

УДК 517.977.5

О ПРИВЕДЕНИИ ВЕКТОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА К ФОРМЕ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ ПО ИСИДОРИ

© 2012 г. А. В. Краев

Рассматривается один частный случай линейной векторной динамической системы. Исследуется возможность приведения невырожденным преобразованием выходов системы к форме с относительным порядком по Исидори.

Задача обращения линейных векторных динамических систем изучалась и частично решалась ранее (см. [1–3]). Основные опубликованные результаты свидетельствуют о существовании класса “обратимых” систем (для которых корректно ставить задачу обращения [3]) и класса “обращаемых” систем, для которых применимы алгоритмы [2], позволяющие решить эту задачу. При этом второй класс является подмножеством первого, а разность между ними образуют обратимые системы, для которых не выполнено определение относительного порядка по Исидори (например, [1, с. 71]). Естественно ставить вопрос, как решать задачу обращения для систем, входящих только в первый из этих классов.

Основная гипотеза в исследовании этого вопроса основывается на том, что невырожденное преобразование только выходов системы (матрицы C) может привести к изменению значений, фигурирующих в определении относительного порядка по Исидори. Эта гипотеза заключается в том, что любую обратимую систему такими преобразованиями можно привести к виду, включающемуся в класс “обращаемых” систем.

Рассмотрим линейную динамическую квадратную систему стандартного вида

$$x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t, \quad y^t = Cx^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

с переменными $x^t \in \mathbb{R}^n$, $y^t \in \mathbb{R}^l$, $\xi^t \in \mathbb{R}^l$ и постоянными матрицами A , B , C соответствующих размерностей.

Будем исследовать квадратные системы, т.е. системы с совпадающими числами входов и выходов, поскольку, с одной стороны, необходимым условием обратимости является нестрогое преобладание числа выходов над числом входов, и в этом смысле случай их равенства является самым сложным в классе обратимых систем. С другой стороны, некоторые используемые в дальнейшем определения имеют смысл только для квадратных систем.

Заметим также, что хотя рассуждения проводятся для дискретного случая, полученные результаты остаются в силе и для непрерывных систем.

Определение 1 (по Исидори). Вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ называется вектором относительного порядка системы (1), если выполнены следующие условия:

1) $C_i A^j B = 0$, $j = 1, \dots, r_i - 2$; $C_i A^{r_i-1} B \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, l$;

2) $\det H(r_1, \dots, r_l) = \det \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1-1} B \\ \dots \\ C_l A^{r_l-1} B \end{pmatrix} \neq 0$,

где C_i – строки матрицы C .

Заметим, что условия 1) и 2) определения 1 могут быть несовместны, и, таким образом, существуют системы, для которых не выполняется это определение (примеры можно найти, например, в [1, с. 72]). Именно такие системы с точки зрения их обращаемости и изучаются в настоящей работе.

Определение 2. Матрицей Розенброка системы (1) называется следующая блочная матрица, зависящая от параметра z :

$$R(z) = \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Определение 3. Инвариантными нулями системы (1) называются все значения z , при которых матрица Розенброка (2) системы имеет неполный ранг.

Согласно [3], критерием обратимости для квадратных систем является отсутствие неустойчивых инвариантных нулей системы. Обращаемыми с помощью алгоритмов [2] являются те обратимые системы, для которых выполнено определение относительного порядка по Исидори.

Рассмотрим подробно частный случай – линейную векторную квадратную динамическую систему третьего порядка, т.е. систему (1) при $n = 3$, $l = 2$. Случай $l = 1$ не рассматривается, так как для скалярных систем общего положения определение относительного порядка по Исидори всегда выполнено, сложность представляет векторный случай $1 < l < n$. Матрицы B и C предполагаем имеющими полный ранг.

Будем считать, что эта система обратима финитно или асимптотически, являясь как следствие управляемой и наблюдаемой (стабилизируемой и обнаруживаемой). Исследуем вопрос о возможности приведения этой системы невырожденным преобразованием выхода к виду с относительным порядком по Исидори.

Сначала приведем систему к канонической форме управляемости (см. [1, с. 85]). В этой форме матрицы A и B системы имеют блочную структуру вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Нужным перенумерованием уравнений, неизвестных и входов нетрудно привести матрицу B к виду, когда во втором столбце этой матрицы единица стоит во второй, а не в третьей строке. При этом матрица C не имеет какого-либо специального вида.

Выполним следующие шаги. Невырожденным преобразованием выходов приведем матрицу C к ступенчатому виду (это всегда возможно). При этом могут получиться три различные структуры новой матрицы C . Каждый случай рассмотрим отдельно.

Случай 1. Пусть матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В этом случае в соответствии с определением по Исидори относительный порядок равен $(1, 1)$, поскольку $C_1 B = (1, 0)$, $C_2 B = (0, 1)$, причем фигурирующий в определении по Исидори определитель равен

$$|H(r)| = |CB| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

что обеспечивает выполнение условий Исидори и обращаемость системы.

Случай 2. Матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим для этого случая определитель матрицы Розенброка, отличие от тождественного нуля которого является необходимым условием обратимости:

$$|R(z)| = 1 - a_{31}c_{12}.$$

Заметим, что в соответствии с определением по Исидори вектор относительного порядка, если он существует, равен $(1, 2)$, поскольку

$$C_1 B = (1, c_{12}), \quad C_2 B = (0, 0), \quad C_2 A B = (a_{31}, 1),$$

$$|H(r)| = \left| \begin{array}{c} C_1 B \\ C_2 A B \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & c_{12} \\ a_{31} & 1 \end{array} \right| = 1 - a_{31} c_{12} = |R(z)|.$$

Последнее равенство означает, что в этом случае определители $|H(r)|$ и $|R(z)|$ обращаются в нуль одновременно, т.е. система необрацаема только если она необратима. Следует обратить внимание на тот факт, что $R(z)$, вообще говоря, – полином от z , а $|H(r)|$ – функция, определенная на целочисленных наборах, т.е. объекты разной природы, которые тем не менее вырождаются при одних и тех же условиях.

Случай 3. Матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим и для этого случая определитель матрицы Розенброка

$$|R(z)| = -a_{31}.$$

Заметим, что

$$C_1 B = (0, 1), \quad C_2 B = (0, 0), \quad C_2 A B = (a_{31}, 1),$$

$$|H(r)| = \left| \begin{array}{c} C_1 B \\ C_2 A B \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a_{31} & 1 \end{array} \right| = -a_{31} = |R(z)|.$$

Последнее равенство означает, что и в этом случае определители $|H(r)|$ и $|R(z)|$ обращаются в нуль одновременно, т.е. система необрацаема только если она необратима. Если же система обратима, то в соответствии с определением по Исидори вектор относительного порядка равен $(1, 2)$.

Рассмотренные случаи полностью исчерпывают все возможные ситуации для систем третьего порядка с двумя входами и двумя выходами. Таким образом, доказана

Теорема. *Линейные стационарные динамические системы третьего порядка, для которых выполнены необходимые условия обратимости, невырожденным преобразованием матрицы выходов приводятся к форме с относительным порядком по Исидори.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичёв В.В. Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
2. Краев А.В. Некоторые алгоритмы обращения векторных дискретных систем // Нелинейная динамика и управление: Сб. статей / Под ред. Емельянова С.В., Коровина С.К. М., 2010. № 7. С. 327–334.
3. Краев А.В. Необходимые условия обратимости линейных дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 592–594.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
08.08.2012 г.