Уравнения Абеля – Якоби для интегрируемого случая Ковалевской -Яхья в динамике твердого тела при нулевой постоянной площадей

ПАВЕЛ Е. РЯБОВ[1,2] **СЕРГЕЙ В. СОКОЛОВ**[3]

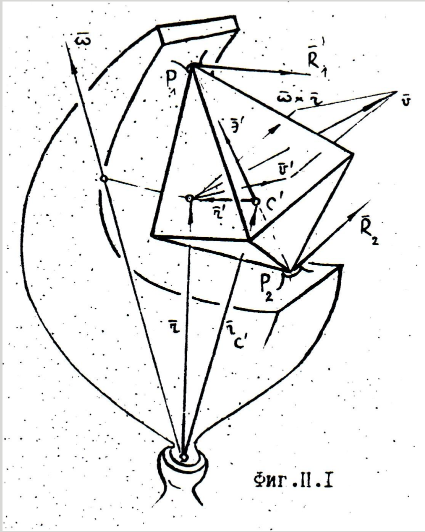
[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
125993, Российская Федерация, Москва, Ленинградский проспект, 49
e-mail: PERyabov@fa.ru

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
Россия, Московская область, г. Долгопрудный

[3]Институт машиноведения им. А. А. Благонравова, Россия, Москва
e-mail: sokolovsv72@mail.ru

59-я Всероссийская научная конференция МФТИ, 22 ноября 2016

Модель гиростата



- *Н.Е. Жуковский*. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. Рус. физ.-хим. об-ва. Часть физ., – 1885. – **17**, отд. 1, вып.6. – с. 81–113.
- *Леви-Чевита Т., Амальди У*. Курс теоретической механики. В 2-х т. М. Изд-во иностр. лит., – 1951. – 555 с.
- *П.В. Харламов*. Лекции по динамике твердого тела. НГУ: Новосибирск, 1965 г. 221 с.

В докладе рассматривается вполне интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, которая описывает динамику гиростата Ковалевской–Чаплыгина–Горячева–Яхья ([1], [2], [3], [4])

Уравнения движения

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}. \tag{1}$$

Полная энергия (гамильтониан)

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 -$$

$$-b_1 b_2 \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4}(b_1^2 - b_2^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c\frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}.$$

Здесь $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda, c$ – параметры, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ – фазовые переменные.

Скобка Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{x} = \{H, x\}, \tag{3}$$

Функции Казимира

$$L = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \qquad \Gamma = \boldsymbol{\alpha}^2. \tag{4}$$

Фазовое пространство $\mathcal{P}^4_{a,\ell}$

$$\mathcal{P}^4_{a,\ell} = \{L = \ell, \Gamma = a^2\}$$

Оригинальные работы

- H. M. Yehia. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Commun. **23**, (5), 1996, pp. 423–427.
- A. V. Tsiganov. On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat // Journal of Physics A: Mathematical and General, **35**, (22), 2002, pp. L309–L318.
- Цыганов А. В. Разделение переменных в гиростате Ковалевской-Горячева-Чаплыгина // ТМФ, **135**, (2), 2003, pp. 240–247.
- Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.

Дополнительный интеграл

Дополнительный интеграл

Функция

$$F=\left[M_1^2-M_2^2-a_1\alpha_1+a_2\alpha_2-\frac{1}{4}(b_1^2-b_2^2)\alpha_3^2-c\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_3^2}\right]^2+$$
$$+\left[2M_1M_2-a_1\alpha_2-a_2\alpha_1-\frac{1}{2}b_1b_2\alpha_3^2-2c\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2}\right]^2-$$
$$-4\lambda(M_3+\lambda)\left[M_1^2+M_2^2+c\left(1+\frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}\right)\right]+$$
$$+\lambda\alpha_3\left\{M_1[4a_1-2b_1b_2\alpha_2-(b_1^2-b_2^2)\alpha_1]+M_2[4a_2-2b_1b_2\alpha_1+(b_1^2-b_2^2)\alpha_2]\right\},$$

является дополнительным интегралом на симплектическом листе (ко)алгебры $e(3)$, определяемого условиями $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\alpha})=0, \boldsymbol{\alpha}^2=1$ ([1], [2], [3]).

Спектральная кривая

Спектральная кривая $\mathcal{E}(z,\zeta)$, коэффициентами которой являются функции H, F и α^2, имеет следующий явный вид [2], [3]:

$$\mathcal{E}(z,\zeta)=0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{E}(z,\zeta)=\zeta^2+d_1\zeta+d_0,$$

$$d_1=z^6-2(h+\lambda^2)z^4+[f+2(c+\lambda^2)(h+\lambda^2)-\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)\alpha^2-(c-\lambda^2)^2]z^2+$$

$$+\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)(c-\lambda^2)\alpha^2,$$

$$d_0=\frac{1}{16}[(a_1-b_1z)^2+(a_2-b_2z)^2][(a_1+b_1z)^2+(a_2+b_2z)^2]\times$$

$$\times[(z-\lambda)^2-c][(z+\lambda)^2-c]\alpha^4.$$

Спектральная кривая

Кривую (1) можно рассматривать как нулевой уровень отображения $\mathcal{E} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\widetilde{\Sigma}$ множество таких значений интегральных постоянных, для которых 0 является критическим значением отображения $\mathcal{E}$. Множество $\widetilde{\Sigma}$ в конечных точках $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ определяется системой уравнений

$$\mathcal{E}(z,\zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}(z,\zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{E}(z,\zeta) = 0. \tag{5}$$

Опыт изучения конкретных гамильтоновых систем показывает, что

$$\Sigma \subset \widetilde{\Sigma}$$

и бифуркационное множество Σ выделяется из $\widetilde{\Sigma}$ требованием, чтобы значения интегральных постоянных были действительными.

Мотивация

Пусть

$$a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, a_1 = -1, \alpha^2 = 1, c = 0, \lambda = 0.$$

Этот случай отвечает классической задаче Ковалевской (напомним, что в нашем случае постоянная площадей равна нулю, т.е. $\ell = 0$).
Система (5) эквивалентна

$$P(x, f, h) = 0, \quad P'_x(x, f, h) = 0, \tag{6}$$

где

$$P(x, f, h) = -x(f - 2hx + x^2)(f - 1 - 2hx + x^2). \tag{7}$$

Система (6) совместна, если

$$f = 0, \quad f = 1, \quad f = h^2, \quad f = h^2 + 1. \tag{8}$$

Множество (8) содержит бифуркационную диаграмму интегрируемого случая Ковалевской для нулевой постоянной площадей $\ell = 0$.

Интересно отметить, что многочлен, который получила сама Ковалевская (см. работу Кеттера) при нулевой постоянной площадей имеет вид

$$P_{kowa} = s[(s-h)^2 - f](s^2 - 2hs + h^2 + 1 - f). \tag{9}$$

В любом случае, мы имеем по-прежнему многочлены пятой степени (при нулевой постоянной площадей), что ведет к гиперэллиптическим квадратурам.

Цель настоящего доклада

Исходя из особенностей спектральной кривой, предъявить разделенные уравнения Абеля–Якоби для следующих значений параметров

- $a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, a_1 = -1, \alpha^2 = 1, c = 0.$

Выбор параметров соответствует интегрируемому случаю Ковалевской-Яхья при нулевой постоянной площадей ($\ell = 0$).

Система (5) эквивалентна

$$R(s,f,h) = 0, \quad R'_s(s,f,h) = 0, \tag{10}$$

где

$$R(s,f,h) = [(s-\lambda^2)(s-2h)+f-1]\{s[f+(s-\lambda^2)(s-2h+\lambda^2)]-\lambda^2(s^2-\lambda^2 s+1)\}. \tag{11}$$

Система (10) совместна, если

$$f = 1, \quad f = 1 + \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2, \qquad \begin{cases} f = (s+\lambda^2)^2 - \dfrac{\lambda^2(\lambda^2+2s)}{s^2}, \\ h = \dfrac{\lambda^2}{2} - s + \dfrac{\lambda^2}{2s^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения Абеля–Якоби

Отметим, что в такой форме многочлен пятой степени (13) получен впервые. Соответствующие уравнения Абеля–Якоби формально написать несложно

Основной многочлен

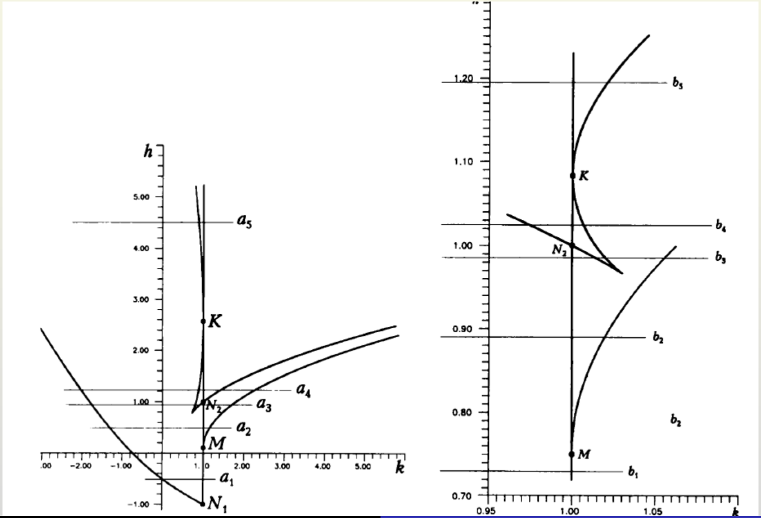
$$R(s,f,h) = [(s-\lambda^2)(s-2h)+f-1]\{s[f+(s-\lambda^2)(s-2h+\lambda^2)]-\lambda^2(s^2-\lambda^2 s+1)\}. \tag{13}$$

$$\frac{dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \frac{dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} = 0, \qquad \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} = dt.$$

Однако до сих пор связь между исходными фазовыми переменными $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}$ и переменными разделения (q_1, q_2) не найдена, в связи с этим обстоятельством разделение переменных нельзя считать завершенным.

Гиростат Ковалевской–Яхья

Множество (12) содержит бифуркационную диаграмму интегрируемого случая Ковалевской–Яхья для нулевой постоянной площадей $\ell = 0$ (Рябов П.Е., 1997).



Большое спасибо
за Ваше внимание!