ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА
о диссертации Васильевой Анастасии Андреевны
"Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов",
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 —
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 201 наименований. Полный объем диссертации составляет 259 страниц.

Работа А.А. Васильевой посвящена важным вопросам теории приближения и теории вложения функциональных пространств, имеющим различные приложения в теории дифференциальных уравнений, численных методах и теории вероятностей.

Многие задачи, возникающие в этой области, берут начало от исследований С.Л. Соболева, С.М. Никольского, Л.Д. Кудрявцева, О.В. Бесова. В частности, в работах Л.Д. Кудрявцева, Й. Нечаса, А. Куфнера, Х. Трибеля, Б. Опица, О.В. Бесова, Д.Е. Эдмундса, М.О. Отелбаева изучались вопросы вложения весовых пространств Соболева при различных условиях на веса. Случай весовых пространств Бесова изучался в работах Х. Трибеля, Д.Е. Эдмундса, Д.Д. Хароске, Л. Скрыпчака, Т. Кюна, Х.-Г. Леопольда, В. Зиккеля и др.

Тесно связанной с вопросами вложения функциональных пространств оказывается задача вычисления порядков различного рода поперечников. Имеющая самостоятельный научный интерес в теории приближения, эта задача в теории вложения выступает количественной оценкой компактного вложения функционального класса в другой функциональный класс.

Понятия поперечников появились в работах П.С. Урысона, П.С. Александрова, А.Н. Колмогорова и В.М. Тихомирова. Затем это направление интенсивно изучалось в работах В.М. Тихомирова, Р.С. Исмагилова, Ю.И. Маковоза, Б.С. Кашина, В.Е. Майорова, Е.Д. Глускина, В.Н. Темлякова, Э.М. Галеева, где были получены порядковые оценки поперечников конечномерных шаров и классов Соболева. Задачи об оценках поперечников весовых классов Соболева в весовых пространствах Лебега изучались в работах Д. Левиатана, В.Н. Коновалова, В.Д. Степанова, Е.Н. Ломакиной, Я. Ланга, В.Д. Эванса, Д.Дж. Харриса, М.А. Лифшица, В. Линде (случай пространств на отрезке, полуоси или метрическом графе), М.З. Соломяка, Х. Трибеля, М.О. Отелбаева, И.В. Бойкова (случай многомерных областей). Задачи о поперечниках весовых классов Бесова изучались в работах Х. Трибеля, Д.Д. Хароске, Л. Скрыпчака и др.

Одним из важнейших направлений исследований для поперечников весовых классов функций, определенных на достаточно общих областях, является определение по возможности достаточно широкого класса пар весов, для которых порядки поперечников такие же, как и в невесовом случае. Другим важным направлением исследований является определение характера поведения весов около особенностей, существенно влияющих на порядки убывания поперечников по сравнению с невесовым случаем.

Во введении описываются постановки задач, история вопроса, методы и теоретическая значимость, а также формулируются основные результаты.

В **главе 1** изучаются условия на пару весов g и v, при которых поперечники весовых классов Соболева $W^r_{p,g}(\Omega)$ в пространстве $L_{q,v}(\Omega)$, рассматриваемых на области Ω, удовлетворяющей условию Джона, имеют такие же порядки, как в случае единичных весов (иначе говоря, в невесовом случае) на области с липшицевой границей. В одномерном случае результаты такого типа были получены в работах Лифшица, Линде, Степанова, Ломакиной, Ланга.

Первые три параграфа имеют технический характер. Их результаты используются в дальнейшем для получения порядковых оценок поперечников.

В §1.1 вводится древоподобная структура области в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющей условию Джона с параметром $a > 0$ (по области строится дерево, каждое поддерево которого порождает подобласть, удовлетворяющей условию Джона с параметром, зависящим только от a и d).

В §1.2 строится последовательность разбиений дерева $\mathcal{T}$ по функции $\Psi : 2^{\mathbf{V}(\mathcal{T})} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей специальным условиям.

В §1.3 строится последовательность разбиений области, удовлетворяющей условию Джона, по функции множества. В частности, получено уточнение и обобщение результата Коэна, Петрушева, ДеВора и Хун Сю о разбиении куба.

В §1.4 получена оценка сверху поперечников. Для доказательства этой оценки строится последовательность приближений функций из весового класса Соболева кусочно-полиномиальными функциями (при этом используются результаты предыдущих параграфов), а затем применяется метод дискретизации Майорова и известные оценки поперечников конечномерных шаров.

В §1.5 доказывается оценка снизу.

В **главе 2** рассматриваются более простые области с липшицевой границей и веса, монотонные по одной переменной с липшицевыми поверхностями уровня. Для решения задачи о получении оценки порядков поперечников в зависимости от пары весов здесь приходится преодолевать значительные трудности, так как эти веса могут очень быстро меняться. В результате получено описание некоторого широкого класса пар весов, для которых поперечники имеют такие же порядки, как в невесовом случае.

В §2.1 строится специальная последовательность разбиений куба по функции множества. В §2.2 получена поточечная оценка приближения гладкой функции полиномом через некоторый интегральный оператор. В §2.3 получена оценка нормы этого оператора в весовых пространствах. В §2.4 результаты, полученные в предыдущих параграфах, используются для доказательства оценок поперечников.

В **главе 3** изучается задача о точных двусторонних оценках двухвесовых операторов суммирования на деревьях из пространства l_p на множестве вершин в пространство l_q. Для операторов суммирования последовательностей (частный случай деревьев) эта задача была решена в работах Беннетта, Бравермана, Степанова, Гроссе-Эрдманна, Гольдмана. Аналогичная задача для операторов интегрирования была решена в статьях Таленти, Томазелли, Макенхаупта, Брэдли, Мазьи, Розина, Сойера, Синнамона, Степанова. В работе В.Д. Эванса, Д.Дж. Харриса и Л. Пика получены точные двусторонние оценки нормы двухвесового оператора интегрирования на метрическом дереве. Однако в общем случае эти оценки имеют очень неудобный для приложений вид. В работе Наймарк и Соломяка при $p = q = 2$ для регулярных метрических деревьев и весов, зависящих только от расстояния до корня, задача сводится к оценке нормы двухвесового оператора интегрирования на отрезке или прямой.

А.А. Васильевой удалось получить точные двусторонние оценки норм операторов суммирования при дополнительных условиях на веса, имеющие простой и удобный для приложений вид.

В §3.1 доказывается дискретный аналог результата Эванса, Харриса и Пика. В §3.2 получена оценка нормы оператора суммирования при $p < q$. Оценку простого вида удается доказать в двух случаях: 1) при общих дополнительных предположениях о скорости роста числа вершин и первого веса и о скорости убывания нормы второго веса на поддеревьях, 2) для весов, зависящих только от расстояния до корня и деревьях, удовлетворяющих некоторому ослабленному условию регулярности. Во втором случае в §3.3 получена оценка нормы оператора суммирования при $p \geqslant q$ (при этом задача сведена к уже решенной задаче об оценке нормы оператора суммирования последовательностей). Тот же метод позволяет обобщить результат Наймарк и Соломяка для операторов интегрирования на случай $p \geqslant q$ и деревьев с ослабленным условием регулярности.

В **главе 4** получены теоремы вложения для весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона, с весами, являющимися функцией расстояния до некоторого подмножества границы. Предполагается, что это подмножество является h-множеством (это понятие было определено Брикки в 2002 году, в частных случаях функции h такие множества возникали в работах Трибеля). Примерами h-множеств являются липшицевы поверхности и некоторые фрактальные множества.

Для весов, являющихся функциями расстояния до липшицевых поверхностей, теоремы вложения были получены в работах Й. Нечаса, А. Куфнера, Й. Кадлеца, Г.Н. Яковлева, Х. Трибеля, Джаин Панкаджа и др.