

Введение

Издревле люди сталкивались со случайными событиями. Случайность всегда бросала вызов разуму, стремящемуся все контролировать. С другой стороны, многих людей увлекают азарт и надежда на удачу.

Со временем зрело понимание, что и в случайности существуют свои закономерности, особенно если условия, при которых происходят события, повторяются много раз.

Теория вероятностей возникла в XVII веке (главным образом, из задач, связанных с азартными играми), однако затем на протяжении долгого времени не имела по-настоящему прочного основания, базируясь на интуитивно понятных рассуждениях и приемах, которые обычно приводили к успеху, а иногда – к противоречию. Впрочем, подобная ситуация имела место и в других разделах математики, например, в математическом анализе.

Изложить основания теории вероятностей так, чтобы это было понятно, теоретически корректно и практически полезно, представляет собой непростую задачу. Великие умы бились над ней несколько веков. Более того, некоторые дискуссии не утихают и до сих пор.

Проще всего сказать, что вероятность события – это *мера уверенности* в том, что оно произойдет. Такое толкование называют **субъективной вероятностью**. Если есть полная уверенность в том, что какое-то событие произойдет, то ему приписывается вероятность единица, а если полная уверенность, что не произойдет, то вероятность ноль. В других случаях вероятность оказывается где-то между нулем и единицей.

В случае, если некоторый эксперимент (испытание, наблюдение) может закончиться одним из n исходов, и нет оснований быть больше уверенным в одном исходе, чем в другом, то естественно приписать каждому исходу вероятность $1/n$.

Например, при бросании правильной монеты нет оснований считать, что она будет выпадать гербом чаще, чем решкой или наоборот, поэтому вероятности этих исходов логично считать равными $1/2$. При бросании правильного игрального кубика нет оснований считать, что он будет выпадать одной гранью чаще, чем другой, значит, вероятность выпадения любой грани равна $1/6$. Если в урне имеется n шаров, и выбирается один из них, не глядя, вероятность любого выбора равна $1/n$.

Когда установлены вероятности всех возможных исходов, остается только выделить исходы, благоприятствующие определенному событию, и сложить их вероятности, это и будет вероятность события. Такую вероятность называют **комбинаторной вероятностью**, поскольку для вычисления числа исходов часто используют комбинаторику (см. главу 1).

Если вероятность события оказалась близка к нулю, можно сделать вывод, что оно скорее всего не произойдет, а если близка к единице, то скорее всего произойдет. Не вполне понятно на первый взгляд, какая польза от промежуточных значений. Однако в них тоже есть смысл. В прежние века, когда теория вероятностей применялась в основном в азартных играх, такие вероятности использовались для расчета ставок (на то или иное событие в игре). В общем случае их можно применять для принятия решений.

Пусть, например, имеется две урны, в первой – 1 белый шар и 9 черных, а в другой – 2 белых шара и 8 черных. Вам предлагается сыграть в игру: выбрать одну из урн и достать из нее шар наудачу, причем за белый шар полагается приз. Конечно, посчитав вероятности выигрыша в каждом из двух случаев (10% и 20%), вы выберете вторую урну.

Так же и во многих жизненных ситуациях (в том числе в экономике) при прочих равных условиях разумно выбрать тот вариант действий, в котором есть больше уверенности в том, что он принесет успех, или наоборот, в котором вероятность неудачи (риска) меньше.

Но конечно, следует избегать бездумного приписывания разным исходам одинаковой вероятности, иначе придем к следующему известному анекдоту:

- Какова вероятность встретить на улице динозавра?
- Одна вторая.
- Почему?
- Либо встречу, либо нет.

Скажем так: в качестве вероятности нужна не просто мера уверенности, а *научно обоснованная мера уверенности*. И равная уверенность в исходах нуждается в обосновании.

В общем случае, можно приписывать исходам не только одинаковые, но и разные вероятности, руководствуясь разной личной уверенностью в них или уверенностью других людей (используя экспертные оценки). Достаточно, чтобы сумма вероятностей исходов была равна единице. Однако это делает дальнейшие рассуждения и выводы менее убедительными.

У субъективной вероятности есть свои недостатки.

Во-первых, далеко не всегда в реальных ситуациях можно выделить конечное число исходов и обоснованно приписать им вероятности.

Во-вторых, уверенность – это состояние сознания, а хотелось бы иметь что-то ближе к объективной реальности.

Поэтому был предложен другой подход к вероятности, основанный на практике.

Многие явления в нашей жизни можно отнести (хотя бы в первом приближении) к категории массовых экспериментов в одинаковых условиях. Речь здесь может идти как об экспериментах, проводимых многократно и последовательно (например, бросание монеты, изготовление деталей на заводе и т.п.), так и о проводимых одновременно и параллельно (например, жизни людей, которые живут в одно время и в одном месте). Предполагается, что результаты этих экспериментов непредсказуемы и не зависимы между собой, и в каждом из них некоторое событие может произойти или не произойти. Тогда можно собрать статистику и найти **относительную частоту события**, т.е. отношения числа экспериментов, когда событие произошло, к общему числу экспериментов. Оказывается, что во многих случаях относительные частоты с ростом числа экспериментов не колеблются произвольным образом, а явно сходятся к некоторым пределам. Это явление называется **статистической устойчивостью частот**.

Возникает мысль определить вероятность события как предел его относительной частоты в массовых экспериментах при одинаковых условиях. Такую вероятность называют **статистической вероятностью**.

Например, если долго бросать монету¹, то окажется, что примерно в половине случаев она выпадает гербом и примерно в половине – решкой, значит, вероятность обоих событий $1/2$. Если долго бросать игральный кубик, то каждая его грань будет выпадать примерно в $1/6$ части всех случаев, значит, ее вероятность равна $1/6$. Если урну положить n шаров, и затем выбирать по одному, не глядя, смотреть и записывать, какой именно шар вынули, класть обратно, и так повторять много раз, то также получим в результате, что вероятность выбора любого шара равна $1/n$.

На первый взгляд, это повтор уже описанного выше рассуждения, приводящий к тем же значениям вероятностей. Однако в первом случае речь шла о субъективной вероятности (мере уверенности), получаемой теоретически, а во втором – о статистической, получаемой на основе реальных наблюдений и экспериментов. И это совсем не одно и то же, поскольку реальность всегда готова преподнести сюрпризы.

Например, нет никаких теоретических оснований считать, что мальчиков должно рождаться больше, чем девочек, или наоборот. На протяжении долгого времени считалось, что тех и других рождается примерно поровну, так что этим событиям следует приписать одинаковую вероятность. Однако в 1710 году это мнение было опровергнуто Дж.Арбутнотом (1667–1735) на основе статистических данных. Оказалось, что мальчиков систематически рождается больше.

В качестве приложений статистической вероятности, речь может идти, например, о доле брака в продукции предприятия; доле людей, покупающих определенные товары или

¹ Интересно, что некоторые классики теории вероятностей и математической статистики действительно проводили опыты с многократным бросанием монеты. Например, Ж.Бюффон (1707–1788) бросил монету 4040 раз и получил 2048 гербов (относительная частота 0,508), а К.Пирсон (1857–1936) – 12000 раз и получил 6019 гербов (относительная частота 0,5016).

услуги; доле людей, доживающих или не доживающих до определенного возраста и др. Вместо того, чтобы оценивать вероятности различных исходов умозрительно, можно определить их из статистики.

Понятно, что статистическая вероятность более практична, чем субъективная. Однако и она имеет свои недостатки.

Во-первых, непонятно, как определить пределы относительных частот с точки зрения математики. Можно ли считать, что это такие же пределы, как вводятся и используются в математическом анализе? Можно ли найти для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ такое число экспериментов N , начиная с которого, относительная частота будет отклоняться от вероятности менее, чем на ε ?

Легко показать, что это не так. Возьмем, к примеру, бросание монеты. Допустим, в какой-то момент относительная частота герба стала отличаться от $1/2$ менее, чем на ε . Но ведь дальше возможна сколь угодно длинная серия гербов, которая увеличит относительную частоту и заставит ее снова выйти за пределы нужного интервала.

На самом деле, в теории вероятностей для подобных случаев вводятся свои понятия сходимости (и соответственно, пределов): «по вероятности» и «с вероятностью единица» (см. главу 8). Однако эти понятия уже используют понятие вероятности как базовое. Таким образом, получается логическая петля. Нельзя определять вероятность как предел чего-то по вероятности и т.д.

Во-вторых, получается, что вероятность определена только для событий, которые связаны с массовыми экспериментами при одинаковых условиях, а для остальных событий (редких, уникальных, невоспроизводимых) она не имеет смысла.

Например, нельзя ставить задачу, с какой вероятностью конкретный студент сдаст конкретный экзамен. Действительно, уровень готовности каждого студента к экзамену уникален, зависит от множества факторов, так что нельзя говорить о массовости эксперимента в смысле большого числа студентов на потоке. Нельзя также говорить о массовости в смысле многократных повторений, поскольку если студент сдаст экзамен, то больше сдавать его не будет, а если не сдаст, то к следующему разу (пересдаче) его уровень готовности изменится.

Некоторые преподаватели в этой связи предлагают вообще исключить из программы (например, из ЕГЭ при изучении теории вероятностей в школе) все задачи, не связанные с массовыми экспериментами. Однако на наш взгляд, это перебор.

Если начать разбираться, грань между массовыми и уникальными событиями весьма условна. Почему вообще массовые эксперименты при одинаковых условиях могут давать разные результаты? Да потому что только какая-то часть этих условий одинакова, а другая часть различна и случайна. Просто эту часть люди либо не видят, либо игнорируют.

Например, различные вероятностные модели используются в медицине, демографии и страховании. Жизни людей (например, одного пола и года рождения, живущих в одной стране или городе) рассматриваются как массовые эксперименты при одинаковых условиях. Речь может идти, например, о том, что в результате человек доживает до определенного возраста или не доживает. Но разве люди действительно живут в одинаковых условиях? Есть разные традиции семьи, разная наследственность, разное образование, разные доходы, разные характеры и жизненный выбор по каким-то вопросам и т.д. В конечном счете, жизнь каждого человека уникальна не меньше, чем ее малая часть вроде подготовки студента к экзамену. Тем не менее вероятностные модели применяются и работают.

Общепринятой в настоящее время является **аксиоматическая теория вероятностей**, введенная великим русским ученым А.Н.Колмогоровым (1903–1987), о которой будет более подробно рассказано в главе 3.

Коротко говоря, вероятность вводится как чисто абстрактный математический объект, обладающий некоторыми свойствами, которые вводятся аксиоматически, без доказательств, каких-либо обоснований и ссылок на реальность. Теория вероятностей строится чисто логически, в некоем идеальном мире, а уже потом ее пытаются приложить к окружающей действительности, устанавливая соответствия между реальными и идеальными объектами.

Таким же образом геометрия Евклида строится на наборе аксиом, а затем уже ее идеальным точкам, прямым, плоскостям, фигурам и телам ставятся в соответствие какие-то реальные предметы и явления.

Например, в теории вероятностей доказывается теорема Бернулли, согласно которой относительная частота события в идеальных независимых массовых экспериментах при одинаковых условиях сходится к вероятности события (по вероятности). С другой стороны, в жизни тоже наблюдается статистическая устойчивость частот. Поэтому можно установить соответствие между теорией и практикой, положив вероятность события в идеальном мире равной относительной частоте события в большом числе экспериментов в реальном мире.

Логической петли не возникает, поскольку массовые эксперименты используются не для *определения* вероятности, а для ее *измерения* (причем приближенного).

Можно провести аналогию с измерением температуры предметов термометром. Ко многим предметам можно просто приложить термометр и измерить их температуру с какой-то погрешностью. Однако нельзя сказать: «температура – это то, что меряет термометр» и на этом основании считать, что для предметов, к которым термометр приложить нельзя, ее нет. Во-первых, она все равно есть, а во-вторых, ее можно установить косвенными методами и теоретическими расчетами. Например, ученые могут оценить температуру в центре Земли или Солнца, хотя никакими приборами ее не измерить. Так же и с вероятностью.

В рамках аксиоматической теории для реальной ситуации строится ее *вероятностная модель*. Реальным событиям ставятся в соответствие идеальные. Вероятности для них могут быть установлены различными способами: комбинаторными, статистическими, либо путем оценки экспертов. Затем на основе вероятностей исходных (базовых) событий вычисляются вероятности других событий. Если этим последним событиям в реальности соответствуют результаты массовых экспериментов, тем самым получают прогноз для частот. Если им соответствуют какие-то уникальные события, вероятность можно интерпретировать как меру уверенности. Таким образом, современная теория вероятностей объединяет все описанные подходы, не создает логических противоречий и применима к широкому кругу явлений.

Однако никогда не следует забывать, что любая вероятностная модель не совпадает с реальностью идеально, как и геометрическая модель. Напомним, что геометрия переводится буквально как «землемерие». Допустим, что планиметрию (геометрию на плоскости) решили применить к некоторому участку земли. Если этот участок достаточно ровный, то результат будет приемлемый, а если нет, то может не получиться ничего хорошего. Так и на практике может оказаться, что предложенная вероятностная модель почему-то плохо работает. Тогда надо разбираться, в чем дело, и как ее необходимо усовершенствовать.

Следует помнить, что вероятностная модель не следует автоматически из реальной ситуации. Построение вероятностной модели – это всегда акт человеческой воли, прыжок веры и риск (например, в управлении финансами, где можно потерять много денег). При построении вероятностной модели, будь то для решения учебной текстовой задачи или в реальной практике, так или иначе делают следующие три шага, говоря себе и окружающим:

1. Давайте считать, что ситуация может быть описана вероятностной моделью.
2. Давайте сделаем некоторые предположения, которых не хватает.
3. Давайте отбросим факторы и возможности, которые мешают.

Без первого шага теории вероятностей просто нечего делать. Однако бывает, что даже в схеме массовых экспериментов при одинаковых условиях статистическая устойчивость частот никак не связана со случайностью и вероятностью.

Например, некий офис закрыт по воскресеньям. Наблюдая за ним каждый день, можно установить, что примерно в 1/7 случаев он закрыт, а в 6/7 открыт. Но исходы эти вполне предсказуемы, достаточно заглянуть в календарь.

В других случаях периодичность может быть не столь очевидна. Например, появление комет на протяжении тысячелетий считалось непредсказуемым событием. Однако в 1716 году английский ученый Э.Галлей на основе изучения обширных данных за несколько веков сделал вывод, что во многих случаях речь идет об одной и той же комете с периодом в 76 лет, и

предсказал ее очередное появление в конце 1758 года, что блестяще подтвердилось. В настоящее время известно много периодических комет. Изучение скрытых периодичностей имеет важное значение в современной науке, в том числе и в экономике.

Предсказуемость исходов может быть обусловлена и внутренними причинами.

Пусть имеется лампа с кнопкой, и от нажатия кнопки лампа переходит из состояния 0 (не горит) в состояние 1 (горит), и наоборот, из состояния 1 в состояние 0. Предположим, что есть экспериментатор, который ничего не знает об устройстве лампы. Он нажимает кнопку и записывает результаты. Тогда с его точки зрения происходят массовые эксперименты при одинаковых условиях, и относительные частоты состояний 0 и 1 стремятся к $1/2$. Но можно ли уподобить данную ситуацию бросанию монеты? Конечно, нет.

На самом деле, с такой лампой в закономерностях ее поведения быстро разберется и ребенок. Однако если представить себе прибор с более сложным алгоритмом работы, то чтобы разгадать его, может потребоваться и более сложный анализ данных.

Упомянем здесь генераторы случайных чисел², входящие в программное обеспечение современных компьютеров. На самом деле эти числа вовсе не случайны, они вычисляются с помощью сложных функций (поэтому их также называют *псевдослучайными*). Однако перед использованием генераторы обязательно проходят проверку с помощью различных тестов, которым должны удовлетворять по-настоящему случайные последовательности. Так что генераторы, успешно прошедшие проверку, выдают последовательности, практически не отличимые от случайных по своим статистическим свойствам. Понятно, что описанная выше последовательность из чередующихся нулей и единиц такую проверку не пройдет.

Два следующих шага проиллюстрируем на примере некоторых типовых задач.

Одним из типов задач для самостоятельного решения к главе 2 являются задачи «на лифты». В таких задачах говорится, что несколько человек входят в лифт на первом этаже многоэтажного дома, и далее они могут разъехаться по другим этажам разными способами, требуется вычислить вероятности различных комбинаций. При этом неявно предполагаются две важные вещи: каждый человек может равновероятно поехать на любой из этажей, кроме первого, и каждый человек едет куда-то независимо от других.

Это именно предположения, которые на практике могут и не выполняться. Например, на некоторые этажи люди могут ездить чаще, чем на другие. Допустим, где-то живут люди, которые редко выходят из дома и принимают гостей, а где-то наоборот. Кроме того, у разных людей может быть разный график поездок на лифте в течение дня, если рассматривается движение лифта в какое-то определенное время суток.

Далее, люди, вошедшие в лифт, могут принадлежать к одной семье или компании друзей, и направляться в одну конкретную квартиру, а не разъезжаться по этажам.

Наконец, лифт может вдруг застрять или вообще упасть. Такие случаи бывают.

Но если здесь что-то не предположить и что-то не отбросить, то невозможно решить задачу. Поэтому так важно выработать навык делать необходимые предположения, очень полезный на практике, где определенности обычно гораздо меньше, чем в учебнике.

Не менее важно также осознавать эти предположения и при необходимости уметь отказаться от них в пользу других, более сложных. Так, вполне возможно, что человеку, перед которым поставлена задача оптимизировать движение лифтов в офисном здании компании, и который изучит реальную статистику поездок, придется ввести более сложную вероятностную модель и провести более сложные расчеты.

Следует также понимать, что хотя расчеты могут вестись по известным формулам или с помощью компьютерных программ, ответственность за решение несут не авторы формул и не компьютер, а человек, который делает вывод, дает заключение, рекомендацию и т.д. В частности, в экономике неверное решение может обернуться огромными потерями, поэтому математические методы к ней надо применять разумно, аккуратно и ответственно.

² См. например: *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973; *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.