

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Физический факультет, кафедра астрометрии, небесной механики и
гравиметрии

На правах рукописи
УДК 524.882

Третьякова Дарья Алексеевна

Расширенные теории гравитации и возможности их наблюдательной проверки в небесной механике и КОСМОЛОГИИ

Специальности: *01.03.01 – астрометрия и небесная механика,*
01.04.02 – теоретическая физика

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук Алексеев С.О.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2015

Содержание

1	Введение	4
1.1	Актуальность темы	4
1.2	Цель исследования и постановка задачи	6
1.3	Научная новизна и практическая значимость	7
1.4	Положения, выносимые на защиту	9
1.5	Публикации по теме диссертации	10
1.6	Апробация результатов	11
1.7	Структура и объем диссертации	12
1.8	Содержание работы	12
1.9	Принятые обозначения и единицы	19
2	Расширенные модели гравитации	21
2.1	Основные типы сферически–симметричных статических решений в расширенных теориях гравитации	21
2.2	Способы исследования решений в расширенных теориях гравитации	24
2.3	Теория Бранса–Дикке	26
2.3.1	Космология Бранса–Дикке	28
2.3.2	Сферически симметричные решения в теории Бранса–Дикке	32
2.4	Модели мира на бране	34
2.4.1	Модель Рэндал–Сандрума	36
2.4.2	Решения типа черная дыра в модели Рэндал–Сандрума	38
2.4.3	Четырехмерные решения	40
3	Черные дыры в моделях с некомпактными дополнительными измерениями	41
3.1	Постановка задачи	41
3.2	Уравнения геодезических	45
3.3	Ограниченные орбиты	47
3.4	Радиальные геодезические	51
3.5	Круговые орбиты	54

3.6	Вклад приливного заряда	56
3.7	Выводы к главе 3	59
4	Модель Бранса–Дикке с космологической постоянной	60
4.1	Постановка задачи	60
4.2	Уравнения Эйнштейна–Фридмана	61
4.3	Определение начальных данных	62
4.4	Решение для холодной Вселенной	64
4.5	Космология без сингулярности	66
4.6	Решение для горячей Вселенной	68
4.7	Выводы к главе 4	71
5	Сферически симметричные решения в модели Бранса– Дикке с потенциалом	73
5.1	Постановка задачи	73
5.2	Общие свойства	80
5.3	Предел слабого поля	83
5.4	Аналитическое решение	86
5.5	Модификация закона всемирного тяготения	89
5.6	Оценка параметров модели	92
5.7	Численное исследование	93
5.8	Выводы к главе 5	100
6	Заключение	104
6.1	Выводы	104
6.2	Благодарности	106

1 Введение

1.1 Актуальность темы

Общая теория относительности (ОТО) является стандартной теорией гравитации в задачах астрономии, астрофизики, космологии и фундаментальной физики. В связи с этим ОТО используется во многих важных прикладных вопросах, таких как навигация космических аппаратов и наземных объектов (с помощью систем спутниковой навигации¹), геодезия, обеспечение нужд точного времени и т. д. С момента своего первого экспериментального подтверждения в 1919 г. общая теория относительности Эйнштейна стала одним из основных инструментов теоретического изучения Вселенной на самых разных масштабах. Возникло множество направлений исследования на границе между астрономией, космологией и теоретической физикой, развитие которых привело научное сообщество к идее построения новой — расширенной теории гравитации.

С точки зрения теоретической физики аргументом в пользу создания обобщенной теории гравитации является невозможность непосредственного квантования ОТО и полного описания ее на языке современной теории поля. Со стороны астрономии это необходимость объяснения таких феноменов, как ускоренное расширение Вселенной и наличие так называемой «темной материи». Другой проблемой ОТО является возникновение сингулярностей — точек пространства или моментов времени, когда величины, описывающие свойства пространства–времени, становятся бесконечными. В настоящее время предложено множество теорий гравитации, обобщающих ОТО, однако возможности их экспериментальной проверки в наземных экспериментах в настоящее время весьма ограничены из-за малости предсказываемых ими эффектов. Существенных результатов можно достичь, используя методы астрономии и космологии. Эти разделы науки изучают огромные масштабы и экстремальные состояния вещества, где больше вероятность проявления новых эффектов. Точность измерения параметров движения небесных тел и космических

¹В системе спутниковой навигации GPS для вычисления координат приемника используются поправки, вычисляемые в рамках ОТО.

аппаратов в небесной механике и астрометрии очень высока и продолжает расти. Это позволяет использовать методы данных наук в попытках экспериментальной проверки расширенных теорий гравитации.

Так как любая обобщенная теория гравитации должна соответствовать наблюдениям и включать в себя ОТО как предельный случай, она, с необходимостью, должна содержать в себе решения типа черная дыра и, в то же время, корректно описывать эволюцию Вселенной на космологических масштабах. Метрика Шварцшильда используется в астрономии для описания сферически-симметричного распределения вещества, а в пределе слабого поля описывает и Солнечную систему (если массой планет по сравнению с массой Солнца можно пренебречь). Следовательно, чтобы судить об адекватности теорий гравитации можно рассмотреть их структуру в низкоэнергетическом приближении путем нахождения аналогов решения Шварцшильда и дальнейшего их исследования на наличие отклонений от ОТО и соответствие наблюдениям. Перспективы обнаружения таких отклонений стимулируют проведение новых гравитационных исследований и, в особенности, экспериментов космического базирования [1].

Аналогично можно действовать и в космологии. Исследование космологических моделей в рамках расширенных теорий гравитации позволяет судить о соответствии теории наблюдаемой картине мира. Дополнительно такое исследование потенциально может дать естественное объяснение таким феноменам как темная материя и темная энергия. Заметим, что на больших пространственных масштабах, таких, как, например, галактические и космологические, ОТО еще не подвергалась серьезным экспериментальными проверкам [1]. Существует мнение, что явления темной материи и темной энергии сигнализируют о несостоятельности ОТО на этих масштабах. Эта возможность стимулирует исследования расширенных теорий гравитации.

Поэтому поиск в рамках расширенных теорий гравитации как космологических решений, так и аналогов решения Шварцшильда и последующее их исследование методами астрономии, космологии и небесной механики, а также сравнение свойств решений с наблюдательными данными

позволяет судить об адекватности различных моделей и теорий гравитации. Кроме того, в ближайшем будущем станут возможны наблюдения регионов в непосредственной близости от горизонта предполагаемой сверхмассивной черной дыры в центре нашей галактики, что позволит проверить предсказания различных теорий гравитации в режиме больших масс и сильной кривизны пространства, что делает исследование предсказаний этих теорий актуальным.

1.2 Цель исследования и постановка задачи

Цель данной диссертации — исследовать непротиворечивость и адекватность обобщенных теорий гравитации, рассматривая свойства решений типа черная дыра, доступные для регистрации методами современной наблюдательной астрономии и небесной механики, а также космологические решения расширенных теорий гравитации. Для реализации данной цели были получены аналитические и численные решения расширенных теорий гравитации и проведено сравнение свойств полученных решений с наблюдательными данными. В качестве основного метода проверки локальных сферически симметричных решений используется геометрия пространства–времени таких решений: характеристики орбит пробных тел в поле тяготения объекта, свойства гравитационного потенциала и отклонения от закона тяготения Ньютона. После расчета эти характеристики можно сравнивать с наблюдаемой картиной движения небесных объектов и аккреции вещества в космосе, а также с данными экспериментов по проверке закона Ньютона. Для космологических решений критерием адекватности является соответствие результатов модели Λ CDM², а также устранение некоторых противоречий, характерных для космологии в ОТО.

В диссертации с помощью комбинации в исследовании методов космологии и небесной механики изучены свойства расширенных теорий гравитации на различных масштабах, с позиций различных подходов —

² Λ CDM — эмпирическая космологическая модель, наилучшим образом описывающая сегодняшние наблюдательные данные. В этой модели пространственно–плоская Вселенная заполнена, помимо обычной барионной материи, тёмной энергией (описываемой космологической постоянной Λ в уравнениях Эйнштейна) и холодной (не релятивистской) тёмной материей.

космологии и небесной механики, и с использованием различных наборов данных. Такой подход к исследованию расширенных теорий позволяет проводить более разностороннее исследование, искать возможные наблюдательные проявления таких теорий и сравнивать их предсказываемые величины с наблюдательными данными, тем самым подвергая эти теории экспериментальной проверке.

1.3 Научная новизна и практическая значимость

Все полученные в данной работе результаты являются новыми, оригинальными и достоверными, что подтверждается корректностью используемых аналитических и численных методов, а также согласием с результатами других исследований. На момент публикации обсуждаемые результаты были получены впервые в мире.

В диссертации впервые получена картина поведения геодезических для решения типа «черная дыра» в модели Рэндал–Сандрума, предложенного в работе [2]. Это решение имеет вид Рейсснера–Нордстрема с отрицательным значением параметра заряда (в классической метрике Рейсснера–Нордстрема параметру q соответствует квадрат электрического заряда и такая возможность отсутствует). После исследования поведения геодезических показано, что данное решение не противоречит наблюдательным данным и не предсказывает появления каких-либо принципиально новых эффектов. Это говорит об адекватности рассмотренной модели и о том, что ее можно применять на астрономических масштабах при рассмотрении аккреции и движения небесных объектов в небесной механике. Получено ограничение на значение приливного заряда: $|q| \ll M_{\odot}^2 G^2 / c^4$.

Впервые получено решение в космологической модели в теории Бранса–Дикке с Λ -членом для плоской Вселенной для отрицательных значений параметра теории ω . Аналитически рассчитан космологический сценарий, при котором масштабный фактор не обращается в ноль при эволюции назад во времени — возникает «отскок» масштабного фактора, все функции при этом остаются регулярными. Такой сценарий не предпола-

гает наличия у Вселенной в прошлом состояния с бесконечной плотностью и температурой, предлагая решение одной из проблем современной космологии: проблемы начальной космологической сингулярности. Из требования согласованности с современными представлениями о нуклеосинтезе в ранней Вселенной получено ограничение на значение параметра теории: $|\omega| > 10^{40}$ — существенно более строгое, чем современное экспериментальное ограничение по данным эксперимента Кассини–Гюйгенс [3]. Таким образом, показано, что теория Бранса–Дикке с Λ -членом хорошо описывает имеющиеся на сегодняшний момент наблюдательные данные.

В диссертации впервые численно исследованы сферически симметричные решения в модели Бранса–Дикке с потенциалом скалярного поля, предложенной Элизалде и др. в работе [4]. Показано, что для значений параметров $\omega < 0$, $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ в теории возможно существование регулярного решения типа «кротовая нора». Структура решения на больших масштабах соответствует пространству де Ситтера (dS), тогда как на малых масштабах структура решения соответствует кротовой норе. Таким образом, показано, что модель может применяться как на астрономических, так и на космологических масштабах. Показано, что геометрия пространства–времени полученного решения может существенно отличаться от геометрии Шварцшильда: $\Delta_{num}/\Delta_{schw} \approx 1.471$ для значения параметра $\phi_0 = 23.5$. Впервые получена поправка к гравитационному потенциалу для решения Агнезе и Ла Камера [5] и исследованы возможности ее наблюдательного обнаружения в наземных экспериментах и в смещении частоты сигнала космических аппаратов. Поскольку для решения Агнезе и Ла Камера показано его соответствие имеющимся наблюдательным данным [6], наличие этого решения в модели говорит о возможности ее согласования с наблюдениями. Также показано, что численное решение может соответствовать решению Шварцшильда (т.е. наблюдательным данным). Таким образом, получены новые ограничения на параметры модели и впервые исследованы возможности ее экспериментального обнаружения методами астрономии и небесной механики.

1.4 Положения, выносимые на защиту

1. Показано, что картина движения пробных частиц в поле тяготения (картина геодезических линий) для решения типа «черная дыра» в модели Рэндал–Сандрума с одной браной, предложенного в работе Дадича и др. [2], не отличается (с наблюдательной точки зрения) от ОТО для астрономических масс. Показано, что данное решение не противоречит наблюдательным данным и не предсказывает появления каких-либо принципиально новых эффектов при выполнении ограничения на значение приливного заряда $|q| \ll M_{\odot}^2 G^2 / c^4$. Сделан вывод о том, что модель можно применять на астрономических масштабах при рассмотрении аккреции и движения объектов в небесной механике (публикации № 1,6,8,9).
2. Получено решение в модели Бранса–Дикке с космологической постоянной для плоской Вселенной для отрицательных значений параметра теории ω . Составлен космологический сценарий, в ходе которого масштабный фактор не обращается в нуль при рассмотрении эволюции назад во времени — возникает «отскок» масштабного фактора, все функции при этом остаются регулярными. Такое поведение исключает наличие у Вселенной в прошлом начальной космологической сингулярности. Получено ограничение на значение параметра теории: $|\omega| > 10^{40}$ — существенно более строгое, чем современное экспериментальное ограничение. Таким образом, показано, что теория Бранса–Дикке с Λ -членом хорошо описывает имеющиеся на сегодняшний момент наблюдательные данные и может не содержать начальной космологической сингулярности (публикации № 2,4,5).
3. Показано, что в модели Бранса–Дикке с потенциалом скалярного поля, предложенной Элизалде и др. в работе [4] для значений параметров $\omega < 0$, $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ возможно существование регулярного решения типа «кротовая нора», способного описывать реальные астрономические объекты. Решение получено численно, показано, что оно может соответствовать решению Шварцшильда (т.е. наблюдательным данным). Структура решения на больших мас-

штабах соответствует пространству де Ситтера, тогда как на малых масштабах структура решения соответствует кротовой норе. Показано, что геометрия пространства–времени полученного решения может существенно отличаться от геометрии Шварцшильда: $\Delta_{num}/\Delta_{schw} \approx 1.471$ для значения параметра $\phi_0 = 23.5$. Показано, что условие положительно определенной кинетической энергии скалярного поля $3\alpha^2/2 + \omega > 0$, предложенное Элизаде и др. не согласуется с имеющимися астрономическими данными $|\omega|/\alpha^2 > 10^5$ для $\omega < 0$. Получена поправка к закону Ньютона для решения Агнеше и Ла Камера и показано, что существующей экспериментальной точности недостаточно для обнаружения этой поправки с учетом ограничения на нее, следующего из данных для ППН-параметра: максимальная величина поправки оказывается как минимум на 6 порядков ниже точности экспериментов. Сделан вывод о том, что рассмотренная модель может применяться как на астрономических, так и на космологических масштабах и соответствовать наблюдательным данным астрономии и небесной механики (публикация № 3).

1.5 Публикации по теме диссертации

- 1) Алексеев С.О., Стародубцева Д.А. Черные дыры в моделях с некомпактными дополнительными измерениями // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2010. — Т. 138, № 4. — С. 652–658.
- 2) Non-singular Brans-Dicke- Λ Cosmology / Tretyakova D., Shatskiy A., Novikov I., Alexeyev S. // Physical Review D. — 2012. — Vol. 85, no. 12. — P. 124059–1–124059–7.
- 3) Tretyakova D. and Latosh B. and Alexeyev S. . Wormholes and naked singularities in Brans-Dicke cosmology // Classical and Quantum Gravity (принята к печати). — 2015.
- 4) И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, С. О. Алексеев, Д. А. Третьякова. Идеи Я.Б. Зельдовича и современная космология Бранса–Дикке // Успехи физических наук. — 2014. — Т. 184, № 4. — С. 379–386.

- 5) Non-singular Brans-Dicke-Lambda Cosmology / Alexeyev S., Tretyakova D., Shatskiy A., Novikov I. // Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossman Meeting on General Relativity. — Vol. 2. — 2014. — P. 1605–1607.
- 6) S. Alexeyev, D. Starodubceva. Black holes in $N > 4$ gravity // PoS (QFTHEP2010). — 2010. — P. 071.
- 7) Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Ранну К.А. Введение в общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения. — Издательство Уральского федерального университета имени первого Президента РФ Б.Н.Ельцина Екатеринбург, РФ, 2015.
- 8) S. Alexeyev, D. Tretyakova. Black Holes: Evolution, Theory and Thermodynamics: Primordial Black Holes in Higher Order Curvature Gravity and Beyond. — Nova Publishers, New York, USA, 2012. — P. 21.
- 9) S. Alexeyev, D. Tretyakova, B. Latosh. Advances in General Relativity Research: Geodesic Analysis in Multidimensional Gravity Models. — Nova Publishers, New York, USA, 2015.
- 10) Alexeyev S.O. Tretyakova D.A. Melkoserov D. Echeistov V.A. Latosh B.N. Coupling Functions and Quantum Corrections in Gauss-Bonnet Gravity. — Nova Publishers, New York, USA, 2015.

1.6 Апробация результатов

Результаты данной работы неоднократно докладывались на семинарах по гравитации и космологии имени А.Л. Зельманова и семинарах отдела релятивистской астрофизики в ГАИШ МГУ, а также на студенческих и международных конференциях:

- «Зимняя физическая школа УрФУ», Екатеринбург, февраль 2014;
- «QUARKS-2012 17th International Seminar on High Energy Physics June», Ярославль, 2012;

- «The XIXth International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory», Голицино, 2010;
- «16th International Seminar on High Energy Physics QUARKS-2010», Коломна, 2010;
- «Физика Космоса», Екатеринбург, февраль 2009.

Результаты работы также вошли в учебник «Введение в общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения», публикуемый в издательстве Уральского Федерального Университета (УрФУ) [7], материалы которого используются автором в работе со студентами УрФУ.

1.7 Структура и объем диссертации

Диссертация подразделяется на Введение, четыре Главы, Заключение, Благодарности и Библиографию. Общий объем диссертации 118 страниц, включая 14 рисунков, 2 таблицы и 122 ссылки.

1.8 Содержание работы

В **Главе 1** дается анализ целей и задач диссертации, приводится список опубликованных работ и апробация результатов, а также положения, выносимые автором на защиту.

В **Главе 2** дается общий обзор расширенных моделей гравитации, рассмотренных в данной диссертации: модели «мира на бране» и теория Бранса–Дикке. Для каждой из моделей описаны известные на сегодняшний день космологические и астрономические решения уравнений поля, описывающие геометрию астрономических объектов или Вселенной в целом: решения Шварцшильда и Рейсснера–Нордстрема для черной дыры, кротовые норы и голые (не укрытые горизонтом) сингулярности. В главе также рассмотрены аналоги перечисленных классических решений, возникающих в расширенных теориях гравитации, которые претендуют на описание реальных астрономических объектов и нуждаются в наблюдательной проверке. Изложены основные способы экспериментальной и наблюдательной проверки релевантности этих решений методами небесной

механики и астрометрии – по движению пробных тел в поле тяготения объекта и модификации закона Ньютона.

Глава 3 посвящена изучению орбит (картины геодезических линий) в поле тяготения гипотетического объекта, описываемого решением типа «черная дыра» Дадича и др. [2] для модели Рэндал–Сандрума (многомерная модель с одним большим дополнительным измерением). Такое исследование позволяет судить об адекватности модели Рэндал–Сандрума с помощью методов небесной механики и наблюдательных данных по аккреции вещества и движению небесных объектов. Метрика решения имеет вид:

$$ds^2 = \Delta(r)dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

$$\Delta(r) = 1 + \frac{\mu}{r} + \frac{q}{r^2}, \quad (1.2)$$

где $\mu = -2GM/c^2$, M имеет смысл массы, q – новый параметр. Для черной дыры Рейсснера–Нордстрема $q = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$ (здесь ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, Q – электрический заряд черной дыры) и, соответственно, знак параметра q может быть только положительным. В решении Дадича и др. q – так называемый «приливной заряд» (вклад дополнительных измерений в геометрию), имеет геометрическую природу и может быть как положительным, так и отрицательным. Данной метрике может соответствовать новый тип черных дыр, соответствующий $q < 0$ (такая возможность отсутствует в классической ОТО). Решение при $q < 0$ имеет один горизонт:

$$r_h = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4q}}{2},$$

меньшую температуру и большую энтропию по сравнению со шварцшильдовским случаем.

Для произвольной формы геодезической для метрики (1.1) показано, что уравнение содержит только те же типы орбит, что и в классическом случае, несмотря на то, что приливной заряд качественно меняет уравнения. Рассмотрены круговые и радиальные орбиты, сделаны оцен-

ки характеристических параметров движения частиц в поле черной дыры. Для радиальных орбит координатное время достижения горизонта пробной частицей оказывается бесконечным, как и в Шварцшильдовом случае, а наличие приливного заряда приводит лишь к количественным изменениям: увеличению начального расстояния r_i радиальной орбиты:

$$r_i = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4q(1 - E^2)}}{2(1 - E^2)}$$

(здесь $E = \tilde{E}/mc^2$ - безразмерная энергия пробной частицы, \tilde{E} - энергия частицы в системе СИ, m - масса пробной частицы) и изменению выражения для собственного времени (форма выражения оказывается сложной и судить о том, увеличивается оно или уменьшается в общем случае не представляется возможным). Для круговых орбит меняются выражения для обратных радиусов $u = 1/r$ последних стабильной u_{isco} и нестабильной u_c циркулярной орбиты, увеличивается значение квадрата углового момента L :

$$L^2 = \frac{-\mu - 2qu_c}{u_c(2 + 3\mu u_c + 4qu_c^2)}, \quad (1.3)$$

$$\frac{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 32q}}{4} < r_c < \infty, \quad (1.4)$$

$$8q^2 u_{isco}^3 + 9\mu q u_{isco}^2 + 3\mu^2 u_{isco} + \mu = 0. \quad (1.5)$$

здесь $L = \tilde{L}/mc^2$ - момент на единицу массы пробной частицы, нормированный на скорость света, \tilde{L} - момент импульса частицы в системе СИ. Напрямую получить значение u_{isco} из последнего уравнения в общем случае не представляется возможным. Из требования отсутствия существенной модификации орбит (1.5) на масштабах масс порядка Солнечной получено ограничение на значение приливного заряда $|q| \ll M_\odot^2 G^2 / c^4$.

Сделан вывод, что присутствие приливного заряда q качественно меняет уравнения геодезических, однако на уровне астрономических масс наличие ненулевого приливного заряда q не будет приводить к типам и форме орбит значительных изменений при выполнении условия $|q| \ll M_\odot^2 G^2 / c^4$. С учетом этого ограничения модель может описывать наблю-

даемую картину аккреции вещества и движения небесных объектов и не содержит принципиально новых эффектов и существенных отклонений от наблюдательных данных. Проведено сравнение результата с более поздней работой Захарова [11], учитывающей данные наблюдений объекта SgrA в центре галактики и показано, что ограничение $|q| \ll M_{\odot}^2 G^2 / c^4$ находится в согласии с результатами Захарова.

В **главе 4** исследована космологическая эволюция (решение уравнений Эйнштейна–Фридмана) в теории Бранса–Дикке с космологической постоянной Λ (в своей стандартной версии теория Бранса–Дикке не приводит к ускоренно расширяющейся Вселенной, чем и обосновано введение Λ). Действие теории в системе $\hbar = c = 1$ записывается в виде:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi(R + 2\Lambda) - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 16\pi L_{matter} \right]. \quad (1.6)$$

Здесь ω — параметр теории БД; $\phi(t)$ — скалярное поле; Λ — космологическая постоянная. Космологическую постоянную можно рассматривать как эффективный учет вклада потенциала скалярного поля, так как форма потенциала в общем случае не известна. В рассмотрении принимается отрицательный параметр теории Бранса–Дикке $\omega < 0$ и полагается, что минимальное значение масштабного фактора $a(t)$ может оставаться больше нуля $a_{min} > 0$ на всем протяжении эволюции Вселенной во времени. Уравнения Фридмана записаны для плоской Вселенной (поздние стадии эволюции), а в качестве граничных условий выбраны современные наблюдаемые значения постоянной Хаббла и ее производной по времени (параметра замедления расширения).

При решении уравнений поля, описывающих эволюцию Вселенной, используется подход, разработанный в [8]. Однако, авторы работы [8] рассматривали только положительные значения ω , поэтому полученное решение представляет собой новую, не описанную в их работе ветвь.

Аналитически рассчитан космологический сценарий, при котором масштабный фактор, в отличие от стандартной Λ CDM–модели, не обращается в нуль при эволюции назад во времени — возникает «отскок» от минимального значения a_{min} масштабного фактора, все функции при этом

остаются регулярными. Такой сценарий не предполагает наличия у Вселенной в прошлом состояния с бесконечной плотностью и температурой, предлагая решение одной из проблем современной космологии: проблемы начальной космологической сингулярности. Из требования согласованности с представлениями о нуклеосинтезе в ранней Вселенной получено ограничение на значение параметра теории ω , существенно более строгое, чем современное экспериментальное ограничение: $|\omega| > 10^{40}$, $\omega < 0$. Условие, порождающее данное ограничение состоит в том, чтобы в ходе своей эволюции на ранних стадиях Вселенная была достаточно плотной (а, значит, достаточно «горячей»), чтобы шли процессы нуклеосинтеза. При этом отскок сохраняется при $\omega < \infty$.

Модель, приводящая к отскоку получена для «холодной Вселенной» $p = 0$ и заведомо неприменима в «горячей Вселенной». Поэтому в области отскока полученные результаты имеют качественный характер и должны быть использованы с целью получения начальных значений всех функций перед переходом Вселенной в горячую фазу (при расчете эволюции назад во времени). Показано, что решения для горячей и холодной Вселенной могут быть гладко сшиты друг с другом на некотором интервале космологического времени, то есть решение может быть согласовано с решением для горячей Вселенной.

Сделан вывод, что теория Бранса-Дикке с Λ -членом хорошо описывает имеющиеся на сегодняшний момент наблюдательные данные, и при этом может не приводить к космологической сингулярности в начальный момент существования Вселенной.

Глава 5 рассматривает космологическую модель типа Бранса-Дикке из работы Элизалде и др. [4]. В рамках данной модели аналитически и численно исследованы метрики, которые могут соответствовать реальным астрономическим объектам – кротовым норам. Наличие в модели решений, адекватно описывающих геометрию массивных компактных объектов необходимо для согласования модели с астрономическими наблюдениями. Ранее уже было упомянуто, что в своей стандартной версии теория Бранса-Дикке не приводит к ускоренно расширяющейся Вселенной, поэтому в космологии рассматриваются модели Бранса-Дикке с

потенциалом скалярного поля или Λ -членом. В данной главе рассмотрен случай экспоненциального потенциала. Действие модели Элизалде и др. в системе $\hbar = c = 1$ имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} e^{\alpha\phi} \left[\mathcal{R} - \omega \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0 e^{\phi/\phi_0} \right].$$

Здесь α – произвольный параметр модели. В данной модели фантомный³ режим космологического расширения может возникать при положительной определенной эффективной кинетической энергии скалярного поля, благодаря множителю $e^{\alpha\phi}$, введенному в модель вместо классического для теории Бранса–Дикке множителя ϕ . Зачастую в теориях со скалярным для обеспечения ускоренного расширения Вселенной требуется введение отрицательно определенной кинетической энергии скалярного поля, рассматриваемая модель потенциально может быть свободна от этого недостатка. Таким образом, модель Элизалде и др. из-за ее адекватности с позиции космологии и теоретической физики оказывается интересной для дальнейшего изучения методами небесной механики и проверки на астрономических масштабах.

Для проверки корректности модели необходимо удостовериться, что она содержит сферически симметричные решения, соответствующие наблюдательным данным. Это будет означать, что модель применима не только на космологических, но и на астрономических масштабах и находится в согласии с наблюдениями как космологии, так и астрометрии и небесной механики. На сегодняшний день предложено много космологических моделей в контексте теории Бранса–Дикке, поэтому вопрос их верификации оказывается актуальным.

В главе 5 определяются условия существования сферически-симметричных статичных решений, отличных от решения Шварцшильда. Получен предел слабого поля (описывающий большинство известных на сегодня движений, таких, например, как движение планет и спутников) в модели и показано, что он согласуется с результатом для классической формули-

³Фантомное расширение соответствует ситуации, когда для параметра уравнение состояния темной энергии ϵ_{de} , равного отношению давления темной энергии к ее плотности, верно $\epsilon_{de} < -1$. Последние данные эксперимента WMAP позволяют считать более вероятной фантомную природу компонента, ответственного за ускоренное расширение Вселенной [9].

ровки теории Бранса–Дикке и с ОТО, ранее уже проверенных наблюдениями. Это также говорит об адекватности модели.

Для специфичных значений параметров модели получены два аналитических решения. Одно из них совпадает известным с решением Агнеше и Ла Камера [5], представляющим собой кротовую нору. Соответствующие значения параметров сохраняют член с потенциалом скалярного поля в действии, но эффективно убирают его из уравнений поля. Если принять, что потенциал играет роль космологической постоянной, можно заключить, что решение Агнеше и Ла Камера может представлять собой кротовую нору, вложенную в расширяющуюся вселенную, но не затронутую этим расширением. Это принципиальный результат, никак не связанный с малостью космологической постоянной. Поскольку для решения Агнеше и Ла Камера показано его соответствие наблюдательным данным на сегодняшнем уровне точности [6], наличие этого решения в модели говорит о возможности ее согласования с наблюдениями.

Второе решение получено в предположении, что метрика, которую мы измеряем — Шварцшильдова. Соответствующее выражение для скалярного поля приводит к заключению, что эффективная гравитационная постоянная является убывающей функцией расстояния. Решение имеет ньютоновский предел (то есть движение можно описывать законом тяготения Ньютона) лишь в определенном интервале расстояний. Пространство асимптотически плоское, однако эффективная гравитационная постоянная исчезает на бесконечности, а не стремится к константе, как в классическом случае. Обсуждается вопрос наблюдаемости отклонений от ОТО в таком решении. Вывод состоит в том, что решение, по всей видимости, может соответствовать наблюдательным данным, так как метрика в точности соответствует метрике Шварцшильда.

Получены поправки к ньютоновскому гравитационному потенциалу решения Агнеше и Ла Камера и исследованы возможности их экспериментального обнаружения в наземных экспериментах и в относительном сдвиге частоты сигнала спутниковой системы Галилео. Вывод состоит в том, что точность сегодняшних наблюдений и экспериментов оказывается на 6 порядков ниже требуемой для обнаружения влияния попра-

вок. Таким образом дополнительно подтверждается соответствие решения Агнезе и Ла Камера наблюдениям.

Получены ограничения на параметры модели: $\omega < 0$, $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$. Для данных значений параметров в модели численно показано существование регулярного решения типа «кротовая нора». Структура решения на больших масштабах соответствует пространству де Ситтера, тогда как на малых масштабах структура решения соответствует кротовой норе. Таким образом модель может применяться как на астрономических, так и на космологических масштабах. При этом показано, что геометрия пространства–времени полученного решения может существенно отличаться от геометрии Шварцшильда: $\Delta_{num}/\Delta_{schw} \approx 1.471$ для значения параметра $\phi_0 = 23.5$. Однако решение также может имитировать решение Шварцшильда. Сделан вывод о возможности согласования решения с наблюдениями, однако во избежание противоречий необходимо наложить более строгие ограничения на параметры модели.

Показано, что условие положительно определенной кинетической энергии скалярного поля $3\alpha^2/2 + \omega > 0$, предложенное Элизаде и др. не согласуется с ограничением, наложенным на ППН-параметры модели $|\omega|/\alpha^2 > 10^5$. Таким образом, астрономические наблюдения свидетельствуют о том, что скалярное поле модели имеет отрицательно определенную кинетическую энергию.

Сделан вывод, что модель [4] может быть согласована с наблюдательными данными астрономии, космологии и небесной механики.

В **Заключении** сформулированы Положения диссертации, выносимые на защиту и выводы, а также Благодарности.

1.9 Принятые обозначения и единицы

Греческие индексы пробегают значения от 0 до 4. Если не оговорено другое, то величина $d\Omega^2$ имеет вид

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Символом φ обозначается угловая координата, символом ϕ — скалярное поле. Значения физических постоянных: радиус Солнца $R_{\odot} = 696000$ км, масса Солнца $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг, планковская масса $M_{pl} = 10^{-8}$ кг, масса и радиус Земли $M_{\oplus} = 5,972 \times 10^{24}$ кг, $R_{\oplus} = 6371$ км, гравитационная постоянная $G = 6.67384 \times 10^{-11}$ м³кг⁻¹с⁻².

Если не оговорено другое, то при описании сферически-симметричной метрики указывается только вид функции Δ , сама же метрика предполагается в виде

$$ds^2 = \Delta c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2).$$

2 Расширенные модели гравитации

Одно из направлений развития современной теоретической физики — построение объединенной теории физических взаимодействий. Такие теории называются теориями великого объединения, а те из них, которые включают в себя идею суперсимметрии (гипотетическая симметрия, связывающая бозоны и фермионы) — теориями суперобъединения. Поиски эффектов теорий великого объединения активно ведутся на Большом Адронном Коллайдере (БАК), однако на сегодняшний день никаких связанных с ними явлений не наблюдалось [10]. Рассмотрим различные варианты моделей гравитации, существующие в рамках теорий великого объединения, типы решений уравнений поля, которые в них возникают, а также перспективные способы их исследования.

2.1 Основные типы сферически-симметричных статических решений в расширенных теориях гравитации

Решение Шварцшильда — наиболее часто используемое для интерпретации астрономических наблюдений решение ОТО. Метрика Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = \Delta c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (2.1)$$

где $\Delta = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ — так называемый радиус Шварцшильда, или гравитационный радиус, M — масса, G — гравитационная постоянная, c — скорость света. В дальнейшем, при описании сферически-симметричной метрики часто будет указываться только вид функции Δ . Большинство известных компактных объектов описываются именно метрикой Шварцшильда, примером тому является объект SgrA в центре нашей галактики [11, 12]. Даже при исследовании пространства-времени вблизи поверхности нейтронных звезд оказывается, что вращение в метрике можно не учитывать для периодов вращений вплоть до миллисекунд, а для периодов порядка 1 мс пользоваться теорией возмущений [13, 14]. Поэтому в данной работе исследуются именно аналоги решения

Шварцшильда в расширенных теориях гравитации.

Решение Шварцшильда описывает черную дыру, то есть объект с горизонтом событий, под которым находится сингулярность при $r = 0$. В решении Шварцшильда сингулярность всегда скрыта горизонтом событий, однако в расширенных теориях гравитации в функции Δ могут присутствовать дополнительные члены, что может приводить к наличию сингулярной поверхности (линии, точки), не скрытой горизонтом событий. Понятие пространства-времени на такой поверхности теряет смысл а уравнения поля с бесконечными слагаемыми невозможно решать. Такая конфигурация называется «голая сингулярность». Пример такого поведения в классической теории демонстрирует метрика Рейсснера-Нордстрема, для которой:

$$\Delta(r) = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad (2.2)$$

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}, \quad (2.3)$$

здесь ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, M – масса, а Q^2 – квадрат электрического заряда черной дыры. Считается, что метрика Рейсснера-Нордстрема не описывает астрономические объекты, так как макроскопический электрический заряд очень быстро нейтрализовался бы окружающим веществом. Корни функции Δ действительны и различны при $r_s > 2r_Q$, тогда сингулярность оказывается под горизонтом. При $r_s < 2r_Q$ функция Δ не имеет действительных корней и метрика описывает голую сингулярность. Р. Пенроузом сформулирована «гипотеза космической цензуры»: сингулярность должна быть скрыта под горизонтом событий. Однако это утверждение не доказано, оно лишь иллюстрирует наши представления о Вселенной. В рамках данной работы мы принимаем гипотезу космической цензуры и не будем исследовать голые сингулярности как реальные астрономические объекты, хотя такие исследования ведутся [15, 16].

В расширенных теориях гравитации, если они претендуют на описание реального мира, с необходимостью должен присутствовать аналог решения Шварцшильда, такие решения называются «решение типа чер-

ная дыра». Из-за возросшего количества степеней свободы расширенных теорий новые решения также содержат дополнительные параметры. Эти параметры имеют, как правило, геометрическую природу и могут быть ограничены лишь наблюдениями и общими соображениями регулярности решения (например, отсутствие голых сингулярностей). Примером является решение Дадича–Резанини, речь о котором пойдет в главе 3.

Существование черных дыр на сегодняшний день не вызывает сомнений у большинства исследователей [12]. Более экзотический тип решений расширенных теорий гравитации — кротовая нора. Такое решение имеет структуру «моста» или «туннеля», соединяющего две вселенные или две области одной вселенной. Самое узкое место такого моста называется «горловиной» [17, 18, 19]. Важной характеристикой кротовой норы является ее проходимость — способность гипотетического путешественника пройти через горловину невредимым и покинуть кротовую нору. В таком контексте решение Шварцшильда можно интерпретировать как непроходимую кротовую нору. Построение проходимой модели кротовой норы в ОТО возможно только в присутствии так называемой «экзотической» материи — материи, которая нарушает нулевое условие энергодоминантности⁴ [20]. В расширенных теориях гравитации роль экзотической материи могут играть дополнительные геометрические члены или скалярные поля, и для существования проходимых кротовых нор не требуется дополнительных условий. Так, например, происходит в теории Бранса–Дикке, где роль экзотической материи играет скалярное поле, и проходимость кротовой норы может быть обеспечена в широком диапазоне значений параметра ω [21].

Если кротовые норы действительно могут существовать в нашей Вселенной, то их открытие в корне перевернуло бы представления человечества о мире и открыло бы новые перспективы исследования нашей Вселенной (а возможно, и других вселенных). Поэтому исследование тео-

⁴В ОТО экзотической называется материя, плотность энергии в некоторой системе отсчета отрицательна. Если в некотором ортонормированном базисе тензор энергии-импульса диагонален, то слабое энергетическое условие нарушается, когда отрицательна его компонента T_{00} (плотность энергии). Подобная материя может обладать такими качествами, как отрицательная плотность энергии или отталкиваться, а не притягиваться вследствие гравитации. Наиболее известным представителем экзотической материи является вакуум в области с отрицательным давлением, производимым эффектом Казимира.

рий, описывающих проходимость кротовые норы, представляет дополнительный интерес и особое место тут занимает теория Бранса-Дикке.

2.2 Способы исследования решений в расширенных теориях гравитации

В предыдущем параграфе описаны основные типы локальных (то есть описывающих астрономические объекты) решений, возникающих в расширенных теориях гравитации. Для согласования теории с наблюдениями необходимо исследовать эти решения с различных точек зрения и сравнить результаты этих исследований с имеющимися наблюдательными данными. Совершенно особое место в таком исследовании занимают методы астрометрии и небесной механики. Перечислим некоторые из них.

- **Уравнения геодезических.** В ОТО движение пробных тел в гравитационном поле задается уравнениями геодезических. Дополнительные степени свободы расширенных теорий гравитации модифицируют уравнения геодезических, что может приводить к расхождению с наблюдаемой картиной орбитального движения небесных объектов. Следовательно, изучение геодезических помогает наложить ограничения на значения параметров расширенных теорий из требования отсутствия противоречий с наблюдательными данными. Данный подход можно использовать для проверки расширенных теорий с помощью данных о движении объектов в тесных двойных системах, в частности — двойных системах нейтронных звезд⁵, и данных по аккреции вещества на кандидаты в черные дыры. Такие объекты выбираются из-за наличия эффектов сильного гравитационного поля в их ближайшей окрестности.
- **Параметризованный постньютоновский формализм (ППН-формализм).** Этот формализм рассматривает медленное движе-

⁵Строго говоря, движение пульсаров происходит в слабом гравитационном поле своего компаньона, однако, они, тем не менее, годятся для проверок ОТО в режиме сильной гравитации. Такая проверка становится возможной из-за сильных эффектов собственного поля, предсказываемых большинством расширенных теорий гравитации [1].

ние в случае слабого поля для всех видов возможных метрических теорий и описывает его с помощью десяти параметров (ППН-параметров). Метрика в постньютоновской форме записывается таким образом, чтобы учесть отклонения метрики от плоского пространства только ньютоновского и постньютоновского порядка, отклонения более высокого порядка не учитываются. Каждая метрическая теория характеризуется набором конкретных значений ППН-параметров. В данной работе используются два параметра: γ и \mathfrak{B} (см. таб. 1).

ППН-параметр	Физический смысл	Значение в ОТО	Экспериментальное ограничение	Эффекты
γ	кривизна пространства единицы массы покоя	1	$ \gamma - 1 < 2.3 \times 10^{-5}$	задержка и отклонение света
\mathfrak{B}	степень нелинейности суперпозиции гравитации	1	$ \mathfrak{B} - 1 < 1.1 \times 10^{-4}$	эффект Нордведта, смещение перигелия

Таблица 1: Физический смысл и экспериментальные ограничения ППН-параметров.

Основные способы экспериментального определения ППН-параметров это дальнометрия тел солнечной системы (дальнометрия Марса и Меркурия, лазерная дальнометрия Луны) и определение смещения частоты сигнала космических аппаратов (КА Кассини и околоземные КА) [1]. ППН-приближение является достаточно точным для сравнения предсказаний расширенных теорий с данными экспериментов в Солнечной системе, но оно не применимо для описания гравитационного излучения (нарушено предположение медленного движения), систем компактных объектов, таких как двойные нейтронные звезды (нарушено предположение слабости полей).

- **Лазерная дальнометрия луны (ЛДЛ)** является важным инструментом для изучения изменения гравитационной постоянной G со временем. Так, уменьшение G при сохранении момента импульса приводило бы к увеличению большой полуоси орбиты луны

как $\dot{a}/a = -\dot{G}/G$. Соответствующее изменение фазы орбиты растет квадратично со временем, что приводит к сильной чувствительности орбиты Луны к эффекту \dot{G} . Современное ограничение из данных ЛДЛ $\dot{G}/G = -(5 \pm 6) \times 10^{-13} \text{год}^{-1}$. В теории Бранса-Дикке это ограничение важно для космологических моделей, где учитывается зависимость скалярного поля от времени (см. гл. 4).

- **Модификации гравитационного потенциала.** Модификация решения Шварцшильда в расширенных теориях гравитации приводит к наличию поправок к величине гравитационного потенциала в ньютоновском приближении. Эти поправки вносят изменения в такие эффекты, как смещение перигелия тел Солнечной системы, смещение частоты сигнала КА, и взаимодействие тел, наблюдаемое в наземных экспериментах по проверке закона Ньютона. Следовательно, наблюдая эти эффекты можно накладывать ограничения на величину поправок, а, значит, и на параметры модели.

2.3 Теория Бранса–Дикке

Теория Бранса–Дикке (в некоторых источниках — теория Йордана-Бранса-Дикке) — одна из первых расширенных версий теории гравитации со скалярным полем [22], предложенная в 1961 году (в дальнейшем БД). В теории БД в дополнение к метрике существует так же скалярное поле ϕ , которое физически проявляется как изменение в пространстве эффективной гравитационной постоянной:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi \mathcal{R} - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.4)$$

здесь действие записано в единицах $\hbar = c = 1$. Модель содержит дополнительный произвольный параметр ω , определяемый из наблюдений. Наиболее точная на сегодняшний день оценка величины параметра ω , следующая из данных космического аппарата Кассини–Гюйгенс для ППН-параметра γ составляет $|\omega| > 50\,000$ [3]. Чем больше значение ω , тем сильнее вклад тензорной части (скалярной кривизны), и, наоборот,

чем меньше его значение, тем больше влияние скалярного поля. Теория БД переходит в ОТО в пределе $|\omega| \rightarrow \infty$ (более подробно о связи ОТО и БД при $\omega \rightarrow \infty$ в работе [23]). В этой теории гравитационное воздействие на материю реализуется через метрический тензор, а материя, в свою очередь, влияет на метрику как непосредственно, так и через дополнительно генерируемое скалярное поле. Вследствие этого гравитационная постоянная G не является константой, а зависит от скалярного поля как $G \sim 1/\phi$, и следовательно, может изменяться в пространстве и времени, что позволяет накладывать ограничения на величину скалярного поля и скорость его изменения.

Интерес к теории БД не ослабевает ввиду того, что, во-первых, она может являться эффективным низкоэнергетическим пределом теорий великого и суперобъединений. Более того, скалярное поле в модели БД можно интерпретировать как дилатон⁶ теории струн [24].

Теория БД является одним из наиболее естественных расширений ОТО, к тому же это простейшее расширение ОТО. Поэтому в поиске общей теории гравитации именно эта теория является одним из наилучших кандидатов [25].

Активно изучается теория БД с полем типа Хиггса — изучаются как космологические, так и локальные (астрономические) аспекты моделей. Поле Хиггса с необходимостью возникает в Стандартной модели физики элементарных частиц в рамках хиггсовского механизма спонтанного нарушения электрослабой симметрии. Эта симметрия описывает электромагнитное и слабое взаимодействие как единое взаимодействие и предполагает, что W^\pm и Z бозоны должны быть безмассовыми. Механизм Хиггса необходим для совмещения идеи электрослабой симметрии с фактом ненаблюдаемости такой симметрии на экспериментах — благодаря действию механизма электрослабая симметрия нарушается и W^\pm, Z бозоны обретают массу. Таким образом, в рамках этой модели поле Хиггса отвечает за инертную массу элементарных частиц. По построению поле Хиггса является скалярным, а значит теория гравитации со скалярным

⁶В теории струн дилатон — частица скалярного поля, которое логически следует из уравнений поля и всегда появляется вместе с гравитацией.

полем может учитывать поле Хиггса. Такие модели интересны именно в связи с той ролью, которую играет поле Хиггса в механизме генерации массы и в физике элементарных частиц [26].

Изначально теория БД рассматривалась только для положительных значений параметра ω (2.4) по ряду причин. Во-первых, отрицательные значения параметра приводят к «неправильному знаку» перед членом кинетической энергии в действии (2.4). Такой знак делает поле нестабильным относительно перекачки в него энергии, что является проблемой на квантовом уровне (существование отрицательных вероятностей и нарушение унитарности — сумма вероятностей всех возможных событий не равна единице). Такое поле называется в квантовой теории «полем духов». В космологии такие поля (если они описывают темную энергию) часто приводят в будущем к сценарию «Большого разрыва»⁷. Этот сценарий предполагает, что Вселенная будет ускоренно расширяться, и величина масштабного фактора станет бесконечной за конечное время, что приведет к разрыву всех связанных систем и материи [27]. Все эти аспекты приводят некоторых исследователей к мысли, что область значений $\omega < 0$ не является физически значимой.

Однако в более современных исследованиях многие авторы рассматривают $\omega < 0$ как приемлемую область значений. Первой причиной является то, что вклад скалярного поля можно рассматривать не как материальный, а как геометрический, наравне с тензором Эйнштейна в уравнениях поля. Далее, рассмотрение фантомного скалярного поля как эффективного описания теории с положительно определенными энергиями может устранить противоречия на квантовом уровне [28, 29]. Для рассмотрения значений параметра $\omega < 0$ существуют также космологические предпосылки, изложенные в следующем параграфе.

2.3.1 Космология Бранса–Дикке

Наблюдательные данные, накопленные к началу XXI века, свидетельствуют о том, что Вселенная расширяется с ускорением [30, 31], хотя

⁷От английского «Big Rip». Здесь присутствует игра слов: Rip — разрыв, RIP — аббревиатура от «Remain In Peace» или «Покойся с миром» — типичной английской эпитафии.

приводящие к этому физические основания пока не понятны. В настоящее время простейшей (и, поэтому, наиболее хорошо проработанной) из космологических моделей является модель холодной темной материи с космологической постоянной (Λ CDM). Эта модель, давая хорошее количественное согласие с наблюдательными данными, не объясняет физической природы темной материи и темной энергии. Другой недостаток модели Λ CDM — отсутствие в ее рамках объяснений причин малости величины космологической постоянной. Проблема малости космологической постоянной возникает в предположении, что она представляет собой так называемую «энергию вакуума»: в квантовой теории физический вакуум обладает энергией, которая может быть обнаружена по своему влиянию на метрику пространства-времени. При анализе уравнений ОТО с учётом квантовых зависимостей при естественных предположениях получается значение космологической постоянной порядка 10^{106} г/см^3 , в то время как экспериментальные данные говорят о величине 10^{-29} г/см^3 [32], меньшей на 135 порядков⁸. Данное несоответствие приводит к необходимости построения более широкой динамической теории темной энергии [33], основой для которой может служить теория БД.

В своей стандартной версии теория БД не приводит к ускоренно расширяющейся Вселенной. Таким образом, актуальным становится исследование расширенных версий этой теории. Одно из наиболее распространенных обобщений — рассмотрение модели БД с потенциалом скалярного поля [34, 35]. Так как точная форма этого потенциала пока не установлена, вместо него в качестве эффективного вклада можно рассмотреть Λ -член (далее VDA), что и сделано в главе 4. В работе [36] показано, что теория БД может соответствовать (в наблюдательном смысле) модели Λ CDM для произвольных форм потенциала, что делает учет Λ -члена как эффективного вклада потенциала обоснованным. Объяснение же малости космологической постоянной в рамках теории VDA уже возможно и было предложено в работе [37].

Поведение темной энергии определяется параметром ϵ_{de} уравнения состояния, устанавливающего зависимость давления p от плотности энер-

⁸По словам Ли Смолина это «наихудшее предсказание, когда-либо сделанное научной теорией».

гии ρ : $p = \epsilon_{de} \cdot \rho$. Объединенные данные экспериментов по изучению космологических параметров WMAP+eCMB+BAO+H0+SNe⁹ указывают на значение параметра уравнения состояния темной энергии для плоской Вселенной $\epsilon_{de} = -1.17^{+0.13}_{-0.12}$ на уровне значимости 68% [9]. При этом анализ комбинации данных WAMP+BAO+SNe 2011 г. давал результат $\epsilon_{de} = -0.93^{+0.12}_{-0.12}$ [38]. Подобная тенденция наблюдается также для моделей не плоской Вселенной, как и для различных комбинаций наборов данных. Такое экзотичное поведение темной энергии может указывать на ее фантомную природу: она может представлять собой скалярное поле с $\epsilon_{de} < -1$, что реализуется в теории БД при $\omega < 0$ (решение теории БД приводящее к «Большому разрыву» представлено в [39]). Более того, существенно отрицательные значения ϵ_{de} делают пренебрежимым нежелательный вклад темной энергии в полную плотность энергии на этапе формирования структуры во Вселенной. Современные же наблюдения ограничивают параметр ω лишь по модулю, никак не указывая на его знак. Моделирование гравитационного коллапса также не исключает отрицательных ω [40]. Обобщая вышесказанное можно заключить, что область значений $\omega < 0$ представляет интерес для рассмотрения.

Существуют модели в теории БД, где фантомное поведение теории на поздних временах жизни Вселенной не сопровождается наличием в теории «духов», например [41]. Такие модели дополнительный интерес, так как в них могут отсутствовать противоречия на квантовом уровне. Одна из таких моделей, предложенная работе Элизалде и др. [4], исследована в главе 5. Если фантомное скалярное поле, будучи фундаментальным или эффективным, является частью нашей Вселенной, то естественным будет поиск его проявлений как в космологии, так и в локальных явлениях. В частности интерес для проверки адекватности модели представляет поиск аналогов решения Шварцшильда и их исследование методами астрономии и небесной механики, что сделано в главе 5.

Для исследования свойств теории БД на космологических масштабах

⁹WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) — спутниковый эксперимент по изучению космического микроволнового фона. eCMB (Cosmic Microwave Background) — расширенный набор данных по анизотропии космического микроволнового фона. BAO (Baryon Acoustic Oscillation) — данные по периодическим флуктуациям плотности видимой барионной материи. H0 и SNe — данные по значению постоянной Хаббла и светимости сверхновых, соответственно.

актуальным является поиск аналогов решения Фридмана (Фридмана-Робертсона-Уокера), основного космологического решения ОТО:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.5)$$

где $k = 0, \pm 1$, $a(t)$ — масштабный фактор. Метрика Фридмана описывает расширяющуюся Вселенную и рассматривается в современной космологии как часть модели Λ CDM. При исследовании теории БД вид метрики Фридмана как правило сохраняется неизменным, модифицируется зависимость масштабного фактора от времени, решение дополняется уравнениями, накладывающими связи и зависимости на дополнительные степени свободы: скалярное поле и его производные, а также параметр ω .

Впервые точное решение для уравнений Эйнштейна–Фридмана в теории BDA было получено в работе [8]. Авторы предполагали положительные значения w и начальные условия для масштабного фактора $a(t_m) = 0$, где t_m — начальный момент жизни Вселенной. Частные решения, в предположении степенной зависимости скалярного поля от масштабного фактора получены в [42]–[45]. Решение, полученное в главе 4, отличается от этих решений рассмотрением $\omega < 0$ и отсутствием предположений о поведении масштабного фактора и скалярного поля, а потому представляет собой новую ветвь. Численное интегрирование и анализ стабильности обширного семейства решений BDA с материей как для $\omega > 0$ так и для $\omega < 0$ представлены в [46]. Результаты этой работы численно подтверждают результат главы 4 об отсутствии начальной космологической сингулярности — момента времени, когда масштабный фактор обращается в ноль.

Ограничения на параметр теории $|\omega| > 50\,000$ вызывают споры о физической значимости теории БД, ведь в пределе $|\omega| \rightarrow \infty$ ППН-разложение теории БД сводится к ОТО. Однако, в работах [47]–[50] показано, что большинство скалярно–тензорных теорий в течение космологической эволюции приходят в состояние, когда вклад скалярной части в гравитацию практически отсутствует. Т.е. на поздних стадиях эволюции Вселен-

ной значение ω может становиться достаточно большим, чтобы соответствовать современным наблюдениям, тогда как в прошлом этот параметр мог принимать более интересные (с точки зрения наблюдаемых эффектов) значения. Такое поведение приводит к наличию эффектов, которые могут быть доступны для наблюдения в ближайшее время: например, работа [50] предсказывает возможное нарушение универсальности свободного падения $\delta a/a \sim 10^{-12}$, здесь a — ускорение свободного падения. Также высказывается мнение, что, независимо от величины параметра ω (в главе 4 данной диссертации предложено ограничение $\omega > 10^{40}$), она представляет интерес, т.к. большая величина ω приводит к согласию с ОТО, а значит — с наблюдениями), но, как результат, мы получаем отсутствие начальной космологической сингулярности. Таким образом, сегодняшнее ограничение на ω не «закрывает» теорию БД, а, напротив, может быть абсолютно естественным в определенном контексте.

Релевантная теория гравитации должна описывать мир не только на космологических, но и на астрономических масштабах. В частности интерес для проверки адекватности теории представляет поиск сферически-симметричных решений и их исследование методами астрономии и небесной механики, что сделано в главе 5.

2.3.2 Сферически симметричные решения в теории Бранса–Дикке

В своей работе Бранс выделил четыре класса сферически симметричных решений теории [51]. Позже было показано, что из них только класс I может описывать внешнее гравитационное поле реального физически адекватного объекта [52, 53]. Класс решений I в изотропных координатах имеет вид:

$$ds^2 = -e^{\alpha_0} \left(\frac{1 - B/\rho}{1 + B/\rho} \right)^{\frac{2}{\lambda}} c^2 dt^2 + e^{\beta_0} \left(1 + \frac{\beta}{\rho} \right)^4 \left(\frac{1 - B/\rho}{1 + B/\rho} \right)^{\frac{2(\lambda - C - 1)}{\lambda}} \times (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.6)$$

$$\phi = \phi_0 \left(\frac{1 - B/\rho}{1 + B/\rho} \right)^{\frac{C}{\lambda}}, \quad \lambda^2 = (C + 1)^2 - C(1 - \omega C/2). \quad (2.7)$$

Здесь α_0, β_0, C, B — произвольные постоянные.

Теорема Хокинга для теории Бранса-Дикке [54] утверждает, что черные дыры в теории БД идентичны черным дырам в ОТО. Это значит, что решение должно соответствовать постоянному скалярному полю и метрике Шварцшильда. Однако, по ряду причин [55] возможно нарушение условий теоремы Хокинга, что приводит к появлению новых типов решений в теории БД. Такими причинами являются:

- нарушение слабого энергетического условия;
- обращение величины скалярного поля в бесконечность на горизонте.

При выполнении хотя бы одного из этих условий метрика черной дыры не обязана совпадать с метрикой Шварцшильда. Тогда в теории могут существовать новые решения, которые можно исследовать методами небесной механики для поиска возможных отклонений от ОТО.

Самым хорошо изученным из новых решений класса I является решение Кампанелли и Лоусто [56]. Решение в единицах $\hbar = c = 1$ может быть записано в виде:

$$ds^2 = \Delta(r)^m dt^2 - \Delta(r)^{-n} dr^2 - \Delta(r)^{1-n} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.8)$$

$$\phi = F \left(1 - \frac{2\eta}{r} \right)^{\frac{n-m}{2}}, \quad \eta = M \sqrt{(1+\gamma)/2} \quad (2.9)$$

$$m = \sqrt{2/(1+\gamma)}, \quad n = \gamma \sqrt{2/(1+\gamma)}, \quad (2.10)$$

$$\omega = \frac{m-n+2}{n-m}, \quad G = \phi^{-1} \frac{2}{1+\gamma}, \quad \Delta(r) = 1 - \frac{2\eta}{r} \quad (2.11)$$

где γ — ППН-параметр теории БД, константа F может быть получена из Ньютоновского предела. Данный класс решений был независимо открыт Агнезе и Ла Камера (далее АК) [5] и корректно интерпретирован авторами как голая сингулярность при $\gamma < 1$ или кротовая нора при $\gamma > 1$. Скалярное поле играет роль экзотической материи в горловине кротовой норы, гарантируя ее проходимость не только при отрицательных, но даже при больших положительных ω [21]. Таким образом,

основным классом сферически симметричных решений в теории БД являются кротовые норы. Астрофизические особенности метрики АК были исследованы Алексеевым и др. в работе [6], вывод состоит в том, что решение АК может быть согласовано с наблюдениями и, следовательно, представлять собой реальный объект. Однако решение АК было получено в рамках классической теории БД (без космологической постоянной и потенциала скалярного поля). Поэтому актуальным становится поиск решений в расширенных версиях теории БД, что и сделано в главе 5.

2.4 Модели мира на бране

Одна из теорий, описывающих гравитацию, это теория струн. Это теория движения одномерных объектов на фоне многомерного пространства-времени. Теория струн основывается на идее суперсимметрии и сочетает в себе идеи квантовой механики и ОТО, а потому рассматривается как один из кандидатов на роль теории квантовой гравитации [57, 58].

Суперсимметричная теория струн самосогласованно формулируется в пространстве-времени с девятью измерениями. Одной из важнейших проблем теории струн является объяснение ненаблюдаемости дополнительных измерений, ведь наши наблюдения говорят о наличии трех пространственных и одного временного измерения. До 1990-х гг. основным объяснением служила малость дополнительных измерений (характерный размер порядка планковской длины $l_{Pl} \approx 10^{-33}$ см). В конце 1995 г. Полчински показал, что теория струн, чтобы быть последовательной, должна включать не только струны, но и поверхности более высокой размерности, движущиеся в фоновом пространстве [59]. Полчински нашел, что симметрии, применимые к струнным теориям и устанавливающие связи между ними, не могли бы быть разработаны последовательно без наличия в теории высокоразмерных объектов. Он назвал их D-бранами. Так возникла идея, что наш мир тоже может быть браной, вложенной в объемлющее пространство. Модели, основанные на таких представлениях, получили название «мир на бране».

Однако, проблема дополнительных измерений в такой модели так-

же стояла остро. В предположении, что они имеют небольшой размер и потому «не ощущаются» макроскопическими телами, возникает другой вопрос: почему часть измерений компактна, а часть — нет? Попытки ответить на этот вопрос привели к идее, что дополнительные измерения теории струн можно представить некомпактными, если поля и вещество локализованы на трехмерном многообразии посредством некоторого механизма. При этом гравитационное взаимодействие не обязано быть локализованным в дополнительном пространстве. Интересный эффект от добавления больших дополнительных измерений состоит в том, что гравитационное взаимодействие в многомерном мире может быть намного сильнее, чем это проявляется на трехмерной бране, так что эффекты квантовой гравитации имеют значение на масштабе длин, много большем, чем в стандартном случае. Это связано с тем, что в присутствии некомпактных дополнительных измерений может понижаться так называемый планковский масштаб, т.е. масштаб при котором гравитационное взаимодействие становится значимым. Трехмерный планковский масштаб становится эффективной характеристикой, тогда как истинно фундаментальным становится многомерный планковский масштаб. Примером такой ситуации является модель Аркани-Хамеди, Димитрополуса и Двали (АДД) [60]. В этой модели четырехмерная масса Планка отличается от фундаментальной на объем дополнительного пространства $M_{pl}^2 = M_*^{n+2}(2\pi r)^n$. В таком подходе решается еще одна проблема теоретической физики — проблема иерархии: почему масштаб электрослабого объединения меньше планковского масштаба (масштаба, при котором становится значимым гравитационное взаимодействие).

Один из ярких эффектов, предсказанных в моделях мира на бране — образование микроскопических черных дыр на Большом Адронном Коллайдере (ЛНС): энергия сталкивающихся частиц оказывается достаточно велика и достаточно сильно локализована, чтобы образовалась черная дыра. В литературе предсказывалось возможное наблюдение связанных с такими событиями процессов [61], прежде всего — наблюдение продуктов испарения таких черных дыр, однако на сегодняшний день такие события пока не наблюдались. Поиски суперсимметричных партнеров

обычных частиц на ЛНС также пока не дали результатов [62]-[65].

Обобщая вышесказанное, можно заключить, что модели мира на бране представляют интерес для теоретической физики в связи с тем, что предлагают ответы на ряд острых теоретических вопросов. При этом, любая теория, претендующая на роль альтернативы ОТО должна в том числе корректно описывать Вселенную на астрономических масштабах. Поэтому важно исследование свойств сферически-симметричных решений в моделях мира на бране методами небесной механики. Такое исследование позволяет судить о соответствии теории струн наблюдаемой картине мира, ведь за счет понижения фундаментального планковского масштаба, гравитационные эффекты, связанные с наличием дополнительных измерений, могут быть достаточно сильными и оказывать существенное влияние на картину движения небесных тел.

2.4.1 Модель Рэндал–Сандрума

Одна из наиболее простых, но, в то же время наглядных моделей была предложена в работе Лайзы Рэндал и Рамана Сандрума (РС) [66]. В модели РС лишь одно дополнительное измерение некомпактно, оно имеет бесконечный размер. Все остальные измерения считаются некоторым образом компактифицированными (такая форма дополнительного пространства принята как приближение для упрощения задачи). В низкоэнергетическом пределе на бране достигается Ньютонова гравитация, т.е. модель может соответствовать наблюдаемой картине мира. В общем случае пятимерный интервал имеет вид:

$$ds^2 = e^{-2k|z|/l} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2, \quad (2.12)$$

где z — дополнительная координата, $\eta_{\mu\nu}$ — четырехмерная метрика Минковского. В модели подразумевается брана, расположенная на $z = 0$, в AdS-пространстве с зеркальной симметрией относительно браны. Четырехмерная масса, измеренная на бране задается выражением

$$M_4^2 = M_5^3 l, \quad (2.13)$$

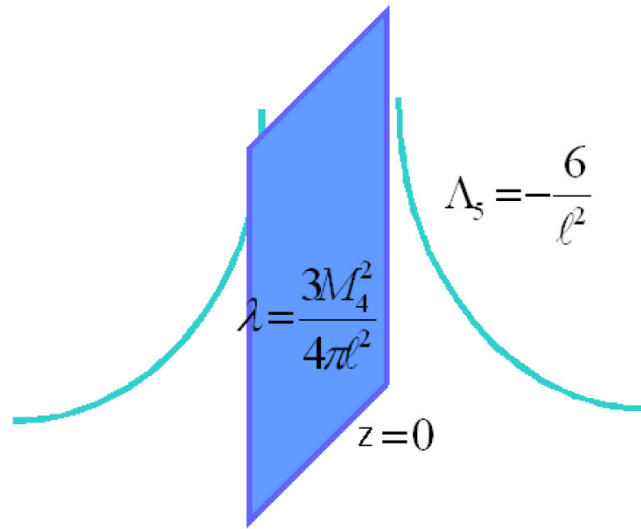


Рис. 1: Вид дополнительного измерения в модели РС. λ — натяжение (плотность энергии) браны, Λ_5 — пятимерная космологическая постоянная. Рисунок взят из [67].

где M_5 — пятимерная масса, l — параметр, зависящий от пятимерной космологической постоянной как $\Lambda_5 = -6/l^2$. Четырёхмерная масса и связанный с ней масштаб энергий оказываются эффективной характеристикой, а пятимерные параметры — фундаментальными. Таким образом, в модели РС вопрос о том, почему планковский масштаб энергий настолько отличен от электрослабого получает интересную переформулировку — почему дополнительные измерения имеют такую структуру?

Простота и наглядность модели РС делают ее одним из наиболее перспективных кандидатов на поиски возможных экспериментальных и наблюдательных проявлений дополнительных измерений. Для поиска таких проявлений методами небесной механики необходимо рассмотреть аналоги решения Шварцшильда в данной модели. Существуют и другие причины, по которым решения типа черная дыра в моделях мира на бране (БЧД) представляют интерес. Одна из них — мнение, что в рамках модели мира на бране микроскопические черные дыры могут рождаться на ускорителях или в результате взаимодействия высокоэнергичных частиц космических лучей с верхними слоями атмосферы (космических ливней), что было бы возможно наблюдать в ближайшее время [68].

2.4.2 Решения типа черная дыра в модели Рэндал-Сандрума

Одно из первых решений БЧД было получено в работе [69]. Авторы заменили в метрике решения РС (2.12) четырехмерную метрику Минковского $\eta_{\mu\nu}$ на метрику Шварцшильда, что привело к решению, названному «черная струна»:

$$ds^2 = e^{-2k|z|/l} \left(-\Delta c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega^2 \right) + dz^2. \quad (2.14)$$

Каждое сечение $z = Const$ имеет геометрию Шварцшильда. Сингулярная линия $r = 0$ протягивается вдоль всего дополнительного измерения z . Существует вращающийся аналог черной струны [70].

Известно, что черная струна в асимптотически плоском пространстве нестабильна относительно длинноволновых возмущений, называемых неустойчивостью Грегори–Лафламма [71, 72, 73]. Авторы [69] утверждают, что для черной струны этот тип нестабильности существенен вблизи горизонта adS пространства, тогда как вдали от него черная струна стабильна. Таким образом, результирующее решение должно иметь форму «сигары» — решение выглядит как черная струна вдали от горизонта AdS (так, что метрика на бране совпадает со Шварцшильдовой), однако имеет горизонт, замыкающийся на некотором расстоянии от горизонта AdS . Так как такая конструкция — продукт развития нестабильности, она описывает только результат гравитационного коллапса на бране и не может описывать сам коллапс и звезды на бране [69].

Были предприняты попытки получить решение типа «сигары» непосредственно. П. Канти с соавторами в статье [74] предприняли попытку найти аналитическое решение БЧД с горизонтом, простирающимся на конечное расстояние в дополнительном пространстве. Авторы рассматривали ряд пятимерных метрик, горизонт которых простирается в балк на конечное расстояние. Хотя подобные метрики могут быть сконструированы, не удастся найти соответствующий им тензор энергии–импульса, который удовлетворял бы требованиям модели мира на бране — либо его не удастся найти вообще, либо он проявляет некорректное поведение в

дополнительном пространстве. Этот результат не запрещает существование подобных решений, так как были рассмотрены не все возможные формы метрики, но указывает на тот факт, что локализация черной дыры на бране сильно зависит от тензора энергии-импульса дополнительного пространства. В следующей статье [75] авторы рассматривают метрику в виде:

$$ds^2 = e^{2A(y)} \left[- \left(1 - \frac{2m(v, y)}{r} \right) dv^2 + 2\epsilon dvdr + r^2 d\Omega^2 \right] + dy^2, \quad (2.15)$$

где $\epsilon = \pm 1$. Зависимость функции $m(v, y)$ от y должна приводить к шварцшильдовскому решению на бране и к быстрому исчезновению решения вне ее. В случае $m = m(y)$ метрика переходит в решение Шварцшильда путем преобразования координат $v \rightarrow t = v - r - 2M \log(r - 2M)$. Для $A(y) = -\lambda|y|$, $m(y) = e^{-a|y|^n} m(v)$, где n целое, $a = \text{Const} > 0$. Для достаточно больших a решение оказывается локализованным на бране. Этой метрике удастся поставить в соответствие тензор энергии-импульса, проявляющий формально корректное поведение в дополнительном пространстве. Хотя соответствующее ему распределение материи оказывается нетривиальным, авторы полагают, что оно может соответствовать реальности, в частности, теориям со скалярным полям.

В работе [76] представлено аналитическое решение для описания черной дыры в модели РС:

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left[-T^2 dt^2 + e^{2R} (dr^2 + dz^2) + r^2 e^{2C} d\Omega^2 \right], \quad (2.16)$$

где l — параметр, зависящий от пятимерной космологической постоянной как $\Lambda_5 = -6/l^2$, T, R, C — функции z и r . В статье показано, что статическое решение возможно, если тензор энергии-импульса дополнительного пространства не равен нулю. Однако решение нельзя представить в форме Шварцшильда и оно не сводится к таковому на бране.

Таким образом, поиски пятимерного решения БЧД оказываются сопряжены с некоторыми трудностями, связанными с необходимостью «тонкой настройки» дополнительного пространства.

2.4.3 Четырехмерные решения

Другой метод поиска решений БЧД состоит в проектировании многомерных уравнений поля на брану и их решении для четырехмерного случая [2, 77]. Эти решения можно численно или путем построения разложения продолжать в дополнительное пространство [78, 79, 80]. Результаты вычислений указывают на то, что горизонт вытягивается в дополнительное измерение на конечное расстояние (имеет форму «сигары»), однако по своей эвристической ценности такой результат уступает аналитическому пятимерному решению, ведь нет гарантии, что метрика на бране (играющая роль граничного условия) соответствует действительности.

Наиболее исследованным решением в модели РС (помимо черной струны) является решение Дадича и других [2]. Метрика имеет вид:

$$ds^2 = \Delta(r)dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.17)$$

$$\Delta(r) = 1 + \frac{\mu}{r} + \frac{q}{r^2}, \quad (2.18)$$

где μ и q константы. Это метрика имеет вид Рейсснера–Нордстрема, где $\mu = -2M/M_{pl}^2$, M — масса, а $q = \mathbf{q}/\widetilde{M}_{pl}^2$, \mathbf{q} — «приливной заряд», возникающий из тензора Вейля дополнительного измерения, проекция которого на брану формально отождествляется с тензором энергии–импульса. То есть приливной заряд — «отпечаток» на бране гравитационного поля дополнительного пространства. В данной метрике возникают два решения типа черная дыра. Одно — классическое решение типа Рейсснера–Нордстрема с двумя горизонтами. Данный тип решения соответствует $q > 0$. Другое решение — новый тип черных дыр, соответствует $q < 0$ (т.к. такая возможность отсутствует в классической ОТО).

Данное решение может быть сведено к решению Шварцшильда и не требует специфических условий дополнительного пространства, а потому представляет интерес для дальнейшего исследования методами небесной механики и последующего сравнения с наблюдательными данными, что сделано в главе 3.

3 Черные дыры в моделях с некомпактными дополнительными измерениями

3.1 Постановка задачи

В настоящий момент предложено множество расширенных теорий гравитации. Вследствие увеличения количества степеней свободы множество новых типов решений, отсутствующих в теории относительности, уже получено и, вероятно, еще будет выведено в дальнейшем. Эти решения могут соответствовать физическим объектам макромира, которые имеет смысл искать в астрономии, проводя «выбраковку» теорий на основании экспериментальных или наблюдательных данных.

Метрика Шварцшильда (2.1) используется в небесной механике для описания сферически-симметричного распределения вещества, а в пределе слабого поля описывает и Солнечную систему (если массой планет по сравнению с массой Солнца можно пренебречь). Таким образом, она может быть использована для анализа движения планет в Солнечной Системе, движения спутников вокруг Земли, аккреции вещества на космические тела и т.д. Все перечисленные явления могут быть описаны с помощью уравнений геодезических: уравнений, описывающих линии движения пробных тел в гравитационном поле. Следовательно, чтобы судить о релевантности теории гравитации с точки зрения небесной механики и астрономии, можно рассмотреть структуру геодезических линий аналогов решения Шварцшильда в данной теории. Дополнительные параметры расширенных теорий, входя в уравнения геодезических, модифицируют их. В результате, теория может содержать принципиально новые орбитальные эффекты, отсутствующие в ОТО, или существенные отклонения от нее.

Согласно результатам работы [81], метрикой, описывающей звезду на бране, является решение Шварцшильда с поправками (классическое решение Шварцшильда не подходит). Таким образом, в рамках моделей мира на бране обязательно должны существовать поправки к картине движения небесных объектов. Перспективы обнаружения таких откло-

нений стимулируют проведение новых гравитационных исследований и, в особенности, экспериментов космического базирования [1].

Целью данной главы является поиск возможных наблюдательных проявлений модели РС путем исследования картины геодезических линий в окрестности черной дыры (или любого массивного объекта) и сравнения с геодезическими метрики Шварцшильда. Такое исследование позволит судить о релевантности модели РС с точки зрения небесной механики. Изложение данной главы опирается на материалы публикаций [7, 82, 83, 84, 85].

Наиболее исследованным четырехмерным решением в модели РС является решение Дадича и других [2]. Метрика имеет вид:

$$ds^2 = \Delta(r)dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

$$\Delta(r) = 1 + \frac{\mu}{r} + \frac{q}{r^2}, \quad (3.2)$$

где μ , q – константы. Эта метрика является обобщением метрики черной дыры с электрическим зарядом Рейсснера–Нордстрема, для которой $q = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$ (здесь ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума), Q^2 соответствует квадрату электрического заряда черной дыры и, соответственно, знак параметра q фиксирован. В решении Дадича и др. $\mu = -2M/M_{pl}^2$, M – масса, а $q = \mathbf{q}/\widetilde{M}_{pl}^2$, M_{pl} – четырехмерная масса Планка, \widetilde{M}_{pl} – пятимерная масса Планка, \mathbf{q} – «приливной заряд», возникающий из тензора Вейля дополнительного измерения, проекция которого на брану формально отождествляется с тензором энергии–импульса. То есть приливной заряд – «отпечаток» на бране гравитационного поля дополнительного пространства. При $\mu^2 < 4q$ решение описывает голью сингулярность. В решении Дадича использована система единиц $\hbar = c = 1$, которую мы также примем в данной главе для удобства вычислений. В этой системе единиц $M_{pl} = 1/\sqrt{G}$.

В данной метрике возникают два решения типа черная дыра. Одно – классическое решение типа Рейсснера–Нордстрема с двумя горизонтами. Данный тип решения соответствует $q > 0$. Другое решение – новый тип черных дыр, соответствует $q < 0$ (т.к. такая возможность отсутствует в

классической ОТО). Решение при $q < 0$ имеет один горизонт, расположенный дальше соответствующего шварцшильдовского горизонта:

$$r_h = \frac{M}{M_{pl}^2} \left[1 + \sqrt{1 - \mathfrak{q} \frac{M_{pl}^4}{M^2 \widetilde{M}_{pl}^2}} \right], \quad (3.3)$$

меньшую температуру и большую энтропию по сравнению со шварцшильдовским случаем. Гравитационный потенциал в метрике Шварцшильда $\mathcal{V} = -\frac{M}{M_{pl}^2 r}$ переходит в:

$$\mathcal{V} = -\frac{M}{M_{pl}^2 r} + \frac{\mathfrak{q}}{2\widetilde{M}_{pl}^2 r^2}. \quad (3.4)$$

Авторами [2] показано, что случай $\mathfrak{q} < 0$ физически более естественный, чем $\mathfrak{q} > 0$. Для $\mathfrak{q} < 0$ эффективная плотность энергии на бране отрицательна, также как и плотность энергии гравитационного поля изолированного массивного источника в ньютоновской теории. Сингулярность для отрицательных \mathfrak{q} пространственно-подобная (как в шварцшильдовском случае), тогда как положительные значения \mathfrak{q} ведут к времени-подобной сингулярности, качественно меняя природу решения.

Аналог данного решения с электрическим зарядом в дополнение к приливному был получен в работе [86]. Наиболее общая форма решения — с вращением, электрическим и приливным зарядами рассмотрена в [87]. Однако, считается, что для большинства астрономических объектов вращение и заряд не оказывают заметного влияния на метрику, поэтому в данной главе исследовано решение Дадича и др. В работах [81, 88] показано, что, поскольку масса и приливной заряд должны быть связаны, то исходя из наблюдательных данных может быть наложено совместное ограничение на M и \mathfrak{q} . Такие ограничения, для различных наборов данных, приведены в таб. 2, можно убедиться, что они находятся в согласии с ограничением (3.50) предложенным далее в данной главе.

Термодинамические свойства решения (3.1) рассмотрены в статье [89], показано, что более вероятными оказываются отрицательные значения

Объект	Земля	двойные НЗ	НЗ	СМЧД
$ q/M^2 _{max}$	0.003	2.339	227.47	4.485

Таблица 2: Ограничение на значение нормализованного на массу приливного заряда $|q/M^2|$ ($G = 1$) по данным: прецессии перигелия Земли (2 столбец), модели высокочастотных квазипериодических осцилляций в двойных системах нейтронных звезд (3 столбец), моделирования плотности энергии браны и соответствующего значения компактности нейтронных звезд, прогнозируемых наблюдений сильного линзирования черной дырой в центре нашей галактики[88].

приливного заряда, так как они соответствуют большей энтропии. Гравитационное линзирование для данной метрики рассмотрено в работе [90], показано, что индикатором присутствия приливного заряда могла бы быть степенная зависимость факторов увеличения от удаленности изображений. Также показано, что в соответствии с ограничениями таблицы 2 слабое гравитационное линзирование на современном уровне точности не отличается от такового для метрики Шварцшильда. В работах [91, 92] исследована возможность образования подобных черных дыр на БАК и сделан вывод, что производство таких черных дыр является, вероятно, за пределами возможностей БАК. Этот результат находится в согласии с имеющимися экспериментальными данными [64].

Авторы [2] предлагают следующее ограничение на приливной заряд q , исходя из требования, чтобы поправочный член в гравитационном потенциале был много меньше классического Шварцшильдовского члена (на масштабах солнечных масс и радиусов):

$$|q| \ll 2 \left(\frac{\widetilde{M}_{pl}}{M_{pl}} \right)^2 M_{\odot} R_{\odot}, \quad (3.5)$$

где фундаментальная масса Планка \widetilde{M}_{pl} связана с ее эффективной величиной M_{pl} как [2]:

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{\widetilde{M}_{pl}^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \widetilde{M}_{pl},$$

λ — натяжение браны (плотность энергии), M_{\odot} и R_{\odot} — масса и радиус

Солнца соответственно. Ограничение (3.5) оставляет возможность для достаточно больших по модулю величин приливного заряда, способных повлиять на геометрию в масштабе звездных масс.

Решение Рейсснера–Нордстрема неустойчиво, так как макроскопический электрический заряд черной дыры быстро нейтрализуется окружающим веществом. Заряд в рассматриваемой метрике имеет геометрическую природу, следовательно, данное решение не подвержено тому типу неустойчивости, который характерен для решения Рейсснера–Нордстрема. На момент публикации работ [82, 83, 84] метрика типа Рейсснера–Нордстрема была исследована только для положительных значений заряда (в классической метрике Рейсснера–Нордстрема параметру q соответствует квадрат электрического заряда), однако, отрицательные значения параметра, соответствующие обсуждаемому типу заряда, не рассматривались из-за отсутствия такой возможности в ОТО. Новый диапазон значений параметра заряда дает возможность для появления новых эффектов, которые могут быть доступны для наблюдения.

В работе [11] показано, что для устранения проблем в определении массы черной дыры SgrA в центре нашей галактики, вместо модели Шварцшильдовой черной дыры для SgrA можно использовать метрику типа Рейсснера–Нордстрема с существенными по величине значениями параметра заряда. Природа заряда с большой вероятностью должна быть не электрической (из-за нестабильности такого заряда для метрики Рейсснера–Нордстрема), так что метрика (3.2) вполне может выступать в этой роли.

3.2 Уравнения геодезических

Уравнения геодезических линий описывают движение пробных тел в искривленном пространстве-времени. С помощью уравнений геодезических могут быть описаны: движение планет в Солнечной Системе, движение спутников вокруг Земли, аккреции вещества на космические тела, движение звезд в кратных системах и т.д., из уравнений геодезических может быть выведено уравнение Кеплера, описывающее движение тела

по эллиптической орбите в задаче двух тел:

$$\mathcal{E} - \epsilon \sin \mathcal{E} = \mathcal{M}. \quad (3.6)$$

Здесь \mathcal{E} — эксцентрическая аномалия, ϵ — эксцентриситет орбиты, а \mathcal{M} — средняя аномалия. Также уравнения геодезических содержат в себе радиальное и гиперболическое уравнения Кеплера, и уравнение Баркера движения по параболической орбите. В данной главе рассматриваются радиальные и круговые геодезические, ведь, несмотря на свою простоту, эти частные случаи орбит иллюстрируют важные свойства пространства–времени и описывают широкий спектр движений небесных объектов.

Обсудим уравнения движения пробных частиц, не конкретизируя знак q . Проведем вывод уравнений, следуя [93], и сравним случаи $q = 0$ и $q \neq 0$. Уравнения геодезических могут быть получены из лагранжиана:

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}, \quad (3.7)$$

где τ — некоторый аффинный параметр на геодезической. Для времени-подобных геодезических ($ds^2 > 0$) τ можно отождествить с собственным временем частицы, движущейся по орбите. Из (3.7) среди прочих следует уравнение

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{d\tau} = (r^2 \sin\theta \cos\theta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2. \quad (3.8)$$

Если мы выберем начало отсчета угла θ так, что $\theta = \pi/2$ когда $\dot{\theta} = 0$, то также и $\ddot{\theta} = 0$, т.е. θ будет постоянно в процессе движения, следовательно движение будет происходить в одной плоскости. Полагая $u = 1/r$, как это делается при анализе орбит в Ньютоновой теории, уравнения могут

быть записаны в следующей форме:

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = \frac{r(\tau)^2 E}{r(\tau)^2 + \mu r(\tau) + \beta}, \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} - \frac{\mu u + qu^2}{L^2} - (u^2 + \mu u^3 + qu^4), \quad (3.10)$$

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{1}{u^2 L^2}, \quad (3.11)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{E}{L^2(u^2 + \mu u^3 + qu^4)}. \quad (3.12)$$

Здесь L и E — интегралы движения. Константа L имеет смысл момента импульса относительно оси, перпендикулярной плоскости движения, взятого на единицу массы пробной частицы. Константа E соответствует энергии пробной частицы на единицу массы. Данная система уравнений задает времениподобные геодезические в экваториальной плоскости, давая возможность определить обратный радиус u , координатное время t и собственное время τ в зависимости от угла φ . Уравнение (3.10) представляет собой релятивистский аналог уравнения Бине. Если известно решение уравнения (3.10), то окончательное решение получается прямым интегрированием уравнений (3.11) и (3.12).

3.3 Ограниченные орбиты

Рассмотрим случай для времениподобных геодезических, когда значение радиальной координаты r вдоль геодезической ограничено сверху. Этот случай описывает, к примеру, аккрецию вещества на черную дыру и движение звезд и планет по круговым и эллиптическим орбитам. Важные примеры таких движений изображены на рис. 2 и 3.

Для ограниченных орбит $E^2 < 1$. Значениям $E^2 > 1$ соответствуют неограниченные орбиты. Перепишем (3.10):

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = f(u), \quad (3.13)$$

$$f(u) = \frac{E^2 - 1}{L^2} - \frac{\alpha u + qu^2}{L^2} - (u^2 + \mu u^3 + qu^4). \quad (3.14)$$

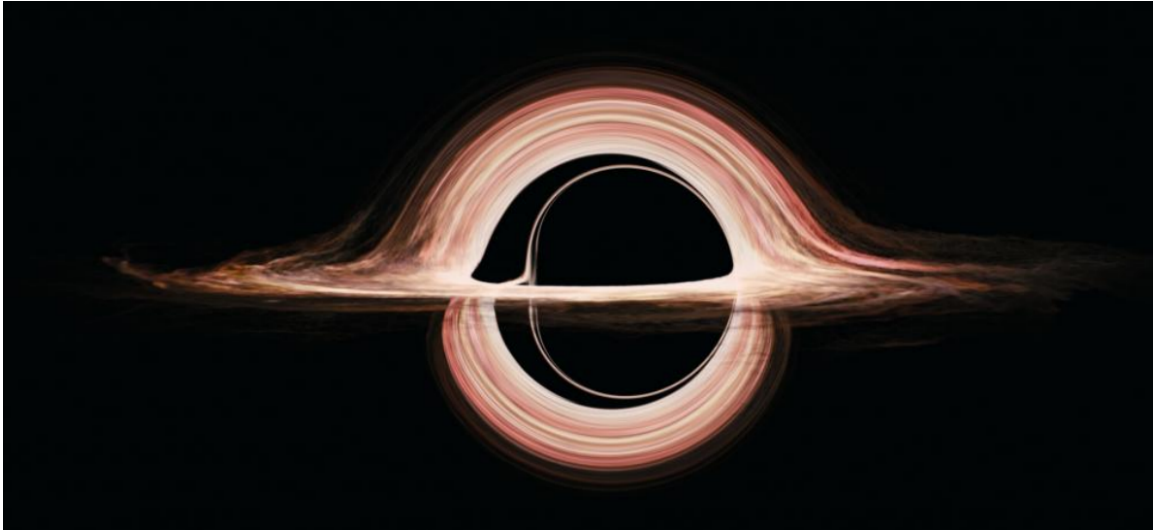


Рис. 2: Видимая наблюдателем картина аккреции на вращающуюся черную дыру с параметром вращения $a/M = 0.999$, внутренний радиус аккреционного диска $r = 9.26M$. При построении изображения учтено влияние вращения и эффектов гравитационного линзирования изображения диска черной дырой. Диск виден с расстояния $74.1M$. Рисунок взят из [94], картина получена с использованием ряда предположений.

Из (3.14) видно, что для Шварцшильдовского случая $q = 0$ функция $f(u)$ является полиномом третьего порядка относительно u , то есть имеет, в общем случае, три корня (см. рис. 3.3), тогда как для $q \neq 0$ это полином четвертого порядка.

Различные пары значений E^2 и L допускают существование пяти различных случаев. С.Чандрасекар [93] вводит понятия орбит первого и второго рода. Орбиты первого рода осциллируют между двумя конечными значениями радиуса (примером является область между корнями функции $f(u)$ u_1 и u_2 , рис. 3.3). Орбиты второго рода, начинаясь на некотором расстоянии в апоцентре (область правее точки u_3 , Рис. 3.3), заканчиваются в сингулярности. Орбиты первого рода — это релятивистский аналог орбит Кеплера, орбиты второго рода не имеют аналогов в классической теории.

Принципиальное отличие в случае уравнения четвертого порядка состоит в том, что функция $f(u)$ может иметь в общем случае еще один корень (а также еще один экстремум), а также в том, что меняется асимптотика при $r \rightarrow -\infty$, т.о. левая ветка графика оказывается направленной

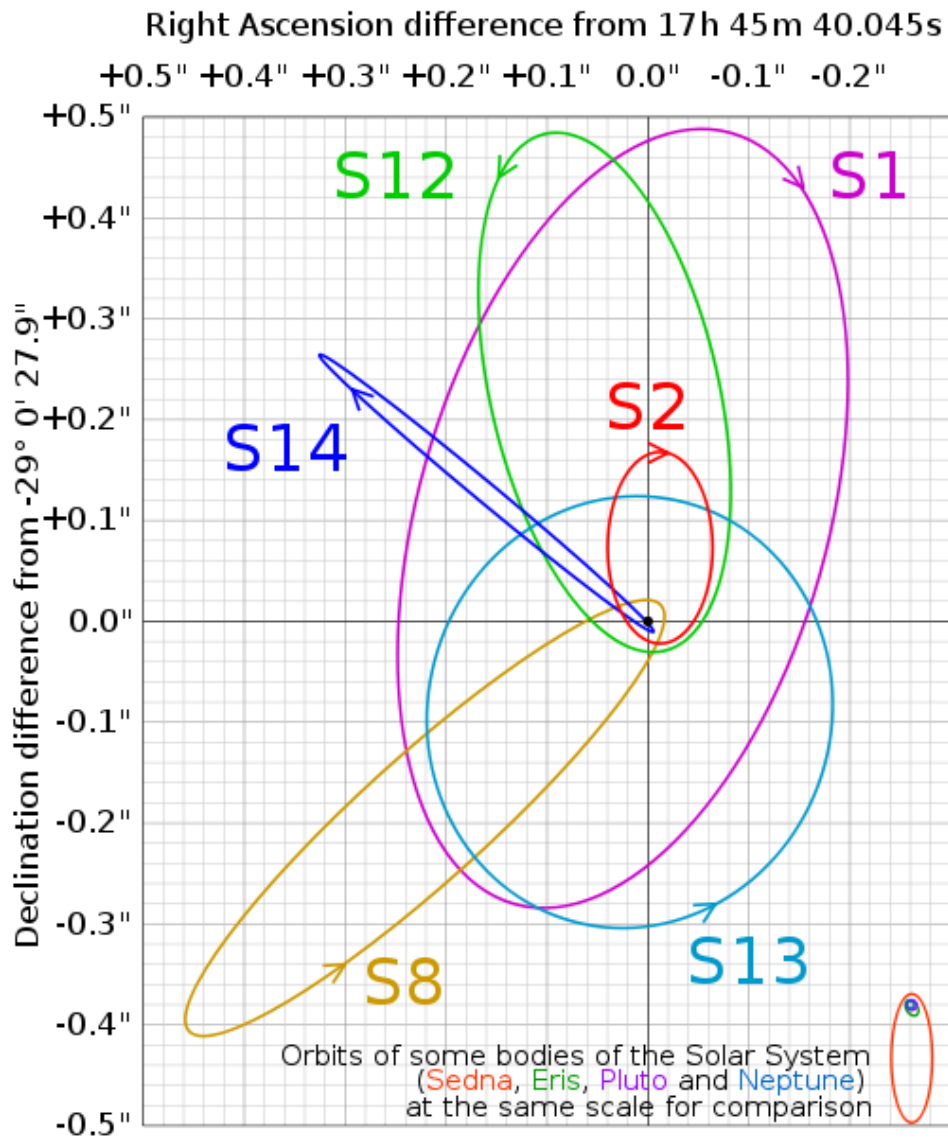


Рис. 3: Смоделированные по данным наблюдений орбиты звезд вокруг компактного объекта Sgr A в центре нашей галактики [95]. Орбиты изображены в проекции на небесную сферу, по горизонтали отложено прямое восхождение в секундах дуги, по вертикали — склонение в секундах дуги.

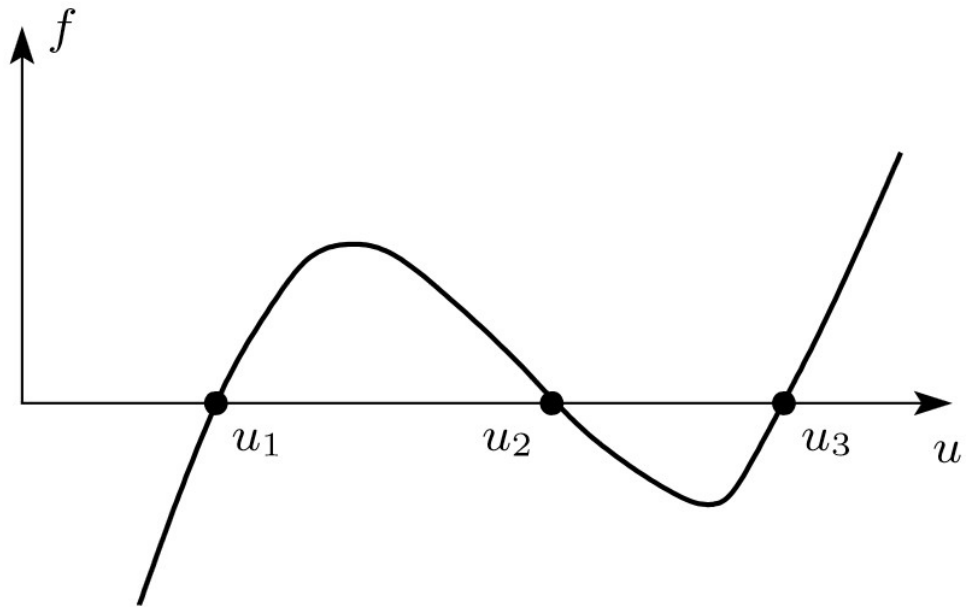


Рис. 4: Вид функции $f(u)$ для $q = 0$.

вверх, а не вниз, что, в принципе, может привести к существованию еще одного класса орбит, связанных с точкой u_4 (см Рис. 5). Такое возможно, если все корни уравнения $f(u) = 0$ положительны.

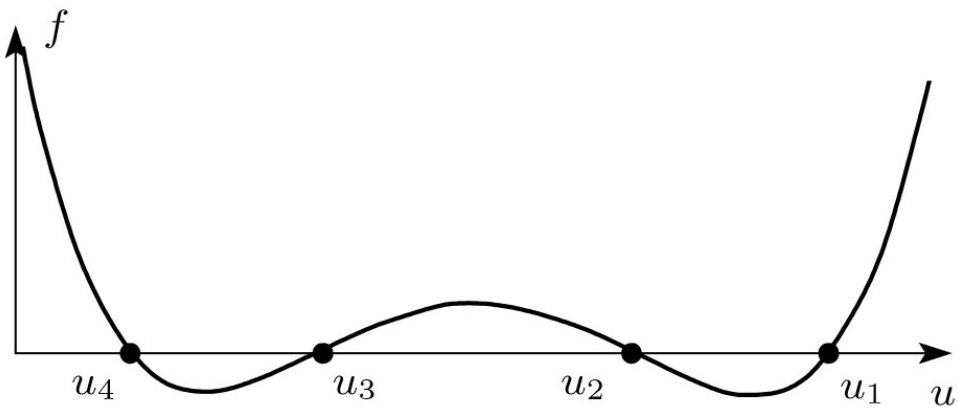


Рис. 5: Вид функции $f(u)$ в случае $q \neq 0$.

Предположим, что все корни положительны и рассмотрим функцию $f(u)$ в виде:

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)q. \quad (3.15)$$

Раскроем скобки и, сравнив с (3.10), получим:

$$-u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = \frac{\mu}{q}, \quad (3.16)$$

т.е. мы пришли к противоречию, так как $\mu/q > 0$ при $q < 0$. Таким образом, как минимум один корень всегда будет отрицательным, а, значит, наличие q не приводит к появлению нового класса орбит. Заметим, что этот результат не зависит от L и E , а, значит, справедлив и для неограниченных орбит. Рассмотрим отличие от геометрии Шварцшильда на примере круговых орбит и радиальных геодезических, ведь, несмотря на свою простоту, эти частные случаи уравнений движения иллюстрируют важные свойства пространства–времени.

3.4 Радиальные геодезические

Радиальные геодезические соответствуют нулевому моменту количества движения:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \Delta. \quad (3.17)$$

Рассмотрим траектории падающих к центру частиц, начинающиеся в апоцентре на некотором конечном расстоянии в состоянии покоя. Из условия $r = r_i$ при $\dot{r} = 0$ имеем:

$$r_i^{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4q(1 - E^2)}}{2(1 - E^2)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 E}{r^2 + \mu r + q}. \quad (3.19)$$

Для ограниченных орбит положительным является лишь одно значение r_i , соответствующее знаку «+» (дискриминант в выражении (3.18) для $E^2 < 1$ и $q < 0$ оказывается больше μ^2 , таким образом, второе слагаемое в числителе оказывается по модулю больше μ). Это значение больше, чем соответствующее значение r_i^{Sch} в Шварцшильдовой геометрии

$$r_i^{Sch} = -\frac{\mu}{1 - E^2}. \quad (3.20)$$

Для расчета собственного времени достижения сингулярности перейдем в уравнениях (3.18) и (3.19) к переменной η следующим образом:

$$r = r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad (3.21)$$

$$\frac{dr}{d\eta} = -r_i \sin(\eta/2) \cos(\eta/2). \quad (3.22)$$

Таким образом $\eta = 0$, когда $r = r_i$ и $\eta = \pi$ когда $r = 0$ в сингулярности

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{-(1 - E^2)r_i^2 \cos^4(\frac{\eta}{2}) - 2\mu r_i \cos^2(\frac{\eta}{2}) - 4q}{r_i^2 \cos^2(\frac{\eta}{2})}. \quad (3.23)$$

Комбинируя это выражение с уравнением (3.22) получим

$$\left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)^2 = \frac{r_i^4 \cos^6(\frac{\eta}{2}) \sin^2(\frac{\eta}{2})}{-(1 - E^2)r_i^2 \cos^4(\frac{\eta}{2}) - \mu r_i \cos^2(\frac{\eta}{2}) - 2q}. \quad (3.24)$$

Сделаем еще одну замену переменных, введя x по правилу: $x = \cos^2(\frac{\eta}{2})$, x изменяется от 1 до 0,

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 = \frac{r_i^4 x^2}{-(1 - E^2)r_i^2 x^2 - \mu r_i x - 2q}. \quad (3.25)$$

Так как мы рассматриваем частицы падающие к центру, то

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{r_i^2 x}{\sqrt{-(1 - E^2)r_i^2 x^2 - \mu r_i x - 2q}}. \quad (3.26)$$

Интегрируем:

$$\tau = \frac{\sqrt{-(1 - E^2)r_i^2 x^2 - \mu r_i x - 2q}}{(1 - E^2)} - \frac{\mu}{2(1 - E^2)^{3/2}} \arcsin \left[-\frac{2(1 - E^2)r_i x + \mu}{\sqrt{\mu^2 - 8q(1 - E^2)}} \right] - \tau_1, \quad (3.27)$$

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{-(1 - E^2)r_i^2 - \mu r_i - 2q}}{1 - E^2} - \frac{\mu}{2(1 - E^2)^{3/2}} \arcsin \left[-\frac{2(1 - E^2)r_i + \mu}{\sqrt{\mu^2 - 8q(1 - E^2)}} \right], \quad (3.28)$$

где константа интегрирования τ_1 введена для того, чтобы $\tau = 0$ при $\eta = 0$ в начальной точке. Рассмотрим предел $q \rightarrow 0$ и учтем, что в этом случае выполняется (3.20), тогда получим собственное время достижения сингулярности, такое же, как в Шварцшильдовой геометрии:

$$\tau_0 = \left(-\frac{r_i^3}{4\mu} \right)^{1/2} \pi. \quad (3.29)$$

Для координатного времени t запишем, учитывая (3.9) и (3.26), а также, учитывая в (3.26) что $r = r_i x$:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{-Er^3}{(r^2 + \mu r + q)\sqrt{-(1-E^2)r^2 - \mu r - 2q}}. \quad (3.30)$$

Уравнение $r^2 + \mu r + q = 0$ имеет корни $r_1 = r_h, r_2 = -r_h - \mu$, r_h — радиус горизонта, так что

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} = & \frac{-Er^3}{\sqrt{-(1-E^2)r^2 - \mu r - 2q}(2r_h + \mu)} \\ & \times \left(\frac{1}{r - r_h} - \frac{1}{r + r_h + \mu} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Интеграл от этого выражения от r_i до r_h расходится по признаку сравнения с гиперболой (так как подынтегральная функция больше гиперболы $1/(r - r_h)$ на участке интегрирования, а интеграл от $1/(r - r_h)$ расходится, то расходится и рассматриваемый интеграл). То есть, координатное время достижения горизонта частицей оказывается бесконечным, как и в Шварцшильдовом случае. Значит, наличие приливного заряда приводит лишь к количественным изменениям: увеличению начального расстояния r_i и изменению выражения для собственного времени.

3.5 Круговые орбиты

Значения энергии E и момента количества движения L для круговой орбиты можно найти из следующих соотношений [93]:

$$f'(u) = -\frac{\mu + 2q}{L^2} - 2u - 3\mu u^2 - 4qu^3 = 0, \quad (3.32)$$

$$f(u) = \frac{E^2 - 1}{L^2} - \frac{\mu u + qu^2}{L^2} - u^2 - \mu u^3 - qu^4 = 0. \quad (3.33)$$

Физический смысл этих уравнений в том, что в процессе движения не меняется форма и радиус орбиты. Таким образом, на круговой орбите радиуса $r_c = \frac{1}{u_c}$ имеем:

$$E^2 = \frac{2(1 + \mu u_c + qu_c^2)^2}{2 + 3\mu u_c + qu_c^2}, \quad (3.34)$$

$$L^2 = \frac{-\mu - 2qu_c}{u_c(2 + 3\mu u_c + 4qu_c^2)}. \quad (3.35)$$

Значения E^2 и L^2 в пределе $q \rightarrow 0$ соответствуют геометрии Шварцшильда. Для ненулевого q значение L^2 , при прочих равных параметрах, оказывается больше. Для отрицательных q числитель в L^2 возрастает, а знаменатель уменьшается. Из уравнений (3.34) и (3.35) следует неравенство (условие $E^2 > 0, L^2 > 0$):

$$2 + 3\mu u_c + 4qu_c^2 > 0. \quad (3.36)$$

Соответственно при $q < 0$ выражение (3.36) запишется как:

$$0 < u_c < \frac{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 32q}}{8q}, \quad (3.37)$$

$$\frac{-3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 32q}}{4} < r_c < \infty. \quad (3.38)$$

При $q = 0$ неравенство (3.36) переходит в условие для круговых орбит Шварцшильдовой метрики $r_c > -3\mu/2$, тогда как для $q \neq 0$ величина с левой стороны неравенства (3.38) оказывается больше шварцшильдовского значения. Если E, L имеют значения (3.34), (3.35) соответственно,

то уравнение (3.10) запишется в виде:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -(u - u_c)^2 [qu^2 + (\mu + 2u_cq)u + \left(u_cq + \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{L^2u_c^2}\right)\right) u_c]. \quad (3.39)$$

Это уравнение допускает, помимо круговой орбиты $r_c = 1/u_c$, еще и орбиту, определяемую уравнением:

$$\varphi = \pm \int du (u - u_c)^{-1} [qu^2 + (\mu + 2u_cq)u + \left(u_cq + \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{L^2u_c^2}\right)\right) u_c]^{-1/2}. \quad (3.40)$$

Замена переменных $\xi = (u - u_c)^{-1}$ приводит к интегралу:

$$\varphi = \mp \int \frac{d\xi}{\sqrt{-q + B\xi + C\xi^2}}, \quad (3.41)$$

где $B = -4u_cq - \mu$, $C = -(4u_c^2q + 3u_c\mu/2 - \mu/2u_cL^2)$.

$$\mp\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{C}} \ln(2\sqrt{C(-q + B\xi + C\xi^2)} + 2C\xi + B), \quad (C > 0) \\ \frac{-1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\xi + B}{\sqrt{B^2 + 4Cq}}, \quad (C < 0, B^2 + 4Cq > 0) \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

Минимальный радиус устойчивой круговой орбиты может быть получен из условия, что $f(u)$ при соответствующем обратном радиусе имеет точку перегиба [93]:

$$f''(u) = -\frac{2q}{L^2} - 2 - 6\mu u - 12qu^2 = 0, \quad (3.43)$$

что, с учетом (3.35) дает:

$$8q^2u_c^3 + 9\mu qu_c^2 + 3\mu^2u_c + \mu = 0. \quad (3.44)$$

В пределе $q = 0$ имеем Шварцшильдовские значения $u_c = -1/3\mu$ или

$$r_c = -3\mu.$$

Таким образом, для круговых орбит наличие отрицательного приливного заряда приводит, также, как и для радиальных геодезических, лишь к качественным изменениям: незначительно меняются выражения для радиусов последних стабильной и нестабильной циркулярной орбиты.

3.6 Вклад приливного заряда

В соответствии с результатами [2] ограничение (3.5) допускает значения величины q , позволяющие влиять на геометрию пространства-времени в режиме больших (астрономических) масс. Так как характерные массы черных дыр в нашей Вселенной могут иметь порядок M_\odot и более, имеет смысл перейти к соответствующим единицам, так, что величина μ , с учетом $M_{pl} = 1/\sqrt{G}$, переписется как

$$\mu = \mathbf{a}M_\odot G, \quad (3.45)$$

при этом введенный параметр $\mathbf{a} \sim 1$. Приравняв к нулю (3.2), получим формулу связи радиуса горизонта, массы и приливного заряда

$$r_h = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4q}}{2}. \quad (3.46)$$

Переопределим аналогично

$$q = bM_\odot^2 G^2, \quad (3.47)$$

где вводится «нормализованный приливной заряд» b , характеризующий значение приливного заряда в масштабе M_\odot . Сравнивая полученное выражение для нормализованного приливного заряда с ограничением на значения приливного заряда из (3.5), получаем следующее ограничение на значения нормализованного приливного заряда

$$|b| \ll \frac{2R_\odot}{M_\odot G}. \quad (3.48)$$

Подставляя численные значения для радиуса и массы Солнца и переводя величины в систему $\hbar = c = 1$ получим

$$|b| \ll 10^6.$$

Как легко видеть, данное ограничение, полученное из (3.5), является более слабым по сравнению с тем, которое можно получить из анализа (3.44), так как $a \sim 1$ в соответствии с соотношением (3.45). В самом деле, при замене $\tilde{u}_c = u_c M_\odot G$ уравнение (3.44) примет следующий вид:

$$8b^2 \tilde{u}_c^3 + 9ab \tilde{u}_c^2 + 3a^2 \tilde{u}_c + a = 0. \quad (3.49)$$

Исходя из требования, чтобы поправочные члены в этом уравнении, характеризующие b , были много меньше классических шварцшильдовских членов, характеризующих $a \sim 1$, можно получить, что

$$|b| \ll 1, \quad (3.50)$$

Или, что то же самое

$$|q| \ll M_\odot^2 G^2, \quad (3.51)$$

в системе единиц $\hbar = c = 1$. Восстанавливая физические единицы то же самое ограничение можем записать в виде:

$$|q| \ll M_\odot^2 G^2 / c^4, \quad (3.52)$$

При таких значениях q решение оказывается внутренне непротиворечивым и самосогласованным, отвечая стандартной картине движения объектов в космосе и поведения вещества вблизи черной дыры и не вносит заметных корректив в круговые орбиты, что хорошо подтверждено существующими астрономическими данными [96]. Данное ограничение получено без предположений о знаке приливного заряда.

Необходимо заметить, что в пятимерной теории приливной заряд является функцией массы. Поэтому для изучения применимости обсуждаемой модели необходимо знание точного решения. В рамках данного

подхода более жесткое ограничение на значения приливного заряда, чем предложенное в [2], можно получить при рассмотрении круговых орбит и условий на существование последней устойчивой орбиты.

Стоит отметить, что существуют некоторые наблюдательные указания на возможное несоответствие геометрии Шварцшильда компактного объекта Sgr A в центре нашей галактики. В работе Доелемана и др. [97] утверждается, что видимый размер источника меньше, чем ожидаемый по предсказаниям ОТО для черной дыры с параметрами источника Sgr A. В более поздних (относительно [82]) работах Захарова были исследованы свойства «тени» черной дыры (темной области на фоне ярких объектов космоса) в зависимости от значения параметра заряда в единицах массы объекта q/μ [11] и показано, что решение с положительным параметром заряда $q/\mu \leq 9/8$ удовлетворяет наблюдательным для данным Sgr A лучше, чем решение Шварцшильда. Сравним это ограничение с результатами наших вычислений.

Сравнивая обозначения данной главы с работой Захарова увидим, что

$$q_S \equiv q \times \frac{1}{M^2 G^2}, \quad (3.53)$$

$$q_S \leq 9/8, \quad (3.54)$$

где индекс S означает, что величина относится к работе Захарова (где также используется $\hbar = c = 1$). Из уравнений выше получим в наших обозначениях:

$$q \leq \frac{9}{8} M_{\odot}^2 G^2, \quad (3.55)$$

Данное ограничение из работы Захарова, переписанное в наших обозначениях, находится в согласии с нашим результатом (3.51). Однако, не стоит забывать, что приливной заряд должен зависеть от массы. Этой зависимостью можно объяснить тот факт, что ограничение (3.51), полученное для массы порядка солнечной, является, видимо, более строгим, чем (3.55), полученное для гораздо более массивного объекта. Результаты работ [98, 99] указывают на то, что существенные значения отри-

цательного приливного заряда приводят к слишком большому значению тени, по сравнению с наблюдаемым. Таким образом, имеются указания на то, что значения приливного заряда положительны.

3.7 Выводы к главе 3

В данной главе рассмотрена картина геодезических для решения Дадича и др. Несмотря на то, что присутствие приливного заряда q качественно меняет уравнения геодезических, на уровне астрономических масс наличие ненулевого приливного заряда q не должно приносить в их типы и форму новых эффектов во избежание противоречий с существующими наблюдательными данными. Ограничение на значения приливного заряда q , предложенное в настоящей работе:

$$|q| \ll M_{\odot}^2 G^2 / c^4,$$

делает ненаблюдаемыми и другие возможные эффекты, связанные с q для черных дыр солнечной и больших масс. Возможно, проявление эффектов приливного заряда следует искать в микрофизике.

Таким образом, полученное в [2] решение типа черная дыра в модели РС не дает противоречий с общей теорией относительности и наблюдаемыми эффектами в астрометрии, астрофизике и небесной механике при выбранных нами значениях параметров. Более жесткое ограничение на значения приливного заряда, чем предложенное в [2], получается при рассмотрении круговых орбит и условий на существование последней устойчивой орбиты.

Модель Дадича и др. может быть использована в небесной механике для расчета траекторий тел в Солнечной системе при учете полученного ограничения на нормализованный приливной заряд (3.50), а модель РС может описывать наблюдаемые явления.

4 Модель Бранса–Дикке с космологической постоянной

4.1 Постановка задачи

Физически корректная расширенная теория гравитации должна описывать мир не только на астрономических масштабах (удовлетворяя наблюдательным данным астрометрии, астрофизики и небесной механики), но и на космологических масштабах. Таким образом, дополнительно к исследованию релевантности расширенных теорий методами небесной механики, важным представляется исследование космологических моделей в таких теориях.

В данной главе исследовано решение уравнений Эйнштейна–Фридмана в теории BDA с параметром $\omega < 0$ и масштабным фактором $a(t)$, минимальное значение которого остается больше нуля: $a_{min} > 0$ на всем протяжении эволюции Вселенной. Уравнения Фридмана записаны для плоской Вселенной, а в качестве граничных условий выбраны современные значения постоянной Хаббла и ее производной по времени (параметра замедления). При решении уравнений поля используется подход, разработанный в [8]. Однако, авторы работы [8] рассматривали только положительные значения ω , поэтому полученное решение представляет собой новую, не описанную в их работе ветвь. В отличие от стандартной ΛCDM -модели, в рассмотренной модели масштабный фактор может не обращаться в ноль при эволюции назад во времени. Этой ситуации соответствует так называемый «отскок» от минимального значения a_{min} масштабного фактора. Выражение (4.28), приводящее к отскоку получено для «холодной Вселенной» $p = 0$ и заведомо неприменимо в «горячей Вселенной». Поэтому в области отскока полученные результаты имеют качественный характер и должны быть использованы с целью получения начальных значений всех функций перед переходом Вселенной в горячую фазу (при эволюции назад во времени).

Глава написана по материалам публикаций [7, 100, 101, 102].

4.2 Уравнения Эйнштейна–Фридмана

Геометрия однородной изотропной Вселенной описывается метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (4.1)$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, $k = 0, \pm 1$ — параметр, отвечающий за глобальную геометрию пространства: $k = 0$ для трёхмерной плоскости, $k = 1$ для трёхмерной сферы, $k = -1$ для трёхмерной гиперсферы. Здесь и далее в главе если не указаны единицы полагается $\hbar = c = 1$. Действие теории БД запишем в виде:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi(R + 2\Lambda) - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 16\pi L_{matter} \right]. \quad (4.2)$$

Здесь ω — параметр теории БД; $\phi(t)$ — скалярное поле; Λ — космологическая постоянная¹⁰.

Варьирование действия по $g_{\mu\nu}$ и по ϕ даёт уравнения Эйнштейна–Фридмана и Клейна–Гордона:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \phi \partial_\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi), \quad (4.3)$$

$$\frac{8\pi}{\phi} T^\mu{}_\mu + 2\Lambda = \frac{3 + 2\omega}{\phi} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi, \quad (4.4)$$

где ∇_μ — ковариантная производная и

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \phi = \delta_\mu^t \partial_t \phi. \quad (4.5)$$

Здесь $\rho(t)$ и $p(t)$ — плотность материи и её давление, тензор энергии-импульса соответствует идеальной жидкости.

¹⁰Здесь величина Λ может отличаться от значения в модели Λ CDM.

Вводим далее новые безразмерные переменные¹¹:

$$\phi(t) \equiv \Phi(t)/G_0, \quad \epsilon(t) \equiv \partial_t \Phi / (\sqrt{\Lambda} \Phi), \quad (4.6)$$

$$\tilde{H}(t) \equiv H(t)/\sqrt{\Lambda} = \partial_t a / (\sqrt{\Lambda} a), \quad (4.7)$$

$$\tilde{\rho}(t) = 4\pi G_0 \rho / \Lambda, \quad \tilde{p}(t) = 4\pi G_0 p / \Lambda. \quad (4.8)$$

Здесь H — функция Хаббла, а \tilde{H} — ее безразмерная величина. Тогда безразмерные уравнения Фридмана в плоской Вселенной (при $k = 0$), в сопутствующей материи системе отсчета ($u_\mu = [1, 0, 0, 0]$) принимают вид:

$$\frac{G_t^t}{\Lambda} = 3\tilde{H}^2 = \frac{2\tilde{\rho}}{\Phi} + 1 + \frac{\omega}{2}\epsilon^2 - 3\tilde{H}\epsilon, \quad (4.9)$$

$$\frac{G_r^r}{\Lambda} = 2\dot{\tilde{H}} + 3\tilde{H}^2 = -\frac{2\tilde{p}}{\Phi} + 1 - \frac{\omega}{2}\epsilon^2 - \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} - 2\tilde{H}\epsilon. \quad (4.10)$$

И уравнение Клейна–Гордона (4.4):

$$\frac{2\tilde{\rho} - 6\tilde{p}}{\Phi} + 2 = (3 + 2\omega) \left[\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + 3\tilde{H}\epsilon \right]. \quad (4.11)$$

Здесь и далее точка обозначает производную по безразмерному времени $\tilde{t} \equiv \sqrt{\Lambda} t$. Уравнения (4.9–4.11) приводят к уравнению непрерывности (содержащему в себе принцип эквивалентности):

$$\frac{\dot{\tilde{\rho}}}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + 3\tilde{H} = 0. \quad (4.12)$$

4.3 Определение начальных данных

Введем параметр замедления Вселенной y и параметр β безразмерной плотности материи в настоящий момент:

$$\dot{\tilde{H}} \equiv -(1 + y)\tilde{H}^2, \quad \beta \equiv \frac{4\pi G_0(\rho_0 - p_0)}{H_0^2} = \frac{\tilde{\rho}_0 - \tilde{p}_0}{\tilde{H}_0^2}. \quad (4.13)$$

Исключая в уравнениях (4.9–4.11) величины ϵ и $\ddot{\Phi}/\Phi$, в начальный

¹¹Здесь и далее настоящий момент времени обозначается нижним индексом «0», соответственно G_0 — гравитационная постоянная в настоящий момент времени (который далее считается равным нулю). Новые обозначения приводят к $\Phi_0 = 1$.

момент времени получаем для нулевого давления ($p = 0$):

$$\omega \left[\tilde{H}_0^2(2 - y_0 - \beta z) - z \right]^2 - 2\tilde{H}_0^2(3z - 1) + \tilde{H}_0^4(6 - 6q_0 - 6\beta z + 4\beta) = 0, \quad (4.14)$$

$$z \equiv \frac{2 + 2\omega}{3 + 2\omega}. \quad (4.15)$$

В приближении¹² $|\omega| \gg 1$ уравнение (4.15) в главном порядке по $1/\omega$ дает:

$$\frac{1}{\tilde{H}_0^2} \rightarrow (2 - y_0 - \beta) \pm \sqrt{\frac{2(1 + y_0 - \beta)}{\omega}}. \quad (4.16)$$

В приближении ОТО вторым слагаемым в выражении (4.16) можно пренебречь.

Из наблюдательных данных [103, 104] известны значения для космологических параметров: $H_0 \approx 2.3 \cdot 10^{-18} \text{с}^{-1}$, $\rho_0 \approx 0.27 \cdot 10^{-29} \text{г/см}^3$ (с учетом вклада от барионной и темной материи), $y_0 \approx -0.6$, давлением в настоящий момент пренебрегают, предполагая что Вселенная наполнена пылеподобной материей («холодная Вселенная»). Отсюда получаем для космологической постоянной:

$$\Lambda \rightarrow (2 - y_0)H_0^2 - 4\pi G_0(\rho_0 - p_0) \approx 11.3 \cdot 10^{-36} \text{с}^{-2}. \quad (4.17)$$

Данные экспериментов по лазерной локации луны [105] позволяют оценить $|\dot{G}/G|_{(0)} \leq 4 \cdot 10^{-20} \text{с}^{-1}$, что приводит к следующему ограничению на $|\epsilon_0|$ в наших обозначениях: $|\epsilon_0| < 0.01$.

Сложим выражения (4.9)+(4.10), домножим результат на $1/\tilde{H}_0^2$ и, выражая величину $\ddot{\Phi}/\Phi$ из уравнения (4.11), получаем для начального момента времени:

$$\frac{\epsilon_0}{\tilde{H}_0} = \frac{1}{\tilde{H}_0^2} - (2 - y_0 - \beta) + \frac{\beta + 1/\tilde{H}_0^2}{3 + 2\omega}. \quad (4.18)$$

¹²Здесь и далее в этой главе (если не оговорено отдельно) стрелка обозначает приближение $|\omega| \gg 1$.

Подставляя сюда выражение (4.16), в главном приближении по $1/\omega$ получаем¹³:

$$\epsilon_0 \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2(1 + y_0 - \beta)}{\omega(2 - y_0 - \beta)}} \quad (4.19)$$

При $|\omega| \gg 1$ имеем следующие значения космологических параметров:

$$\tilde{H}_0 \approx 0.68, \quad \tilde{\rho}_0 \approx 0.2, \quad \beta \approx 0.4. \quad (4.20)$$

4.4 Решение для холодной Вселенной

Рассмотрим задачу для случая холодной Вселенной, т.е. при $p = 0$. Введем обозначения:

$$f \equiv \Phi a^3, \quad \ddot{f}/f = \ddot{\Phi}/\Phi + 6\tilde{H}\epsilon + 3\dot{\tilde{H}} + 9\tilde{H}^2, \quad (4.21)$$

$$\tilde{\rho}/\phi = \tilde{\rho}_0 f_0/f. \quad (4.22)$$

Записывая комбинацию уравнений: $\frac{3}{2}[(4.9)+(4.10)]+(4.11)/[6+4\omega]$, получаем:

$$\ddot{f} - \eta^2 (f + \tilde{\rho}_0 f_0) = 0, \quad \eta^2 \equiv \frac{8 + 6\omega}{3 + 2\omega}. \quad (4.23)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\frac{f(\tilde{t})}{f_0} = c^+ E + c^- / E - \tilde{\rho}_0, \quad E(\tilde{t}) \equiv \exp(\eta \tilde{t}). \quad (4.24)$$

Здесь c^+ и c^- — константы, определяемые из начальных данных. Уравнение (4.11) перепишем в виде:

$$2f + 2\tilde{\rho}_0 f_0 = (3 + 2\omega)(\dot{\Phi} a^3). \quad (4.25)$$

¹³При получении данного выражения в первом слагаемом из правой части выражения (4.18) были учтены члены порядка $1/\sqrt{\omega}$ из выражения (4.16), последнее слагаемое из (4.18) было отброшено с учетом требуемой точности $\propto 1/\sqrt{\omega}$.

Из этого уравнения, с учетом (4.24), можно получить выражение для функции Хаббла¹⁴:

$$\begin{aligned} 3\tilde{H} &= \frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} = \frac{\dot{f}}{f} - \frac{2f_0}{f(3+2\omega)} \int_{const}^{\tilde{t}} \left(\frac{f}{f_0} + \tilde{\rho}_0 \right) d\tilde{t} = \\ &= \frac{6(1+\omega)(c^+E - c^-/E) - 2c_H}{\eta(3+2\omega)(c^+E + c^-/E - \tilde{\rho}_0)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь c_H — еще одна постоянная, определяемая из начальных данных. Из выражений (4.24) и (4.26) можем выразить значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} c^+ &= \frac{1 + \tilde{\rho}_0}{2} + \frac{\epsilon_0 + 3\tilde{H}_0}{2\eta}, \quad c^- = \frac{1 + \tilde{\rho}_0}{2} - \frac{\epsilon_0 + 3\tilde{H}_0}{2\eta}, \\ c_H &= \frac{\eta\epsilon_0(3+2\omega)}{2} - \frac{\epsilon_0 + 3\tilde{H}_0}{\eta}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Проинтегрировав уравнение (4.26) получим следующее выражение для масштабного фактора:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_0} &= \\ &= \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0 \right)^{1/3} \exp \left[\frac{-1}{3(4+3\omega)} \int_1^E \left(\frac{c^+E^2 + c_H E - c^-}{c^+E^2 - \tilde{\rho}_0 E + c^-} \right) \frac{dE}{E} \right] = \\ &= \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0 \right)^{\frac{1+\omega}{4+3\omega}} \exp \left[\frac{-2c_H(A - A_0)}{3(4+3\omega)\sqrt{\mathcal{D}}} \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv 4c^+c^- - \tilde{\rho}_0^2 = 1 + 2\tilde{\rho}_0 - \frac{(3\tilde{H}_0 + \epsilon_0)^2}{\eta^2} = \frac{-3}{8+6\omega} \left[\tilde{H}_0 - \epsilon_0(1+\omega) \right]^2, \\ A(E) &\equiv \arctan[(2c^+E - \tilde{\rho}_0)/\sqrt{\mathcal{D}}]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Важно отметить, что при $|\omega| \gg 1$ решение существует, когда величина ω отрицательна¹⁵.

¹⁴Далее везде сделана замена переменной $\tilde{t} \rightarrow E$, $d\tilde{t} = dE/(\eta E)$.

¹⁵Интересно, что именно при $\omega < 0$ в теории Бранса-Дикке возможно существование кротовых нор без материи, нарушающей условия энергодоминантности — см. [106, 107]. Речь об этом также

В пределе $|\omega| \rightarrow \infty$ выражение (4.28) стремится к стандартному решению Фридмана:

$$H_{Fr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E + E_{cr}}{E - E_{cr}}, \quad E_{cr} \equiv \frac{\sqrt{3}\tilde{H}_0 - 1}{\sqrt{3}\tilde{H}_0 + 1}, \quad \eta_{Fr} = \sqrt{3}, \quad (4.30)$$

$$\frac{a_{Fr}}{a_0} = \frac{(\sqrt{3}\tilde{H}_0 + 1)^{2/3}(E - E_{cr})^{2/3}}{(4E)^{1/3}}, \quad (4.31)$$

причем в модели Фридмана в точке $E = E_{cr}$ величины $\mathcal{D} = 0$ и $a = 0$, а функция $a(t)$ испытывает излом (которого нет при $\mathcal{D} > 0$). Момент излома или «начальный момент» соответствует времени $t_1 \approx -1.46\Lambda^{-1/2}$, $\Lambda^{-1/2} \approx 10^{10}$ лет.

4.5 Космология без сингулярности

В отличие от стандартной Λ CDM-модели, в теории БД масштабный фактор может не обращаться в ноль при эволюции назад во времени. Этой ситуации соответствует «отскок» от минимального значения a_m масштабного фактора.

Область параметров, начиная с которой отскок становится возможным, соответствует совпадению с нулем локального минимума масштабного фактора: $a_m(E) = 0$ (т.е. когда минимум касается оси абсцисс).

Из формулы (4.28) можно получить следующее условие существования отскока при эволюции назад во времени и значение E в точке локального минимума (отскока):

$$\mathcal{D} > 0, \quad E_m = \sqrt{c^-/c^+}. \quad (4.32)$$

При таком сценарии в эволюции Вселенной точка начальной сингулярности не достигается, причем масштабный фактор остается всюду гладкой и непрерывной функцией времени (в том числе и в момент отскока, см. (4.26)).

Наблюдения указывают на существование в прошлом «горячей» (радиационно-доминированной) стадии эволюции Вселенной. Свидетельством тому является наличие космического микроволнового фона со средней

пойдет в следующей главе.

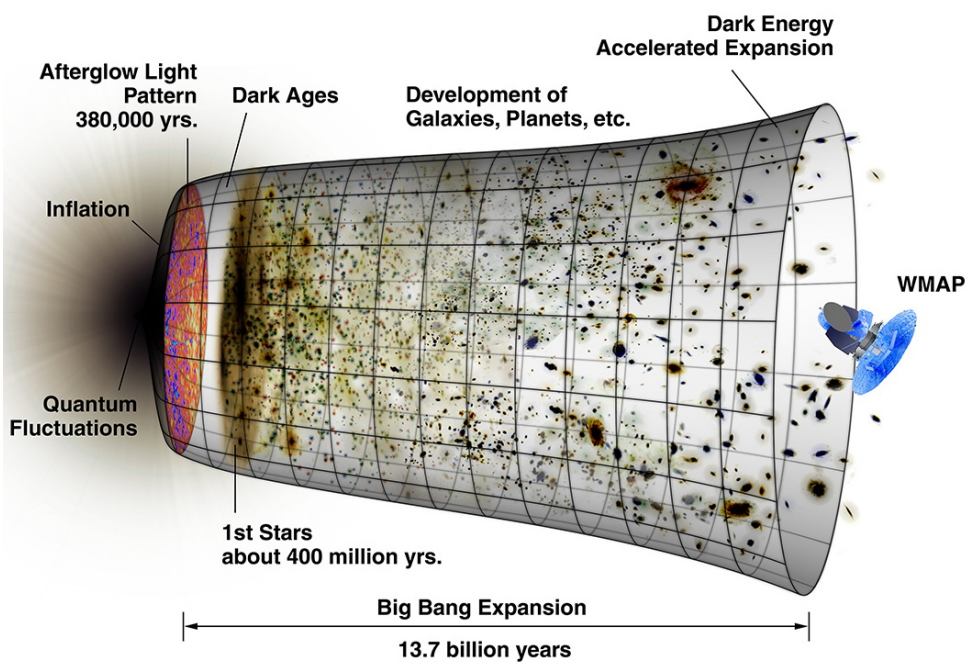
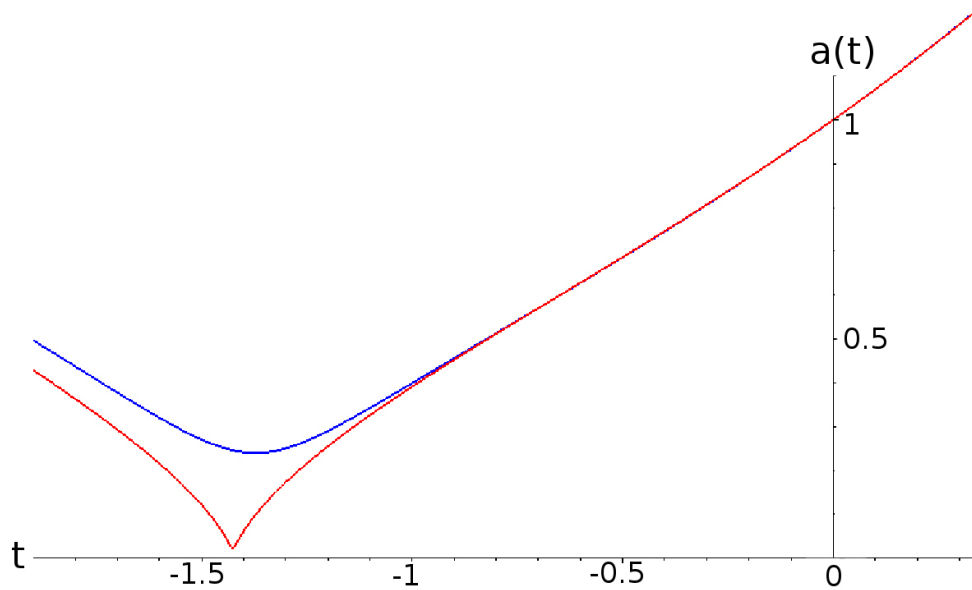


Рис. 6: Сверху: масштабный фактор (4.28) в модели холодной Вселенной с отскоком, для значений параметров: $\omega = -1000$, $y = -0.6$, $\beta = 0.45$ — для верхней кривой и $\beta = 0.43653$ — для нижней кривой. Единица времени \tilde{t} соответствует 10^{10} лет. Снизу: Иллюстративный рисунок (взят с сайта NASA: <http://map.gsfc.nasa.gov>) для $a(\tilde{t})/a_0$ в Λ CDM-модели, соответствующий решению Фридмана.

температурой $T_0 \approx 2.7 K^\circ$. Температура радиационно-доминированной Вселенной может быть оценена снизу как¹⁶ $T_{hot} \approx m_e c^2 / k_b \approx 6 \cdot 10^9 K^\circ$. Используя соотношение $a_{hot}/a_0 = T_0/T_{hot}$, можем получить нижнюю оценку величины масштабного фактора во время «отскока» исходя из требования, чтобы в момент отскока масштабный фактор был не больше, чем на радиационно-доминированной стадии: $a_{hot} \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{-9} a_0$.

При $|\omega| \gg 1$, согласно (4.19), имеем:

$$a_m^3/a_0^3 \approx \Delta/(2\tilde{\rho}_0), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{D} \rightarrow -\frac{1}{2}\omega\epsilon_0^2 \rightarrow \frac{\beta - y_0 - 1}{2 - y_0 - \beta}. \quad (4.34)$$

В соответствии с этим $\mathcal{D} < 4.5 \cdot 10^{-29}$. Эта аномально малая величина при $|\omega| \gg 1$, согласно (4.34), может быть достигнута только за счет свойства плоскостности Вселенной, т.е. при $1 + y_0 - \beta \approx 0$. Таким образом, в нашей модели ограничение из экспериментов в солнечной системе находится в согласии с космологическими данными.

Рассмотренная выше модель, так же как и космология без отскока¹⁷ в [8], не учитывает давление и, следовательно, количественно неприменима для горячей Вселенной. Поэтому в области отскока полученные выше результаты имеют только качественный характер и должны быть использованы с целью получения начальных значений всех функций перед переходом Вселенной в горячую фазу при расчете эволюции назад во времени.

Количественные результаты в области отскока могут быть получены только с учетом давления $p \approx \frac{1}{3}\rho$.

4.6 Решение для горячей Вселенной

Для горячей Вселенной с давлением $p = \frac{1}{3}\rho$ уравнения (4.9–4.11) приводят к выражению:

$$\dot{\tilde{H}} + 2\tilde{H}^2 = \frac{1}{6} \left(-\omega\epsilon^2 + \frac{6 + 8\omega}{3 + 2\omega} \right) \equiv Q \quad (4.35)$$

¹⁶Здесь k_b — постоянная Больцмана, m_e — масса электрона.

¹⁷В работе [8] было найдено аналитическое решение для случая $\Delta < 0$ и $\omega > 0$.

При $\omega < -1.5$ величина Q положительна.

В случае Вселенной Фридмана (т.е. при $\epsilon = 0$ и $|\omega| \rightarrow \infty$) из (4.35) можно легко получить аналог выражений (4.30-4.31), но уже для горячей Вселенной:

$$H_{Fr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U+1}{U-1}, \quad U(\tilde{\tau}) \equiv \exp\left(\frac{4\tilde{\tau}}{\sqrt{3}}\right), \quad \frac{a_{Fr}}{a_{cold}} = \left[\frac{(U-1)^2 U_{cold}}{(U_{cold}-1)^2 U}\right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.36)$$

Здесь введено безразмерное время $\tilde{\tau}$, которое отсчитывается от момента минимума масштабного фактора, величина масштабного фактора a_{cold} соответствует моменту перехода в холодную фазу Вселенной.

Выражение (4.36) для масштабного фактора имеет сингулярные производные (так же как и в случае холодной Вселенной Фридмана — см. уравнения (4.30-4.31)). Характерно также, что при $\mathcal{D} \rightarrow 0$ вторая производная \ddot{a} в точке отскока стремится к $+\infty$, а в близкой окрестности от точки отскока — стремится уже к $-\infty$. Т.е. функция Хаббла в области отскока оказывается быстропеременной при $\mathcal{D} \rightarrow 0$.

Аналогичная ситуация в области отскока должна быть и в горячей Вселенной. Поскольку эпоха горячей Вселенной соответствует очень малым (относительно a_0) значениям масштабного фактора и достаточно большим величинам \dot{H} , то, следовательно, эта область занимает малый промежуток безразмерного времени $\tilde{\tau}$. Здесь мы также предполагаем, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ и $\epsilon \rightarrow 0$ решение в теории БД почти не отличается от фридмановского за исключением области близкой к отскоку (что следует из предыдущего рассмотрения).

Будем искать решение для горячей Вселенной в виде разложения масштабного фактора $a(\tilde{\tau})$ вблизи его локального минимума (отскока) в степенной ряд по времени $\tilde{\tau}$. Тогда с точностью до членов четвертого порядка имеем:

$$a = a_m + \frac{1}{2} a_m \dot{H}_m \tilde{\tau}^2 - \frac{1}{12} a_m x^2 \dot{H}_m^2 \tilde{\tau}^4 + \dots \quad (4.37)$$

Здесь \dot{H}_m и x — константы, причем величина \dot{H}_m соответствует второй производной масштабного фактора в момент отскока и, поэтому, должна быть положительна при $a_m > 0$: $\dot{H}_m > 0$. Членом с третьей производ-

ной при рассмотрении пренебрегаем, так как он не вносит в рассмотрение существенного вклада.

Функция Хаббла и ее производная с точностью до второго порядка по $\tilde{\tau}$ имеют вид:

$$\tilde{H}^2 = \dot{\tilde{H}}_m^2 \tilde{\tau}^2, \quad \dot{\tilde{H}} = \frac{\dot{\tilde{H}}_m(1 - x^2 \dot{\tilde{H}}_m \tilde{\tau}^2)}{1 + \dot{\tilde{H}}_m \tilde{\tau}^2/2} - \dot{\tilde{H}}_m^2 \tilde{\tau}^2. \quad (4.38)$$

Подставляя эти выражения в (4.35), получаем:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{\tilde{H}}_m \left[1 + \tilde{\tau}^2 \dot{\tilde{H}}_m \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) \right]}{(1 + \dot{\tilde{H}}_m \tilde{\tau}^2/2)^2} = Q > 0 \quad (4.39)$$

Это обязательное неравенство остается справедливым в любой момент времени только при $0 < x^2 < 3/2$.

Из (4.37) видно, в момент времени $\tilde{\tau}_1 = 1/\sqrt{\dot{\tilde{H}}_m x^2}$ вторая производная масштабного фактора меняет знак ($\tilde{\tau}_1$ — точка перегиба), то есть существует еще одна дополнительная точка перегиба кривой масштабного фактора относительно фридмановского решения. В момент времени $\tilde{\tau}_2 = \sqrt{3}/\sqrt{\dot{\tilde{H}}_m x^2} = \sqrt{3}\tilde{\tau}_1$ первая производная масштабного фактора меняет знак. Таким образом, сшивка решений для горячей и холодной вселенной должна происходить в области между точками $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$.

При малых величинах x , после момента времени $\tilde{\tau}_1$ вторая производная масштабного фактора очень быстро (примерно за время порядка $\tilde{\tau}_1$) становится большой по модулю и отрицательной величиной, в то время как функция Хаббла еще положительна (вплоть до момента $\tilde{\tau}_2$). Поэтому на интервале времени от $\tilde{\tau}_1$ до $\tilde{\tau}_2$ решение для радиационно-доминированной Вселенной можно считать решением для холодной Вселенной, причем, подбирая величины параметров a_m , $\dot{\tilde{H}}_m$ и x , можно добиться гладкой сшивки этих функций на стыке горячей и холодной фазы Вселенной.

В области отскока, вследствие малости масштабного фактора, большую роль может играть параметр k , отвечающий за неплоскостность Вселенной принятый за ноль в нашем рассмотрении. Поэтому, для количественных оценок в области отскока необходимо рассматривать урав-

нения радиационно-доминированной Вселенной с $k \neq 0$, однако такая задача является очень сложной и может не иметь аналитического решения.

4.7 Выводы к главе 4

В данной главе было рассмотрено решение теории БД с космологической постоянной для $\omega < 0$. В стандартной фридмановской космологии масштабный фактор подходит у нуля вертикально, тогда как в модели ВДА при $\omega > 0$ масштабный фактор $a(t)$ проходит через ноль с конечным наклоном (его первая производная остается конечной при $a = 0$); для случая $\omega < 0$ кривая масштабного фактора $a(t)$ не доходит до нуля — возникает отскок, все функции остаются гладкими. Такой сценарий не предполагает наличия у Вселенной в прошлом состояния с бесконечной плотностью и температурой, предлагая решение одной из проблем современной космологии: проблемы начальной космологической сингулярности.

Количественная модель с отскоком для радиационно-доминированной Вселенной может быть получена только численно, ввиду сложности уравнений для искривленного пространства при $k \neq 0, p \neq 0$.

Наличие в модели ВДА отскока масштабного фактора позволяет избежать одной из самых больших проблем космологии — начальной сингулярности. Требование наличия отскока в ранней Вселенной позволяет наложить ограничение $|\omega| > 10^{40}, \omega < 0$. Это ограничение существенно строже, нежели современное экспериментальное ограничение $|\omega| > 50000$. Заметим, что очень большие (или очень малые) величины типичны для современной космологии и теоретической физики (примером может служить сама величина космологической постоянной $\Lambda = 10^{-29} \text{ г/см}^3$ [32]). Таким образом, столь сильное ограничение лишь свидетельствует о согласии модели с наблюдательными данными, одновременно гарантируя отсутствие начальной сингулярности.

Таким образом, исследование космологических моделей в расширен-

ных теориях гравитации, дополнительно к исследованию их релевантности методами небесной механики, астрофизики и астрометрии позволяет более полно судить о физической корректности расширенных теорий и о том, какие проблемы классической гравитации могут быть решены с их помощью.

5 Сферически симметричные решения в модели Бранса–Дикке с потенциалом

5.1 Постановка задачи

Одна из основных областей применения теории БД — космология, в предыдущей главе сделан вывод о том, что теория БД может успешно описывать космологическую эволюцию и современное состояние Вселенной. Однако, для того, чтобы теория могла претендовать на описание реального мира, необходимо, чтобы она была применима и на астрономических масштабах. Т.е. для проверки корректности теории необходимо удостовериться, что она содержит сферически симметричные решения, соответствующие наблюдательным данным — аналоги решения Шварцшильда. Только при наличии в теории решений, в пространстве–времени которых воспроизводится картина движения небесных объектов, описываемая современными подходами астрометрии и небесной механики, теория может занимать серьезное положение в современных исследованиях гравитации. В наши дни известно множество различных космологических моделей БД, поэтому вопрос о выборе между ними и проверке их адекватности методами астрономии оказывается актуальным.

Скалярно-тензорные теории, и теория БД в том числе, имеют ряд теоретических проблем, особенно если они напрямую рассматриваются в применении к описанию темной энергии. Тем не менее интерес к ним в современной науке не ослабевает в связи с недостатком общего теоретического понимания темной энергии. Феноменология, возникающая в таких теориях на космологическом и астрономическом уровнях оказывается весьма богатой и интересной: объяснение в теории БД находят, к примеру, такие явления как плоские кривые вращения галактик [108], инфляция [109], проблема космологической постоянной [110]. Все это только поддерживает интерес к разностороннему исследованию теории БД.

Ранее уже было упомянуто, что в своей стандартной версии теория БД не приводит к ускоренно расширяющейся Вселенной. В предыдущей

главе рассмотрена модель БД с космологической постоянной, которая решает данную проблему и описывает ускоренное расширение Вселенной. Однако, в таком подходе (выбранном для упрощения задачи) есть недостаток: в нем не находит объяснения природа Λ -члена. В рассмотренной модели уравнения содержат геометрические члены, кинетический член скалярного поля, а также член неизвестной природы, который введен искусственно и играет роль принципиально неустранимой кривизны пространства-времени. Более естественным будет рассмотрение обобщенной теории БД, в которой учет ускоренного расширения Вселенной производится с помощью введения потенциала скалярного поля. В работе [36] показано, что теория БД может соответствовать (в наблюдательном смысле) модели Λ CDM для произвольных форм потенциала. Однако существуют теоретические предпосылки, актуализирующие рассмотрение определенных моделей с потенциалом скалярного поля.

В данной главе рассматривается модель типа БД, возникающая в космологическом контексте в работе Элизалде и др. [4].

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} e^{\alpha\phi} \left[\mathcal{R} - \omega \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0 e^{\phi/\phi_0} \right]. \quad (5.1)$$

Здесь и далее в главе если не указаны единицы полагается $\hbar = c = 1$. Как правило в теориях со скалярным полем реализация фантомного режима космологического расширения (подробнее о фантомном расширении Вселенной см. раздел 2.3.1) влечет за собой возникновение «духов» — скалярных полей с отрицательной кинетической энергией. В данной модели фантомный режим расширения может не приводить к появлению «духов». Для иллюстрации данного утверждения перейдем к представлению Эйнштейна $g_{\mu\nu} e^{\alpha\phi} = g_{E\mu\nu}$.

$$S_E = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g_E} \left[\mathcal{R}_E - \omega_E \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \tilde{V}(\phi) \right], \quad (5.2)$$

$$\omega_E = (3\alpha^2/2 + \omega), \quad \tilde{V}(\phi) = V e^{-\alpha\phi} = V_{E0} e^{-\phi/\phi_{E0}}. \quad (5.3)$$

Формально данное действие описывает ОТО с минимальным объединением скалярного поля с гравитацией. Из выражения для ω_E (5.3) видно,

что даже при отрицательных значениях параметра ω , в случае, когда

$$3\alpha^2/2 + \omega > 0 \quad (5.4)$$

эффективная кинетическая энергия ϕ остается положительной, т.е. «духи» не возникают. При этом соответствующим подбором параметров можно обеспечить выполнение условий ускоренного расширения Вселенной, полученного Элизалде и др.

$$\phi_0^2 > \frac{4}{3\alpha^2 + 2\omega}, \quad (5.5)$$

а также фантомного режима расширения $\epsilon_{de} < -1$. В теории Бранса-Дикке фантомный режим космологического расширения как правило достигается при $\omega < 0$, что и приводит к отрицательной кинетической энергии поля и «духам». В модели Элизалде и др. благодаря специфическому объединению скалярной части с гравитационной, можно сохранить знак эффективной кинетической энергии положительным и избежать возникновения «духов» при отрицательном ω .

Вид действия (5.1) может показаться излишне специфичным, тем не менее, он естественным образом возникает в ряде физических теорий. Примером является низкоэнергетический предел теории струн, эффективное действие которого содержит следующие члены в дилатон-гравитонном секторе:

$$S = \frac{1}{2\lambda_s^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} e^{-\phi} [\mathcal{R} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi)], \quad (5.6)$$

здесь d — количество измерений пространства-времени, λ_s — масштаб длин теории струн, ϕ — дилатон. Это действие можно преобразовать к пределу $\omega = -1$ теории БД. Другой пример — гетеротическая теория струн, компактифицированная на многообразии Z_N [24], которая может

быть записана как теория БД с поправками:

$$S = \frac{1}{2\lambda_s^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[\mathcal{R} + \left(1 + e^\phi \left(\frac{3b}{2} \right) \frac{6 + be^\phi}{(3 + be^\phi)^2} \right) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]. \quad (5.7)$$

здесь b — положительная постоянная порядка 1. Величина, стоящая в действии перед кинетическим членом зависит от скалярного поля, следовательно модели, возникающие в контексте теории струн могут покрывать достаточно широкий диапазон параметра ω теории БД. Этот факт означает, что фантомное скалярное поле может быть естественным низкоэнергетическим следствием многомерных теорий великого объединения.

Элизалде с соавторами рассматривают Вселенную на поздних космологических временах с параметром уравнения состояния «темной энергии» ϵ_{de} близким к -1 (такое значение хорошо соответствует наблюдениям [9]). Результатом является картина пространственно-плоской Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, находящаяся в настоящий момент в фазе расширения. Модель согласуется с наблюдательными данными в широком диапазоне параметров и свободна от нестабильностей [4]. В работе [4] также показано, что квантовые эффекты могут предотвратить или, по крайней мере, отсрочить или смягчить будущую сингулярность, известную как «Большой разрыв» и возникающую в моделях с фантомным расширением. Все вышеизложенное делает модель Элизалде и др. весьма интересной для дальнейшего рассмотрения и исследования с точки зрения астрономии.

В данной главе рассматриваются статические сферически-симметричные решения для действия (5.1). Космологическое рассмотрение работы [4] предполагает зависимость скалярного поля только лишь от времени, что соответствует космологической однородности. Изучение локальных эффектов даст картину поведения поля на малых масштабах и позволит судить об адекватности модели с точки зрения астрометрии, астрофи-

зики и небесной механики. Элизалде и др. указывают на то, что отрицательные значения ω более вероятны, так что мы будем в основном рассматривать именно такой диапазон. В данной главе также исследован предел слабого поля модели Элизалде и др., описывающий Солнечную Систему (в предположении, что массами планет можно пренебречь по сравнению с массой Солнца), а также большинство наблюдаемых на сегодняшний день движений во Вселенной: движение планет и спутников, движение звезд в кратных системах и самосогласованном потенциале галактики и т.п.

Сферически-симметричные решения в теории БД активно исследуются и во множестве представлены в литературе. Одно из наиболее известных сферически-симметричных решений теории БД было открыто Агнезе и Ла Камера [5] и представляет собой голую сингулярность при $\gamma < 1$ или кротовую нору при $\gamma > 1$, где γ — ППН-параметр теории БД (подробнее о ППН-параметрах и их роли в наблюдательной проверке теорий см. раздел 2.2). ППН-параметр γ связан с параметром ω в теории БД без потенциала скалярного поля следующим образом:

$$\gamma = \frac{1 + \omega}{2 + \omega}, \quad (5.8)$$

именно это соотношение позволяет накладывать наблюдательные ограничения на значения ω . Скалярное поле в решении Агнезе и Ла Камера играет роль экзотической материи в горловине кротовой норы, гарантируя ее проходимость не только при отрицательных, но даже при больших положительных ω [21]. Таким образом, основным классом сферически симметричных решений в теории БД являются кротовые норы, которые могут быть проходимы в широком диапазоне значений параметров. Астрофизические особенности метрики АК были исследованы Алексеевым и др. в работе [6], вывод состоит в том, что решение АК может быть согласовано с наблюдениями и, следовательно, представлять собой реальный объект. В данной главе исследованы поправки к ньютоновскому потенциалу для метрики Агнезе и Ла Камера и исследовано их возможное влияние на сигналы от космических аппаратов спутниковой навигацион-

ной системы Галилео. Результаты находятся в согласии с результатами работы [6] и не предсказывают отклонений от наблюдений на сегодняшнем уровне точности.

Решение АК получено в рамках классической теории БД (без космологической постоянной и потенциала скалярного поля). Поскольку потенциал вводится в модель, чтобы описать ускоренное расширение Вселенной, можно предположить, что решение модели с потенциалом будет представлять собой черную дыру или кротовую нору в пространстве dS. Схематически отличие геометрии проходимой кротовой норы от черной дыры показано на рис. 7.

Сферически симметричные решения в моделях с действием, аналогичным (5.1) уже исследовались в литературе. Путем переопределения скалярного поля $\chi = e^{\alpha\phi}$ мы можем привести модель к стандартному для БД виду со степенным потенциалом:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\chi \mathcal{R} - \frac{\omega}{\alpha^2} \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi}{\chi} - V_0 \chi^{(1+\frac{1}{\alpha\phi_0})} \right]. \quad (5.9)$$

Для теории БД со степенным потенциалом в работе [111] получено решение, асимптотически переходящее в черную дыру Лифшица, однако разрешенная область значений параметра ω уже исключена наблюдениями. Другое решение с потенциалом вида $V(\phi) = \Lambda\phi$, использованным для учета космологической постоянной, дано в работе [112] и интерпретировано как кротовая нора. Это решение получено при условии зависимости скалярного поля только от времени, горловина кротовой норы расширяется с течением космологического времени. Насколько известно автору, это единственные представленные в литературе решения в теории Бранса-Дикке с потенциалом скалярного поля. Работа [113] рассматривает квантовые кротовые норы с космологической постоянной Λ в вакууме методами теории возмущений. Хотя модель из работы [113] аналогична модели Элизалде и представляет собой ее частный случай при $V(\phi) = 2\Lambda$, решение [113] не может быть применено в астрофизике. Решения для кротовой норы в рамках ОТО с экзотической материей и Λ -членом были получены в работах [114, 115]. Космологическая постоянная

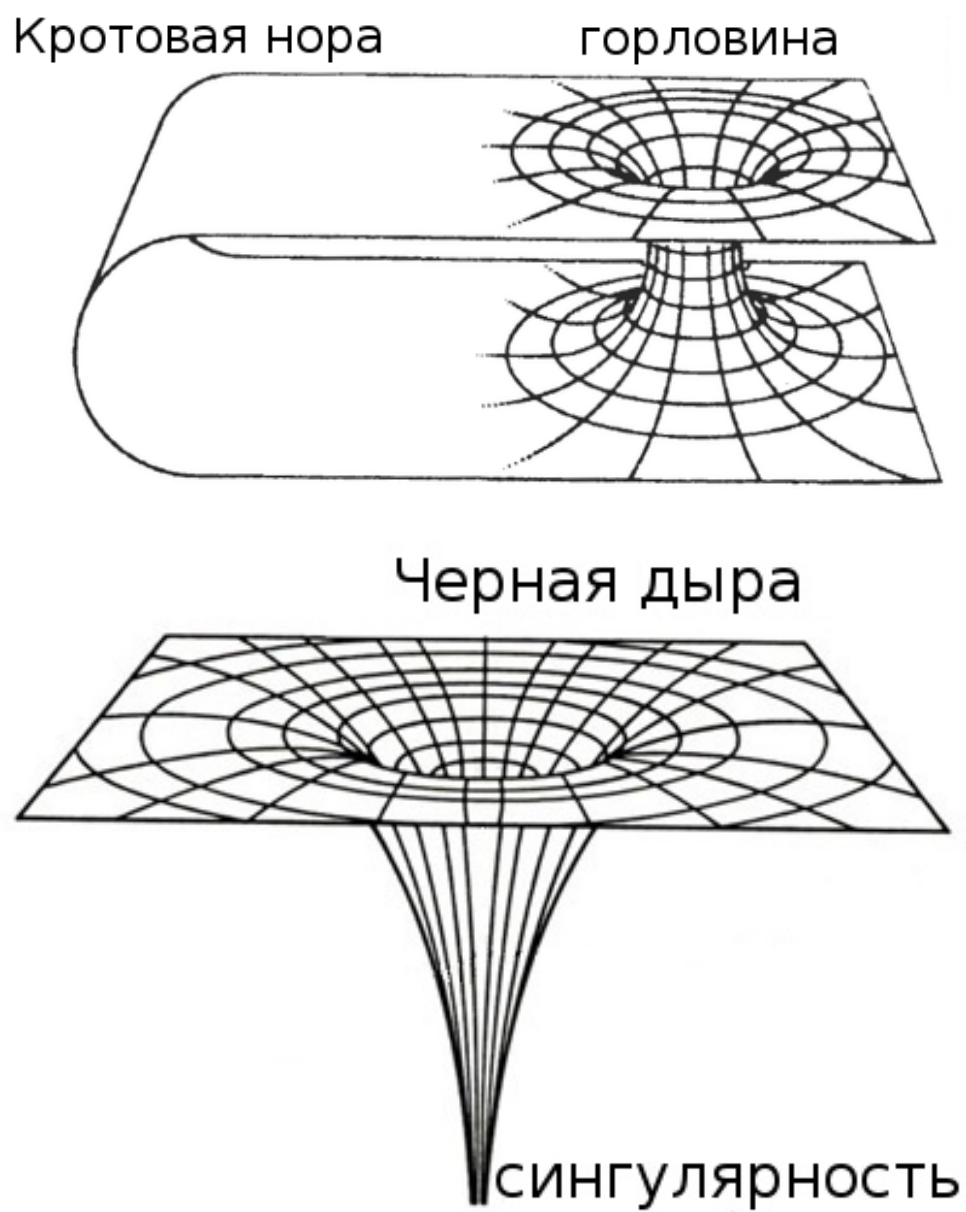


Рис. 7: Схематическое изображение отличия проходимой кротовой норы и черной дыры (непроходимой кротовой норы.).

влияет на геометрию кротовой норы и ее свойства, пространство-время будет соответствовать геометрии де Ситтера далеко от горловины кротовой норы. Решение, полученное в данной главе демонстрирует схожее поведение, однако отличается от решений [114, 115], т.к. роль экзотической материи играет скалярное поле.

Таким образом, на момент публикации результатов не известно других сферически-симметричных решений в теории БД с экспоненциальным потенциалом скалярного поля или в модели Элизалде и др.

5.2 Общие свойства

Уравнения Эйнштейна и Клейна–Гордона для действия (5.1) имеют вид

$$\alpha \mathcal{R} + \omega \alpha \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0 e^{\phi/\phi_0} \left(\alpha + \frac{1}{\phi_0} \right) + 2\omega \square \phi = 0, \quad (5.10)$$

$$G_{\mu\nu} = \omega \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_a \phi \partial^a \phi \right) + e^{-\alpha\phi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu e^{\alpha\phi} - g_{\mu\nu} \square e^{\alpha\phi} \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (5.11)$$

В ОТО существование сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна ограничивается теоремой Биркгофа, гласящей, что решение Шварцшильда является единственным сферически симметричным решением в вакууме. Для теории БД С. Хокингом была доказана аналогичная теорема [54], гласящая, что статическим сферически-симметричным решением в теории БД будет решение Шварцшильда с постоянным скалярным полем. Теорема Хокинга для теории БД часто понимается в том смысле, что в данной теории не может существовать других сферически-симметричных статических решений кроме решения Шварцшильда с постоянным скалярным полем. Однако это не совсем соответствует действительности. Например, решение Каманелли и Лусто [56] сферически-симметрично и статично, однако не совпадает со

шварцшильдовским. Выясним условия нарушения теоремы Хокинга.

Доказательство теоремы Хокинга опирается на положение об эквивалентности представлений Эйнштейна и Жордана и на тот факт, что соответствующее конформное образование определено везде. В работе [54] отмечено, что ключевыми для такого преобразования являются каноническая форма плотности кинетической энергии скалярного поля и выполнение слабого и нулевого условия энергодоминантности. Если конформное преобразование оказывается не определено на горизонте (как в работе Кампанелли и Лоусто) тогда его переменные $g_{E\mu\nu}, \phi_E$ не могут быть использованы на этой поверхности [55]. Этот факт нарушает доказательство теоремы Хокинга. Можно было бы, конечно, использовать представление Жордана вместо представления Эйнштейна. Но тогда скалярное поле в общем случае нарушает слабое и нулевое условия энергодоминантности, так как его тензор энергии–импульса имеет неканоническую форму за счет вторых производных по ϕ .

Обобщая вышесказанное можно сделать вывод, что если для скалярного поля в представлении Эйнштейна не выполняется слабое условие энергодоминантности или если скалярное поле в представлении Жордана расходится на горизонте (не определено конформное преобразование), то теорема Хокинга не выполняется и в модели возможны решения, отличные от решения Шварцшильда с постоянным скалярным полем. Дополнительные условия, использованные при доказательстве теоремы Хокинга [55] запишутся для нашей модели как $e^{\alpha\phi} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, что означает $\alpha\phi \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Выясним области параметров, обеспечивающие нарушение условий энергодоминантности в модели Элизалде и др. Уравнения поля в представлении Эйнштейна имеют вид:

$$G_{E\mu\nu} = \omega_E \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{E\mu\nu} \partial_a \phi \partial^a \phi \right) - \frac{1}{2} g_{E\mu\nu} \tilde{V}(\phi), \quad (5.12)$$

$$\omega_E \square_E \phi - \frac{1}{\phi_0} \tilde{V}(\phi) = 0, \quad \omega_E = 3\alpha^2 + 2\omega \quad (5.13)$$

Слабое условие энергодоминантности подразумевает, что для любого вре-

мениподобного вектора u , плотность материи, регистрируемая соответствующими наблюдателями всегда неотрицательна:

$$T_{\mu\nu}^{\phi} u^{\mu} u^{\nu} > 0. \quad (5.14)$$

Для скалярного поля тензор энергии-импульса соответствует величине в правой части уравнения (5.12). Выбирая для примера метрику в виде

$$ds_E^2 = e^{\nu_E} dt_E^2 - e^{v_E} dr_E^2 - r_E^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.15)$$

и четырех-скорость как $\tilde{u}^a = (e^{-\nu_E/2}, 0, 0, 0)$, запишем слабое условие энергодоминантности в виде

$$T_{tt}^{\phi} (u^t)^2 > 0, \quad (5.16)$$

что эквивалентно $T_{tt}^{\phi} > 0$. Откуда получим:

$$T_{tt}^{\phi} = -\frac{1}{2} g_{Ett} g_E^{rr} (\phi')^2 / \phi^2 - \frac{1}{2} g_{Ett} \tilde{V}(\phi) > 0, \quad (5.17)$$

Или, эквивалентно

$$\omega_E \phi'^2 / \phi^2 e^{-v_E} - \tilde{V}(\phi) \geq 0. \quad (5.18)$$

Это условие может в самом общем случае быть удовлетворено только при

$$\begin{aligned} V_{E0} &\leq 0, \\ 3\alpha^2 + 2\omega &> 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Таким образом, условие энергодоминантности (а, значит, и теорема Хокинга) нарушается когда нарушены неравенства (5.19). При нарушении этих условий в модели Элизалде и др. возможны решения, отличные от решения Шварцшильда. Наиболее распространенным типом сферически-симметричных решений в рамках теории БД являются решения типа кротовая нора. В работе [116] (для случая без потенциала скалярного поля) показано, что кротовые норы не являются решением модели если не

выполнено $\omega_E < 0$ (в принятых здесь обозначениях). Из уравнения (5.18) следует, что слабое условие энергодоминантности может быть нарушено также за счет потенциала и, в общем случае, не требуется настройка параметра $\omega_E < 0$ [116]. Далее в разделе 5.6 будет показано, что из наблюдательных данных для ППН-параметров модели следует $\omega_E < 0$ при отрицательных ω .

Перепишем уравнения поля в представлении Жордана в более удобном для дальнейших расчетов виде:

$$R_{\mu\nu} = \omega \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{-\alpha\phi} \nabla_\mu \nabla_\nu e^{\alpha\phi} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D e^{\phi/\phi_0}, \quad (5.20)$$

$$\left(\frac{2\omega}{\alpha} + 3\alpha \right) \square e^{\alpha\phi} = -V \left(\alpha - \frac{1}{\phi_0} \right) e^{\alpha\phi}, \quad (5.21)$$

$$D = V_0 \left[1 - \left(\alpha - \frac{1}{\phi_0} \right) \frac{\alpha}{2\omega + 3\alpha^2} \right]. \quad (5.22)$$

5.3 Предел слабого поля

Прежде чем приступить к исследованию конкретных решений модели для последующего сравнения предсказаний модели с наблюдениями необходимо исследовать предел слабого поля. Он описывает большинство наблюдаемых на сегодняшний день движений во Вселенной: движение планет и спутников, движение звезд в кратных системах и самосоглазованном потенциале галактики и т.п. Известные исключения составляют ближайшие окрестности черных дыр, поверхности нейтронных звезд и двойные пульсары. Строго говоря, движение пульсаров происходит в слабом гравитационном поле своего компаньона, однако, они, тем не менее, описывают и ОТО в режиме сильной гравитации (из-за сильных эффектов собственного поля [1]). Именно в пределе слабого поля (когда пространство почти плоское) для описания эффектов в гравитационном поле применим ППН-формализм, так как сходятся ППН-разложения теории. Получим предел слабого поля рассматриваемой модели для того, чтобы удостовериться, что модель содержит Ньютонову механику и

может корректно описывать все перечисленные движения. Также в пределе слабого поля вычислим асимптотическое значение скалярного поля.

Уравнение (5.20) в присутствии материи запишется в виде

$$R_{\mu\nu} = \omega \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu e^{\alpha\phi}}{e^{\alpha\phi}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D e^{\phi/\phi_0} + \frac{8\pi}{e^{\alpha\phi}} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{2\omega + 2\alpha^2}{2\omega + 3\alpha^2} \right) T^\mu_\mu \right], \quad (5.23)$$

В пределе слабого поля используем следующие предположения:

$$\phi = \phi_c + \psi(r), \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.24)$$

$$e^{\alpha\phi} \approx e^{\alpha\phi_c}, \quad \square e^{\alpha\phi} \approx e^{\alpha\phi_c} \alpha \square \psi, \quad (5.25)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, $h_{\mu\nu}$ — возмущение, ϕ_c — постоянное значение скалярного поля, ψ — небольшое отклонение, $|\psi/\phi_c| \ll 1$.

В первом порядке по возмущениям получим

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \psi + \eta_{\mu\nu} V_1 + 8\pi e^{-\alpha\phi_c} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \zeta T^\mu_\mu \right], \quad (5.26)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} e^{\phi_c/\phi_0} D, \quad \zeta = \left(\frac{2\omega + 2\alpha^2}{2\omega + 3\alpha^2} \right). \quad (5.27)$$

С другой стороны имеем

$$2R_{\mu\nu}^{(1)} = \square h_{\mu\nu} + h_{\kappa,\mu,\nu}^\kappa - h_{\mu,\kappa,\nu}^\kappa - h_{\nu,\kappa,\mu}^\kappa \quad (5.28)$$

Мы можем применить следующую калибровку, которая сводится к так называемой гармонической координатной калибровке при $\phi = Const$:

$$h_{\kappa,\mu,\nu}^\kappa - h_{\mu,\kappa,\nu}^\kappa - h_{\nu,\kappa,\mu}^\kappa = -2\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \quad (5.29)$$

Уравнение (5.26) упрощается

$$\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}V_1 + 8\pi e^{-\alpha\phi_c} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\zeta T_{\mu}^{\mu} \right] \quad (5.30)$$

Рассмотрим пространство–время, создаваемое точечным источником массы M . Тензор энергии–импульса такой конфигурации имеет вид:

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(M\delta(r), 0, 0, 0), \quad T_{\mu}^{\mu} = M\delta(r) \quad (5.31)$$

Возмущение метрики запишется в виде

$$\square h_{00} = 2V_1 + 16\pi e^{-\alpha\phi_c} \frac{\omega + 2\alpha^2}{2\omega + 3\alpha^2} M\delta(r) \quad (5.32)$$

$$h_{00} = -\frac{2G_0M}{r} + \frac{V_1r^2}{3}, \quad (5.33)$$

$$G_0 = e^{-\alpha\phi_c} \frac{2\omega + 4\alpha^2}{2\omega + 3\alpha^2}. \quad (5.34)$$

Теперь мы можем записать компоненту метрики в пределе слабого поля:

$$g_{00} = 1 - \frac{2G_0M}{r} + \frac{V_1r^2}{3}. \quad (5.35)$$

Этот результат согласуется с «классической» переформулировкой теории БД (5.9). Здесь G_0 играет роль эффективной гравитационной постоянной. Это решение переходит в классическое решение теории БД слабого поля при $\alpha = 1, \varphi = e^{\phi}, V_0 = 0$. Сравнивая выражение (5.35) с метрикой Шварцшильда–де Ситтера

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \quad (5.36)$$

можно заключить, что V_1 (а, значит, и потенциал, так как $V_1 \sim V_0$) играет в метрике роль космологической постоянной.

Такая структура метрики в пределе слабого поля указывает на то, что при соответствующих предположениях о потенциале модель может соответствовать ОТО и описывать наблюдаемые движения небесных объ-

ектов. Далее этот вывод будет подкреплён результатами численных расчётов.

5.4 Аналитическое решение

Для уравнений (5.20) можно получить несколько аналитических решений, однако они существуют лишь при определенных фиксированных значениях параметров модели или в определенной области пространства. В данном разделе получены такие решения, однако общее аналитическое решение остается неизвестным. В разделе 5.7 приведено исследование численных решений.

Итак, если $D = 0$, или, что то же самое

$$\phi_0 = -\frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \omega)}, \quad (5.37)$$

уравнение (5.20) совпадает со случаем отсутствия потенциала, и мы получим хорошо известное решение Агнеше и Ла Камера [5].

В наших обозначениях оно запишется в виде

$$ds^2 = \Delta(r)^m dt^2 - \Delta(r)^{-n} dr^2 - \Delta(r)^{1-n} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.38)$$

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2\mu}{r} \quad \mu = M\sqrt{(1+\gamma)/2} \quad (5.39)$$

$$\phi = \frac{n-m}{2\alpha^2} \ln \left[F \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) \right], \quad (5.40)$$

$$m = \sqrt{2/(1+\gamma)}, \quad n = \gamma\sqrt{2/(1+\gamma)}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\omega}{\alpha^2} = \frac{m-2n}{n-m}, \quad G = e^{-\alpha\phi} \frac{2}{1+\gamma}, \quad (5.42)$$

где γ — ППН-параметр, константа F может быть получена из ньютоновского предела. Сравнивая (5.34) с (5.40) для больших расстояний можем

записать

$$\phi_\infty = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 - 2\omega + 4\alpha^2}{G_0 2\omega + 3\alpha^2} \right), \quad (5.43)$$

$$F = \left(\frac{1 - 2\omega + 4\alpha^2}{G_0 2\omega + 3\alpha^2} \right)^{\frac{2\alpha}{n-m}} \quad (5.44)$$

Решение соответствует голой сингулярности при $\gamma < 1$, решению Шварцшильда при $\gamma = 1$ и кротовой норе при $\gamma > 1$. Скалярное поле расходится, что является причиной нарушения теоремы Хокинга. Множитель $\sqrt{(1+\gamma)/2}$ обычно относится на счет определения массы, что соответствует поправке порядка 10^{-6} для $|\gamma - 1| \sim 10^{-5}$.

Стоит отметить, что условие $D = 0$ сохраняет член с потенциалом в действии, но эффективно убирает его из уравнений поля. Если принять, что потенциал играет роль космологической постоянной, можно заключить что ускоренное расширение Вселенной совершенно не проявляется на астрономических масштабах и не вносит никакого вклада в локальную динамику. Это принципиальный результат, никак не связанный с малостью космологической постоянной.

Для степенного обобщения метрики Шварцшильда (5.38) уравнения (5.21) могут быть решены только при $m = n$, что ведет к $D = 0$. Таким образом, для вида метрики (5.38) единственным решением модели оказывается АК.

Другое решение можно получить, если предположить, что далеко от рассматриваемого объекта мы имеем метрику Шварцшильда.

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{v(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.45)$$

$$\nu = \ln(1 - r_h/r) \quad v = -\ln(1 - r_h/r). \quad (5.46)$$

В результате имеем систему уравнений:

$$\alpha r^2 \phi'' + r^2(\omega + \alpha^2)\phi'^2 - r(\nu' + v') = 0, \quad (5.47)$$

$$e^v + \frac{1}{2}r(v' + \nu') + \frac{1}{2}r^2\nu'' + \frac{1}{4}r^2\nu'^2 - \frac{1}{4}r^2\nu'v' - 1 = 0, \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2}r^2\phi'^2 - \alpha r^2 \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - v'}{2} \right) \phi' + e^v - r\nu' - 1 + \\ + \frac{1}{2}r^2V_0e^{\phi/\phi_0}e^v = 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Уравнение (5.47) можно проинтегрировать, что даст в результате

$$\phi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \ln |r + C_1| + C_2, \quad r \neq -C_1 \quad (5.50)$$

Имея ввиду (5.9), можно утверждать, что G является убывающей функцией r

$$G \sim (r + C_1)^{-\frac{1}{1+\omega^2/\alpha^2}}. \quad (5.51)$$

Чтобы оценить константы в (5.51) нужно сравнить решение с ньютоновским пределом, другими словами — линеаризовать его. Скаляр ϕ неограниченно возрастает с ростом r , так что формально решение можно линеаризовать как $\phi = \phi_c + \psi$ только в области $\left| \frac{r}{C_1} \right| < 1$ где существует разложение логарифма в ряд Тэйлора. В таком случае, константа C_1 имеет смысл масштаба расстояний, на которых решение демонстрирует Ньютоново поведение.

Очевидно следующее условие, необходимое для соответствия решения наблюдательным данным: $|\omega| \gg |\alpha|$, что делает степень r достаточно малой. Это гарантирует, что ϕ не будет сильно меняться в пространстве, а изменения его с расстоянием будут становиться все меньше. Это условие также можно согласовать с (5.60). Пространство-время является асимптотически плоским, а гравитационная постоянная исчезает на пространственной бесконечности.

Наблюдательное обнаружение данного решения (в предположении,

что оно реализуется в природе), оказывается сложным, так как метрика в точности соответствует решению Шварцшильда. Единственное проявление — уменьшение с расстоянием эффективной гравитационной постоянной. Можно предположить, что для астрономических масштабов этот эффект обнаружить не удастся, так как он просто повлияет на определение величины масс астрономических объектов, так как точные измерения масс производятся как правило по орбитальному движению объектов. В таком случае медленно уменьшающаяся гравитационная постоянная приведет к тому, что объекты будут казаться все менее массивными по мере удаления друг от друга. Такая ситуация противоречит феномену «темной материи», если предположить, что этот феномен не связан с реальным веществом. При четком указании на отсутствие реального изменения массы объектов, можно, вероятно, судить о релевантности данного решения по большим рядам наблюдений кратных систем.

Рассмотрим далее наблюдательные характеристики решения АК (5.38), ранее не изученные в литературе: поправки к закону всемирного тяготения.

5.5 Модификация закона всемирного тяготения

Ранее мы получили в рамках модели Элизалде и др. аналог решения Агнеше и Ла Камера. Продолжим исследование предела слабого поля модели рассмотрением поправок к Ньютоновскому потенциалу для метрики АК. Большинство расширенных теорий гравитации предсказывают модификации закона всемирного тяготения Ньютона, поэтому ведутся активные экспериментальные исследования в данном направлении. Модификация гравитационного потенциала могла бы быть заметна в смещении частоты сигналов космических аппаратов относительно приемников на Земле, изменению орбиты Луны и т.п. Для решения АК ранее не были исследованы структура и влияние поправок к гравитационному потенциалу на наблюдательные данные, поэтому такое рассмотрение является актуальным.

Степенная поправка к закону обратных квадратов Ньютона (далее

ЗН) имеет в общем случае следующий вид:

$$\mathfrak{B}(r) = \frac{G_0 M}{r} \left[1 + a_N \left(\frac{\eta}{r} \right)^{N-1} \right]. \quad (5.52)$$

Здесь η, N, a_N — постоянные параметры. Раскладывая величину g_{00} решения АК в ряд и переходя к физическим единицам получим

$$\mathfrak{B}(r) = \sqrt{\frac{2}{1+\gamma} \frac{\eta c^2}{r}} \left[1 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \right) \frac{\eta}{r} \right] = \frac{G_0 M}{r} \left[1 + a_2 \frac{\eta}{r} \right], \quad (5.53)$$

$$a_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \right), \quad \eta = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{M G_0}{c^2}. \quad (5.54)$$

для $N = 2$.

Стоит упомянуть интересную работу [117]. Авторы пытаются найти ограничения на степенные поправки к ЗН, используя данные эфемерид INPOP10a (IMCCE, Франция) и EPM2011 (IAA RAS, Россия) для смещения перигелия тел Солнечной Системы. Поправка рассматривается как малое возмущение, решение получено путем минимизации квадратов отклонений. Точность квадрупольного момента Солнца оценивается наряду с параметрами поправки. Результат для показателя степени оказывается $N = 0.605$. Однако, из данных только EPM2011 получается величина $N = 3.001$, при этом оценка неопределенности в квадрупольном моменте Солнца оказывается намного больше наблюдаемого значения $\pm 10\%$. Таким образом, на сегодняшний день нет точных данных, которые указывали бы на конкретный вид поправки ЗН.

Нас интересует случай $\gamma > 1$, то есть $a_2 > 0$. Заметим также, что величина поправки зависит от массы объекта, создающего потенциал. Наземные эксперименты [118, 119, 120] устанавливают следующие пределы 1σ для степенной поправки к ЗН

$$N = 2 \quad a_N \eta^{N-1} < 1.3 \times 10^{-6} [\text{м}]. \quad (5.55)$$

Для условий эксперимента [119] можно сделать следующую оценку:

$$a_2\eta = \frac{MG_0}{c^2} \left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} - 1 \right) = \left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} - 1 \right) \times 10^{-16} = \varepsilon \times 10^{-16}. \quad (5.56)$$

здесь ε – величина, зависящая от параметров модели, а не условий наблюдения или эксперимента. Вместе с (5.55) это приводит к $\varepsilon < 10^{10}$. Для значения ППН-параметра $|\gamma - 1| < 2.5 \times 10^{-5}$ можем оценить $\varepsilon < 2.5 \times 10^{-6}$, это существенно более строгое ограничение. Данный результат означает, что точность наземных экспериментов по проверке ЗН необходимо увеличить как минимум на 16 порядков, чтобы приблизиться к величинам, разрешенным по результатам астрономических наблюдений. Более интересным может оказаться случай движения в поле Земли или Солнца, так как характерные массы гораздо больше $M_\odot \sim 10^{30}$ кг, $M_\oplus \sim 10^{24}$ кг.

Следуя изложению [121] можно оценить относительный сдвиг частоты сигнала космического аппарата $(\Delta f/f)_p$ для рассматриваемого потенциала (5.53) и наложить ограничения на поправку, используя относительную точность измерения частот сигналов радиосвязи системы спутниковой навигации Галилео (GNSS)¹⁸.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta f}{f} \right)_p &\approx \frac{M_\oplus G_0}{c^2} a_2 \eta \left(\frac{1}{R_\oplus^2} - \frac{1}{(R_\oplus + h)^2} \right) = \\ &= \frac{M_\oplus^2 G_0^2}{c^4} \varepsilon \left(\frac{1}{R_\oplus^2} - \frac{1}{(R_\oplus + h)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Учитывая точность измерения частоты $\varepsilon_{f_r} = 10^{-12}$ для системы GNSS, аналогично (5.56) имеем

$$\frac{\Delta f}{f} \approx 5\varepsilon \times 10^{-13} < \varepsilon_{f_r}. \quad (5.58)$$

¹⁸ $h = 23.222 \times 10^3$ км

Результатом будет ограничение $\varepsilon < 2$, также существенно более слабое, чем ограничение на основе ППН-разложения.

5.6 Оценка параметров модели

Перед проведением численного исследования решений выполним оценку параметров модели. В работе [4] получено ограничение, возникающее из требования ускоренного расширения Вселенной:

$$\phi_0^2 > \frac{4}{3\alpha^2 + 2\omega}. \quad (5.59)$$

Для $|\omega| \gg |\alpha^2|$, $\omega < 0$ это ограничение выполняется всегда и согласуется с (5.37). Применительно к полученному выше решению АК это означает, что это решение может представлять собой кротовую нору, вложенную в расширяющееся пространство, но не затронутую этим расширением.

Другое ограничение можно получить с помощью ППН-разложения теории модели. Наблюдательное ограничение на значение ППН-параметра [3] $\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ получено из данных наблюдения космического аппарата Кассини. Смысл такого ограничения состоит в том, чтобы в пределе слабого поля (предел применимости ППН-разложения) дополнительные члены в уравнениях не вносили в гравитационный потенциал наблюдаемых изменений на масштабах Солнечной Системы. Следуя изложению [122] определим ППН-параметры γ и \mathfrak{B} :

$$\gamma - 1 = -\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + \omega}, \quad \mathfrak{B} - 1 \equiv 0 \quad (5.60)$$

При $|\omega| \gg |\alpha^2|$, учитывая $|\gamma - 1| < 10^{-5}$ получим

$$\frac{\alpha^2}{|\omega|} < 10^{-5}. \quad (5.61)$$

Это выражение не согласуется с условием отсутствия в модели «духов» (5.4) для отрицательных ω . Отсюда можно сделать вывод, что модель можно согласовать с астрономическими данными только в секторе, содержащем поле «духов». Это не является серьезным аргументом против

данной модели в свете соображений, высказанных в разделе 2.3.

Значение константы V_0 можно зафиксировать, потребовав, чтобы член с потенциалом в действии переходил в космологическую постоянную при $r \rightarrow \infty$ если значение скалярного поля при этом стремится к постоянному $\phi \rightarrow \phi_\infty$, соответственно

$$V_0 = 2\Lambda e^{-\phi_\infty/\phi_0}, \quad \phi_\infty = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{G_0} \frac{2\omega + 4\alpha^2}{2\omega + 3\alpha^2} \right], \quad (5.62)$$

где $\Lambda = 10^{-29} \text{Г/см}^3$ — космологическая постоянная. Асимптотическое значение скалярного поля получено из ньютоновского предела (5.34) и определяется величиной эффективной гравитационной постоянной.

5.7 Численное исследование

Для поиска численных решений возьмем метрику в виде

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta} dr^2 - R(r)^2 d\Omega^2. \quad (5.63)$$

Без ограничения общности положим $\sigma = 1$, это соответствует переопределению радиальной координаты. Из уравнения (5.21) получим систему, разрешенную относительно старших производных, которую и будем решать:

$$\Delta''(r) = \frac{DR(r)e^{\frac{\phi(r)}{\phi_0}} - 2\Delta'(r)R'(r)}{R(r)}, \quad (5.64)$$

$$R''(r) = \frac{-2R(r)\Delta'(r)R'(r) - 2\Delta(r)R'(r)^2 + DR(r)^2e^{\frac{\phi(r)}{\phi_0}} + 2}{2\Delta(r)R(r)}, \quad (5.65)$$

$$\phi''(r) = -\frac{(\alpha^2 + \omega)\phi'(r)^2}{\alpha} + \frac{2(\Delta(r)R'(r)^2 - 1)}{\alpha\Delta(r)R(r)^2} - \frac{DR(r)e^{\frac{\phi(r)}{\phi_0}} - 2\Delta'(r)R'(r)}{\alpha\Delta(r)R(r)}. \quad (5.66)$$

В рассмотрении нам интересны астрономические объекты, такие как двойные системы нейтронных звезд. Характерный масштаб масс для та-

ких объектов - порядка массы Солнца, поэтому мы примем в дальнейшем рассмотрении именно это значение массы.

Значение константы V_0 можно зафиксировать, потребовав, чтобы член с потенциалом в действии переходил в космологическую постоянную при $r \rightarrow \infty$ если значение скалярного поля при этом стремится к постоянному $\phi \rightarrow \phi_\infty$, соответственно

$$V_0 = 2\Lambda e^{-\phi_\infty/\phi_0}, \quad \phi_\infty = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{G_0} \frac{2\omega + 4\alpha^2}{2\omega + 3\alpha^2} \right], \quad (5.67)$$

где $\Lambda = 10^{-29} \text{Г/см}^3$ — космологическая постоянная. Асимптотическое значение поля определим из (5.34). В качестве граничных условий возьмем решение АК. Обобщая известные нам ограничения напишем: $\omega < 0$ (регулярное решение АК), $\alpha^2 < 10^{-5}|\omega|$ (ППН). Для упрощения зафиксируем параметры $\omega = -10000$, $\alpha = 0.1$, $M = M_\odot$. Величины ω и α в рассматриваемых диапазонах приводят к нарушению слабого энергетического условия, следовательно, решение может представлять собой проходимость кротовую нору. На рис. 8 показано, что численное решение соответствует кротовой норе, вложенной во вселенную dS. Возле горловины доминирует геометрия кротовой норы, тогда как при удалении от горловины проявляется геометрия dS.

При увеличении ϕ_0 (соответствует уменьшению вклада потенциала) геометрия решения приближается к решению Шварцшильдаи отличается от последнего очень слабо уже при $\phi_0 > 25$. Для интервала значений $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ решение описывает кротовую нору в пространстве dS. При понижении ϕ_0 (соответствует усилению вклада потенциала) пространство время все больше приближается к решению dS. Для значений $\phi_0 \lesssim 22.7$ горловина кротовой норы не формируется (см. рис. 9). Решение dS описывает расширяющуюся Вселенную. Решение кротовой норы описывает астрономический объект. Таким образом, полученное численное решение может описывать как астрономические, так и космологические масштабы.

Рисунки 11 и 12 демонстрируют, что численное решение является ана-

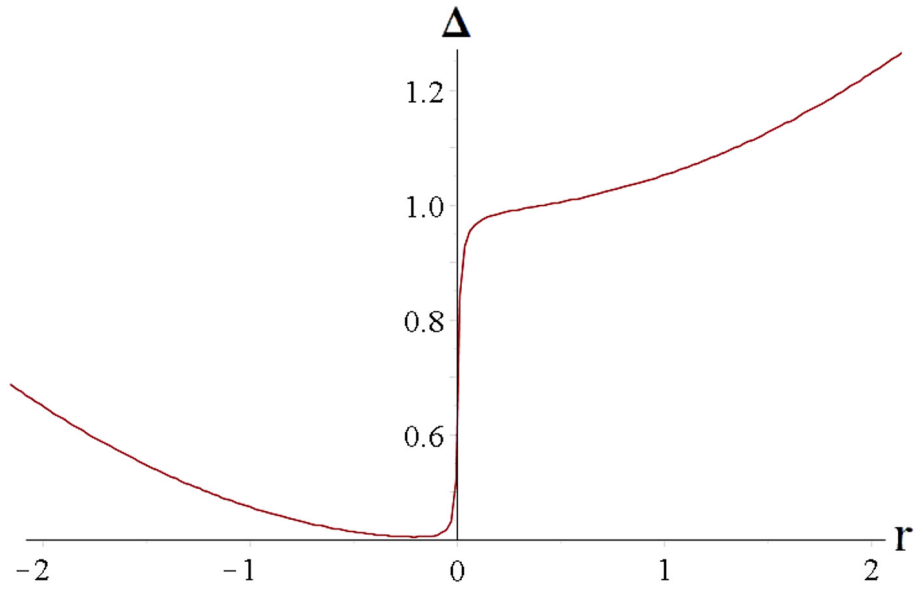


Рис. 8: Численное решение соответствует кротовой норе, вложенной во вселенную dS ($\phi_0 = 24.5$). Возле горловины доминирует геометрия кротовой норы, тогда как при удалении от горловины проявляется геометрия dS.

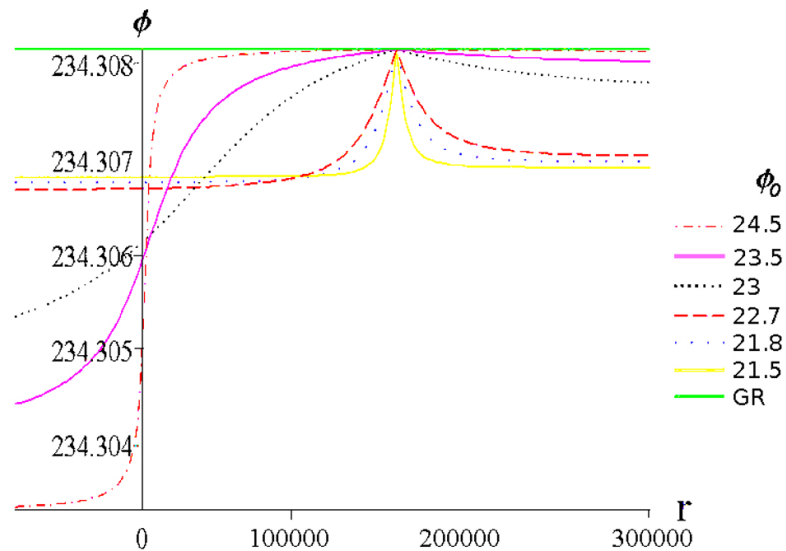


Рис. 9: При понижении ϕ_0 (соответствует усилению вклада потенциала) пространство время все больше приближается к решению dS. Для значений $\phi_0 \lesssim 22.7$ горловина кротовой норы не формируется (см. рис. 9). Решение dS описывает расширяющуюся Вселенную. Решение кротовой норы описывает астрономический объект. Таким образом, полученное численное решение может описывать как астрономические, так и космологические масштабы.

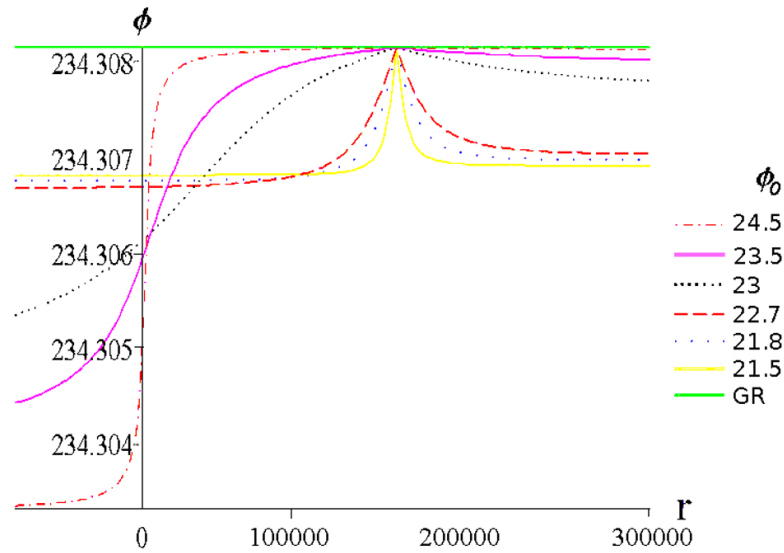


Рис. 10: Зависимость скалярного поля от радиальной координаты.

логом решения Шварцшильда–де Ситтера для геометрии кротовой норы. Возле горловины доминирует геометрия кротовой норы (рис. 11), при увеличении расстояния доминирует геометрия dS (рис. 12). При этом наличие геометрии кротовой норы зависит от ϕ_0 . Пороговое значение ϕ_0 при котором проявляется геометрия кротовой норы составляет приблизительно $\bar{\phi}_0 = 22.7$ (см. рис. 11).

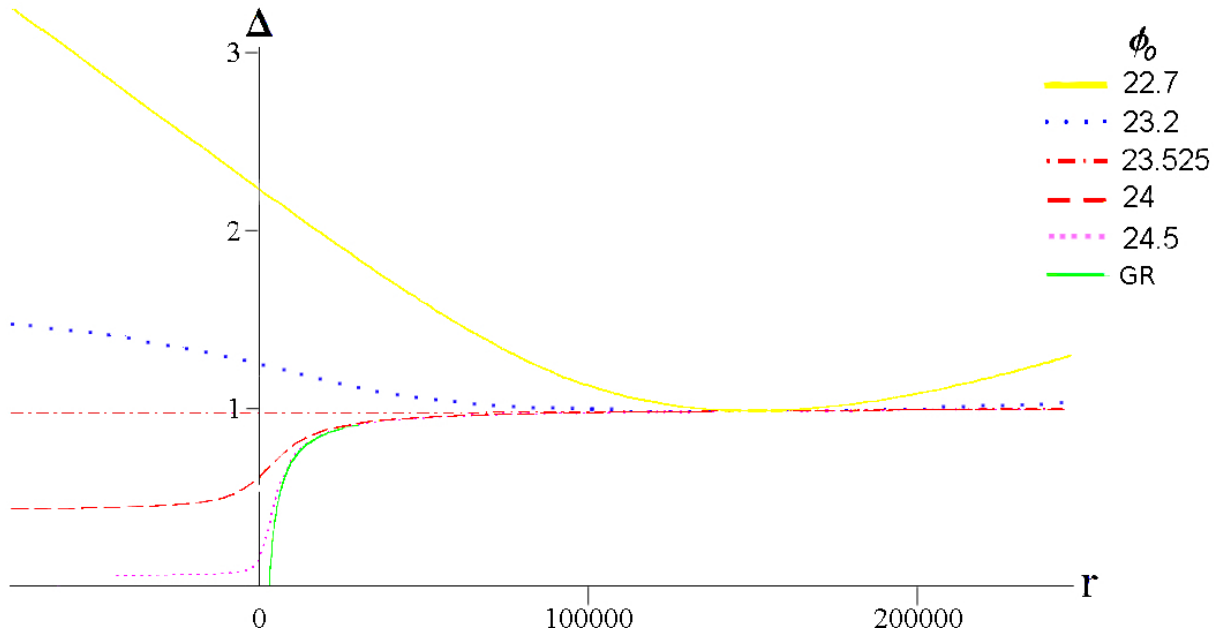


Рис. 11: Пороговое значение ϕ_0 при котором проявляется геометрия кротовой норы составляет приблизительно $\bar{\phi}_0 = 22.7$.

Решения, демонстрирующие схожее поведение были рассмотрены в

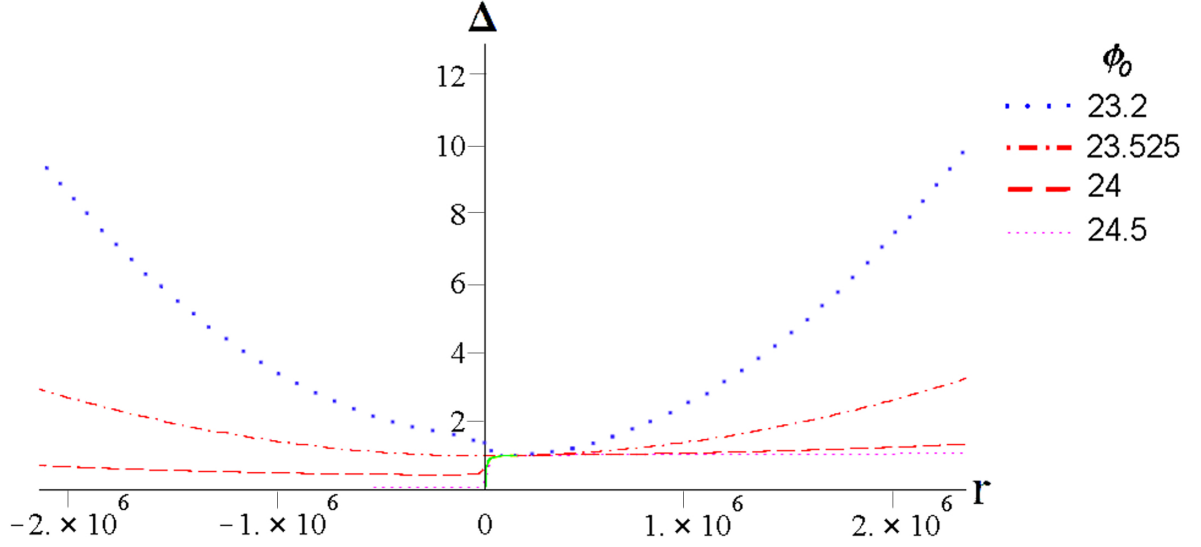


Рис. 12: решение является аналогом решения Шварцшильда–де Ситтера для геометрии кротовой норы. Возле горловины доминирует геометрия кротовой норы (рис. 11), при увеличении расстояния доминирует геометрия dS (рис. 12). При этом наличие геометрии кротовой норы зависит от ϕ_0 .

работах [114, 115]. Статьи [114, 115] рассматривают модели ОТО с экзотической материей и космологической постоянной Λ . Космологическая постоянная влияет на геометрию кротовой норы аналогично тому, как влияет потенциал скалярного поля в рассматриваемом численном решении. Таким образом, наши результаты находятся в согласии с [114, 115], однако роль экзотической материи играет скалярное поле.

Запишем метрику в следующей форме и найдем численное решение заново:

$$ds^2 = e^{2P(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega^2 . \quad (5.68)$$

Интервал (5.68) для фиксированного момента времени запишется как

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega^2 . \quad (5.69)$$

Здесь $b(r)$ называется функцией формы. Рассмотрим трехмерное пространство в цилиндрических координатах

$$ds^2 = -dz^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (5.70)$$

Уравнение пространственно сечения в цилиндрических координатах задается уравнением $z(r)$, то есть можно записать

$$ds^2 = - \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 - r^2 d\Omega^2 . \quad (5.71)$$

С помощью численных данных для функции формы $b(r)$ можем построить пространственно-подобное сечение $z(r)$ [114]

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} . \quad (5.72)$$

Чтобы соответствовать решению кротовой норы, геометрия должна иметь минимальное значение радиальной координаты $r_0 = b(r_0)$, т.е. горловину, в которой сечение $z(r)$ вертикально: $dz = dr \rightarrow \infty$ (см. рис. 13). Численные расчеты показывают, что при $\phi_0 = 24.5$ горловина имеет

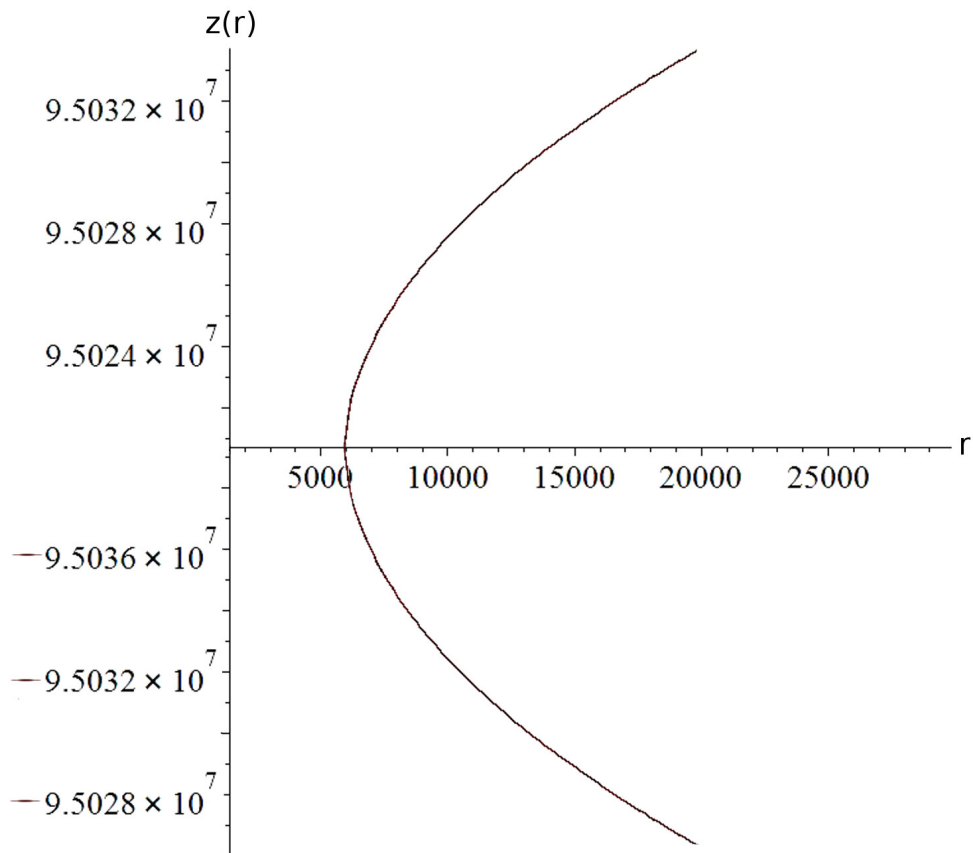


Рис. 13: Пространственно-подобное сечение вертикально: $dz/dr \rightarrow \infty$ в горловине кротовой норы, график построен для $\phi_0 = 24.5$.

радиус около $r = 5927\text{м}$, что достаточно для того, чтобы через горловину мог пройти макроскопический объект. Соответствующее значение для решения АК составляет $r = 3014\text{м}$, т.е. потенциал скалярного поля оказывает существенное влияние.

Важной геометрической характеристикой решения является радиус последней стабильной орбиты — на этом значении радиуса обрывается аккреционный диск, что можно наблюдать визуально. Отличие численного решения от геометрии Шварцшильда на значениях радиуса около последней стабильной орбиты $r = 6\eta$ составляет:

$$\Delta_{num}/\Delta_{schw} \approx 1.031 \quad \phi_0 = 24.5, \quad (5.73)$$

$$\Delta_{num}/\Delta_{schw} \approx 1.471 \quad \phi_0 = 23.5. \quad (5.74)$$

Это довольно большое отличие, оно указывает на потенциально сильные модификации орбит небесных объектов и картины аккреции в рассматриваемой геометрии относительно решения Шварцшильда. Следовательно, для отсутствия противоречий с наблюдательными данными необходимо наложить дополнительные ограничения на ϕ_0 . Такие ограничения можно установить с помощью наблюдения кандидатов в черные дыры и анализа движения вещества в аккреционном диске, с помощью данных радиосвязи с космическими аппаратами, данных о прецессии перигетриев орбит планет и т.п. Однако, для количественного исследования этого вопроса необходима аналитическая форма решения. Стоит отметить, что существуют некоторые наблюдательные указания на возможное несоответствие геометрии Шварцшильда компактного объекта Sgr A в центре нашей галактики. В работе Доелемана и др. [97] утверждается, что видимый размер источника меньше, чем ожидаемый по предсказаниям ОТО для черной дыры с параметрами источника Sgr A. В случае подтверждения этого результата другими методами это можно рассматривать как указание на наличие отклонений от ОТО.

Определим значения параметров, которые приводят к геометрии черной дыры, кротовой норы или голой сингулярности. Для этого рассмотрим, как ведет себя скалярный инвариант кривизны Кречмана и метри-

ческая функция Δ для различных комбинаций параметров. Скалярный инвариант Кречмана имеет вид

$$K = \frac{\Delta''^2 R^4 + 4R'^2 \Delta'^2 R^2 + 8R^2 R' \Delta' R'' \Delta + 8R^2 R''^2 \Delta^2}{R^4} + \frac{4R^4 \Delta^2 - 8\Delta R'^2 + 4}{R^4}.$$

Нам необходимо различить случаи кротовой норы и голой сингулярности. Исследование графиков скалярного инварианта Кречмана для различных комбинаций значений параметров (см. рис. 14) и метрической функции Δ (5.63) показывает, что только интервал $\omega < 0$, $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ соответствует регулярному решению: скаляр Кречмана конечен для всех значений r . Этот диапазон значений ϕ может соответствовать проходимой кротовой норе, в других случаях появляется голая сингулярность или решение dS.

Принцип космической цензуры утверждает, что голые сингулярности не должны возникать в природе. В контексте исследования кротовых нор голые сингулярности можно интерпретировать как непроходимые кротовые норы, так что они представляют весьма ограниченный интерес. Однако, в настоящее время принцип космической цензуры по-прежнему остается не доказанным, так что многие исследователи рассматривают голые сингулярности как кандидаты в астрономические объекты [15, 16]. В данной работе рассмотрение ограничено регулярными решениями.

5.8 Выводы к главе 5

В этой главе исследованы аналитические и численные свойства статических сферически-симметричных решений в контексте космологической модели Бранса-Дикке с потенциалом, предложенной Элизалде и др [4]. Для значений параметров $\omega < 0$, $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ модель описывает геометрию кротовой норы. Структура пространства-времени напоминает решение Шварцшильда-де Ситтера, описывая кротовую нору на фоне пространства dS.

Изначально модель [4] имела четыре свободных параметра, имелось

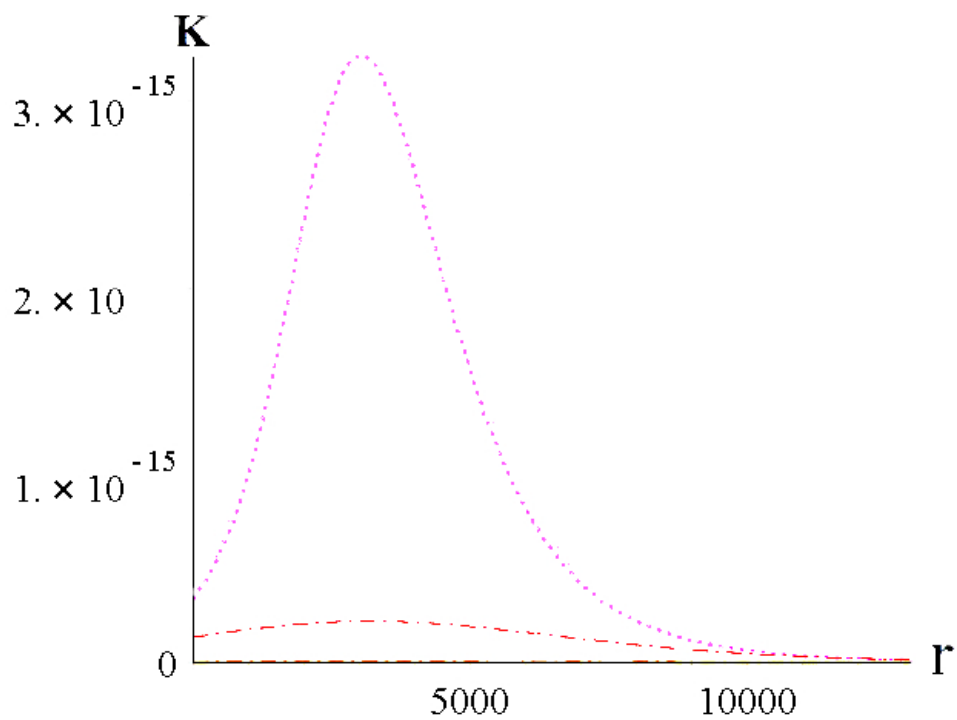


Рис. 14: Исследование графиков скалярного инварианта Кречмана для различных комбинаций значений параметров (см. рис. 14) и метрической функции Δ (5.63) показывает, что только интервал $\omega < 0, 22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ соответствует регулярному решению: скаляр Кречмана конечен для всех значений r . Этот диапазон значений ϕ может соответствовать проходимой кротовой норе, в других случаях появляется голая сингулярность или решение де Ситтера.

одно ограничение (5.59) для ϕ_0 . Приведенное выше рассмотрение позволило оценить значение V_0 с помощью величин космологической постоянной и гравитационной постоянной (5.67), уменьшив тем самым число свободных параметров. Также были наложены ограничения (5.61) на α и ω . В сумме ограничения (5.59), (5.61) и (5.67), а также данные численного интегрирования существенно сужают допустимые области значений параметров модели.

Показано, что в свете ограничений (5.59), (5.61) и (5.67) модель приводит к геометрии кротовой норы или голой сингулярности. Далее, поскольку численное решение может повторять геометрию Шварцшильда и Агнеше и Ла Каемра вне горизонта, модель [4] может быть согласована с имеющимися астрономическими данными, так как согласие данных решений с наблюдательными данными было ранее показано в литературе. Таким образом, модель можно успешно применять как на космологических, так и на астрономических масштабах и корректно описывать движение планет и космических аппаратов в небесной механике. Тем не менее, отличия от геометрии Шварцшильда могут быть весьма существенны, так что, зная аналитическую форму решения, можно было бы получить дополнительные ограничения на ϕ_0 . Численное интегрирование не позволяет достаточно полно исследовать все возможные диапазоны значений параметров, таким образом вероятно, что полученное решение является не единственным возможным в данной модели.

Ограничение (5.61), полученное на основе ППН-разложения модели не согласуется с условием (5.4) отсутствия в модели «духов» для $\omega < 0$. Отсюда можно сделать вывод, что модель можно согласовать с астрономическими данными только в секторе, содержащем поле «духов». Это не является серьезным аргументом против данной модели в свете соображений, высказанных в разделе 2.3.

Определена поправка к величине гравитационного потенциала для решения АК [5]. Исследован вопрос о возможности наблюдения этой поправки с помощью наземных экспериментов по проверке ЗН и с помощью измерения сдвига частоты для системы спутниковой навигации Галилео. Показано, что точность экспериментов необходимо существенно увели-

чить, чтобы приблизиться к разрешенному астрономическими данными диапазону.

Показано, что решение АК может представлять собой кротовую нору, вложенную в расширяющуюся вселенную, но не затронутую этим расширением.

Можно утверждать, что теория БД может описывать широкий спектр наблюдаемых явлений (от космологического расширения до движения планет и аккреции вещества), хорошо согласуется с наблюдательными данными космологии небесной механики и астрометрии, и является одним из лучших кандидатов на роль теории, расширяющей ОТО.

6 Заключение

6.1 Выводы

В качестве выводов приводим положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что картина движения пробных частиц в поле тяготения (картина геодезических линий) для решения типа «черная дыра» в модели Рэндал–Сандрума с однойбраной, предложенного в работе Дадича и др. [2], не отличается (с наблюдательной точки зрения) от ОТО для астрономических масс. Показано, что данное решение не противоречит наблюдательным данным и не предсказывает появления каких-либо принципиально новых эффектов при выполнении ограничения на значение приливного заряда $|q| \ll M_{\odot}^2 G^2 / c^4$. Сделан вывод о том, что модель можно применять на астрономических масштабах при рассмотрении аккреции и движения объектов в небесной механике (публикации № 1,6,8,9).
2. Получено решение в модели Бранса–Дикке с космологической постоянной для плоской Вселенной для отрицательных значений параметра теории ω . Составлен космологический сценарий, в ходе которого масштабный фактор не обращается в нуль при рассмотрении эволюции назад во времени — возникает «отскок» масштабного фактора, все функции при этом остаются регулярными. Такое поведение исключает наличие у Вселенной в прошлом начальной космологической сингулярности. Получено ограничение на значение параметра теории: $|\omega| > 10^{40}$ — существенно более строгое, чем современное экспериментальное ограничение. Таким образом, показано, что теория Бранса–Дикке с Λ -членом хорошо описывает имеющиеся на сегодняшний момент наблюдательные данные и может не содержать начальной космологической сингулярности (публикации № 2,4,5).
3. Показано, что в модели Бранса–Дикке с потенциалом скалярного поля, предложенной Элизалде и др. в работе [4] для значений параметров $\omega < 0$, $22.7 \lesssim \phi_0 \lesssim 25$ возможно существование регулярного решения типа «кротовая нора», способного описывать реаль-

ные астрономические объекты. Решение получено численно, показано, что оно может соответствовать решению Шварцшильда (т.е. наблюдательным данным). Структура решения на больших масштабах соответствует пространству де Ситтера, тогда как на малых масштабах структура решения соответствует кротовой норе. Показано, что геометрия пространства–времени полученного решения может существенно отличаться от геометрии Шварцшильда: $\Delta_{num}/\Delta_{schw} \approx 1.471$ для значения параметра $\phi_0 = 23.5$. Показано, что условие положительно определенной кинетической энергии скалярного поля $3\alpha^2/2 + \omega > 0$, предложенное Элизаде и др. не согласуется с имеющимися астрономическими данными $|\omega|/\alpha^2 > 10^5$ для $\omega < 0$. Получена поправка к закону Ньютона для решения Агнеше и Ла Камера и показано, что существующей экспериментальной точности недостаточно для обнаружения этой поправки с учетом ограничения на нее, следующего из данных для ППН-параметра: максимальная величина поправки оказывается как минимум на 6 порядков ниже точности экспериментов. Сделан вывод о том, что рассмотренная модель может применяться как на астрономических, так и на космологических масштабах и соответствовать наблюдательным данным астрономии и небесной механики (публикация № 3).

В диссертации показано, что с помощью комбинации в исследовании методов космологии и небесной механики можно судить о релевантности расширенных теорий гравитации на различных масштабах, с позиций различных подходов и с использованием различных наборов данных. Такой подход к исследованию расширенных теорий позволяет проводить более всестороннее исследование, искать возможные наблюдательные проявления таких теорий и сравнивать их предсказываемые величины с наблюдательными данными, тем самым подвергая эти теории экспериментальной проверке.

6.2 Благодарности

Автор выражает глубокую признательность М.В. Сажину и О.С. Сажинной, А.А. Шацкому, И.Д. Новикову, а также А.С. Москвину, Е.А. Памятных, А.В. Урсулову и Б.Н. Латошу.

Список литературы

- [1] В.Г. Турышев. Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований. *Успехи физических наук*, 179(1), 2009.
- [2] Naresh Dadhich, Roy Maartens, Philippos Papadopoulos, and Vahid Rezania. Black holes on the brane. *Phys.Lett.*, B487:1–6, 2000.
- [3] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425:374, 2003.
- [4] Emilio Elizalde, Shin'ichi Nojiri, and Sergei D. Odintsov. Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up. *Phys.Rev.*, D70:043539, 2004.
- [5] A.G. Agnese and M. La Camera. Schwarzschild metrics, quasi-universes and wormholes. In B.G. Sidharth and M.V. Altaisky, editors, *Frontiers of Fundamental Physics 4*, pages 197–205. Springer US, 2001.
- [6] S.O. Alexeyev, K.A. Rannu, and D.V. Gareeva. Possible observational manifestations of wormholes in the brans-dicke theory. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 113:628–636, 2011.
- [7] Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Ранну К.А. *Введение в общую теорию относительности. Ее современное развитие и приложения.* Издательство Уральского федерального университета имени первого Президента РФ Б.Н.Ельцина Екатеринбург, РФ, 2015.
- [8] K. Uehara and C.W. Kim. Brans-Dicke cosmology with the cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 26:2575, 1982.
- [9] G. Hinshaw et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *Astrophys.J.Suppl.*, 208:19, 2013.
- [10] Peter Wittich. Searches for New Physics at the Tevatron and LHC. *AIP Conf.Proc.*, 1441:13–20, 2012.

- [11] Alexander F. Zakharov. Constraints on a charge in the Reissner-Nordström metric for the black hole at the Galactic Center. *Phys.Rev.*, D90(6):062007, 2014.
- [12] H. Falcke and S.B. Markoff. Toward the event horizon—the supermassive black hole in the Galactic Center. *Class.Quant.Grav.*, 30:244003, 2013.
- [13] M. Coleman Miller. *Astrophysical Constraints on Dense Matter in Neutron Stars*. ASSL, Springer, 2013.
- [14] Haensel P., Potekhin A. Y., and Yakovlev D. G. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. New York: Springer, 2007.
- [15] Z. Kovacs and T. Harko. Can accretion disk properties observationally distinguish black holes from naked singularities? *Phys.Rev.*, D82:124047, 2010.
- [16] Pankaj S. Joshi, Daniele Malafarina, and Ramesh Narayan. Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties. *Class.Quant.Grav.*, 31:015002, 2014.
- [17] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935.
- [18] Планетарий мост между мирами. К.А. Бронников. *Вокруг Света*, 5:2764, 2004.
- [19] C.W. Misner and J.A. Wheeler. Classical physics as geometry. *Ann. Phys.*, 2:525, 1957.
- [20] S.W. Hawking and E. Ellis. *Large-scale structure of the space-time*. Large-scale structure of the space-time, 1973.
- [21] Kamal K. Nandi, Anwarul Islam, and James Evans. Brans wormholes. *Phys.Rev.*, D55:2497–2500, 1997.
- [22] C. Brans and R.H. Dicke. Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925, 1961.

- [23] Valerio Faraoni. Illusions of general relativity in Brans-Dicke gravity. *Phys.Rev.*, D59:084021, 1999.
- [24] Stefano Foffa, Michele Maggiore, and Riccardo Sturani. Loop corrections and graceful exit in string cosmology. *Nucl.Phys.*, B552:395–419, 1999.
- [25] T. Tamaki, Kei-ichi Maeda, T. Torii. Non-Abelian black holes in Brans-Dicke theory. *Phys. Rev. D*, 57:4870, 1998.
- [26] Hemwati Nandan, Nils M. Bezares-Roder, and Heinz Dehnen. Black Hole Solutions and Pressure Terms in Induced Gravity with Higgs Potential. *Class.Quant.Grav.*, 27:245003, 2010.
- [27] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, and Nevin N. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys.Rev.Lett.*, 91:071301, 2003.
- [28] Shin'ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Quantum de Sitter cosmology and phantom matter. *Phys.Lett.*, B562:147–152, 2003.
- [29] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, and Mark Trodden. Can the dark energy equation - of - state parameter w be less than -1? *Phys.Rev.*, D68:023509, 2003.
- [30] A.G.Riess, et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astron. J.*, 116:1009, 1998.
- [31] M. Persic, P.Salucci, Stel, F. The universal rotation curve of spiral galaxies - I. The dark matter connection. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 281:27, 1996.
- [32] Max Tegmark et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys.Rev.*, D69:103501, 2004.
- [33] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int.J.Mod.Phys.*, D15:1753, 2006.

- [34] A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, and S. Yu. Vernov. Reconstruction of Scalar Potentials in Modified Gravity Models. *Phys.Rev.*, D87(6):063503, 2013.
- [35] Ekaterina O. Pozdeeva and Sergey Yu. Vernov. Stable Exact Cosmological Solutions in Induced Gravity Models. *AIP Conf.Proc.*, 1606:48–58, 2014.
- [36] Orest Hrycyna and Marek Szydlowski. Brans-Dicke theory and the emergence of Λ CDM model. *Phys.Rev.*, D88(6):064018, 2013.
- [37] M.N. Smolyakov. Hierarchy problem and the cosmological constant in a five-dimensional brans-dicke brane world model. *General Relativity and Gravitation*, 42(12):2799–2811, 2010.
- [38] E. Komatsu et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophysical Journal, Supplement*, 192:18, feb 2011.
- [39] El-Nabulsi Ahmad Rami. A dark energy and phantom energy dilaton-Brans-Dicke multiverse with positive cosmological constant. *Astrophysics and Space Science*, 327:155, 2010.
- [40] Mark Scheel, Stuart Shapiro, and Saul Teukolsky. Collapse to black holes in brans-dicke theory. ii. comparison with general relativity. *Phys. Rev. D*, 51:4236–4249, Apr 1995.
- [41] Shin’ichi Nojiri and Emmanuel N. Saridakis. Phantom without ghost. *Astrophys.Space Sci.*, 347:221–226, 2013.
- [42] E. Ahmadi-Azar, N. Riazi. A class of Cosmological Solutions of Brans-Dicke Theory with Cosmological Constant. *Astrophysics and Space Science*, 226:1, 1995.
- [43] L. O. Pimentel. *Astrophysics and Space Science*, 112:175, 1985.
- [44] S. Ram, C. P. Singh. Early Cosmological Models with Bulk Viscosity in Brans-Dicke Theory. *Astrophysics and Space Science*, 254:143, 1990.

- [45] S. N. Pandey. Brans-Dicke Cosmology with non-vanishing Cosmological Constant and Non-Zero Curvature. *Astrophysics and Space Science Supplement*, 277(3):403, 2001.
- [46] S. J. Kolitch. Qualitative Analysis of Brans–Dicke Universes with a Cosmological Constant. *Annals Phys.*, 246:121, 1996.
- [47] Thibault Damour and Kenneth Nordtvedt. General relativity as a cosmological attractor of tensor-scalar theories. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2217–2219, Apr 1993.
- [48] Thibault Damour and Kenneth Nordtvedt. Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev. D*, 48:3436–3450, Oct 1993.
- [49] Thibault Damour and Bernard Pichon. Big bang nucleosynthesis and tensor-scalar gravity. *Phys. Rev. D*, 59:123502, May 1999.
- [50] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano. Violations of the equivalence principle in a dilaton-runaway scenario. *Phys. Rev. D*, 66:046007, Aug 2002.
- [51] C. Brans. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. ii. *Phys. Rev.*, 125:2194–2201, Mar 1962.
- [52] Arunava Bhadra and Kabita Sarkar. Wormholes in vacuum Brans-Dicke theory. *Mod.Phys.Lett.*, A20:1831–1844, 2005.
- [53] Arunava Bhadra and Kabita Sarkar. On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory. *Gen.Rel.Grav.*, 37:2189–2199, 2005.
- [54] S. W. Hawking. Black holes in the brans-dicke theory of gravitation. *Comm. Math. Phys.*, 25(2):167–171, 1972.
- [55] Valerio Faraoni. The Jepsen-Birkhoff theorem in alternative gravity. *Phys.Rev.*, D81:044002, 2010.

- [56] Manuela Campanelli and C.O. Lousto. Are black holes in Brans-Dicke theory precisely the same as a general relativity? *Int.J.Mod.Phys.*, D2:451–462, 1993.
- [57] N.S. Baaklini, S. Ferrara, and P. van Nieuwenhuizen. Classical Solutions in Supergravity. *Lett.Nuovo Cim.*, 20:113, 1977.
- [58] J. Wess and B. Zumino. Superspace formulation of supergravity. *Physics Letters B*, 66(4):361 – 364, 1977.
- [59] Joseph Polchinski. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges. *Phys.Rev.Lett.*, 75:4724–4727, 1995.
- [60] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G.R. Dvali. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys.Lett.*, B429:263–272, 1998.
- [61] Piero Nicolini, Jonas Mureika, Euro Spallucci, Elizabeth Winstanley, and Marcus Bleicher. Production and evaporation of planck scale black holes at the lhc. In Remo Ruffini, Robert Jantzen, and Kjell Rosquist, editors, *Proceedings, 13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG13)*, pages 2495–2497, July 2015.
- [62] C. Streve, G. Bertone, F. Feroz, M. Fornasa, R. Ruiz de Austri, et al. Global Fits of the cMSSM and NUHM including the LHC Higgs discovery and new XENON100 constraints. *JCAP*, 1304:013, 2013.
- [63] Steve Nahn and Dmitri Tsybychev. Recent results from ATLAS and CMS on Higgs, supersymmetry and physics beyond the standard model searches. *Int.J.Mod.Phys.*, A28:1330026, 2013.
- [64] Vardan Khachatryan et al. Search for Microscopic Black Hole Signatures at the Large Hadron Collider. *Phys.Lett.*, B697:434–453, 2011.

- [65] Giacomo Cacciapaglia, Aldo Deandrea, John Ellis, Jad Marrouche, and Luca Panizzi. LHC Missing-Transverse-Energy Constraints on Models with Universal Extra Dimensions. *Phys.Rev.*, D87(7):075006, 2013.
- [66] Lisa Randall and Raman Sundrum. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys.Rev.Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [67] Ruth Durrer. Braneworlds. *AIP Conf.Proc.*, 782:202–240, 2005.
- [68] C. Molina and J.C.S. Neves. Black holes and wormholes in AdS branes. *Phys.Rev.*, D82:044029, 2010.
- [69] A. Chamblin, S.W. Hawking, and H.S. Reall. Brane world black holes. *Phys.Rev.*, D61:065007, 2000.
- [70] Moninder Singh Modgil, Sukanta Panda, and Gautam Sengupta. Rotating brane world black holes. *Mod.Phys.Lett.*, A17:1479–1488, 2002.
- [71] Ruth Gregory. Black string instabilities in Anti-de Sitter space. *Class.Quant.Grav.*, 17:L125–L132, 2000.
- [72] R. Gregory and R. Laflamme. Black strings and p-branes are unstable. *Phys.Rev.Lett.*, 70:2837–2840, 1993.
- [73] Gary Gibbons and Sean A. Hartnoll. Gravitational instability in higher dimensions. *Phys. Rev. D*, 66:064024, Sep 2002.
- [74] Panagiota Kanti and Kyriakos Tamvakis. Quest for localized 4d black holes in brane worlds. *Phys. Rev. D*, 65:084010, Mar 2002.
- [75] P. Kanti, I. Olasagasti, and K. Tamvakis. Quest for localized 4-D black holes in brane worlds. 2. Removing the bulk singularities. *Phys.Rev.*, D68:124001, 2003.
- [76] De-Chang Dai and Dejan Stojkovic. Analytic solution for a static black hole in RSII model. *Phys.Lett.*, B704:354–359, 2011.
- [77] Richard Whisker. *Braneworld Black Holes, A Thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy*. PhD thesis, Institute for Particle

Physics Phenomenology Department of Physics University of Durham, England, 2008.

- [78] Roberto Casadio and Lorenzo Mazzacurati. Bulk shape of brane world black holes. *Mod.Phys.Lett.*, A18:651–660, 2003.
- [79] Hideo Kodama. Accelerating a Black Hole in Higher Dimensions. *Prog.Theor.Phys.*, 120:371–411, 2008.
- [80] Tetsuya Shiromizu and Masaru Shibata. Black holes in the brane world: Time symmetric initial data. *Phys.Rev.*, D62:127502, 2000.
- [81] Cristiano Germani and Roy Maartens. Stars in the brane world. *Phys.Rev.*, D64:124010, 2001.
- [82] Алексеев С.О., Стародубцева Д.А. Черные дыры в моделях с некомпактными дополнительными измерениями. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 138(4):652–658, 2010.
- [83] Alexeyev S. and Starodubceva D. Black holes in $n > 4$ gravity. *PoS (QFTHEP2010)*, page 071, 2010.
- [84] Alexeyev S. and Tretyakova D. *Black Holes: Evolution, Theory and Thermodynamics: Primordial Black Holes in Higher Order Curvature Gravity and Beyond*. Nova Publishers, New York, USA, 2012.
- [85] Alexeyev S., Tretyakova D., and Latosh B. *Advances in General Relativity Research: Geodesic Analysis in Multidimensional Gravity Models*. Nova Publishers, New York, USA, 2015.
- [86] Andrew Chamblin, Harvey S. Reall, Hisa-aki Shinkai, and Tetsuya Shiromizu. Charged brane world black holes. *Phys.Rev.*, D63:064015, 2001.
- [87] A. N. Aliev and A. E. Gümrükçüoğlu. Charged rotating black holes on a 3-brane. *Phys. Rev. D*, 71:104027, May 2005.
- [88] Zsolt Horvath and Laszlo A. Gergely. Black hole tidal charge constrained by strong gravitational lensing. *Astron.Nachr.*, 334:1047–1050, 2013.

- [89] Laszlo Arpad Gergely, Narit Pidokrajt, and Sergei Winitzki. Geometrothermodynamics of tidal charged black holes. *Eur.Phys.J.*, C71:1569, 2011.
- [90] Zsolt Horvath, Laszlo Arpad Gergely, and David Hobill. Image formation in weak gravitational lensing by tidal charged black holes. *Class.Quant.Grav.*, 27:235006, 2010.
- [91] Douglas M. Gingrich. Production of tidal-charged black holes at the Large Hadron Collider. *Phys.Rev.*, D81:057702, 2010.
- [92] R. Casadio and J. Ovalle. Brane-world stars and (microscopic) black holes. *Phys.Lett.*, B715:251–255, 2012.
- [93] С.Чандраксекар. *Математическая теория черных дыр, том 1*. М.,Мир, 1986.
- [94] Oliver James, Eugenie von Tunzelmann, Paul Franklin, and Kip S. Thorne. Gravitational Lensing by Spinning Black Holes in Astrophysics, and in the Movie Interstellar. *Class.Quant.Grav.*, 32(6):065001, 2015.
- [95] Frank Eisenhauer, R. Genzel, T. Alexander, R. Abuter, T. Paumard, et al. SINFONI in the Galactic Center: Young stars and IR flares in the central light month. *Astrophys.J.*, 628:246–259, 2005.
- [96] А. М. Черепашук. Поиски черных дыр. *Успехи физических наук*, 173(4):345–384, 2003.
- [97] Sheperd Doeleman, Jonathan Weintroub, Alan E.E. Rogers, Richard Plambeck, Robert Freund, et al. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre. *Nature*, 455:78, 2008.
- [98] Amitai Y. Bin-Nun. Relativistic Images in Randall-Sundrum II Braneworld Lensing. *Phys.Rev.*, D81:123011, 2010.
- [99] Amitai Y. Bin-Nun. Strong Gravitational Lensing by Sgr A*. *Class.Quant.Grav.*, 28:114003, 2011.

- [100] Alexeyev S., Tretyakova D., Shatskiy A., and Novikov I. Non-singular brans-dicke-lambda cosmology. In *Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, volume 2, pages 1605–1607, 2014.
- [101] И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, С. О. Алексеев, Д. А. Третьякова. Идеи Я.Б. Зельдовича и современная космология Бранса—Дикке. *Успехи физических наук*, 184(4):379–386, 2014.
- [102] Tretyakova D., Shatskiy A., Novikov I., and Alexeyev S. Non-singular brans-dicke- λ cosmology. *Physical Review D*, 85(12):124059–1–124059–7, 2012.
- [103] Rong-Gen Cai, Zhong-Liang Tuo. Detecting the cosmic acceleration with current data. *Phys. Lett. B*, 706:116–122, 2011.
- [104] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys.J.Suppl.*, 192:18, 2011.
- [105] J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs. Progress in Lunar Laser Ranging Tests of Relativistic Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 93:261101, 2004.
- [106] A. G. Agnese, M. La Camera. General spherically symmetric solutions in charged dilaton gravity. *Phys. Rev. D*, 49:2126, 1994.
- [107] Алексеев С.О., Ранну К.А., Гареева Д.В. Возможные наблюдательные проявления кротовых нор в теории Бранса—Дикке. *ЖЕТП*, 140:722, 2011.
- [108] N. Riazi and H.R. Askari. Spherically Symmetric, Static Solutions of Brans-Dicke Field Equations in Vacuum. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 261:229, 1993.
- [109] R. Herrera, C. Contreras, and Sergio del Campo. The Starobinsky inflationary model in a Jordan-Brans-Dicke type theory. *Class.Quant.Grav.*, 12:1937–1942, 1995.

- [110] Igor R. Klebanov, Leonard Susskind, and Tom Banks. Wormholes and the Cosmological Constant. *Nucl.Phys.*, B317:665–692, 1989.
- [111] Hideki Maeda and Gaston Giribet. Lifshitz black holes in Brans-Dicke theory. *JHEP*, 1111:015, 2011.
- [112] Xing-Guo Xiao and Jian-Yang Zhu. Wormhole solution in vacuum Brans-Dicke theory with cosmological constant. *Chin.Phys.Lett.*, 13:405–408, 1996.
- [113] Luis J. Garay and Juan Garcia-Bellido. Jordan-Brans-Dicke quantum wormholes and Coleman’s mechanism. *Nucl.Phys.*, B400:416–434, 1993.
- [114] Jose’ P.S. Lemos, Francisco S.N. Lobo, and Sergio Quinet de Oliveira. Morris-Thorne wormholes with a cosmological constant. *Phys.Rev.*, D68:064004, 2003.
- [115] Y. Heydarzade, N. Riazi, and H. Moradpour. Asymptotically Flat Wormhole Solutions in a Generic Cosmological Constant Background. 2014.
- [116] K.K. Nandi, B. Bhattacharjee, S.M.K. Alam, and J. Evans. Brans-Dicke wormholes in the Jordan and Einstein frames. *Phys.Rev.*, D57:823–828, 1998.
- [117] Meng-Yao Liu, Ze-Hao Zhong, Yi-Chen Han, Xiao-Yu Wang, Zong-Shui Yang, and Yi Xie. Preliminary limits on deviation from the inverse-square law of gravity in the solar system: a power-law parameterization. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 14(8):1019, 2014.
- [118] R. Spero, J. K. Hoskins, R. Newman, J. Pellam, and J. Schultz. Test of the gravitational inverse-square law at laboratory distances. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1645–1648, Jun 1980.
- [119] J. K. Hoskins, R. D. Newman, R. Spero, and J. Schultz. Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm. *Phys. Rev. D*, 32:3084–3095, Dec 1985.

- [120] E. Fischbach, D.E. Krause, V.M. Mostepanenko, and M. Novello. New constraints on ultrashort ranged Yukawa interactions from atomic force microscopy. *Phys.Rev.*, D64:075010, 2001.
- [121] J. Paramos and O. Bertolami. The Galileo satellite constellation and modifications to the inverse-square law for Gravitation. *Proc. 2nd International Colloquium on Scientific and Fundamental Aspects of the Galileo Programm*, 2009.
- [122] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Testing gravity to second postNewtonian order: A Field theory approach. *Phys.Rev.*, D53:5541–5578, 1996.