полугруппы Σ.

4.3. Доказательство насыщенности полугруппы Σ

***Теорема* 4.3.** *Полугруппа Σ насыщена.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную сигнатуру $\sigma = (k, l; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$. Мы хотим показать, что всегда найдется такая существенная сигнатура τ фундаментального старшего веса, что $\sigma - \tau \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$. Очевидно, что этого достаточно для доказательства теоремы, так как несущественные сигнатуры весов ω_1, ω_2 не лежат в $\Sigma_{\mathbb{Q}}$.

В каждом случае тот факт, что $\sigma - \tau \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$, будет простым следствием неравенств, задающих конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$.

Итак, пусть $p_6 \neq 0$, тогда $k \neq 0$ из-за неравенства 3, и можно взять $\tau = (\omega_1; 1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\tau = (\omega_1; 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ при $p_1 \neq 0$, $p_1 = 0$ соответственно. Очевидно, что все неравенства выполнены для $\sigma - \tau$ (при $p_1 = 0$ неравенство 7 является следствием неравенства 8). То есть можно считать, что $p_6 = 0$.

Пусть $p_5 \neq 0$, тогда $l \neq 0$ из-за неравенства 2, и можно взять

$$\tau = (\omega_2; 0, 0, 1, 0, 1, 0), \quad p_3 \neq 0$$

$$\tau = (\omega_2; 0, 1, 0, 0, 1, 0), \quad p_3 = 0, \quad p_2 \neq 0$$

$$\tau = (\omega_2; 1, 0, 0, 0, 1, 0), \quad p_3 = p_2 = 0, \quad p_1 \neq 0$$

$$\tau = (\omega_2; 0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad p_3 = p_2 = p_1 = 0.$$

Аналогичная предыдущему случаю проверка показывает, что $\sigma - \tau$ удовлетворяет всем неравенствам, то есть $\sigma - \tau \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$. Таким образом, можно считать, что $p_5 = 0$.

При $p_6 = p_5 = 0$ все неравенства являются следствиями следующих:

1. $p_i \geq 0$

2. $p_2 + p_3 + p_6 \leq k + l$

3. $p_3 + p_4 + p_6 \leq k + l$

4. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \leq k + 2l$

Можно считать, что $l \neq 0$. Действительно, в противном случае остаются только неравенства 1 и 4, и легко видеть, что сигнатура $\sigma \in \Sigma$.

Теперь можно вычесть $\tau = (\omega_2; 0, 1, 0, 1, 0, 0)$. Это позволяет нам считать, что $p_2 = 0$ или $p_4 = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $p_4 = 0$, поскольку второй случай полностью аналогичен этому.

Наконец, если $p_2 \neq 0$ или $p_3 \neq 0$, то можно вычесть $\tau = (\omega_2; 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ или $(\omega_2; 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ при $p_1 \neq 0$, или $\tau = (\omega_2; 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ или $\tau = (\omega_2; 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ при $p_1 = 0$. Значит, можно считать, что $p_2 = p_3 = 0$. А тогда можно вычесть $\tau = (\omega_2; 2, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\tau_2 = (\omega_2; 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ или $\tau_2 = (\omega_2; 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Следовательно, мы всегда можем найти существенную сигнатуру τ фундаментального старшего веса, при которой $\sigma - \tau \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Заключение

В диссертации рассмотрен вопрос построения базисов ПБВ-типа в конечномерных неприводимых представлениях простых алгебр Ли, для которых справедливы гипотезы Винберга или их обобщения. Базисы ПБВ-типа параметризуются полугруппами существенных сигнатур Σ. Существенные сигнатуры, параметризующие базис в неприводимом представлении $V(\lambda)$, имеют старший вес λ. Важнейшей из гипотез Винберга является гипотеза о конечной порожденности полугруппы Σ.

В диссертации получены следующие основные результаты.

Получен общий критерий того, когда полугруппа Σ порождается сигнатурами фундаментальных старших весов, а также обобщение этого критерия для проверки порожденности этой полугруппы сигнатурами со старшими весами из фиксированного набора. Кроме того, найдены достаточные условия для выполнения этого критерия, которые удобно проверять.

С помощью этого критерия построен однородный базис ПБВ-типа в каждом неприводимом представлении алгебры Ли типа G_2, и доказаны все гипотезы Винберга. А именно, доказано, что полугруппа Σ, во-первых, насыщена, во-вторых, порождена сигнатурами фундаментальных старших весов и, в-третьих, задается неравенствами определенного вида, которые явно указаны в диссертации.

С помощью обобщенного критерия построены базисы ПБВ-типа во всех неприводимых представлениях алгебр Ли типов B_n и D_n, и доказаны обобщенные гипотезы Винберга. А именно, доказано, что полугруппы Σ, во-первых, насыщены, а во-вторых, порождены сигнатурами старших весов, "близких" к фундаментальным. Кроме того, явно найдены неравенства, задающие эти полугруппы.

Таким образом, для простых алгебр Ли типов G_2, B_n и D_n явно найдены неравенства, задающие многогранники, целые точки которых параметризуют базисы в каждом неприводимом конечномерном представлении. Для этих базисов выполнены свойства, аналогичные свойствам базисов Гельфанда-Цейтлина, описанным во введении.

Дальнейшая разработка тематики, которой посвящена диссертация, включает в себя разбор случаев простых алгебр Ли типов B_n, F_4. Для этих алгебр Ли нужно понять, существует ли однородный базис ПБВ-типа, для которого верны все гипотезы Винберга. Если такой базис существует, то возникает задача его построения. Для этого удобно использовать критерий, полученный в диссертации. Если однородного базиса ПБВ-типа не существует, то возникает задача построения неоднородных базисов ПБВ-типа, для которых будут верны обобщенные гипотезы Винберга. Последняя задача актуальна также для простых алгебр Ли типа E_n ($n = 6, 7, 8$).

Литература

[1] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, Москва, 1988.

[2] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **36** (1972), № 4, 749-764.

[3] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, Москва, 1970.

[4] В. Л. Попов, *Стягивание действий редуктивных алгебраических групп*, Матем. сб. **130** (1986), № 3, 310-334.

[5] T. Backhaus, D. Kus, *The PBW filtration and convex polytopes in type B*, J. Pure Appl. Algebra **223** (2019), no. 1, 245-276.

[6] X. Fang, G. Fourier, P. Littelmann, *Essential bases and toric degenerations arising from generating sequences*, Adv. Math. **312** (2017), 107-149.

[7] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type* A_n, Transformation Groups **165** (2011), no. 1, 71-89.

[8] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras*, Int. Math. Res. Not. 2011, no. 24, 5760-5784.

[9] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer, New York, 1977.

[10] P. Littelmann, *Cones, crystals, and patterns*, Transformation Groups **3** (1998), no. 2, 145-179.

[11] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 447-498.

[12] I. Makhlin, *FFLV-type monomial bases for type B*, preprint, 2016, arXiv:1610.07984.

[13] E. B. Vinberg, *On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras*, Conference Talk, Bielefeld, 2005.

Публикации автора по теме диссертации

[14] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы* G_2, тезисы докладов Четвертой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 19-21, Издательство Московского университета, Москва, 2014.

[15] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы* G_2, Матем. заметки **97** (2015), № 1, 35-47.

[16] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений* B_n *и* D_n, материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017», МАКС Пресс, Москва, 2017, https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10841/uid146879_report.pdf.

[17] А. А. Горницкий, *Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений простых алгебр Ли*, УМН **73** (2018), № 5, 187-188.

[18] A. A. Gornitskii, *Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of* D_4, preprint, 2015, arXiv:1507.07498.

[19] A. A. Gornitskii, *Essential signatures and monomial bases for* B_n *and* D_n, Journal of Lie Theory **29** (2019), 277-302.