

## Три парадигмы в философии математики

*Статья посвящена сопоставлению взглядов на проблемы философии математики с точки зрения трех философских парадигм, в каждой из которых формируется свой особый образ математики. Различие трех названных парадигм иллюстрируется на примерах спора между реализмом и номинализмом, проблемы a priori и проблемы приложения математики. В заключение производится сравнение парадигм между собой и высказываются аргументы в пользу преимуществ третьей (антропологической) парадигмы перед первыми двумя, а также намечаются последствия ее бескомпромиссного принятия.*

Проблемы философии математики, не только в классическую эпоху (от Платона до Канта), но и в современную (XIX – XX века), неотделимы от общеподобной проблематики и ситуации своего времени. Вне этого контекста они не могут быть в должной мере поняты. Философия математики не является изолированной и самодостаточной дисциплиной.

В этой статье мне хотелось бы обратить внимание на общеизвестные и, в то же время, недостаточно учтенные соображения. Речь пойдет об отличии современной постановки вопросов в философии математики от классической. Вообще – о принципиальном отличии постановки, вроде бы, одних и тех же вопросов в рамках разных философских парадигм.

Я буду рассматривать философию математики через призму трех парадигм: *онтологической, гносеологической и антропологической*. Эти парадигмы не являются, конечно же, моим открытием: труднообозримое число авторов производило различия в том или ином отношении сходные с теми, о которых пойдет речь ниже. Я позволю себе сосредоточиться не на истории, а на том, как понимаю их я.

### 1. Три парадигмы.

*Онтологическая парадигма* (П-1) господствовала на протяжении огромного исторического периода от Античности до эпохи Возрождения включительно. Главный вопрос, который занимает здесь философ – это вопрос онтологического статуса. Философ работает преимущественно с «вертикальными» различиями, стремясь указать место для того о чем он рассуждает в единой онтологической иерархии, построенной по принципу жесткой субординации. Классический пример – Платон и платоники. «Горизонтальные» различия связываются у них с темой «материи», их наличие констатируют, но работать с ними толком не умеют. Заняты же главным образом выяснением того, сколько онтологических «этажей» и каких следует признать, а также тем, к какому «этажу» следует отнести предмет рассмотрения. Наиболее характерным термином для данной парадигмы служит термин «космос», т.е. мир, но понятый как насквозь упорядоченное и иерархизированное целое, обладающее единством и красотой. Проблемы онтологии неразрывно связаны здесь с проблемами космологии. В П-1 проблемы познания, как и проблемы антропологии и теологии, подчинены онтологической проблематике, рассматриваются «изнутри» онтологии и космологии.

*Гносеологическая парадигма* (П-2) возникла в Новое время и продолжает существовать до сих пор, хотя и оттесненной с первых ролей. Исходная ее точка – открытие сознания и познающего субъекта (Декарт). Ярко представлена эта парадигма – у Канта, апофеоз – у Гегеля и Гуссерля, хотя и в разных смыслах. В этой парадигме все рассматривается по отношению к тому месту, которое оно имеет в деятельности сознания. Для нее характерно разрушение «вертикальной» онтологической иерархии, которую сменяет система «горизонтальных» связей в

поле сознания. Вместо *субординации* – *координация* в плоскости сознания. Для этой парадигмы характерна тенденция к *абсолютизации* сознания.

Наряду с опасностью утраты грани между совершенным («Божественным») сознанием и несовершенным («человеческим»), главное слабое место этой парадигмы – статус других познающих существ – других сознаний. Характерный мысленный ход: сознание другого человека познается нами лишь по аналогии с нашим собственным. Имеет место тенденция к солипсизму (включая и «методологический солипсизм» Гуссерля и Карнапа).

Именно в этой парадигме над понятием «элемента» начинает преобладать понятие «отношения» (для П-1 «элементы», «сущности» – первичны, «отношения» – вторичны, для П-2 – наоборот). Возникает тенденция к десубстанциализации сознания.

В П-2 первичная данность – *сознание*. Все существующее, в том числе и человек, рассматриваются изнутри познавательного акта субъекта (в чистом виде – феноменологическая редукция по Гуссерлю). Другими словами, как онтология, так и антропология рассматриваются здесь изнутри гносеологии.

*Антропологическая парадигма* (П-3) явственно заявляет о себе в XIX веке в «бунте против Гегеля» (выражение М. Бубера), хотя корни ее восходят, по крайней мере, к истокам христианства. Она связана с поворотом к конкретному человеку (как он есть здесь и сейчас, во всей своей неповторимости) в качестве первичной реальности и отправной точки философской рефлексии. Человек мыслится здесь в *социуме* и в *истории* (да и сами концепции «истории» и «социума» всерьез возникают только в рамках этой парадигмы!). Этот человек является *конечным* и ограниченным. Его знание всегда несовершенно. Ему неведомы начала и концы, всё, с чем он имеет дело, – относительно и условно (тезис фаллибилизма – Пирс, Поппер). Однако этот человек не только конечен, но и *открыт* – он постоянно в поиске и изменении.

Если для П-2 характерно стремление к созданию полной, замкнутой и окончательной философской системы, то для П-3, с ее постоянной открытостью и незавершенностью, – отказ от системостроительства. Теория познания и онтология возникают здесь изнутри антропологической установки. Гносеология – это то, что строит конкретный человек.

Для П-3 характерна тематика уникальности человеческой *личности* и образуемых уникальными личностями уникальных сообществ, а также создаваемых ими разнообразных и неповторимых *культур* (понятие «культуры» – также приобретение именно П-3). Только в рамках этой парадигмы и становится возможной *история культуры* в современном понимании.

«Горизонтальная» система координаций (которую мы находим в П-2) *укореняется* здесь в истории и географии культуры. В П-3 восстанавливается и онтологическая «вертикаль», но в новом статусе – как *иерархия ценностей*, утверждаемая той или иной личностью или сообществом (культурой). При этом изначально предполагается, что возможны *альтернативные* иерархии ценностей (ценность связана с выбором). Более того, проблематика ценностей (аксиология) всерьез формируется также именно здесь.

Укоренение сознания в пространстве (география) и во времени (история) предполагает, в качестве своего условия, укоренение сознания в *теле*, а нашего тела – среди других тел. Последнее достигается в учении о биологической эволюции и включенности в нее человека (это также знамение перехода к П-3). Наряду с социокультурным, происходит *биологическое и нейрофизиологическое* укоренение сознания.

Главная сложность П-3 состоит в отсутствии надежных основ, столь явных в П-1 и П-2. В П-1 основой всякого рассуждения служит убежденность в «космичности» мира, т.е. в том, что мир обладает неким незыблемым устройением. Наша задача лишь в том, чтобы открыть *каково* это устройство. В П-2 эта надежная основа – незыблемые законы мышления и его единство, верность мышления самому себе. Важнейшая особенность П-3 в том, что такой незыблемой, *абсолютной* основы в ней нет! Философское мышление в рамках третьей парадигмы подчинено принципу герменевтического круга: у него нет ни абсолютного начала, ни абсолютного конца,

все связано со всем в постоянной взаимной корректировке. У нашего познания нет никаких абсолютных гарантий.

## 2. Образ математики в каждой из парадигм.

Математика в разных парадигмах предстает по-разному. Отвечая на вопрос «что такое математика?», каждая парадигма делает главный акцент на чем-то своем.

П-1 – на определенном уровне реальности, к которому относятся математические сущности, и который определяет и соответствующие познавательные способности человека. Классический пример: учение платоников о среднем статусе математики – математические сущности занимают промежуточное положение между уровнями подлинного и чувственного бытия. Таков же статус соответствующих познавательных способностей человека – «дианоий (*διάνοια*)» и «фантазии (*φαντασία*)». Математика для П-1, в первую очередь, – особый вид существующего.

П-2 делает основной акцент на месте математики в системе человеческого познания, на особой достоверности ее утверждений. Математика для П-2, в первую очередь, – это система утверждений, теорий, часть нашего знания. П-2 особо занимает вопрос о том, как математические утверждения соотносятся с другими компонентами нашей мысли.

Для П-3 – математика, в первую очередь, – это математическое сообщество, конкретные люди со всей их культурной, исторической и социальной обусловленностью. Для этого подхода характерен интерес к разнообразию математики в различных типах культуры (еще у О. Шпенглера). Математика мыслится не столько в контексте сознания, сколько в контексте языка. Математика – род деятельности конкретных людей, отсюда – на первом плане, наряду с вариативностью, вопросы эффективности применения математических теорий на практике. Кроме того, занятие математикой – это один из видов активности человека как существа имеющего вполне определенные биологические и психологические характеристики. Отсюда – тенденция погрузить эпистемологию в естествознание (натурализация).

В философии математики XX века сталкиваются и конкурируют преимущественно П-2 и П-3. Три основные программы обоснования математики – логицизм, интуиционизм, формализм, а отчасти и логический эмпиризм Венского кружка и его союзников, – находятся в рамках П-2. Очень показательна фигура Витгенштейна: если «Логико-философский трактат» написан скорее с позиций П-2, то Витгенштейн «Философских исследований» явственно перешел на позиции П-3. Примерно с 60-х годов – наступает повсеместное распространение П-3. Яркий пример П-3-подхода к философии математики в 70-80-е гг. – Раймонд Уайлдер, с его концепцией математики как «культурной системы».<sup>1</sup> Об этом распространении свидетельствуют также – трактовка математики в генетической эпистемологии Жана Пиаже<sup>2</sup>, когнитивной философии математики<sup>3</sup> и многих других опыта мысли. Можно вспомнить также отношение к математике в так называемой «сильной программе» в социологии знания.<sup>4</sup>

На почве перехода от П-2 к П-3 возникает характерная тенденция к социокультурному *релятивизму* (очень показателен в этом отношении Куайн). Однако, далеко не все мыслители склонны упиваться безграничной релятивизацией. Как в философии естествознания, так и в философии математики возникает явное стремление отстоять (*в условиях принятия П-3!*) ряд традиционных для П-1 и П-2 ценностей:

– *единство* математики (Николя Бурбаки и математический структурализм),

<sup>1</sup> Wilder R.L. Mathematics as a Cultural System. Oxford, 1981.

<sup>2</sup> См.: Piaget J. Genetic Epistemology. NY: W.W. Norton and Company, 1971; Beth E.W., and Piaget J. Mathematical Epistemology and Psychology. Dordrecht, 1966.

<sup>3</sup> См., например: Lakoff, George, and Núñez, Rafael E. Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. NY, 2000; Lakoff, George. Women, Fire and Dangerous Things. Univ. of Chicago Press, 1987. Book I. Ch. 20: Mathematics as a Cognitive Activity.

<sup>4</sup> См.: Bloor David. Knowledge and Social Imagery. Routledge, 1976; 2nd ed. - University of Chicago Press, 1991.

– *рациональность* наших выборов (Поппер, Лакатос),  
 – *реализм и объективность* (Поппер с концепцией объективного знания как «третьего мира», Патнэм с его концепциями реализма и «математикой без оснований»<sup>5</sup>).

Поскольку эти авторы принимают основные предпосылки П-3, то это требует иных, новых подходов, по сравнению с теми, что разрабатывались в рамках П-2.

Более того: наиболее важная полемика сейчас идет не между сторонниками «*фундаментализма*» (т.е. П-2 в нашей терминологии) и «*нефундаменталистского*» (социокультурного) подхода (т.е. П-3 в нашей терминологии), а между различными версиями восстановления реализма, рационализма и трансцендентализма в новых условиях, т.е. в условиях принятия П-3!

О начавшемся с 60-х годов соперничестве двух подходов в философии математики много писали. Так мой учитель А.Г. Барабашев еще в 80-е годы предлагал говорить о «переходе от фундаменталистской к нефундаменталистской философии математики».<sup>6</sup> Под «социокультурной или нефундаменталистской (socio-cultural or non-fundamentalist)» философией математики Барабашев понимает исторический подход к математике, который он противопоставляет «фундаменталистской (fundamentalist)» философии математики, рассматривающей математику *sub specie aeternitatis*, вне ее конкретных исторических состояний.<sup>7</sup> По этому вопросу он полемизирует с В.Я. Перминовым.<sup>8</sup> Stewart Shapiro представляет эту оппозицию несколько по-другому, он противопоставляет “foundationalism” и “anti-foundationalism” в философии математики. Первый из них понимается как поиски для математики “a completely secure basis, one that is maximally immune to rational doubt”, а второй предполагает, что “we can live with uncertainty in logic and foundations of mathematics, and we can live well”.<sup>9</sup>

Обратим внимание в этой связи на позицию Paolo Mancosu<sup>10</sup>, который противопоставляет две традиции в философии математики: «фундаменталистов» (foundationalists) и «мавериков» (инакомыслящих, mavericks). Первые “philosophy of mathematics conceived as foundation of mathematics”, они продолжают развивать традиции связанные с основными программами начала XX века (логицизмом, формализмом, интуиционизмом). Вторые отстаивают “analysis of mathematics more faithful to its historical development”, для них характерны также “anti-foundationalism” (“there is no certain foundation for mathematics; mathematics is a fallible activity”), “anti-logicism” (“mathematical logic cannot provide the tools for an adequate analysis of mathematics and its development”) и “attention to mathematical practice”. Все эти черты уже знакомы нам по описанию П-3, однако, Mancosu убежден, что эта альтернативная традиция “has not managed to substantially redirect the course of philosophy of mathematics”, в чем я с ним не могу согласиться. Для Mancosu конкурент фундаментализма остается чем-то маргинальным, о чем красноречиво свидетельствует и сам термин “maverick tradition”, я же убежден, что речь идет о господствующей общепрофессиональной парадигме, которая дает себя знать, в том числе, и в философии математики. То, что Mancosu и его соавторы пытаются сделать в обсуждаемой нами сейчас книге, сам он видит как попытку найти компромисс (в основном тематический!) между двумя традициями, я же вижу их подход как попытку обсуждать традиционные проблемы, но в целом, все-таки, в усло-

<sup>5</sup> Putnam H. Mathematics, Matter and Method (Philosophical Papers. Vol.1. 2-nd ed.). Cambridge University Press, 1979. P.1-78.

<sup>6</sup> Барабашев А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. – М.: Издательство МГУ, 1991. С. 92.

<sup>7</sup> См. также: Barabashev A.G. In support of significant modernization of original mathematical texts (In defence of presentism) // *Philosophia Mathematica* (3). Vol. 5 (1997), pp. 21-41.

<sup>8</sup> См.: Барабашев А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. – М., 1991. Ч. II, гл.1. С. 79-96; Перминов В.Я. Ложные претензии социокультурной философии науки // *Стили в математике: социокультурная философия математики* / Под ред. А.Г. Барабашева. СПб.: РХГИ, 1999. С. 235-264. Недавно эти авторы вновь сформулировали основные свои позиции: *Круглый стол «Математика и реальность»* // *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета*. № 1(1). Киров: Издательство ВятГГУ, 2011. С. 6-27.

<sup>9</sup> См.: Shapiro S. Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic. Oxford: Clarendon Press, 1991. P. 25.

<sup>10</sup> Mancosu P. Introduction // Mancosu P. (ed.) *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press, 2008. P. 1-21.

виях, заданных П-3. Кроме того, на мой взгляд, главное отличие двух обсуждаемых традиций не в круге избираемых тем и проблем (тогда бы эти круги проблем просто могли дополнять друг друга), а в принципиальном различии оснований для рассмотрения каких угодно проблем, приоритет же тех или иных проблем есть нечто второстепенное и производное от исходного различия оснований.

Проиллюстрируем сказанное о соотношении трех парадигм несколькими примерами.

### 3. Проблема универсалий.

Один из основных споров в современной философии математики связан с *противостоянием номинализма и реализма*, т.е. с проблемой универсалий. Математические универсалии (например, геометрические фигуры, числа, множества и функции) – частный случай универсалий вообще. Остановимся, поэтому, на общефилософском контексте проблемы.

Когда различные парадигмы сталкиваются с одной и той же проблемой они склонны тяготеть к принципиально различным ее решениям. Так происходит и в случае проблемы универсалий. П-1 тяготеет к *реализму*, для нее естественно трактовать универсалии как определенный тип реальности. Например, спорить - существуют ли они «в вещах (*in rebus*)», «до вещей (*ante res*)» или «после вещей (*post res*)», где «до» и «после» мыслятся отнюдь не только как порядок познания, но, в первую очередь, - как указание на определенный онтологический уровень. Для П-2 естественен *концептуализм*, когда универсалия признается «*conceptus mentis*», т.е. элементом поля сознания. Для П-3 же естественно тяготение к *номинализму*, универсалии мыслятся как существующие в языке.

Ситуация, правда, усложняется за счет того, что в *каждой* из парадигм могут быть по-своему истолкованы «реальность», «сознание» и «язык». Поэтому, вообще говоря, в каждой из парадигм возможны *все три* позиции по проблеме универсалий, но с *различным* истолкованием реальности, сознания и языка.

Так в П-1 и концептуализм и номинализм предстают как особые разновидности реализма. Например, наши «идеи» могут истолковываться как «отражения» или «отпечатки», возникающие в душе под внешним воздействием, т.е. вторичные реальности. Это *онтологическая версия концептуализма*. Номинализм в П-1 предстает как отрицание реальности общего, отличной от реальности единичного: «универсалии» лишь «*nomina*» (имена), а «*nomina*» - лишь «*flatus vocis*», т.е. колебания воздуха, производимые нашим речевым аппаратом, которые, в свою очередь, – лишь единичная чувственно воспринимаемая вещь (*particulare*) среди других чувственно воспринимаемых вещей. Реализм в П-1 *утверждает* различие онтологического статуса (реальности) «*universalia*» и «*particularia*», в то время как номинализм – *отрицает* такое различие. В определенном смысле, «универсалии» предстают в П-1 как также своего рода «единичности». Спор может быть лишь об их месте в онтологической иерархии – на одном уровне с «партикуляриями» или на разных, выше их или ниже?

Обратим внимание, что теория «отражения», как и вообще классическое понимание референции, есть рудимент П-1. В П-2 *всё*, с чем имеют дело, предстает как объект для субъекта, т.е. как элемент поля сознания, – это относится и к партикуляриям, и к универсалиям. Вопрос стоит лишь о характере соотношения между ними.

В качестве примера можно привести рассуждения Пауля Бернайса о *платонизме в математике* в хрестоматийной статье 1935 г.<sup>11</sup> «Платонизм», по Бернайсу, это такой способ рассуждать, при котором принцип *tertium non datur* неограниченно применяется как к конечным, так и к бесконечным совокупностям, а сами эти совокупности мыслятся как данные актуально. Отличия платонизма (= реализма) и интуиционизма (= номинализма) – в тех способах рассуждения, которые они считают допустимыми. *Это гносеологические, а не онтологические, плато-*

<sup>11</sup> См.: *Bernays P. Platonism in Mathematics // Philosophy of Mathematics: Selected Readings / Ed. by P. Benacerraf and H. Putnam. 2-nd ed. Cambridge Univ. Press, 1983. P. 258-271.*

низм и номинализм! Логицизм есть «крайний» или абсолютный платонизм. Интуиционистско-конструктивистское направление – это программа полного отказа от платонизма (т.е. номинализм). Формалистская же программа Гильберта предстает у Бернайса как умеренный, «ограниченный» платонизм. Эти ограничения вызваны, в первую очередь, опасением впасть в противоречие.

В этом контексте мы могли бы охарактеризовать подход Гильберта-Бернайса как *гносеологический концептуализм*, поскольку он занимает умеренную позицию, дифференцируя предметы математической мысли и соответствующие им методы.

Чтобы увидеть, что происходит при переходе от П-2 к П-3, обратимся к не менее хрестоматийной статье Уилларда Куайна «О том, что есть» 1948 г.<sup>12</sup>

Онтологический вопрос звучит для Куайна так: «к какой онтологии обязывает данная теория или форма речи (what ontology a given theory or form of discourse is committed to, p.13)». Онтология предстает как система «онтологических обязательств (ontological commitments)». Есть, говорит он, «единственный способ, каким мы можем взять на себя онтологические обязательства: используя связанные переменные (the *only* way we can involve ourselves in ontological commitments: by our use of bound variables, p.12)». «Теория обязывает к тем, и только тем, сущностям, на которые должны быть способны указывать связанные переменные этой теории для того, чтобы ее утверждения были истинными (a theory is committed to those and only those entities to which the bound variables of the theory must be capable of referring in order that the affirmations made in the theory be true, pp.13-14)». Это знаменитый онтологический критерий Куайна: *быть значит быть значением квантифицируемой (т.е. связанной) переменной* (To be is to be the value of a bound variable or a variable of quantification). Освобождение от онтологических обязательств достигается только через демонстрацию возможности систематически избегать определенного способа речи.

В отношении математики он констатирует: «классическая математика по шею увязла в обязательствах перед онтологией абстрактных сущностей (Classical mathematics <...> is up to its neck in commitments to an ontology of abstract entities, p.13)». В результате «великий средневековый спор об универсалиях вновь разгорелся в современной философии математики (the great mediaeval controversy over universals has flared up anew in the modern philosophy of mathematics, p.13)». Философы математики, сами того не понимая, обсуждают все ту же старую проблему универсалий, хотя и в новой, проясненной форме:

Логицизм – современная версия реализма (платонизма), интуиционизм – концептуализма, формализм – номинализма. Логицизм – «позволяет употреблять связанные переменные для указания на абстрактные сущности, не делая различия между известными и неизвестными, определяемыми и неопределяемыми (condones the use of bound variables to refer to abstract entities known and unknown, specifiable and unspecifiable, indiscriminately, p.14)». Интуиционизм – «санкционирует употребление связанных переменных для указания на абстрактные сущности только тогда, когда эти сущности могут быть индивидуально приготовлены из заранее определенных ингредиентов (countenances the use of bound variables to refer to abstract entities only when those entities are capable of being cooked up individually from ingredients specified in advance, p.14)». Формализм «считает классическую математику игрой незначимых способов записи. Эта игра, тем не менее, может быть полезной – в зависимости от того, насколько полезной она себя уже проявила в качестве подпорки для физиков и техников (keeps classical mathematics as a play of insignificant notations. This play of notations can still be of utility – whatever utility it has already shown itself to have as a crutch for physicists and technologists, p.15)».

Не следует удивляться, что у Куайна триада «логицизм – интуиционизм – формализм» не так, как у Бернайса, соотносится с триадой «реализм – концептуализм – номинализм». Здесь мы

<sup>12</sup> Quine W.V.O. On What There Is // Quine W.V.O. From a Logical Point of View. 2-nd ed. Harvard Univ. Press, 1980. P. 1-19; Куайн У.В.О. О том, что есть // Куайн У.В.О. Слово и объект. М., 2000. С. 325-341.

находимся уже в рамках П-3, и речь идет об *антропологических, а не гносеологических реализме, концептуализме, номинализме*.

Для Куайна вопросы онтологии становятся не вопросами реальности или мысли, а вопросами *семантики*, т.е. языка. Он утверждает: «онтологический спор должен перерасти в спор о языке (ontological controversy should tend into controversy over language, p.16)». Это так, поскольку именно язык образует ту общую почву, на которой возможна успешная коммуникация. Какую онтологию на самом деле следует принять, для Куайна остается открытым вопросом. Здесь подход Куайна, как известно, носит прагматистский и холистский характер: мы стремимся к «максимальной простоте нашей совокупной картины мира (maximum simplicity in our total world-picture, p.17)».

Одним из весьма популярных до настоящего времени аргументов в пользу математического реализма остается восходящий к разбираемой статье «аргумент от необходимости Куайна-Патнэма» (the Quine-Putnam indispensability argument).<sup>13</sup> Этот аргумент строится в условиях принятия натурализма Куайна и холистического тезиса Дюгема-Куайна, которые подчиняют философию «лучшим из наших научных теорий».

Выглядит он следующим образом: *Посылка 1*: Мы имеем онтологические обязательства в отношении всех сущностей, без которых не могут обойтись наши лучшие научные теории (indispensable to our best scientific theories), и только в отношении их. *Посылка 2*: Без математических сущностей наши лучшие научные теории обойтись не могут. *Заключение*: Нам следует признать, что мы имеем онтологические обязательства в отношении математических сущностей.

Здесь перед нами пример одной из версий реализма, которую можно развивать в рамках П-3. Это *антропологический платонизм* (=реализм) для которого роль платоновой «занебесной области (βτεροὐράνια)» выполняет его антропологический заменитель - «третий мир» Поппера.

С перипетиями проблемы универсалий тесно связана тема априоризма.

#### 4. Априоризм.

История философской мысли в европейской традиции может быть описана как переход П-1 – П-2 – П-3. Для П-1 основной вопрос, - что выше и что ниже расположено в онтологической иерархии. Нижележащие уровни подчинены вышележащим и зависят от них. Главный вопрос - о самом высоком уровне, определяющем собой все остальные. В П-2 – интересующие философа отношения перемещаются в сферу мышления и развертываются в плоскости сознания. Вместо космоса онтологического – космос гносеологический – система знаний. Главный вопрос – о предельных основаниях этой системы. Общие суждения – важнее частных и единичных. У Канта выявление таких предельных оснований – задача трансцендентального исследования. Априорные (точнее – чистые) суждения, как необходимые и строго всеобщие, - важнее суждений эмпирических, дающих лишь единичные констатации. Суждения математики – из числа суждений, обладающих высокой степенью универсальности.

Что происходит с проблемой априорности при переходе к П-3? Один из первых шагов этого перехода – «поворот к языку (linguistic turn)». Мышление укореняется в языке, суждения мысли становятся пропозициями языка. Логический эмпиризм – знамение перехода. Здесь универсальность мышления осознает себя как универсальность языковая: априорными могут быть только аналитические суждения, т.е. суждения не включающие ничего, кроме отношений значений терминов (meaning relations of terms).<sup>14</sup> Однако сам язык все еще мыслится в духе П-2 –

<sup>13</sup> См.: *Colyvan M.* Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics (first published - 1998, substantive revision - 2011) / Stanford Encyclopedia of Philosophy. <http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/>. Классическое выражение этого аргумента содержится в работе: *Putnam H.* Philosophy of Logic // Putnam H. Mathematics, Matter and Method (Philosophical Papers. Vol.1. 2-nd ed.). Cambridge University Press, 1979. P. 323-357.

<sup>14</sup> См.: *Carnap R.* Philosophical Foundations of Physics. New York: Basic Books, 1966. P. 177; *Карнап Р.* Философские основания физики. М., 1971. С. 242.

тенденция к построению единого совершенного языка науки, жесткое противопоставление языкового – эмпирическому (дихотомия аналитических и синтетических суждений).

Следующий шаг в направлении П-3 делают поздний Витгенштейн и Куайн – они уже мыслят научный язык укорененным в естественном языке, а естественный язык – как открытое многообразие языковых игр – человеческую культуру. Мышление понимается как неотделимое от языка, точнее – от речевой деятельности. Языковая универсальность сменяется языковым релятивизмом и тема априорности вроде бы исчезает.

Именно так полагает один из ведущих американских философов математики – Пинелопи Мэдди. В статье 2000 г. «Натурализм и априори»<sup>15</sup> она прослеживает перипетии различения эмпирического и трансцендентального уровней от Канта к Карнапу, у которого оно предстает как различие внутренних и внешних вопросов (относительно определенного языкового каркаса), затем следует разбор полемики Куайна с Карнапом, которая приводит первого из них к формулировке позиции *натурализма*, состоящей в принципиальном снятии этого различия двух уровней.

Натурализм Куайна располагает эпистемологию на уровне частных естественных наук, включая ее в сложное взаимодействие с ними, которое устроено по принципу герменевтического круга, не вырождающегося в круг порочный за счет принципиальной открытости ситуации. Несмотря на ряд частных расхождений с Куайном, Мэдди принципиальная сторонница натурализма в философии. Натурализм, по ее убеждению, не оставляет места для априори, поскольку последнее неизбежно требует двух-уровневой структуры, различия «первой» и «второй» философии. Мэдди сторонница второй философии без первой. Не случайно последнюю свою книгу она так и назвала “Second Philosophy” (Oxford, 2007). Мэдди красноречиво выражает свое отношение к априоризму: “any question of a priority is an ordinary question about how human beings know the world”<sup>16</sup>.

Тема априорности, как мы уже сказали, связана с проблемой универсалий, а также - с проблемой истины. При переходе от П-1 к П-2 онтологические «универсалии» сменяются «универсальными» понятиями и суждениями. Кант ставит вопрос об универсальных суждениях, универсальном знании и условиях его возможности. Тема априоризма, понятая как вопрос об условиях возможности универсального знания, не обязана исчезать при переходе от П-2 к П-3. Однако тема априоризма при этом существенно трансформируется. Теперь – это вопрос об условиях возможности языковой коммуникации, взаимопонимания и согласованности действий в сообществе, условиях существования человеческого сообщества как носителя общих знаний, ценностей и норм. Вопрос о доказательности сменяется при этом вопросом об убедительности, вопрос установления истины – вопросом взаимопонимания. Не случайны соответствующие изменения, происходящие в области подходов к проблеме истины: господство корреспондентной (П-1) и когерентной (П-2) теорий сменяется, при переходе к П-3, прагматическим подходом и «дефляционными» теориями, т.е. позицией близкой к полному отказу от самого термина «истина».

Проблема универсальности и априорности не сгинула в болоте релятивизма, но получила совершенно другую постановку. Такое переосмысление априорного особенно наглядно у немецких философов второй половины XX века – в «эрлангенском конструктивизме» (60-70-е гг.), «трансцендентальной прагматике» Карла-Отто Апеля и «универсальной прагматике» Юргена Хабермаса. Здесь априорность предстает, в развитие «априори жизненного мира (das Apriori der Lebenswelt, the a priori of the lifeworld)» позднего Гуссерля, как социальное априори социокультурного жизненного мира<sup>17</sup>, или как «априори неограниченного коммуникативного со-

<sup>15</sup> Maddy Penelope. Naturalism and the A Priori // P. Boghossian and C. Peacocke, eds., New Essays on the A Priori, Oxford, 2000. P. 92-116.

<sup>16</sup> Maddy P. Naturalism, Transcendentalism and Therapy (Forthcoming, to appear in J. Smith and P. Sullivan, eds., Transcendental Philosophy and Naturalism, Oxford University Press). P. 23. Статья доступна по адресу: [http://www.lps.uci.edu/lps\\_bios/pjmaddy](http://www.lps.uci.edu/lps_bios/pjmaddy)

общества»<sup>18</sup>. Из более ранних примеров можно вспомнить: «материальное априори» Макса Шелера<sup>19</sup>; «априори изготовления (Herstellungsapriori, productive a priori)» Гуго Динглера<sup>20</sup>, «биологическое априори» Конрада Лоренца<sup>21</sup>; «экзистенциальное априори» Людвиг Бинсвангера<sup>22</sup>; «историческое априори» Мишеля Фуко<sup>23</sup>; и т.д.

### 5. Приложение математики.

Известная книга Марка Штайнера 1998 г. называется «The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem».<sup>24</sup> Штайнер приводит мнения ряда крупнейших физиков и математиков, – Юджина Вигнера, Стивена Вайнберга, Ричарда Фейнмана, Роджера Пенроуза, - обращавших особое внимание на проблему применения математики к физическому миру. В отличие от них, современные философы, полагает Штайнер, «либо игнорировали, либо отвергали (either ignored or dismissed)»<sup>25</sup> эту проблему. В более свежей статье<sup>26</sup> он подчеркивает, что «это равнодушие философского сообщества к вопросам приложения математики есть явление довольно новое (the disregard by the philosophical community of issues of mathematical application is quite recent, p.625)». «Недостаточно оценено, - продолжает он, - в какой высокой степени история западной философии – это история попыток понять, почему математика применима к Природе, несмотря на, по-видимому, веские основания для убеждения, что этого быть не должно (To an unappreciated degree, the history of Western philosophy is the history of attempts to understand why mathematics is applicable to Nature, despite apparently good reasons to believe that it should not be)».<sup>27</sup> Далее Штайнер дает краткий обзор позиций по вопросу о прикладной математике Платона, Декарта, Беркли, Канта и Милля, призванный показать, что «центральные философские доктрины этих ведущих мыслителей были задуманы в значительной степени для того, чтобы объяснить применимость математики к Природе (the central philosophical doctrines of these major philosophers were conceived in great measure to explain the applicability of mathematics to Nature)».<sup>28</sup>

На мой взгляд, ситуация обратна той, которую описывает Штайнер. Проблема применения (приложения) математики – современная проблема. Этой проблемы фактически не было в европейской философии от античности и до Канта включительно. Она – достояние XIX-XX веков. Ее появление связано с *фрагментаризацией образа мира и знания*, а также с *закреплением представления о мирообразующей роли человеческого произвола* при переходе к П-3 (отсюда, в том числе, - и Вигнер<sup>29</sup>, с тезисом о «непостижимой эффективности математики»). В последние

<sup>17</sup> *Habermas J.* The Theory of Communicative Action. Vol. 2: Lifeworld and System: A Critique of Functionalist Reason. Boston: Beacon Press, 1987. Ch. VI.1 (P.119-151).

<sup>18</sup> *Apel K.-O.* Towards a Transformation of Philosophy. Milwaukee: Marquette University Press, 1998.

<sup>19</sup> *Scheler M.* Formalism in Ethics and Non-Formal Ethics of Values. Evanston: Northwestern University Press, 1973. Ch. 2: Formalism and Apriorism.

<sup>20</sup> *Dingler H.* Das Experiment. Sein Wesen und seine Geschichte. Munich, 1928. См. также: *Михайловский А.В.* «Новое априори» Гуго Динглера // Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. М., 2003. С. 219-233.

<sup>21</sup> *Lorenz, K. Z.* Kant's doctrine of the a priori in the light of contemporary biology. // *Evans Richard I.*, Konrad Lorenz: The man and his ideas. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1975.

<sup>22</sup> *Being-In-The-World: Selected Papers of Ludwig Binswanger.* Translated with Critical Introduction by Jacob Needleman. New York: Basic Books, 1963.

<sup>23</sup> *Foucault M.* The Archeology of Knowledge. Tavistock Publications, 1972. Часть III. Гл. 5.

<sup>24</sup> *Steiner M.* The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1998.

<sup>25</sup> *Ibid.* P. 14.

<sup>26</sup> *Steiner M.* Mathematics – Application and Applicability // *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* Edited by Stewart Shapiro. Oxford University Press, 2005. Chapter 20 (P. 625-650).

<sup>27</sup> *Ibid.* P. 625.

<sup>28</sup> *Ibid.* P. 626-627.

<sup>29</sup> *Wigner E.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // *Communications in Pure and Applied Mathematics.* Vol. 13. № 1 (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc.; *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С.182-198.

годы мы наблюдаем явный поворот, по крайней мере, англоязычного сообщества философов математики, к проблеме приложения; у истоков этого поворота и стояли работы Штайнера.

Марк Коливан<sup>30</sup> считает, что загадка Вигнера остается загадкой, требующей решения, для любой философии математики. Я склонен не согласиться с ним. Такой проблемы нет для тех философских подходов, для которых *целостность* изначально и самоочевидна. Но о какой целостности идет речь? Основные типы целостности – 1) онтологическое единство мира (П-1); 2) единство сознания (П-2); 3) единство биологического вида и единство социокультурного пространства (П-3).

В классический период решение проблемы приложения математики достигалось не в результате сознательной ее постановки и нахождения особого решения, а автоматически, при экспликации представлений о целостности. Так платоновская концепция «причастности (*participation*)» есть явная формулировка интуиции *единства* космоса через отношение к единому Благу. Ничего специфически математического здесь нет, и никакой особой проблемы математика в этом контексте не создает. Это Аристотель, причем в методических целях, приписывает Платону «отделение» эйдосов от вещей, в результате чего мы и получаем проблему применимости (как эйдетического, так и математического к эмпирическому). Это «отделение» понадобилось Аристотелю только для того, чтобы более эффектно подать собственную теорию абстрагирования, т.е. мысленного отделения того, что отдельно не существует. Отметим, что в теории абстракции у Аристотеля опять же нет ничего специфически математического, кроме примеров, да и сама теория мыслится успешно работающей лишь на фоне исходной и итоговой целостности мира.

Для Декарта опять же специфика математики не принципиальная, а чисто историческая (она порождена «ревнивым» умыслом греков), принципиально же математика без остатка растворяется в идее универсального метода познания (не случайно математики нет в «древе наук» Декарта!). Вопрос приложения математики исчезает в общей проблеме адекватности познания, а последняя решается через основополагающий тезис о внутренней согласованности мира, сотворенного единым Богом: Бог «не обманщик», а, следовательно, мир и врожденные идеи не могут не соответствовать друг другу. Лейбниц назовет это «предустановленной гармонией универсума». Кантовский «коперниканский переворот» не отменил исходную целостность, а лишь изменил ее характер, - единство космоса сменилось единством сознания. Поэтому и автоматизм решения проблемы прикладной математики у него сохраняется.

В случае же Беркли и Милля, истинная математика – это эмпирическая математика, ее даже «прикладной» не назовешь, т.к. для них нет такой чистой математики, которая к чему-то вне нее «прикладывается» (точнее, для Беркли есть чистая математика, но она ложна); здесь, по словам самого же Штайнера, «изначально отрицается существование применимости (*to deny the existence of applicability in the first place*)», а, следовательно, «не оказывается проблемы для обсуждения (*there is no problem to begin with*)».<sup>31</sup>

Изменение ситуации, постепенно зревшее на протяжении Нового времени, стало явным в XIX веке (переход к П-3). Происходит осознание «лакуны», «зазора», имеющегося между человеческими теориями и устройством мира. Начинает господствовать узаконенный плюрализм теорий как проявление человеческого произвола. В философии математики это выразилось в появлении в начале века идеологии фикционализма (у Лазара Карно и, особенно ярко и последовательно, – у Н.И. Лобачевского<sup>32</sup>), а в конце века – конвенционализма (А. Пуанкаре) и формализма (Д. Гильберт). Именно на этом фоне возникает как потребность обоснования математики, так и проблема ее применения.

<sup>30</sup> Colyvan M. The Miracle of Applied Mathematics // *Synthese* 127: 265-277, 2001.

<sup>31</sup> Steiner M. Mathematics – Application and Applicability // *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Edited by Stewart Shapiro. Oxford University Press, 2005. P. 626-627.

<sup>32</sup> Perminov V.Ya. The Philosophical and Methodological Thought of N.I. Lobachevsky // *Philosophia Mathematica* (3). Vol. 5 (1997). P. 3-20.

В современной парадигме, математика – это результат деятельности определенного человеческого сообщества. Предполагаемая здесь целостность – это единство культуры, габитуса<sup>33</sup>. Это нечто существенно более «зыбкое», чем единство античного космоса или единство замысла Бога о мире. Почему социальные навыки должны все согласовываться друг с другом? Почему социальные навыки должны согласовываться с природой («дарвинистский» аргумент также довольно «зыбок»)? Может быть, здесь имеется лишь минимальная степень «притирки» (поздний Витгенштейн)? Однако, и в этой парадигме, нет, по-видимому, иного пути решения проблемы приложения математики, как через обнаружение определенной социокультурной *целостности*, пусть даже «ризомного» и самоорганизующегося типа.

## 6. Заключение.

Так как же нам относиться к множественности парадигм в философии вообще и в философии математики в частности? Что означает это различие парадигм для нас, и как соотносятся парадигмы между собой?

Каждая из трех парадигм имеет свой набор первичных очевидностей, свою область беспроблемности. Однако несоизмеримыми в смысле Т. Куна они не являются: они сосуществуют в истории, в том числе и в рамках *эkleктичных* философских построений, пытающихся сочетать их между собой. Например, уже Декарт, совершив открытие сознания как первичной реальности, тут же попробовал построить мостик к прежней парадигме через доказательство бытия Бога.

Возможен и более сильный тезис в вопросе соотношения парадигм. Каждый из парадигмальных переходов, от П-1 к П-2 и от П-2 к П-3, связан с осознанием и усвоением фундаментального философского открытия: во-первых, мир дан нам только в нашем сознании, и, во-вторых, само это сознание социально и биологически детерминировано, погружено в конечность существования. Может показаться, что каждая следующая парадигма отрицает предыдущую, разрушает ее. Отчасти это так, но, в тоже время, каждая следующая парадигма вбирает в определенном смысле предыдущую в себя. Прекрасное здание античного космоса не исчезло бесследно с открытием Декарта, но оказалось существующим в сознании. Антропологизация сознания, в свой черед, не уничтожила сознание и его конструкции, но определенным образом укоренила их, правда, лишив, как сознание, так и существующий в нем космос, их абсолютности. Может показаться, что второй парадигмальный переход есть шаг назад к наивному реализму, более того, - он помещает наше философствование в порочный круг: мир дан лишь в сознании, но сознание детерминировано миром; социальная и биологическая реальность существуют лишь в нашем сознании, и они же, это сознание создают и определяют. Нас спасает отказ от абсолютизации знания и сознания, этот отказ «расцепляет» порочный круг, обращая его в круг герменевтический.

Лично я убежден, что П-3 обладает неоспоримыми преимуществами критичности к самой себе, гибкости и взвешенности притязаний, по сравнению с П-1 и П-2. Я пытаюсь рассуждать в рамках антропологической парадигмы (П-3). Более того, мне представляется, что главная задача состоит в том, чтобы избежать *эkleктизма*, который достаточно внешним, механическим образом комбинирует разные парадигмы. Здесь требуется максимальная осознанность и последовательность подхода.<sup>34</sup>

<sup>33</sup> См.: Bourdieu P. Structures, habitus, practices. // Bourdieu P. The Logic of Practice. Stanford, CA: Stanford University Press, 1990. Book I. Ch.3 (pp. 52-79); Гутнер Г.Б. Риск и ответственность субъекта коммуникативного действия. М.: Издательство Свято-Филаретовского православно-христианского института, 2008. Гл. 3-5.

<sup>34</sup> По этой причине мне представляется неприемлемым «праксеологический априоризм (praxeological apriorism)» В.Я. Перминова, который пытается сочетать абсолютистские притязания (П-2) с аргументами от практической деятельности человека (П-3). См.: Перминов В.Я. Праксеологический априоризм и стратегия обоснования математики // Математика и опыт. Под ред. А.Г. Барабашева. М.: Издательство МГУ, 2003. С. 56-95; Perminov V.Ya. On the Nature of Logical Norms // Philosophia Mathematica (2). Vol. 3 (1988). № 1. P. 36-54 (Особенно раздел 3: Logic and Practice).

Что означает последовательное принятие П-3 для философии математики? Во-первых, - отказ от простых решений. Одна из важнейших особенностей антропологической парадигмы – признание крайне высокой *сложности* языка, сознания, человека, социума, мира. Создаваемая людьми математика не является здесь исключением. Во-вторых, - очень серьезный пересмотр старого образа математики как эталона точности, строгости, доказательности, истинности и т.д. Каждая из подобных характеристик должна быть, либо отвергнута как неадекватная, либо заново взята с боем и в уточненном виде. В-третьих, - признание невозможности адекватно философствовать о математике в отрыве от современной истории и социологии математики, а также без учета результатов, полученных в лингвистике, психологии, когнитивных исследованиях. В-четвертых, - фаллиблистическую трезвость и человекоразмерность философских притязаний (fallibilistic sobriety and philosophical aspirations put to human measure).

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

*Шапошников Владислав Алексеевич (Shaposhnikov Vladislav)*, кандидат философских наук, доцент кафедры философии естественных факультетов философского факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Эл. адрес: [vladislavshap@gmail.com](mailto:vladislavshap@gmail.com)