ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

В.А. Шапошников*

НА ПУТИ К ОТКРЫТОЙ МАТЕМАТИКЕ: ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРАКТИКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОТ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ К СОЦИОЦИФРОВОЙ**

В цифровой культуре математическая практика претерпевает существенные и далеко идущие изменения. В статье сделана попытка приглядеться поближе к тому, как меняется при этом представление математиков о природе и целях математического доказательства. Тема еще более сужена за счет выбора лишь одной из наличных тенденций, а именно усиления интереса к социальному и коммуникативному аспектам математического доказательства. В рамках этой тенденции математическое доказательство начинает осмысливаться как социоцифровое событие, поддерживающее понимание и сотворчество в сообществе, обеспечивающее социальную трансляцию методологии, а также вносящее вклад в коллективное обеспечение исторической стабильности математического знания. Современные математики, столкнувшись с «проблемой сложности» (Брайан Дэвис), стремятся, с опорой на адаптацию и дальнейшую разработку новейших цифровых технологий, перейти на новый уровень интеграции в рамках того, что может быть названо «открытой математикой» (Феликс Бройер). В этом контексте в статье предлагается взгляд на компьютер как на такое технологически эффективное соединение воедино действий многих людей, которое придает им видимость действий одного актора. Такой взгляд позволяет уйти от противопоставления компьютера человеку (как индивиду, так и социальной группе), а тем самым, и от противопоставления компьютерных доказательств и доказательств, полученных людьми, в математической практике.

Ключевые слова: философия математики, математическая практика, коммуникация, цифровая культура, компьютер.

---

* *Шапошников Владислав Алексеевич* — кандидат философских наук, доцент, доцент кафедры философии естественных факультетов философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, тел.: +7(495)939-13-46; *e-mail*: shaposhnikov@philos.msu.ru

** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (проект № 17–03–00257, «Онтология и эпистемология в компьютерной культуре (Ontology and epistemology in the computer culture)»).

V.A. S h a p o s h n i k o v. Towards open mathematics: The transformation of the practice of mathematical proof from individual to socio-digital

In digital culture, mathematical practice undergo substantial and far-reaching changes. In this paper, an attempt is made to scrutinize the changes in the mathematicians' conception of the nature and purpose of mathematical proof. The theme is further narrowed by choosing only one trend within the framework just mentioned. This trend consists in intensified interest in social and communicative aspects of mathematical proof. Mathematical proof is understood as a socio-digital event which supports mutual understanding and co-creativity within the community, maintains the conveyance of methodology and contributes to the collective ways to guarantee the historical stability of mathematical knowledge. When facing "the problem of complexity" (E.B. Davies) contemporary mathematicians crave for reaching a new level of integration by adaptation and further development of brand-new digital technologies. The program can be identified as "open mathematics" (Felix Breuer). In this connection, I propose an account of the computer as a device for effective integration of multiple human actions to imitate an appearance of being produced by one actor. This account allows us to dispense with contrasting the computer with the human being(s) and thereby with the contrasting computer proofs with human proofs within the mathematical practice.

Keywords: philosophy of mathematics, mathematical practice, communication, digital culture, computer.

Открытая математика

Современная ситуация, в которой оказались научные исследования, характеризуется попытками найти эффективное равновесие между коммерчески ориентированным сплавом науки и технологических инноваций (частная собственность на интеллектуальный капитал, «интеллектуальный капитализм») и проектами «открытой науки» («интеллектуальный социализм»), облегчающими коммуникацию и совместную деятельность (однако также требующими решения финансовых и правовых вопросов) [*O. Granstrand*, 2000; *P.A. David*, 2008, p. 4–5]. Сказанное относится не только к естественным и социальным наукам, но и к математике, в том числе к *чистой математике*[1]. В настоящей статье меня будет интересовать текущее проявление повышенного внимания к более эффективному решению проблемы *коммуникации* в сообществе чистых математиков, которую я буду обозначать как проект *открытой математики*.

[1] Вопрос о релевантности для современной ситуации традиционных дисциплинарных разграничений, сложившихся еще на рубеже XIX и XX вв., требует специального обсуждения (которое выходит далеко за рамки темы настоящей статьи). Однако они по-прежнему широко используются, что оправдывает и сохранение мной привычного словоупотребления.

Последнее выражение я заимствую у немецкого математика Феликса Бройера[2]. Он обращает внимание на то, что проблема «открытости» в математике не сводится к возможности иметь свободный доступ к опубликованным теоремам и их доказательствам, а также возможности свободно использовать, видоизменять и распространять соответствующий контент. Важно, чтобы создаваемая (и ранее созданная) математика была *пригодна* для эффективного многократного использования различными математиками в различных контекстах. Чтобы стать действительно «открытой», современная математика должна перестать быть собранием изолированных герметичных текстов, понимание каждого из которых доступно лишь узкому кругу специалистов. Как организовать эффективную навигацию в «море» уже существующих математических результатов, которая позволила бы исследователю быстро находить все то, что ему действительно нужно? Как сделать продвинутые математические работы доступными более широкой читательской аудитории? Как сделать математические результаты удобными для продолжения исследований на их основе другими? Как сделать математические знания максимально многофункциональными, доступными для использования во многих различных контекстах? Как сделать математические результаты легко модифицируемыми? Как превратить массив существующих математических текстов в «данные» (mathematics as data), с которыми можно эффективно работать как с «большими данными» (big data)? Эти и подобные им вопросы задает молодое поколение чистых математиков[3]. Без их решения нет смысла говорить об «открытой математике».

Внимание Феликса Бройера сосредоточено, как и следовало ожидать, на технической стороне указанных вопросов. Нам же следует приглядеться к корням проблемы. Почему традиционная публикация теорем с доказательствами перестала устраивать математиков, ведь раньше вроде бы устраивала? Какие изменения в математической практике вызвали к жизни само требование перейти к открытой математике в указанном выше смысле?

Важнейшими индикаторами трансформации математической практики служат сдвиги в понимании «доказательства» и «приложений», на что, следуя по стопам Витгенштейна, справедливо обращает внимание Ян Хакинг [*I. Hacking*, 2014, p. xiii–xv, 1–4]. Ниже я попробую отследить лишь одну из современных тенденций, связанных с

---

[2] См. пост от 13 июля 2013 г. в его личном блоге: From open science to open mathematics // Felix Breuer's Blog // URL: http://blog.felixbreuer.net/2013/07/13/from–open–science–to–open–mathematics.html

[3] Помимо Феликса Бройера, сошлюсь на Итая Вайса [*I. Weiss*, 2016].

проектом перехода к открытой математике, тенденцию, относящуюся к пониманию *математического доказательства*. Доказательство в чистой математике перестает восприниматься как *текст*, и даже как *индивидуальная деятельность человека* по порождению такого текста. Оно все больше приобретает смысл *социального события*, а точнее, *социоцифрового события*.

Критика глубоко укоренившегося в нашей культуре образа математика-одиночки, начиная, по крайней мере, с Томаса Тимошко, который решительно потребовал переориентировать философию математики с «отдельно взятого изолированного математика (a *single isolated* mathematician)» на «математическое сообщество (the *community* of mathematicians)» [*T. Tymoczko*, 1986], стала постоянной темой. Протест против характерных для эпохи модерна мифов математики, изолированной от мира, и математика, изолированного от других математиков, представлен, например, в книге Брента Дэвиса [*B. Davis*, 1996, p. 75]. В социально-психологическом плане подобное восприятие профессии математика как человека, обреченного работать «в полной изоляции», ярко описано Клаудией Хенрион [*C. Henrion*, 1997, p. 1–22]. Педагоги вынуждены констатировать: несмотря на всю критику и разоблачения, образ математика-одиночки по-прежнему с нами: «Широко распространено убеждение, что выбор математики в качестве области специализации ведет к социальной изоляции (the math field is socially isolating)» [*M. Hurst, S. Cordes*, 2017, p. 227].

И это при том, что один из первых широко известных примеров сознательного обращения чистых математиков к командной работе относится еще к 1930-м гг. Я имею в виду группу французских математиков, публиковавшую свои результаты под коллективным псевдонимом Николя Бурбаки. Хотя их проект создать современный аналог «Начал» Евклида не удалось довести до конца, выработанные ими стиль и подход к представлению математических результатов оказались на некоторое время очень влиятельными [*L. Corry*, 2009]. Пик влияния «бурбакизма» пришелся на 1960-е гг., после чего оно постепенно пошло на спад. Как успехи, так и неудачи проекта Бурбаки следует признать весьма поучительными. Примечательно, что члены группы не смогли в полной мере справиться как с масштабом поставленной себе задачи, так и с сохранением гибкости в усвоении новых идей, что в особенности проявилось в 1950-е гг. в неспособности группы к рецепции нового (теоретико-категорного) подхода и языка [ibid., p. 579–584]. На мой взгляд, главная причина конечной неудачи этого знаменитого проекта лежит в отсутствии достаточно эффективного решения проблем коммуникации как внутри сообщества, так и с внешней аудиторией. Однако подобная (скорее негативная) оценка результатов деятельности группы ни в коем случае не

является общепринятой. Их влияние на математику XX в. оказалось огромным, и для многих Бурбаки стали вдохновляющим символом того, сколь многого можно достичь в математике, если осознанно объединить усилия.

Одно из важнейших отличий современной ситуации в чистой математике от времени господства «бурбакизма» состоит во вступлении в эпоху *компьютера* и *интернета*, которые становятся решающими факторами в том числе и в сфере чистой математики. Поэтому, прежде чем перейти к обсуждению собственно математического доказательства, имеет смысл остановиться на интерпретации компьютера как социального феномена.

Компьютер как социальный актор

Наблюдающееся в наше время отношение к компьютерам как к *полноценным социальным акторам* далеко не случайно. Они созданы *нами* и по *нашему* образу и подобию. Мы склонны представлять себе работу собственного мозга как действие компьютера, а компьютер — как подобие мозга человека (the mind-machine analogy), да и вообще темы «man as machine» и «machine as man» имеют в нашей культуре глубоко уходящие корни [*M.A. Boden*, 2006, p. 51–52]. Вполне оправданно смотреть на компьютер как на устройство, осуществляющее *технологически эффективное соединение воедино* результатов применения знаний и умений *многих людей*.

При этом важнейшим достижением является способность сохранять эти результаты в виде «черных ящиков», которые могут затем использоваться в интерактивном режиме как целое, без «распаковки», даже без знания о том, как они устроены «изнутри», а также комбинировать их различными способами для образования черных ящиков более высокого уровня, наподобие того, как это происходит в детском конструкторе. Компьютер есть сложно устроенный и многоуровневый черный ящик, снабженный как внутренним, так и пользовательским интерфейсом, но ведь и человек — тоже. Правда, человек обладает личностной перспективой, способен осознавать себя как Я. А компьютер? Даже если компьютер на это не способен, мы можем весьма успешно создавать *видимость* наличия у него такой перспективы, поддерживая привычную аналогию «машина—человек». Ведь упаковывать в черные ящики можно не только наши знания и полученные нами данные, но и проявления наших эмоций, а также личностные реакции, например, принятие поведенческих решений и выражение их средствами естественного языка. Так что близкое сходство компьютера с человеком можно успешно *имитировать* даже в тех случаях, когда достичь его действительно не удается.

Кроме того, компьютер способен совершать множество простых стереотипных действий, каждое из которых понятно и доступно человеку, оно скопировано с его действий, но совершать их он может *во много раз быстрее*, чем это делает человек. Характерные опасения, что компьютер может оказаться более успешным конкурентом человека, не столь фантастичны, как может показаться на первый взгляд. Достаточно вспомнить, что digital computers полностью заменили собой human computers, как принято называть по-английски профессию *вычислителей*. Просуществовав более двухсот лет, с середины XVIII в. и, примерно, до 1960-х гг., эта профессиональная математическая деятельность человека теперь полностью перешла «в руки» компьютеров [*D.A. Grier*, 2005; *M. Croarken*, 2009].

Когда в 1997 г. компьютер Deep Blue фирмы IBM обыграл в шахматы тогдашнего чемпиона мира Гарри Каспарова, можно было сказать, что ничего удивительного не произошло: совместные интеллектуальные усилия *многих* людей перевесили усилия *одного*, пусть и в высшей степени одаренного и опытного. Есть основания полагать, что решающую роль в проигрыше Каспарова сыграло не столько реальное преимущество Deep Blue как «шахматиста», сколько случайное стечение обстоятельств (небольшой «баг», т.е. ошибка, в программном обеспечении) и факторы психологического порядка [*N. Silver*, 2012, p. 276–289]. Тем не менее сторонники компьютерных технологий считают: сейчас уже нет сомнений, что современные «шахматные движки» (chess engines) сильнее лучших шахматистов-людей [*M. Newborn*, 2011, p. V]. Однако такие движки представляют собой скорее результат сложного и многоуровневого «симбиоза» человеческих знаний и умений с возможностями компьютерной техники, а не являются самостоятельными «игроками», противостоящими шахматистам-людям. Кроме того, профессиональные шахматисты-люди широко используют современные шахматные движки как незаменимый инструмент анализа.

Поистине удивительным в состязании людей с компьютерами является именно способность разработчиков последних *эффективно соединять воедино действия многих людей*, *придавая им видимость действий одного актора* (компьютера). Такой актор напоминает чем-то герасинского (или гадаринского) бесноватого из известной евангельской притчи (Мк. 5:1–20), который обладал невиданной силой, так что никто не мог с ним справиться, но, будучи спрошен Иисусом Христом о его истинном имени, он вынужден был ответить: «Имя мне Легион, ибо нас много».

Возможно ли, хотя бы в принципе, создать компьютер, который будет не просто *имитировать*, а на самом деле *испытывать* эмоции

и т.д., а главное, обладать самосознанием и Я-перспективой (став и в этом отношении наравне, а возможно, и выше человека), пока остается не вполне ясным. Серьезные сомнения, высказанные по этому поводу еще на рубеже 1970–1980-х гг., по-прежнему остаются в силе[4]. Однако они, как я уже сказал, не мешают современным компьютерам успешно имитировать такую Я-перспективу, а нам воспринимать их на практике в качестве социальных акторов. По указанной причине я считаю возможным и оправданным рассматривать *использование компьютеров в чистой математике* как часть современного способа социальной консолидации в деле производства надежного математического знания, а следовательно, *не противопоставлять* сделанное компьютером или с его использованием сделанному человеком или группой людей.

Проблема сложности

Известный британский математик Брайан Дэвис в статье «Какое будущее ждет математику?» писал: «…будущее чистой математики без сомнения будет совсем непохожим на ее прошлое» [*E.B. Davies*, 2005, p. 1356]. Причину как уже происходящих, так и грядущих в недалеком будущем изменений Дэвис видит в постигшем математику кризисе, а точнее, в серии кризисов, *кризисов сложности* (crises of complexity). Он выделяет три таких кризиса: первый был связан с появлением знаменитых теорем Гёделя (1930), второй — с введением практики доказательства математических теорем с использованием компьютера (самым известным и широко обсуждаемым стало решение таким способом проблемы четырех красок в 1976 г.), третий — с появлением математических результатов, полученных без помощи компьютера, однако имеющих столь большие доказательства, что для отдельного математика они оказываются практически необозримыми (самый характерный пример — классификация конечных простых групп, завершенная вчерне в 1983 г.). «Ряд математиков весьма озабочен тем, куда эта революция ведет нас», — продолжает Дэвис. «При историческом взгляде на вещи мы можем обнаружить, что как только число математиков становится достаточно велико, они оказываются почти что вынуждены начать производить такое количество математики, которое может быть проверено лишь на коллективном уровне (validated at a collective level). Объедините это с

[4] Я имею в виду, например, представленный с помощью мысленного эксперимента аргумент Неда Блока «китайская нация» [*N. Block*, 1978, p. 279]. Впрочем, вряд ли уместно в рамках настоящей статьи вступать в продолжающуюся полемику между функционалистами и антифункционалистами в философии сознания.

развитием все более и более сложного компьютерного программного обеспечения, и способность индивидов понимать все аспекты сложных доказательств без сомнения будет обречена на исчезновение. Двадцатый век обеспечил выполнение обоих названных условий решающего и необратимого изменения природы математического исследования» [ibid., p. 1355].

Далее Дэвис делает весьма пессимистические прогнозы относительно будущего, в котором математики окончательно расстанутся с надеждами на достижение совершенной достоверности, а вместе с тем — и с какими-либо претензиями на уникальный статус математики среди других областей человеческого знания. Если к приведенной оценке сложившегося в математике в XX в. положения я готов присоединиться, то прогнозы Дэвиса на будущее кажутся мне не слишком убедительными. Да, радикальная трансформация математической практики, по-видимому, действительно происходит. Однако она несет с собой не только утраты, но и приобретения. Математическое сообщество активно реагирует на происходящие изменения, и математике ни в коей мере не грозит утрата особого положения в системе человеческого знания, все, что мы рискуем потерять, — это некоторые излюбленные философско-математические мифы. Реакция математиков движется по нескольким, на первый взгляд, взаимоисключающим *направлениям*. С одной стороны, это интерес к полностью формализованным математическим доказательствам и их компьютерной верификации. Это бурно развивающееся и перспективное направление, которое Дэвис, на мой взгляд, напрасно недооценивает [*В.А. Шапошников*, 2018]. Однако в этой статье мне хотелось бы сосредоточиться на *противоположной* тенденции. Суть ее состоит в перенесении акцента в осмыслении математического доказательства, да и математической практики в целом, с формальной стороны на сторону *неформальную*, связанную с пониманием, убеждением, креативностью и эффективным обменом математическими идеями. Это второе направление может быть охарактеризовано как стремление уделять особое внимание «недедуктивным методам в математике» [*A. Baker*, 2015] и «математической аргументации» [*A. Aberdein, I.J. Dove*, 2013]. В этой связи происходит *переосмысление самого понятия математического доказательства*. Так, для названной линии мысли характерно не просто различение формальных и неформальных математических доказательств, но особое внимание к *преимуществам* неформальных доказательств, а также к выявлению не просто *неформальных*, но и в принципе *неформализуемых* аспектов доказательства.

Что такое математическое доказательство и зачем оно нужно?

Представленный классическим образом в «Началах» Евклида образец математических доказательств являет нам доказательство как строго дедуктивную, а следовательно, аксиоматическую конструкцию, главная цель которой, по-видимому, убедить слушателей или читателей в абсолютной истинности и неопровержимости доказываемого положения. Доказательство здесь подобно закованному в броню танку. Цель его — принудить оппонента к согласию, победа над «врагом». Суть дела в таком доказательстве умело спрятана «под броней», ведь для его автора любой другой математик — это потенциальный ниспровергатель и конкурент. Перед нами плод пресловутого греческого «агонального духа» (Я. Буркхардт). Как писал в свое время Д.Д. Мордухай-Болтовской, «[м]атематик эпохи Платона—Евклида *терроризирован софистами*: он каждую минуту боится попасть в расставленные последними силки и строит укрепления против нападений по всем правилам ими же самими выработанного искусства» (курсив мой. — *В.Ш.*) [*Начала Евклида*, 1948, с. 263].

Можно сказать, что классическое понимание математического доказательства — наследие «пиратской эпохи в истории математики (the robber baron era of the history of mathematics)» [*R. Collins, S. Restivo*, 1983, p. 201][5]. Математики-пираты, согласно Коллинзу и Рестиво, борются друг с другом за славу, власть, богатство. Они стремятся контролировать состояние математики, не гнушаясь кражей или подавлением чужих идей и с целью навязать другим свои собственные. Математические идеи для них — это оружие, которое следует до поры держать в секрете. Они соревнуются между собой, и математика развивается через противостояния, несправедливости и скандалы: Кардано vs. Тарталья, Лейбниц и Бернулли vs. Ньютон, Абель и Галуа vs. Коши и Французская академия, отчасти сюда же — Кантор vs. Кронекер. Когда Декарт подозревал древних греков в том, что они «знали некую математику, весьма отличную от общепринятой математики нашего времени», но ее «утаили с неким опасным коварством сами авторы» [*Р. Декарт*, 1989, с. 89], то дело тут было не только в его личной мнительности, но и в умонастроениях, характерных для его культурного окружения. «Пиратская» эпоха в математике завершилась лишь к началу XX в.: «…пират уступил дорогу “праведн-

[5] Переводя «the robber baron era» как «пиратская эпоха», я следовал работе [*Р. Коллинз, С. Рестиво*, 2002], в которой именно так заменили специфически американское словечко из времен «дикого капитализма» — «robber barons (бароны-разбойники)», введенное в оборот для описания людей, которые во второй половине XIX — первой половине XX в. нажили огромные капиталы, действуя безнравственно, а порой и нарушая закон.

ному политику"» [*R. Collins, S. Restivo*, 1983, p. 218]. Агрессивность и стремление обойти друг друга не исчезли вовсе, но время одиночек прошло: теперь путь к успеху открывается, главным образом, в рамках «коллективистской ориентации (collectivist attitude)» [ibid., p. 218–221], конфликт индивидов уступил место конфликту школ, а затем и международному сотрудничеству математиков.

Пиратская эпоха порождала и поддерживала иллюзию существования самодостаточного математика-одиночки, умаляя его зависимость от других математиков. Переход к образу математики как «коллективного предприятия (a collective enterprise)» [ibid., p. 219] не мог не повлиять на оценку роли и природы доказательства. В руках совместно работающей группы единомышленников математическое доказательство превращается из «оружия бретера» в *средство понимания и сотворчества*. Математику недостаточно иметь доказательство как способ убедить противников в своей правоте, и даже как способ установить истинность некоторого положения.

Укажу в качестве характерного выражения подобного взгляда статью Иегуды Рава[6] «Почему мы доказываем теоремы?» [*Y. Rav*, 1999]. Она открывается мысленным экспериментом: что произошло бы с математической практикой в случае появления некоей воображаемой машины PYTHIAGORA (слово-бумажник, образованное от Pythia, Пифия, и Pythagoras, Пифагор), которая способна мгновенно ответить в отношении любого математического утверждения на вопрос о его истинности или ложности? Математикам осталось бы только формулировать гипотезы и проверять их истинность с помощью этой чудесной машины. Если доказательство — это лишь средство установить общепризнанным способом истинность некоторого математического положения, то в представленной нами ситуации доказательство становится ненужным. Однако описанная фантастическая ситуация была бы не триумфом, а смертью математики, полагает Рав. Причина кроется в том, что, лишившись доказательств, математики лишились бы и возможности формулировать новые интересные гипотезы, ведь именно «доказательства, а не формулировки теорем являются носителями математического знания» [ibid., p. 20], доказательство — «сердце математики» [ibid., p. 31].

Чтобы понять, что на самом деле утверждается в теореме, надо разобраться в ее доказательстве! Не удивительно, что математики не устают искать новые доказательства старых, т.е. давно доказанных, теорем [*J.W. Dawson*, *Jr*, 2006; *Idem.*, 2015]. Доказательства, пишет Рав, подобны автобусным маршрутам, в то время как формулировки теорем — автобусным остановкам, чему-то определяемому

[6] См. о нем: http://www.yehudarav.com/

лишь на основании удобства, т.е. условному и второстепенному, по сравнению с самим маршрутом. Каждое новое доказательство — это новый маршрут, а следовательно — концептуальная инновация. Чем больше доказательств, тем прочнее единая «ткань» математического знания, тем лучше понимание сети взаимосвязей математических понятий. Кроме того, доказательства — это методологическая школа решения проблем. Не случайно Ю.И. Манин говорит, что «хорошие доказательства — это доказательства, которые делают нас мудрее» [*Yu.I. Manin*, 1998]. Создание этой ткани есть результат совместных усилий многих и многих математиков, из поколения в поколение. Надежность математического знания — плод «кумулятивного коллективного процесса верификации (a cumulative collective verification process)» [*Y. Rav*, 1999, p. 20], т.е. многочисленных взаимных проверок и перепроверок, как прямых, так и косвенных (в рамках единой сети), а вовсе не единственного абсолютно безупречного доказательства, полученного гениальным математиком-одиночкой. «Математика — коллективное искусство: социальный процесс взаимных альтернативных проверок (reciprocal cross-checks) — это, по-видимому, единственный путь избавиться от ошибок и гарантировать общую когерентность и стабильность математического знания» [ibid., p. 36].

Еще ярче социальная природа математического доказательства подчеркнута в программном тексте «Что такое доказательство?» Джозефа Гогена [*J. Goguen*, 2001], американского математика, известного специалиста в области computer science, который был профессором Калифорнийского университета в Сан-Диего (University of California, San Diego) (1996–2006). Гоген особо подчеркивает богатую социальную жизнь математиков. Математическое доказательство — это, вообще говоря, коллективное, социальное *событие*, «событие доказательства (proof event)». Оно представляет собой «конкретные переговоры в рамках конкретной группы». Более того: «…традиционное различие между тем, кто дает доказательство (a proof giver), и тем, кто его наблюдает и оценивает (a proof observer), часто является искусственным или проблематичным». Помимо «участников доказательства (provers)» это событие предполагает «объекты доказательства (proof objects)», которые, если учесть динамический аспект происходящего (временную последовательность их появления), могут быть названы «процессами доказательства (proof processes)». Это произносимые слова, жестикуляция, формулы, которые пишутся, чертежи, которые рисуются, видеоряд, который демонстрируется, Java-апплеты, которые выполняются, и т.п. При этом важно понимать, что никакие «объекты» и «процессы» сами по себе еще не образуют «доказательства». Все дело в тех интерпретациях,

которые возникают (или не возникают) только в ходе уникального социального события[7]. С такой точки зрения полностью формальное доказательство попросту невозможно, а неформализуемые аспекты доказательства получают решающее значение!

Краудсорсинг в сфере чистой математики

Пожалуй, ярче всего социальный характер современной практики математических доказательств был продемонстрирован в успешном опыте массового сотрудничества чистых математиков (massively collaborative mathematics). Я имею в виду эксперимент, проведенный в 2009 г. известным британским математиком, лауреатом Филдсовской премии Тимоти Гауэрсом при поддержке со стороны Майкла Нильсена (специалиста по квантовой информатике, убежденного сторонника и популяризатора открытой науки), эксперимент, получивший название the Polymath Project [*T. Gowers, M. Nielsen*, 2009].

Идея состояла в том, чтобы методом краудсорсинга (инициатором и модератором соответствующего блога выступил Гауэрс) получить элементарное доказательство специального случая теоремы Хейлса—Джеветта (the density Hales—Jewett theorem, сокращенно DHJ), относящейся к современной комбинаторике, а точнее — к так называемой теории Рамсея. В итоге в кратчайший срок (всего за шесть недель!) было получено элементарное доказательство не только для специального, но и для общего случая теоремы. В получении результатов участвовали в общей сложности 27 человек: от филдсовских медалистов Гауэрса и Теренса Тао до учителей средней школы. Выяснить вклад каждого из них возможно, лишь тщательно проанализировав 170 тыс. слов значимых комментариев, сделанных в рамках реализации проекта. Результаты совместной работы были

---

[7] См. перевод большого фрагмента из обсуждаемого текста Гогена в статье [*В.А. Шапошников*, 2014, с. 292–294]. Джозеф Гоген и его сотрудники сделали попытку реализовать такую концепцию доказательства в созданном ими в 1997 г. «прувере» (the Kumo proof assistant and website generator) [*J. Goguen, K. Lin*, 2001], который призван был *соединить в одно целое неформальную и формальную стороны математических доказательств*; черпая вдохновение в когнитивной науке, семиотике, нарратологии и даже кинематографе, они стремились «сделать машинные доказательства куда более читабельными, чем [это имеет место] обычно» [*J. Goguen*, 2001]. Гоген выступал также против математического платонизма, засилья «милитаристских метафор» в математическом дискурсе и игнорирования ценностного измерения в практике математических доказательств. Он ушел из жизни в 2006 г., и «прувер» Kumo широкого распространения не получил, однако вдохновлявшие Гогена идеи все же были успешно реализованы, хотя и в несколько ином формате [*P. Stefaneas, I.M. Vandoulakis*, 2012].

опубликованы под коллективным псевдонимом D.H.J. Polymath[8]. Вслед за первым проектом Polymath последовали другие, хотя и далеко не всегда столь же успешные. В январе 2018 г. стартовал уже пятнадцатый такой проект, а на arXiv.org имеется семь статей под указанным псевдонимом.

Главная сила проектов типа Polymath в том, что это «blog maths», которая предоставляет участникам достаточно широкие возможности для *открытого и доверительного обмена* «*сырыми*», *недодуманными идеями*. Подводя первые итоги проекта Polymath1, Гауэрс подчеркивал именно эту его особенность: «…сколь часто я ловил себя на мыслях, которые не могли бы у меня появиться, если бы не случайное замечание кого-то из участников»[9]. Более того, он изначально настраивал потенциальных участников не просто на генерацию интересных идей, но и на необходимость выражать эти идеи так, чтобы другим было удобно продолжать размышление на их основе: «Идеальным результатом [этого проекта] было бы такое решение поставленной проблемы, при котором ни одному конкретному индивиду не пришлось бы целиком производить всю трудную мыслительную работу (having to think all that hard). Трудная работа была бы проделана своего рода суперматематиком, чей мозг распределен между частями мозга множества связанных между собой людей. Поэтому боритесь с искушением удалиться, нечто обдумать, а затем вернуться с тщательно обработанными мыслями: просто выдавайте непосредственную реакцию на то, что вы читаете, и надейтесь, что обсуждение будет развиваться в благоприятном направлении»[10].

В позднейших проектах серии Polymath этот эффект взаимной инспирации одних участников другими также оказался решающим[11].

---

[8] Как видим, аббревиатура названия теоремы превратилась в инициалы «автора», а имя проекта — в его фамилию. Проект Polymath вызвал большой интерес и подробно проанализирован [*M.J. Barany*, 2010; *D. Sarvate* et al., 2011; *J. Cranshaw*, *A. Kittur*, 2011; *M. Nielsen*, 2011]. Имеются также отдельные попытки осмыслить этот опыт в рамках философии математической практики [*P. Allo* et al., 2013; *U. Martin*, *A. Pease*, 2013].

[9] https://gowers.wordpress.com/2009/03/10/polymath1–and–open–collaborative–mathematics/

[10] https://gowers.wordpress.com/2009/01/27/is–massively–collaborative–mathematics–possible/

[11] Особый интерес в этом отношении представляет Polymath5, посвященный проблеме расходимости Эрдёша, который был запущен в 2010 г. Проблема была решена «индивидуально» Теренсем Тао в 2015 г., однако Polymath5 *подготовил для этого решения почву*, а последним толчком к решению послужил (связанный с этой подготовкой) комментарий одного преподавателя из Германии в личном блоге Тао (см.: https://gowers.wordpress.com/2015/09/20/edp28–problem–solved–by–terence–tao/).

Ставка на максимально облегченную, а значит, и ускоренную коммуникацию заинтересованных лиц в рамках сетевого сообщества и здесь оказалась выигрышной. На мой взгляд, следует рассматривать Polymath именно в контексте движения в направлении *открытой математики* в разъясненном выше смысле.

* * *

Оправданно ли говорить в связи с той тенденцией, которая была проиллюстрирована в этой статье рядом примеров, о «смерти автора» в математике? [*И.С. Карамышев*, 2019]. Думаю, что нет, однако и само понятие авторства математического результата, и способы его получения претерпевают на наших глазах существенные изменения: *из индивидуальных они становятся социоцифровыми*. Кроме того, следует учесть, что те процессы, о которых речь шла выше, еще весьма далеки от завершения. Можно говорить пока лишь об имеющихся тенденциях. Мы не знаем точно, насколько далеко они зайдут и какой в итоге станет практика математического доказательства, а делать далеко идущие, но легковесные прогнозы я бы поостерегся. Впрочем, серьезность и значимость происходящих на наших глазах изменений не вызывает сомнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Декарт Р. Правила для руководства ума // Декарт Р. Соч.: В 2 т. М., 1989. Т. 1.

Карамышев И.С. Смерть математика? // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7 Философия. 2019. № 1. С. 95–108.

Коллинз Р., *Рестиво С.* Пираты и политики в математике // Отечественные записки. 2002. № 7 // URL: http://magazines.russ.ru/oz/2002/7/2002_07_42.html

Начала Евклида. Кн. I–VI / Пер. и ком. Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л., 1948.

Шапошников В.А. Математический скептицизм и абсолютистская трактовка доказательства // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике / Труды Московского семинара по философии математики / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М., 2014. С. 282–320.

Шапошников В.А. Распределенное познание и математическая практика в цифровом обществе: от формализации доказательств к пересмотру оснований // Эпистемология и философия науки. 2018. Т. 55, № 4. С. 160–173.

Aberdein A., *Dove I.J.* (eds). The argument of mathematics. Dordrecht, 2013.

Allo P., *Van Bendegem J.P.*, *Van Kerkhove B.* Mathematical arguments and distributed knowledge // The argument of mathematics / Ed. by A. Aberdein, I. Dove. Dordrecht, 2013. P. 339–360.

Baker A. Non-deductive methods in mathematics. 2009 (substantive revision–2015) // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Ed. by E.N. Zalta // URL: https://plato.stanford.edu/entries/mathematics–nondeductive

Barany M.J. "[B]ut this is blog maths and we're free to make up conventions as we go along": Polymath1 and the modalities of "massively collaborative mathematics" // WikiSym'10: Proceedings of the 6th International Symposium on Wikis and Open Collaboration. Gdánsk, July 7–9, 2010. N.Y., 2010. P. 1–9.

Block N. Troubles with functionalism // Savage C.W. (ed.). Perception and cognition: Issues in the foundations of psychology. Minneapolis, 1978. P. 261–325.

Boden M.A. Mind as machine: A history of cognitive science. In 2 vol. N.Y., 2006.

Collins R., *Restivo S.* Robber barons and politicians in mathematics: A conflict model of science // The Canadian Journal of Sociology (Cahiers Canadiens de Sociologie). Spring. 1983. Vol. 8, N 2. P. 199–227.

Corry L. Writing the ultimate mathematical textbook: Nicolas Bourbaki's *Élements de mathématique* // The Oxford Handbook of the History of Mathematics / Ed. by E. Robson, J. Stedall. N.Y., 2009. P. 565–588.

Cranshaw J., *Kittur A.* The polymath project: Lessons from a successful online collaboration in mathematics // Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems (CHI 2011). Vancouver, BC, Canada. May 7–12, 2011. N.Y., 2011. P. 1865–1874.

Croarken M. Human computers in eighteenth- and nineteenth-century Britain // The Oxford Handbook of the History of Mathematics / Ed. by E. Robson, J. Stedall. N.Y., 2009. P. 375–403.

David P.A. The historical origins of "open science": An essay on patronage, reputation and common agency contracting in the Scientific Revolution // Capitalism and Society. Vol. 3, N 2. July 2008. Article 5 // URL: https://ssrn.com/abstract=2209188

Davies E.B. Whither mathematics? // Notices of the American Mathematical Society. December. 2005. Vol. 52, N 11. P. 1350–1356.

Davis B. Teaching mathematics: Toward a sound alternative. N.Y., 1996.

Dawson J.W., *Jr* Why do mathematicians re-prove theorems? // Philosophia Mathematica. Series III. October. 2006. Vol. 14, N 3. P. 269–286.

Dawson J.W., *Jr* Why prove it again? Alternative proofs in mathematical practice. Cham, 2015.

Goguen J. What is a proof? 1997 (last revision — 2001) // URL: http://cseweb.ucsd.edu/~goguen/papers/proof.html

Goguen J., *Lin K.* Web-based support for cooperative software engineering // Annals of Software Engineering. December. 2001. Vol. 12. P. 167–191.

Gowers T., *Nielsen M.* Massively collaborative mathematics // Nature. 15 October. 2009. Vol. 461. P. 879–881.

Granstrand O. The shift towards intellectual capitalism — the role of infocom technologies // Research Policy. December. 2000. Vol. 29, N 9. P. 1061–1080.

Hacking I. Why is there philosophy of mathematics at all? N.Y., 2014.

Henrion C. Women in mathematics: The addition of difference. Bloomington, IN, 1997.

Hurst M., *Cordes S.* When being good at math is not enough: How students' beliefs about the nature of mathematics impact decisions to pursue optional math education // Understanding emotions in mathematical thinking and learning / Ed. by U.X. Eligio. L., 2017. P. 221–241.

Grier D.A. When computers were human. Princeton, 2005.

Manin Yu.I. "Good proofs are proofs that make us wiser": Interview by M. Aigner and V.A. Schmidt // Berlin intelligencer: International Congress of Mathematicians. Berlin, August 1998 / Springer-Verlag, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. B., 1998. P. 16–19.

Martin U., *Pease A.* Mathematical practice, crowdsourcing, and social machines // Intelligent computer mathematics: MKM, Calculamus, DML, and Systems and Projects. 2013. Held as Part of CICM 2013. Bath, UK, July 8–12, 2013. Proceedings (LNAI 7961) / Ed. by J. Carette et al. B., 2013. P. 98–119.

Newborn M. Beyond Deep Blue: Chess in the stratosphere. L., 2011.

Nielsen M. Reinventing discovery: The new era of networked science. Princeton, NJ, 2011.

Rav Y. Why do we prove theorems? // Philosophia Mathematica. Series III. February. 1999. Vol. 7, N 1. P. 5–41.

Sarvate D., *Wetzel S.*, *Patterson W.* Analyzing massively collaborative mathematics projects // The Mathematical Intelligencer. March. 2011. Vol. 33, N 1. P. 9–18.

Silver N. The signal and the noise: Why so many predictions fail — but some don't. N.Y., 2012.

Stefaneas P., *Vandoulakis I.M.* The web as a tool for proving // Metaphilosophy. July. 2012. Vol. 43, N 4. P. 480–498.

Tymoczko T. Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics // The Mathematical Intelligencer. September. 1986. Vol. 8, N 3. P. 44–50.

Weiss I. The QED Manifesto after two decades — Version 2.0 // Journal of Software. August. 2016. Vol. 11, N 8. P. 803–815.