

УДК 514.853+517.938.5

П. Е. Рябов

Фазовая топология одного частного случая интегрируемости Горячева в динамике твердого тела

На основе метода булевых функций, развитого М. П. Харламовым для алгебраически разделимых систем, исследована фазовая топология одного частного случая интегрируемости Горячева в задаче о движении твердого тела в жидкости. Найдена бифуркационная диаграмма отображения момента и указан инвариант Фоменко, позволяющий классифицировать систему с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: уравнения Кирхгофа, вполне интегрируемые гамильтоновы системы, алгебраическое разделение переменных, бифуркационная диаграмма, бифуркации лиувиллевых торов.

DOI: 10.4213/sm8297

§ 1. Введение

Уравнения Кирхгофа движения твердого тела в жидкости в общем случае имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ – импульсивный момент, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ – импульсивная сила, $H = H(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$ – полная энергия. Известными интегралами системы (1.1) являются геометрический интеграл

$$\Gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

интеграл площадей

$$L = M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3$$

и полная энергия H . На совместном уровне

$$\mathcal{P}_{a,\ell} = \{\Gamma = a^2, L = \ell\}, \quad \dim \mathcal{P}_{a,\ell} = 4,$$

система (1.1) гамильтонова с двумя степенями свободы, в связи с чем для ее интегрируемости достаточно в дополнение к интегралу H указать еще один интеграл, независимый с H почти всюду.

В работе [1] найден случай интегрируемости, в котором

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) + M_3^2 + \frac{1}{2} \left[c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{b}{\alpha_3^2} \right]. \quad (1.2)$$

В предположении

$$L = 0 \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00119) и Правительства Волгоградской области (грант № 13-01-97025).

система (1.1) на $\mathcal{P}_{a,0}$ имеет первый интеграл

$$F = \left[M_1^2 - M_2^2 - \frac{b(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{a^2 \alpha_3^2} + c \alpha_3^2 \right]^2 + 4 \left[M_1 M_2 - \frac{b \alpha_1 \alpha_2}{a^2 \alpha_3^2} \right]^2.$$

В частном случае $b = 0$ этот интеграл найден С. А. Чаплыгиным в статье [2], там же выполнено и сведение задачи при $b = 0$ к эллиптическим квадратурам. Дальнейшие обобщения рассматриваемая интегрируемая система получила в работе Х. М. Яхья [3]. В работе [4] на основе идей бигамильтонова подхода предложен вариант выбора переменных разделения случая Горячева.

В настоящей публикации представлено явное вещественное разделение переменных для случая Горячева, отличное от описанного в [4] и основанное на геометрическом подходе к разделению переменных, предложенном в [5], [6]. Это решение не требует привлечения каких-либо математических теорий. Полученные аналитические формулы позволяют исследовать фазовую топологию, в частности бифуркации лиувиллевых торов, и построить грубый инвариант Фоменко.

§ 2. Параметризация интегральных многообразий

В этом параграфе мы используем замену С. А. Чаплыгина (см. [2]) и геометрический подход к разделению переменных, предложенный в [5]–[7].

Вместо одного из интегралов H , F можно рассматривать интеграл в форме, указанной в [4]:

$$K = \left[M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2} \right]^2 + 2c \alpha_3^2 (M_1^2 - M_2^2) + c^2 \alpha_3^4.$$

При условии (1.3) он выражается через H и F следующим образом:

$$K = F + \frac{4b}{a^2} H - \frac{b^2}{a^4}. \quad (2.1)$$

Подходящим выбором направления подвижных осей и единиц измерения можно добиться того, чтобы было выполнено $c = 1$ и $a = 1$.

Введем переменные x , z , ξ , полагая

$$x^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad z = \alpha_3^2, \quad \xi = M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}. \quad (2.2)$$

При $b = 0$ соответствующие переменные были введены в [2] и привели к найденному там разделению. Следуя С. В. Ковалевской, введем также комплексную замену ($i^2 = -1$)

$$\begin{aligned} w_1 &= M_1 + iM_2, & w_2 &= M_1 - iM_2, \\ x_1 &= \alpha_1 + i\alpha_2, & x_2 &= \alpha_1 - i\alpha_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Геометрический интеграл примет вид

$$x^2 + z = 1, \quad (2.4)$$

а поскольку сама постановка задачи предполагает $\alpha_3 \neq 0$, из (1.3), (2.3), (2.4) получим

$$M_3 = -\frac{x_2 w_1 + x_1 w_2}{2\sqrt{z}}. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.2), (2.5) в уравнения

$$H = h, \quad K = k \quad (2.6)$$

интегрального многообразия $J_{h,k} \subset \mathcal{P} = \mathcal{P}_{1,0}$ приводит их к виду

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{k - \xi^2}{z} - z, \quad (2.7)$$

$$x_1^2(w_2^2 + z) + x_2^2(w_1^2 + z) = 4hz - 2\xi - 2b \left(1 - \frac{1}{z}\right). \quad (2.8)$$

Из определения (2.2) с использованием (2.4), (2.7) получаем

$$w_1 w_2 = \xi - \frac{b}{z}, \quad (2.9)$$

$$z^2(w_1^2 + z)(w_2^2 + z) = kz^2 - 2b\xi z + b^2, \quad (2.10)$$

$$x_1 x_2 = 1 - z. \quad (2.11)$$

Из (2.7), (2.9) находим

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{z}}(\sqrt{\varphi_-} + \sqrt{\varphi_+}), \quad w_2 = \frac{1}{2\sqrt{z}}(\sqrt{\varphi_-} - \sqrt{\varphi_+}),$$

где

$$\varphi_{\pm}(z, \xi) = k \pm 2b - (\xi \pm z)^2.$$

Введем комплексно сопряженные переменные

$$\mu_1 = z(w_1^2 + z), \quad \mu_2 = z(w_2^2 + z), \quad (2.12)$$

и пусть $\mu^2 = \mu_1 \mu_2$. Тогда уравнение (2.10) примет вид

$$\mu^2 = kz^2 - 2b\xi z + b^2. \quad (2.13)$$

Отсюда, в частности, следует, что любая траектория системы изображается в виде кривой на поверхности второго порядка (2.13) в вещественном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3(z, \xi, \mu)$.

Из (2.12), (2.7) находим

$$\mu_1 + \mu_2 = z^2 - \xi^2 + k.$$

Обозначая $\psi_{\pm} = z^2 - \xi^2 + k \pm 2\mu$, можем записать

$$\sqrt{\mu_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{\psi_+} + \sqrt{\psi_-}), \quad \sqrt{\mu_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{\psi_+} - \sqrt{\psi_-}). \quad (2.14)$$

Обозначим

$$\theta_{\pm} = 2hz^2 - (\xi + b)z + b \pm (1 - z)\mu.$$

Тогда из (2.8), (2.11), (2.12) получим

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}}(\sqrt{\theta_+} + \sqrt{\theta_-}), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}}(\sqrt{\theta_+} - \sqrt{\theta_-}),$$

или, с учетом (2.14),

$$x_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\theta_+} + \sqrt{\theta_-}}{\sqrt{\psi_+} - \sqrt{\psi_-}}, \quad x_2 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\theta_+} - \sqrt{\theta_-}}{\sqrt{\psi_+} + \sqrt{\psi_-}}.$$

Выражения для M_3 , α_3 находим теперь из (2.5) и второго соотношения (2.2). Таким образом, найдены все алгебраические выражения для фазовых переменных через две вспомогательные переменные z , ξ . Возвращаясь к вещественным компонентам фазового вектора, имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varphi_-}{z}}, & M_2 &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\varphi_+}{z}}, \\ M_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}\mu z} \left\{ \sqrt{\varphi_+} (\sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_+} + \sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_-}) - \sqrt{\varphi_-} (\sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_-} + \sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_+}) \right\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}\mu} (\sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_+} + \sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_-}), \\ \alpha_2 &= -\frac{i}{2\sqrt{2}\mu} (\sqrt{\psi_+} \sqrt{\theta_-} + \sqrt{\psi_-} \sqrt{\theta_+}), & \alpha_3 &= \sqrt{z}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Считая, что в представленных выше формулах выбрано $\mu \geq 0$, запишем условие существования вещественных решений (2.15) в виде системы неравенств

$$\begin{aligned} \varphi_+(z, \xi) &\leq 0, & \varphi_-(z, \xi) &\geq 0, \\ \psi_+(z, \xi) &\geq 0, & \psi_-(z, \xi) &\leq 0, \\ \theta_+(z, \xi) &\geq 0, & \theta_-(z, \xi) &\leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что подстановка k через постоянную интеграла F , которую по очевидным соображениям обозначим через f^2 , дает

$$\theta_+ \theta_- = [\xi - b - f + (b + f - 2h)z][\xi - b + f + (b - f - 2h)z]z^2. \quad (2.16)$$

Кроме того,

$$\psi_+ \psi_- = \varphi_+ \varphi_- = [(z - \xi)^2 + 2b - k][(z + \xi)^2 - 2b - k].$$

Отсюда следует, что проекция интегрального многообразия $J_{h,k}$ на плоскость (z, ξ) ограничена отрезками прямых или лучами

$$\xi - b \pm f + (b \mp f - 2h)z = 0, \quad z - \xi \pm \sqrt{k - 2b} = 0, \quad z + \xi \pm \sqrt{k + 2b} = 0.$$

Каждая из этих прямых, если она корректно определена, служит касательной к кривой второго порядка

$$\mathcal{G}: kz^2 - 2b\xi z + b^2 = 0. \quad (2.17)$$

Выбрав семейство таких касательных в качестве координатной сети в соответствующей компоненте плоскости, получим, что в такой сети для всех допустимых пар постоянных первых интегралов область возможности движения окажется прямоугольной, что, как правило, ведет к разделению переменных (см. [5], [6]).

§ 3. Вещественное разделение переменных

Любая касательная к кривой (2.17) в области

$$kz^2 - 2b\xi z + b^2 \geq 0$$

является проекцией на плоскость (z, ξ) пары прямолинейных образующих однополостного гиперboloида (2.13) в пространстве $\mathbb{R}^3(z, \xi, \mu)$. Выберем в качестве параметров двух семейств таких образующих корни u_1, u_2 квадратного уравнения

$$zu^2 - 2bu + (2b\xi - kz) = 0. \quad (3.1)$$

Его дискриминант, равный μ^2 , в силу (2.10) неотрицателен на всех траекториях, поэтому u_1, u_2 вещественны. Тогда из (3.1), (2.13) найдем

$$z = \frac{2b}{u_1 + u_2}, \quad \xi = \frac{u_1 u_2 + k}{u_1 + u_2}, \quad \mu = b \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$p_1(u) = 2b + k - u^2, \quad p_2(u) = 2b - k + u^2, \quad p_3(u) = (u - b)^2 - f^2,$$

и пусть

$$p_{ij} = p_i(u_j), \quad r_{ij} = \sqrt{p_{ij}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2. \quad (3.3)$$

Знак каждой из величин r_{ij} произволен, но во всех используемых одновременно формулах знаки должны быть выбраны одинаковыми. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= -\frac{p_{11}p_{12}}{(u_1 + u_2)^2}, & \varphi_- &= -\frac{p_{21}p_{22}}{(u_1 + u_2)^2}, \\ \psi_+ &= \frac{p_{12}p_{21}}{(u_1 + u_2)^2}, & \psi_- &= \frac{p_{11}p_{22}}{(u_1 + u_2)^2}, \\ \theta_+ &= \frac{2bp_{31}}{(u_1 + u_2)^2}, & \theta_- &= \frac{2bp_{32}}{(u_1 + u_2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения вместе с (3.2) в (2.15), выбираем знаки радикалов согласованными таким образом, чтобы выполнялись интегральные соотношения (2.6). Для этого достаточно выполнения равенства, по смыслу согласованного с (2.16):

$$\sqrt{\varphi_+}\sqrt{\varphi_-} = \sqrt{\psi_+}\sqrt{\psi_-}.$$

Поэтому положим

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi_+} &= -i \frac{r_{11}r_{12}}{u_1 + u_2}, & \sqrt{\varphi_-} &= i \frac{r_{21}r_{22}}{u_1 + u_2}, \\ \sqrt{\psi_+} &= \frac{r_{12}r_{21}}{u_1 + u_2}, & \sqrt{\psi_-} &= \frac{r_{11}r_{22}}{u_1 + u_2}, \\ \sqrt{\theta_+} &= \frac{\sqrt{2b}r_{31}}{u_1 + u_2}, & \sqrt{\theta_-} &= \frac{\sqrt{2b}r_{32}}{u_1 + u_2}. \end{aligned}$$

Тогда из (2.15) получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= i \frac{r_{21}r_{22}}{2\sqrt{2b}(u_1 + u_2)}, & M_2 &= -\frac{r_{11}r_{12}}{2\sqrt{2b}(u_1 + u_2)}, \\ M_3 &= -\frac{i}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{22}r_{31} + r_{11}r_{21}r_{32}), \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{21}r_{31} + r_{11}r_{22}r_{32}), \\ \alpha_2 &= -\frac{i}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{11}r_{22}r_{31} + r_{12}r_{21}r_{32}), & \alpha_3 &= \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{u_1 + u_2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для вывода дифференциальных уравнений для новых переменных u_1, u_2 из определения (2.2) в силу системы (1.1) найдем

$$\dot{\xi} = 2\alpha_3(\alpha_2 M_1 + \alpha_1 M_2), \quad \dot{z} = 2\alpha_3(\alpha_1 M_2 - \alpha_2 M_1),$$

что в подстановке (3.4) дает

$$\dot{\xi} = \frac{(u_1^2 - k)r_{12}r_{22}r_{32} + (u_2^2 - k)r_{11}r_{21}r_{31}}{\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)(u_1 + u_2)}, \quad \dot{z} = -\frac{2\sqrt{b}(r_{11}r_{21}r_{31} + r_{12}r_{22}r_{32})}{(u_1^2 - u_2^2)(u_1 + u_2)}.$$

С другой стороны, из (3.2) имеем

$$\dot{\xi} = \frac{1}{(u_1 + u_2)^2} [(u_2^2 - k)\dot{u}_1 + (u_1^2 - k)\dot{u}_2], \quad \dot{z} = -\frac{2b}{(u_1 + u_2)^2} (\dot{u}_1 + \dot{u}_2).$$

Из двух последних систем получим разделенную систему

$$(u_1 - u_2)\dot{u}_1 = \sqrt{W(u_1)}, \quad (u_1 - u_2)\dot{u}_2 = \sqrt{W(u_2)}, \quad (3.5)$$

где

$$W(u) = \frac{1}{b}p_1(u)p_2(u)p_3(u) = \frac{1}{b}(2b + k - u^2)(2b - k + u^2)[(u - b)^2 - f^2]. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4), (3.5) сводят случай Горячева к гиперэллиптическим квадратурам. Указанные уравнения были представлены в кратком сообщении [8].

§ 4. Допустимая область и бифуркационная диаграмма

Начиная с этого момента считаем, что оставшийся свободный физический параметр положителен:

$$b > 0. \quad (4.1)$$

Полученные выше аналитические результаты по разделению переменных справедливы и для $b < 0$, но качественное поведение системы может значительно отличаться. В частности, полная энергия в окрестности особенности $\alpha_3 = 0$ окажется неограниченной снизу.

В качестве пары независимых (почти всюду) интегралов на $\mathcal{P}$ удобно выбрать K, F . Введем интегральное отображение

$$J = K \times \sqrt{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.2)$$

и рассмотрим интегральные многообразия

$$J_{k,f} = J^{-1}(k, f) = \{\zeta \in \mathcal{P} : K(\zeta) = k, F(\zeta) = f^2\}, \quad f \geq 0.$$

В силу соотношения (2.1) они совпадают с соответствующими многообразиями (2.6).

Далее мы пользуемся методами работы [9]. Напомним некоторую терминологию.

Допустимым множеством называется подмножество $\mathcal{D}$ плоскости (k, f) , состоящее из всех точек, для которых $J_{k,f} \neq \emptyset$. Фиксируем $(k, f) \in \mathcal{D}$. *Достижимой областью* $\text{Асс}(k, f)$ называем проекцию интегрального многообразия $J_{k,f}$ на плоскость (u_1, u_2) . Из (3.4), (3.5) в предположении (4.1) следует, что любая связная компонента достижимой области является прямоугольником,

ограниченным отрезками прямых, параллельных координатным осям. На этих прямых значение постоянной координаты является корнем многочлена $W(u)$, называемого максимальным многочленом.

Напомним, что *бифуркационной диаграммой* называется подмножество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, над которым отображение (4.2) не является локально тривиальным. В условиях рассматриваемой задачи оно совпадает с множеством критических значений J . Наличие зависимостей (3.4) гарантирует, что Σ есть часть дискриминантного множества Δ многочлена (3.6), содержащаяся в $\mathcal{D}$:

$$\Sigma = \Delta \cap \mathcal{D}. \quad (4.3)$$

Из (3.6) получаем, что Δ состоит из трех прямых

$$k = 2b, \quad k = -2b, \quad f = 0$$

и четырех парабол

$$k = \pm 2b + (f \pm b)^2. \quad (4.4)$$

Для нахождения допустимого множества требуется получить необходимые и достаточные условия вещественности значений (3.4) в терминах знаков подрадикальных выражений в наиболее компактной форме независимых неравенств, легко проверяемых в областях, на которые плоскость постоянных интегралов делится дискриминантным множеством.

Пусть $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ – булева пара. Следуя [9], вводим функцию (булев знак) $\text{bsgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ такую, что

$$\text{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0, \\ 1, & \theta < 0. \end{cases}$$

Обозначая символом $\oplus$ сумму по модулю 2, имеем свойство

$$\text{bsgn}(\theta_1 \theta_2) = \text{bsgn}(\theta_1) \oplus \text{bsgn}(\theta_2).$$

Введем булевы переменные

$$z_i = \text{bsgn } p_{i1}, \quad z_{3+i} = \text{bsgn } p_{i2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При отсутствии кратных корней многочлена W любая компонента достижимой области $\text{Acc}(k, f)$ имеет внутреннюю точку. В такой точке условия вещественности (3.4) запишутся в виде системы $\mathcal{B}$ -линейных уравнений

$$\begin{aligned} z_2 \oplus z_5 &= 1, \\ z_1 \oplus z_4 &= 0, \\ z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 &= 1, \\ z_1 \oplus z_2 \oplus z_6 &= 1, \\ z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 &= 0, \\ z_1 \oplus z_5 \oplus z_6 &= 0, \\ z_1 \oplus z_3 \oplus z_5 &= 1, \\ z_2 \oplus z_4 \oplus z_6 &= 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно, ранг этой системы над $\mathcal{B}$ равен 4 и она эквивалентна системе

$$Az = \zeta^0, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_6)^T \in \mathcal{B}^6$, булева матрица A имеет вид (нуль изображаем пустой клеткой)

$$\begin{array}{c} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ & 1 & & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|, \quad (4.7)$$

а $\zeta^0 = (0, 1, 1, 0)^T$.

Заметим, что

$$p_1(u) > -p_2(u),$$

поэтому к системе (4.6) можно добавить условия-импликации

$$\begin{cases} (z_1 \rightarrow \neg z_2) = 1, \\ (z_4 \rightarrow \neg z_5) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (z_1, z_2) \neq (1, 1), \\ (z_4, z_5) \neq (1, 1). \end{cases}$$

Кроме того, транспозиция $u_1 \leftrightarrow u_2$ в формулах (3.4) равносильна замене знака у всех r_{ij} одновременно, поэтому можно условиться, например, о выполнении неравенства

$$u_1^2 < u_2^2, \quad (4.8)$$

что дает

$$p_{21} < p_{22},$$

откуда

$$(z_5 \rightarrow z_2) = 1 \iff (z_2, z_5) \neq (0, 1).$$

Перечисленным условиям отвечает лишь одно из четырех решений системы (4.6)

$$\mathbf{z} = (0, 1, 1, 0, 0, 0)^T.$$

Следовательно, единственная система неравенств, обеспечивающая вещественность решения (3.4) при договоренности (4.8), имеет вид

$$\begin{aligned} (k + 2b) - u_1^2 &\geq 0, & u_1^2 - (k - 2b) &\leq 0, & (u_1 - b)^2 - f^2 &\leq 0, \\ (k + 2b) - u_2^2 &\geq 0, & u_2^2 - (k - 2b) &\geq 0, & (u_2 - b)^2 - f^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Так как мы условились брать f неотрицательным, отсюда сразу следует, что решения возможны лишь в квадранте

$$k \geq 2b, \quad f \geq 0. \quad (4.10)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{k - 2b}, & m_2 &= \sqrt{k + 2b}, & 0 < m_1 &< m_2, \\ n_1 &= b - f, & n_2 &= b + f, & n_1 &\leq n_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

При условии (4.1) из последнего уравнения (3.4) с необходимостью вытекает требование

$$u_1 + u_2 \geq 0.$$

Поэтому при выборе (4.8) получаем, что $u_2 \geq 0$, и тогда система (4.9) определяет следующие условия на достижимую область:

$$u_1 \in [-m_1, m_1] \cap [n_1, n_2], \quad u_2 \in [m_1, m_2] \setminus [n_1, n_2]. \quad (4.12)$$

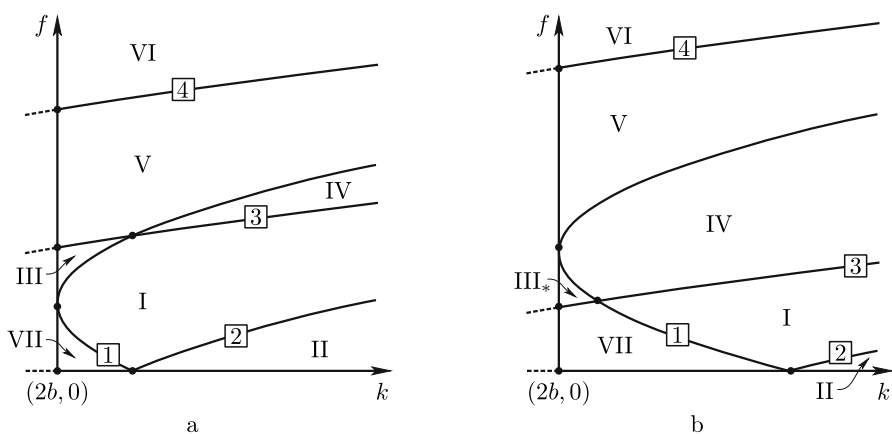


Рис. 1. Дискриминантное множество и кодировка областей: $b < 1$ (a); $b > 1$ (b)

Пересечение множества Δ с квадрантом (4.10) показано на рис. 1. При переходе через значение $b = 1$ исчезает область III и возникает область, обозначенная III_* . На рис. 1 занумерованы участки парабол (4.4) (номера заключены в квадраты). На этих участках имеют место соответствующие равенства: 1) $m_1 = |n_1|$; 2) $m_1 = n_2$; 3) $m_2 = n_2$; 4) $m_2 = |n_1|$. Сводка результатов по распределению значений (4.11) приведена в первых двух столбцах табл. 1. Оставшиеся два столбца содержат промежутки осцилляции переменных u_1, u_2 , определенные согласно (4.12). Таким образом, движения возможны лишь в областях I–III, при этом проекция интегрального многообразия на плоскость разделенных переменных состоит из одного прямоугольника.

Таблица 1

Номер области	Корни W	Область изменения u_1	Область изменения u_2
I	$-m_2 < -m_1 < n_1 < m_1 < n_2 < m_2$	$[n_1, m_1]$	$[n_2, m_2]$
II	$-m_2 < -m_1 < n_1 < n_2 < m_1 < m_2$	$[n_1, n_2]$	$[m_1, m_2]$
III	$-m_2 < n_1 < -m_1 < m_1 < n_2 < m_2$	$[-m_1, m_1]$	$[n_2, m_2]$
III_*	$-m_2 < -m_1 < m_1 < n_1 < m_2 < n_2$	$\emptyset$	$[m_1, n_1]$
IV	$-m_2 < -m_1 < n_1 < m_1 < m_2 < n_2$	$[n_1, m_1]$	$\emptyset$
V	$-m_2 < n_1 < -m_1 < m_1 < m_2 < n_2$	$[-m_1, m_1]$	$\emptyset$
VI	$n_1 < -m_2 < -m_1 < m_1 < m_2 < n_2$	$[-m_1, m_1]$	$\emptyset$
VII	$-m_2 < -m_1 < m_1 < n_1 < n_2 < m_2$	$\emptyset$	$[m_1, n_1] \cup [n_2, m_2]$

Следующая теорема суммирует полученную информацию относительно допустимого множества.

ТЕОРЕМА 1. Допустимое множество в пространстве констант первых интегралов $K, \sqrt{F}$ имеет вид:

1) при $b < 1$

$$\mathcal{D} = \{0 \leq f \leq b, k \geq 2b + (f - b)^2\} \cup \{b \leq f \leq 2\sqrt{b} - b, k \geq 0\} \\ \cup \{f \geq 2\sqrt{b} - b, k \geq -2b + (f + b)^2\};$$

2) при $b \geq 1$

$$\mathcal{D} = \{0 \leq f \leq 1, k \geq 2b + (f - b)^2\} \cup \{f \geq 1, k \geq -2b + (f + b)^2\}.$$

В силу этих неравенств получим согласно (4.3) следующее утверждение о бифуркационной диаграмме.

ТЕОРЕМА 2. Бифуркационная диаграмма отображения $K \times \sqrt{F}$ состоит из следующих множеств:

1) при $b < 1$

- (a) $k = 2b, b \leq f \leq 2\sqrt{b} - b,$
- (b) $f = 0, k \geq 2b + b^2,$
- (c) $k = 2b + (f - b)^2, 0 \leq f \leq 1,$
- (d) $k = 2b + (f + b)^2, f \geq 0,$
- (e) $k = -2b + (f + b)^2, f \geq 2\sqrt{b} - b;$

2) при $b \geq 1$

- (a) $f = 0, k \geq 2b + b^2,$
- (b) $k = 2b + (f - b)^2, 0 \leq f \leq 1,$
- (c) $k = 2b + (f + b)^2, f \geq 0,$
- (d) $k = -2b + (f + b)^2, f \geq 1.$

Отрезок оси $f = 0$ включается в бифуркационную диаграмму, поскольку очевидно, что нуль – критическое значение функции F , а для арифметического корня $\sqrt{F}$ в соответствующих точках нарушается гладкость.

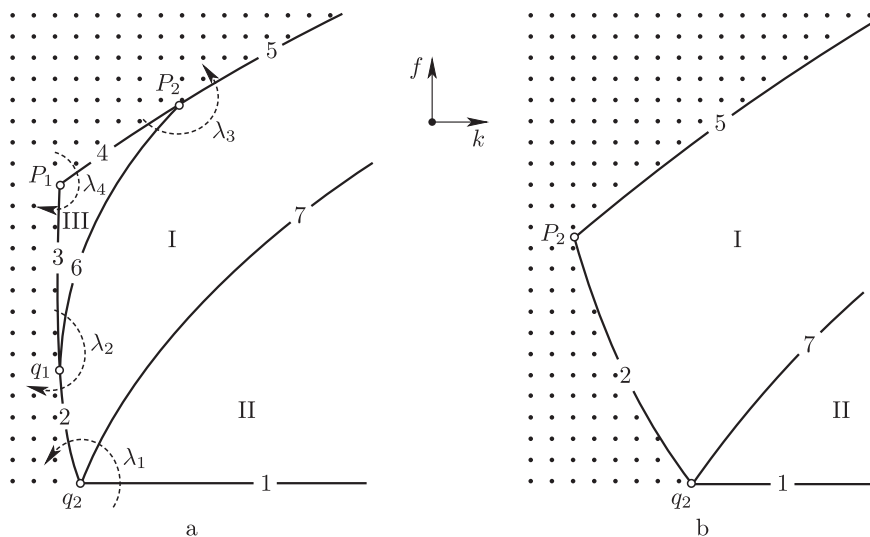


Рис. 2. Допустимое множество и бифуркационная диаграмма: $b < 1$ (a); $b > 1$ (b)

Допустимое множество и бифуркационная диаграмма указаны на рис. 2. На рис. 2, а номерами 1–7 отмечены различные участки множеств (а)–(е) из п. 1) теоремы 2; рис. 2, б номерами 1, 2, 5 и 7 отмечены участки множеств (а)–(д) из п. 2) теоремы 2, на которые их разбивают узловые точки диаграммы. Очевидно, что при переходе к значениям $b > 1$ картина лишь упрощается, поэтому топологический анализ достаточно провести для случая $b < 1$. На рис. 2, а отмечены пути $\lambda_1 - \lambda_4$, указав бифуркации вдоль которых, мы получим полную информацию для построения любого грубого топологического инварианта.

§ 5. Фазовая топология

Рассмотрим наиболее богатый случай $b < 1$. Для вычисления количества компонент связности регулярных интегральных многообразий (количества торов Лиувилля) и критических интегральных поверхностей воспользуемся методом булевых вектор-функций (см. [9]). Сопоставим каждому радикалу r_{ij} в (3.3) его булев знак

$$z_i = \text{bsgn } r_{i1}, \quad z_{3+i} = \text{bsgn } r_{i2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Напомним, что здесь подразумеваются следующие предварительные действия, не влияющие на используемые формулы.

Фиксирована некоторая связная компонента Π достижимой области – прямоугольник осцилляции пары (u_1, u_2) . Тогда вполне определены знаки всех подкоренных выражений p_{ij} в зависимостях (3.4). У отрицательных p_{ij} изменим знак, множитель i вынесем в коэффициент перед произведением радикалов и соответственно переопределим r_{ij} так, что это значение будет вещественным.

Сопоставляя каждому моному от радикалов в (3.4) компоненту булевой вектор-функции, придем к тем же выражениям для компонент, которые фигурируют в левых частях уравнений (4.5). Полученную $\mathcal{B}$ -линейную функцию обозначим $\tilde{A}: \mathcal{B}^6 \rightarrow \mathcal{B}^8$. Исключение зависимых компонент (элементарные преобразования строк соответствующей матрицы) сводит $\tilde{A}$ к функции $\tilde{A}: \mathcal{B}^6 \rightarrow \mathcal{B}^4$ с матрицей (4.7), которую так же, как и ранее, обозначим через A . Дальнейший алгоритм состоит в следующем. На заданном прямоугольнике Π аргументы функции $\tilde{A}$ разбиваем на две группы, помещая в первую булевы знаки радикалов, не меняющих знак на траекториях в Π , а во вторую – булевы знаки радикалов, периодически меняющих знак на этих траекториях. Для каждого из нефиктивных аргументов второй группы элементарными преобразованиями матрицы A добьемся того, чтобы соответствующий столбец стал единичным, после чего исключим из A этот столбец и строку, содержащую выбранный аргумент. В результате получим $\mathcal{B}$ -линейное отображение, зависящее только от аргументов первой группы. Если p – его ранг, то количество связных компонент интегрального многообразия, накрывающего прямоугольник Π , равно 2^p (см. [9]). В случае, когда компонент, зависящих только от аргументов первой группы, не остается, полагаем $p = 0$, и соответствующий прямоугольник накрывается одной компонентой. В критическом случае (наличие кратного корня у максимального многочлена) делаем то же самое с дополнительной оговоркой о том, что радикалы, содержащие кратный корень, всегда относятся ко второй группе, даже если этот кратный корень – внутренняя точка для промежутка осцилляции и фактически за конечное время не достигается

соответствующей переменной разделения. Приведенные рассуждения применяются без учета возможности выбора различных знаков у радикала $\sqrt{u_1 + u_2}$. Этот выбор задает одно из двух инвариантных подмногообразий в $\mathcal{P}$, на которые фазовое пространство системы разбивает исключенное из рассмотрения подмножество $\alpha_3 = 0$ особенностей потенциала. Поэтому в полном фазовом пространстве все последующие результаты о количестве компонент связности необходимо умножить на 2. Будем считать, что для определенности мы ограничиваемся подмногообразием в $\mathcal{P}$, заданным неравенством $\alpha_3 > 0$ (очевидно, рассматриваемая система обладает симметрией – обращением знака величин M_1, M_2, α_3).

Информация о достижимых областях, аргументах второй группы и остающихся после редукции компонентах булевой вектор-функции собрана в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

Номер области (участка)	Достижимая область	Вторая группа	Редуцированная функция	2^p	$\frac{1}{2}J_{k,f}$
I	$[n_1, m_1] \times [n_2, m_2]$	2, 3, 4, 6	0	1	$\mathbf{T}^2$
II	$[n_1, n_2] \times [m_1, m_2]$	3, 4, 5	$z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	2	$2\mathbf{T}^2$
III	$[-m_1, m_1] \times [n_2, m_2]$	2, 4, 6	$z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$	2	$2\mathbf{T}^2$
1	$\{n_1 = n_2\} \times [m_1, m_2]$	3, 4, 5	$z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$	2	$2S^1$
2	$\{n_1 = m_1\} \times [n_2, m_2]$	2, 3, 4, 6	0	1	S^1
3	$\{-m_1 = m_1\} \times [n_2, m_2]$	2, 4, 6	$z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$	2	$2S^1$
4	$[-m_1, m_1] \times \{n_2 = m_2\}$	2, 4, 6	$z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$	2	$2S^1$
5	$[n_1, m_1] \times \{n_2 = m_2\}$	2, 3, 4, 6	0	1	S^1
6	$[n_1 = -m_1, m_1] \times [n_2, m_2]$	2, 3, 4, 6	0	1	$S^1 \vee S^1$
7	$[n_1, m_1 = n_2] \times [m_1 = n_2, m_2]$	2, 3, 4, 5, 6	0	1	$S^1 \vee S^1$

Поясним преобразования матрицы (4.7) в трех основных случаях.

Для области I и сегментов 2, 5–7 последовательно исключаем пары “столбец–строка” (z_2, ζ_2) , (z_3, ζ_3) , (z_4, ζ_4) . Остается одна строка, в которой аргумент z_6 принадлежит второй группе – исключаем и ее. Остается вектор-функция без компонент (в табл. 2 она отмечена как тождественный нуль), т.е. $p = 0$.

Для области II и сегмента 1 последовательно исключаем пары “столбец–строка” (z_3, ζ_3) , (z_4, ζ_4) , после чего к строке ζ_1 прибавим строку ζ_2 . Столбец z_5 становится единичным и исключается пара (z_5, ζ_1) . Остается одна строка, отвечающая функции $z_1 \oplus z_2 \oplus z_6$, в которой все аргументы принадлежат первой группе. Следовательно, $p = 1$.

Для области III и сегментов 3, 4 исключаем пары (z_2, ζ_2) и (z_4, ζ_4) , после чего к строке ζ_3 прибавим строку ζ_1 . Столбец z_6 становится единичным и исключается пара (z_5, ζ_1) . Остается одна строка, отвечающая функции $z_1 \oplus z_3 \oplus z_5$ с аргументами из первой группы. Следовательно, $p = 1$.

Теперь по количеству компонент связности однозначно определяются и интегральные многообразия, лежащие в выбранной “половине” системы (фиксированный знак α_3). Они указаны в последнем столбце табл. 2. Соответственно, вдоль всех путей $\lambda_1 - \lambda_3$ с учетом указанного направления имеем одну и ту же



Рис. 3. Круговые молекулы для узловых точек

последовательность бифуркаций $\emptyset \rightarrow 2A \rightarrow 2\mathbf{T}^2 \rightarrow B \rightarrow \mathbf{T}^2 \rightarrow A \rightarrow \emptyset$, а вдоль пути λ_4 – бифуркацию $\emptyset \rightarrow 2A \rightarrow 2A \rightarrow \emptyset$. Молекулы показаны на рис. 3. Здесь для базовых бифуркаций, найденных в [10], использованы современные обозначения атомов (см. [11]–[13]).

При переходе к значениям $b > 1$ происходят очевидные упрощения – исчезает регулярная область III с двумя торами Лиувилля и примыкающие к ней сегменты 3, 4, 6.

Отметим, что наличие явного алгебраического решения с разделенными переменными позволяет легко вычислить инварианты траекторной эквивалентности, основываясь на числах вращения.

§ 6. Аналитическая классификация особенностей и грубый инвариант А. Т. Фоменко

Для аналитической классификации особенностей удобно рассмотреть отображение момента

$$\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (6.1)$$

полагая $(k, h) = \mathcal{F}(x) = (K(x), H(x))$.

Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображения момента, т.е. точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ также называется *бифуркационной диаграммой*. Множество $\mathcal{C}$ можно стратифицировать рангом отображения момента, представив его в виде объединения $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$. Здесь $\mathcal{C}^r = \{x : \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}$.

Бифуркационную диаграмму Σ отображения момента (6.1) можно получить из бифуркационной диаграммы, построенной на плоскости (k, f) , используя преобразование

$$k = f^2 + 4bh - b^2.$$

Теорема 2 переформулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента (6.1) состоит из следующих множеств:*

- 1) при $0 < b < 1$
 - (a) $k = 2b, \sqrt{b} - 1/2 \leq h \leq 1/2$,
 - (b) $k = 4bh - b^2, h \geq (b+1)/2$,
 - (c) $k = 2b + (2h-1)^2, h \geq b/2$,
 - (d) $k = -2b + (2h+1)^2, h \geq \sqrt{b} - 1/2$;
- 2) при $b \geq 1$
 - (a) $k = 4bh - b^2, h \geq (b+1)/2$,
 - (b) $k = 2b + (2h-1)^2, h \geq b/2$,
 - (c) $k = -2b + (2h+1)^2, h \geq b/2$.

Далее мы используем стандартную скобку Ли–Пуассона

$$\begin{aligned}\{M_i, M_j\} &= -\varepsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, \alpha_j\} &= -\varepsilon_{ijk} \alpha_k, & \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, \\ 1 \leq i, j, k \leq 3, & & \varepsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i).\end{aligned}$$

Множество $\mathcal{C}^0$ исчерпывается неподвижными точками системы (1.1):

$$c_i: \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \left(0, \varepsilon_1 \sqrt{1 - \sqrt{b}}, \varepsilon_2 \sqrt[4]{b}\right), \quad d_j: \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (0, 0, \varepsilon_3), \quad (6.2)$$

где $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1$ и, соответственно, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$, причем точки c_i существуют лишь для $0 < b \leq 1$. Значения первых интегралов образуют нульмерный остов бифуркационной диаграммы:

$$P_1 = \mathcal{F}(c_i): k = 2b, \quad h = \sqrt{b} - \frac{1}{2}, \quad P_2 = \mathcal{F}(d_j): k = b^2 + 1, \quad h = \frac{b}{2}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Особым точкам P_1 и P_2 бифуркационной диаграммы Σ соответствуют невырожденные особенности c_i и d_j ранга 0 отображения момента. В зависимости от значений параметра b тип особенностей определяется в табл. 3.*

ТАБЛИЦА 3

$\mathcal{C}^0$	Образ в $\mathbb{R}^2(k, h)$	Тип в $\mathcal{P}$
$0 < b < 1$		
c_i	P_1	центр–центр
d_j	P_2	центр–седло
$b > 1$		
d_j	P_2	центр–центр

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеаризации векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в точках (6.2) являются линейными симплектическими операторами $A_H, A_K: T_{c_i, d_j} \mathcal{P} \rightarrow T_{c_i, d_j} \mathcal{P}$. Непосредственно проверяется, что они линейно независимы, т.е. порождают подалгебру в $\text{sp}(4, \mathbb{R})$ размерности 2. Характеристические уравнения оператора A_H в точках c_i и d_j имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}c_i: [\mu^2 + 4(1 - \sqrt{b})][\mu^2 + 2(2 - \sqrt{b})] &= 0, \\ d_j: (\mu^2 + b - 1)(\mu^2 + b - 1) &= 0.\end{aligned}$$

При значениях параметра b , указанного в табл. 3, все корни соответствующего характеристического уравнения различны и разбиваются на пары, определяющие тип невырожденной особенности.

Перейдем к описанию особенностей ранга 1.

Рассмотрим участок бифуркационной диаграммы 3, что соответствует выбору

$$k = 2b, \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}.$$

Параметризация особенности ранга 1 в этом случае имеет вид

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} M_1 = 0, \quad M_2^2 = \frac{z^2 - b}{z}, \quad M_3^2 = \frac{1 - 2h}{2b}(z^2 - b), \\ \alpha_1^2 = 1 - z - \frac{1 - 2h}{2b}z^2, \quad \alpha_2^2 = \frac{1 - 2h}{2b}z, \quad \alpha_3^2 = z. \end{cases}$$

Зависимость $z(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{z}^2 = 4 \left(1 - z - \frac{1 - 2h}{2b}z^2 \right) (z^2 - b),$$

$$z \in \left[b; \frac{1}{1 - 2h}(\sqrt{b^2 + 2b - 4bh} - b) \right], \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим многообразие $\mathcal{M}_1$, заданное уравнениями

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

где

$$F_1 = M_1, \quad F_2 = M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2} - \alpha_3^2.$$

Пересечение многообразия $\mathcal{M}_1$ с $\mathcal{P}$ дает двумерную поверхность Q_1 , которая является симплектическим подмногообразием, за исключением множества меры 0 точек вырождения индуцированной симплектической структуры при $h = 1/2$. Для доказательства достаточно найти скобку Пуассона функций F_1 и F_2 :

$$\{F_1, F_2\}|_{Q_1} = \frac{1}{z} \sqrt{2b} \sqrt{1 - 2h}.$$

Гамильтониан H является первым интегралом на Q_1 . Уровень энергии гладко расслаивает Q_1 на одномерные множества $\mathcal{L}_1$. Множества $\mathcal{L}_1$ с индуцированной на них динамикой далее называем *критическими окружностями*.

Зная параметризацию критических окружностей $\mathcal{L}_1$, нетрудно аналитически определить их тип. Рассмотрим функцию K , для которой в точках $\mathcal{L}_1$ дифференциал интеграла K равен нулю, т.е. $dK = 0$. Характеристическое уравнение симплектического оператора A_K в этом случае имеет вид

$$\mu^2 + 128(1 - 2h)b = 0.$$

Поэтому критические окружности $\mathcal{L}_1$ представляют собой невырожденные особенности эллиптического типа ранга 1 отображения момента, за исключением значения $h = 1/2$. Точке касания $q_1 = (k = 2b; h = 1/2)$ на бифуркационной диаграмме отвечает вырожденная особенность ранга 1 с параметризацией

$$M_1 = M_3 = \alpha_2 = 0, \quad M_2^2 = \frac{z^2 - b}{z}, \quad \alpha_1 = 1 - z, \quad \alpha_3^2 = z,$$

$$\dot{z}^2 = 4(1 - z)(z^2 - b), \quad z \in [\sqrt{b}; 1].$$

Рассмотрим теперь участок бифуркационной диаграммы 1, для которого

$$k = 4bh - b^2, \quad h \geq \frac{b + 1}{2}. \quad (6.3)$$

В случае (6.3) постоянная интеграла Горячева $f = 0$ порождает многообразие $\mathcal{M}_2$, заданное функциями

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0,$$

где

$$Z_1 = M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \frac{b(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3^2}, \quad Z_2 = M_1 M_2 - \frac{b\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2}.$$

Пересечение многообразия $\mathcal{M}_2$ с $\mathcal{P}$ дает двумерную поверхность Q_2 , инвариантную относительно фазового потока (1.1), расслоенную постоянной h гамильтониана на критические окружности $\mathcal{L}_2$. Вычисление скобки Пуассона двух функций Z_1 и Z_2 приводит к выражению

$$\{Z_1, Z_2\}|_{Q_2} = 2\sqrt{b} \sqrt{(2h - b)^2 - 1}.$$

Таким образом, Q_2 является почти всюду симплектическим подмногообразием, за исключением значения $h = (b + 1)/2$. Параметризация критических окружностей $\mathcal{L}_2$ задается формулами

$$\mathcal{L}_2: \begin{cases} M_1^2 = \frac{2h - 1 - b}{4z} \varphi_2, \quad M_2^2 = \frac{2h + 1 - b}{4z} \varphi_1, \quad M_3^2 = \frac{(2h + 1 - b)(2h - 1 - b)}{4b} z^2, \\ \alpha_1^2 = \frac{2h + 1 - b}{4b} \varphi_2, \quad \alpha_2^2 = \frac{2h - 1 - b}{4b} \varphi_1, \quad \alpha_3^2 = z, \quad h \geq \frac{b + 1}{2}, \\ \varphi_1(z) = (2h + 1 - b)z^2 + 2bz - 2b, \quad \varphi_2(z) = (b - 2h + 1)z^2 - 2bz + 2b, \end{cases} \quad (6.4)$$

где зависимость вспомогательной переменной $z(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{b} \varphi_1 \varphi_2.$$

Аналитическое решение (6.4) является аналогом решения Делоне в случае волчка Ковалевской.

Для определения типа критических окружностей $\mathcal{L}_2$ рассмотрим функцию $g = K - 4bH$, для которой $dg = 0$ на $\mathcal{L}_2$. Характеристическое уравнение симплектического оператора A_g имеет вид

$$\mu^2 + 64b(2h + 1 - b)(2h - b - 1) = 0. \quad (6.5)$$

Из уравнения (6.5) следует, что участку бифуркационной диаграммы 1 соответствует невырожденная особенность эллиптического типа ранга 1 отображения момента, за исключением значения $h = (b + 1)/2$. Точке касания бифуркационной диаграммы $q_2 = (k = b^2 + 2b; h = (b + 1)/2)$ отвечает вырожденная особенность ранга 1 с параметризацией

$$M_1 = M_3 = \alpha_2 = 0, \quad M_2^2 = \frac{z^2 + bz - b}{z}, \quad \alpha_1^2 = 1 - z, \quad \alpha_3^2 = z; \\ \dot{z}^2 = 4(1 - z) \cdot (z^2 + bz - b), \quad z \in \left[\frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4b - b}) - 1; 1 \right].$$

Пусть теперь

$$k = 2b + (2h - 1)^2, \quad h \geq \frac{b}{2}.$$

Это условие соответствует участкам бифуркационной диаграммы с номерами 6, 2, 7. Параметризация критической окружности имеет вид

$$\mathcal{L}_3: M_1 = M_3 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1^2 = 1 - z, \quad \alpha_3^2 = z, \quad M_2^2 = \frac{1}{z}[z^2 + (2h - 1)z - b], \quad (6.6)$$

где вспомогательная переменная z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z}^2 = 4(1 - z)(z^2 + (2h - 1)z - b), \quad h \geq \frac{b}{2},$$

$$z \in \left[\frac{1}{2}(\sqrt{(2h - 1)^2 + 4b} + 1 - 2h); 1 \right].$$

Тип критической окружности (6.6) можно определить при помощи функции $g = K - 4(2h - 1)H$, для которой $dg = 0$. Характеристическое уравнение симплектического оператора A_g имеет вид

$$\mu^2 + 64(2h - 1)(b + 1 - 2h) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что для значений энергии $b/2 < h < 1/2$ и $h > (b + 1)/2$ критическая окружность является невырожденной гиперболической особенностью ранга 1, а для $1/2 < h < (b + 1)/2$ – невырожденной эллиптической.

Наконец, при условии

$$k = -2b + (2h + 1)^2$$

параметризация критических окружностей $\mathcal{L}_4$ задается формулами

$$\mathcal{L}_4: M_2 = M_3 = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2^2 = 1 - z, \quad \alpha_3^2 = z, \quad M_1^2 = \frac{1}{z}[(2h + 1)z - z^2 - b]. \quad (6.7)$$

Вспомогательная переменная z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z}^2 = 4(1 - z)((2h + 1)z - z^2 - b),$$

$$z \in \left[\frac{2h + 1 - \sqrt{(2h + 1)^2 - 4b}}{2}; \frac{\sqrt{(2h + 1)^2 - 4b} + 2h + 1}{2} \right], \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{b}{2};$$

$$z \in \left[\frac{2h + 1 - \sqrt{(2h + 1)^2 - 4b}}{2}; 1 \right], \quad h \geq \frac{b}{2}.$$

Для определения типа можно рассмотреть функцию $g = K - 4(2h + 1)H$. Тогда на множестве (6.7) $dg = 0$. Характеристическое уравнение симплектического оператора A_g имеет вид

$$\mu^2 + 64(2h + 1)(2h + 1 - b) = 0. \quad (6.8)$$

Из уравнения (6.8) следует, что участкам бифуркационной диаграммы 4 и 5 отвечает невырожденная эллиптическая особенность ранга 1.

Зная типы особенностей ранга 1, можно легко указать перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента (6.1). На рис. 4 перестройка торов Лиувилля описывается атомом, обозначение которого указано около стрелки. В рассматриваемом интегрируемом случае встречаются

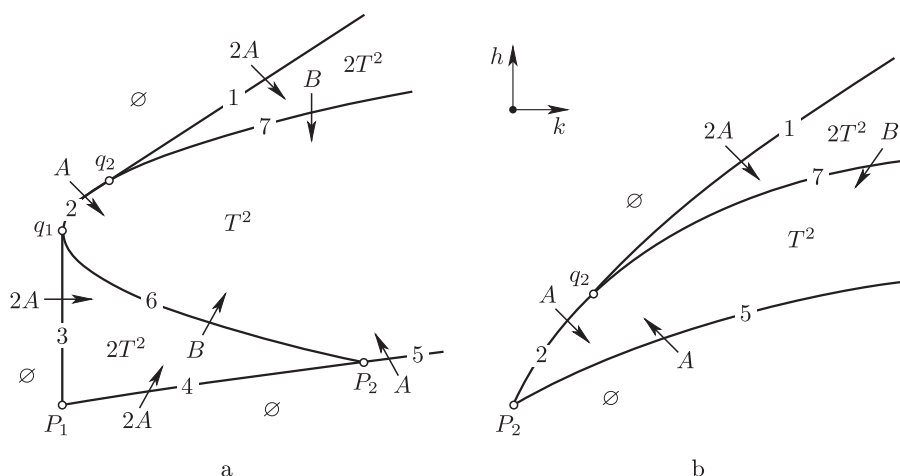


Рис. 4. Бифуркационная (k, h) -диаграмма: $0 < b < 1$ (a); $b > 1$ (b)

только два вида атомов: A и B . Также легко устанавливается топологический тип $Q_h^3(b) = \{(M, \alpha) \in \mathcal{P} : H = h\}$ изоэнергетической поверхности по Смейлу как приведенного расслоения окружностей над областью возможности движения на сфере Пуассона $\{\alpha : U_b(\alpha) \leq h\}$. Здесь $U_b(\alpha)$ – эффективный потенциал, который определяется выражением

$$U_b(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2} \right].$$

Для различных значений параметров b и h многообразие $Q_h^3(b)$ представляет собой либо S^3 , либо $2S^3$.

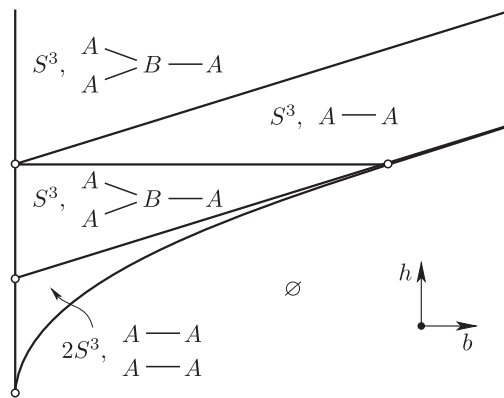
Из определения топологического инварианта (см. [12]) следует, что в состав множества параметров, разделяющего различные инварианты Фоменко на изоэнергетических многообразиях $Q_h^3(b)$, нужно к диаграмме Смейла как к образу неподвижных точек системы уравнений (1.1) добавить образ множества вырожденных критических точек ранга 1. Отметим, что для классических задач динамики твердого тела аналогичные диаграммы построены в работах А. А. Ошемкова [14], [15].

Таким образом, мы приходим к следующей простой системе разделяющих кривых на плоскости параметров (b, h) :

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{b} - \frac{1}{2}, & 0 \leq b \leq 1; & & h &= \frac{b}{2}, & b \geq 0; \\ h &= \frac{1}{2}, & 0 \leq b \leq 1; & & h &= \frac{b+1}{2}, & b \geq 0. \end{aligned}$$

Для системы с гамильтонианом (1.2) на рис. 5 изображены разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(b, h)$. Они разбивают плоскость на четыре области разных типов.

В каждой области указана пара $(Q_h^3(b), W)$, т.е. изоэнергетическое 3-многообразие и соответствующая ему молекула W в виде графа Фоменко. Таким


 Рис. 5. Грубый инвариант Фоменко $(Q_h^3(b), W)$

образом, получается полный список, состоящий из четырех пар, который классифицирует систему (1.1) с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Автор выражает искреннюю признательность профессору М. П. Харламову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] Д. Н. Горячев, “Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера”, *Изв. Варшавского ун-та*, 1916, № 3, 1–13.
- [2] С. А. Чаплыгин, “Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости”, *Труды отд-я физ. наук общества любителей естествознания*, **11**:2 (1903), 7–10.
- [3] Н. М. Yehia, “New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. I. The case of axisymmetric forces”, *Mech. Res. Commun.*, **23**:5 (1996), 423–427.
- [4] A. V. Tsiganov, “On the generalized Chaplygin system”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 21, Зап. научн. сем. ПОМИ, **374**, ПОМИ, СПб., 2010, 250–267; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **168**:6 (2010), 901–911.
- [5] М. П. Харламов, “Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных”, *Нелинейная динам.*, **2**:4 (2006), 453–472.
- [6] M. P. Kharlamov, “Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **12**:3 (2007), 267–280.
- [7] M. P. Kharlamov, A. Y. Savushkin, “Explicit integration of one problem of motion of the generalized Kowalevski top”, *Mech. Res. Comm.*, **32**:5 (2005), 547–552.
- [8] П. Е. Рябов, “Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева”, *Докл. РАН*, **439**:3 (2011), 315–318; англ. пер.: P. E. Ryabov, “Explicit integration and topology of D. N. Goryachev case”, *Dokl. Math.*, **84**:1 (2011), 502–505.
- [9] М. П. Харламов, “Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам”, *Нелинейная динам.*, **6**:4 (2010), 769–805.
- [10] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Докл. АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325; англ. пер.: M. P. Kharlamov, “Topological analysis of classical integrable systems in the dynamics of the rigid body”, *Soviet Math. Dokl.*, **28**:3 (1983), 802–805.

- [11] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “A Morse theory for integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [12] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.
- [13] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 444 с., 447 с.; англ. пер.: А. V. Bolsinov, А. Т. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.
- [14] А. А. Ошемков, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–146.
- [15] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **25**:2 (1993), 23–109.

Павел Евгеньевич Рябов

(Pavel E. Ryabov)

Финансовый университет

при Правительстве Российской Федерации,

г. Москва

E-mail: orelryabov@mail.ru

Поступила в редакцию

06.11.2013