

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)
Южный Федеральный университет
Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова
МОО «Женщины в науке и образовании»
НОУ Учебный центр «Знание»

**XXVI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ.**

**X МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ
РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.**

27 мая – 3 июня 2018 г.
Пансионат «Моряк» Новороссийского
морского пароходства

ТРУДЫ

<http://conf-symp.sfedu.ru>
E-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1.Л4

XXVI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». X Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Труды. Изд-во Фонд науки и образования. Ростов н/Д, 2018. — 83 с.

ISBN 978-5-907125-33-9

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Редакционная коллегия: Б. И. Голубов, А. Н. Карапетянц, Л. В. Новикова, Г. Ю. Ризниченко.

Спонсор Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения» — Российский фонд фундаментальных исследований, проект 18-01-20025-г

Сопредседатели Оргкомитета конференции: директор Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, проф. М. И. Карякин, председатель МОО «Женщины в науке и образовании» проф. МГУ Г. Ю. Ризниченко.

Программный комитет: Л. В. Новикова (председатель), О. Г. Авсянкин, Т. Ю. Анопченко, Е. В. Борисова, Т. А. Васильева, О. В. Губарь, Я. М. Ерусалимский, А. Н. Карапетянц, И. В. Мельникова, Н. И. Митин, Е. С. Никитина (Россия), И. Н. Катковская (Беларусь).

Локальный комитет: Л. В. Новикова (председатель), Б. Г. Вакулов, А. В. Гиль, Г. А. Зеленков, Г. С. Костецкая, М. М. Цвиль.

Программный комитет симпозиума: акад. РАН Б. С. Кашин, акад. РАН С. В. Конягин, А. В. Абанин, С. В. Бочкарев, И. Я. Новиков, А. М. Седлецкий, М. А. Скопина, А. П. Хромов, А. А. Шкаликов (Россия), В. Г. Кротов (Беларусь), А. М. Олевский (Израиль), С. Г. Самко (Португалия).

Оргкомитет симпозиума: Б. И. Голубов (председатель), А. Н. Карапетянц (зам. председателя), М. И. Дьяченко, Т. П. Лукашенко, В. А. Скворцов, С. А. Теляковский, Л. В. Новикова (секретарь).

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

Ю. А. Фарков, М. Г. Робакидзе (Москва)
farkov-ya@ranepa.ru, irubak@gmail.com
О ФРЕЙМАХ ПАРСЕВАЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация

Пусть $N = 2^n$, где n — натуральное число. Для пространства $\mathbb{C}_N$ комплексных N -периодических последовательностей Ю.А. Фарков и С.А. Строганов (2011) с помощью дискретного преобразования Уолша построили аналоги ортогональных всплесков, изучавшихся ранее для группы Кантора. В настоящей заметке мы обобщаем эту конструкцию на фреймы Парсеваля. Показано, что по произвольному вектору $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, удовлетворяющему условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 \leq 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1,$$

можно построить фрейм Парсеваля для пространства $\mathbb{C}_N$. Отмечаются некоторые возможные обобщения предложенной конструкции.

On Parseval frames for spaces of periodic sequences
Summary

Let $N = 2^n$, where n is a positive integer. Using the discrete Walsh transform, Farkov and Stroganov (2011) construct orthogonal wavelets for the space $\mathbb{C}_N$ of complex N -periodic sequences similar to those studied earlier for the Cantor group. We generalize this orthogonal wavelet construction to Parseval frames.

It is shown that for any vector $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ satisfying condition

$$|b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 \leq 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1,$$

a Parseval frame for the space $\mathbb{C}_N$ can be constructed. Some possible generalizations of the proposed construction are noted.

Применения преобразования Фурье в теории фреймов хорошо известны (см., например, [1]). Преобразование Уолша и его обобщения применялись для построения фреймов в [2, 3] (подробная библиография о всплесках и фреймах в анализе Уолша приведена в [3]).

В статье [4] для пространств комплексных периодических последовательностей с помощью дискретного преобразования Уолша были построены аналоги ортогональных всплесков, изучавшихся ранее для группы Кантора. В настоящем сообщении конструкция ортогональных всплесков из [4] дополняется алгоритмом построения фреймов Парсеваля в пространстве периодических последовательностей. Обоснованием этого алгоритма является теорема, недавно изложенная авторами [5] на 19-й международной Саратовской зимней школе, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова.

Для данного натурального n будем пользоваться обозначениями: $N = 2^n$, $N_1 = 2^{n-1}$, $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ — абелева группа N целых неотрицательных чисел с операцией $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2, $\mathbb{C}_N$ — пространство N -периодических комплексных последовательностей со скалярным произведением $\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$. Базис Уолша $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$ состоит из последовательностей таких, что матрица $W^{(N)} := (w_l^{(N)}(j))_{l,j=0}^{N-1}$ симметрична и удовлетворяет [6, с.23] соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_l^{(N)}(j)w_k^{(N)}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^{(N)}(l)w_i^{(N)}(k) = N\delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{Z}_N, \quad (1)$$

где $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера. Поскольку матрица $N^{-1/2}W^{(N)}$ ортогональна, из нее выбором m строк (или столбцов) можно как в [1, с.19] получать фреймы Парсеваля для $\mathbb{C}_m$. Подобным образом из матрицы $(2N)^{-1/2}W^{(2N)}$ для каждого $m \in \{N+1, \dots, 2N\}$ легко конструируются фреймы Парсеваля для $\mathbb{C}_N$ из m векторов.

Дискретное преобразование Уолша сопоставляет произвольному вектору x из $\mathbb{C}_N$ последовательность $\hat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по базису Уолша:

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k)w_k^{(N)}(j), \quad \hat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)w_k^{(N)}(j). \quad (2)$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор двоичного сдвига $T_k : \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ определяется по формуле $(T_k x)(j) := x(j \oplus k)$, $x \in \mathbb{C}_N$, $j \in \mathbb{Z}_N$. Для построения фреймов Парсеваля в $\mathbb{C}_N$ предлагается следующий алгоритм.

Алгоритм А.

- **Шаг 1.** Выбрать N -мерный комплексный вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, такой, что

$$|b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 \leq 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1.$$

- **Шаг 2.** Найти вектор $u_0 \in \mathbb{C}_N$ такой, что $\hat{u}_0(l) = b_l$, $\hat{u}_0(l + 2^{n-1}) = b_{l+2^{n-1}}$.
- **Шаг 3.** Для полученного на шаге 2 вектора u_0 найти векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$, $r \geq 1$, такие, что для матрицы

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_1(l) & \dots & \hat{u}_r(l) \\ \hat{u}_0(l + N_1) & \hat{u}_1(l + N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + N_1) \end{pmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ выполнено равенство

$$M(l)M^*(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- **Шаг 4.** Определить систему $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ по формуле

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) = \{T_{2^k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{2^k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{2^k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}.$$

Отметим, что $B(u_0, u_1, \dots, u_r) = \{u_0, u_1, \dots, u_r\}$, если $N = 2$.

Теорема. Заданная по алгоритму А система $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_N$.

В общем случае шаг 2 алгоритма А реализуется с помощью хорошо известных быстрых алгоритмов для дискретных преобразований (2), а для реализации шага 3 проводятся компьютерные вычисления как при построении фреймов на группах Виленкина (см., например, алгоритмы в [3]). Приведем три простых примера, когда для проверки условия (3) такие вычисления не требуются.

Пример 1. Пусть $N = r = 2$. Тогда

$$M(l) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_1(l) & \hat{u}_2(l) \\ \hat{u}_0(l+1) & \hat{u}_1(l+1) & \hat{u}_2(l+1) \end{pmatrix}, \quad l = 0.$$

Для выполнения условия (3) положим

$$\hat{u}_i(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} x_i, \quad \hat{u}_i(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} y_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где векторы (x_0, x_1, x_2) , (y_0, y_1, y_2) ортогональны и имеют единичные длины:

$$x_0\bar{y}_0 + x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 = 0,$$

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, \quad |y_0|^2 + |y_1|^2 + |y_2|^2 = 1.$$

В частности, если $x_0 = a$, $y_0 = b$, $|a|^2 + |b|^2 \leq 1$, то можно принять

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{1 - |a|^2},$$

$$y_2 = -\frac{a\bar{b}}{\sqrt{1 - |a|^2}}, \quad y_1 = \sqrt{1 - |b|^2 - |y_2|^2}.$$

В результате для каждой пары комплексных чисел (a, b) , удовлетворяющей условию $|a|^2 + |b|^2 \leq 1$, получаем фрейм Парсеваля $\{u_0, u_1, u_2\}$ для $\mathbb{C}_2$.

Пример 2. Пусть $N = 4$, $r = 2$. Тогда

$$M(l) = \frac{4}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_1(l) & \hat{u}_2(l) \\ \hat{u}_0(l+2) & \hat{u}_1(l+2) & \hat{u}_2(l+2) \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1.$$

Условие (3) означает выполнение равенств

$$\sum_{s=0}^2 \hat{u}_s(l) \overline{\hat{u}_s(l+2)} = 0, \quad \sum_{s=0}^2 |\hat{u}_s(l)|^2 = \sum_{s=0}^2 |\hat{u}_s(l+2)|^2 = \frac{1}{8}, \quad l = 0, 1.$$

Такие векторы u_0, u_1, u_2 находятся как в примере 1. С использованием тождества $\langle x, y \rangle = N \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ можно убедиться, что система

$$\{u_0, u_1, u_2, T_2 u_0, T_2 u_1, T_2 u_2\}$$

является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_4$.

Пример 3. В случае $N = 4$, $r = 3$ имеем

$$M(l) = \frac{4}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_1(l) & \hat{u}_2(l) & \hat{u}_3(l) \\ \hat{u}_0(l+2) & \hat{u}_1(l+2) & \hat{u}_2(l+2) & \hat{u}_3(l+2) \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1.$$

Заметим, что в силу соотношений (1) для выполнения условия (3) матрицы $M(0)$ и $M(1)$ можно выбрать так, чтобы матрица $(\hat{u}_j(l))_{l,j=0}^3$ была пропорциональной матрице $(w_j^{(4)}(l))_{l,j=0}^3$. Тогда система

$$\{u_0, u_1, u_2, u_3, T_2 u_0, T_2 u_1, T_2 u_2, T_2 u_3\}$$

будет фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_4$.

Пример 3 легко распространить на случай $r = N - 1$ для произвольного N . Алгоритм А может быть обобщен переходом от дискретного преобразования Уолша к дискретному преобразованию Виленкина-Крестенсона (соответствующая конструкция ортогональных всплесковых базисов приведена в [7]). Кроме того, по аналогии с [4] и [7] для $\mathbb{C}_N$ можно построить фреймы Парсеваля m -го этапа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2002. — 440 p.
2. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sci., New York. 2012. V. 187(1). P. 22–34.
3. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. V. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.
4. *Фарков Ю. А., Строганов С. А.* О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений // Изв. вузов. Математика. № 7. 2011. С. 57–66.
5. *Фарков Ю. А., Робакидзе М. Г.* Применение функций Уолша к построению фреймов Парсеваля в пространствах периодических последовательностей // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова. — Саратов: ООО Издательство "Научная книга", 2018. С.265–267.
6. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 352 с.
7. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина-Крестенсона // Матем. заметки. Т. 89. № 6. 2011. С. 914–928.

Секция I
Дифференциальные
уравнения

И. А. Андреева, А. Ф. Андреев (Санкт-Петербург)
ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В КРУГЕ
ПУАНКАРЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ
КУБИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 517.93

Abstract

A family of dynamic systems with reciprocal polynomial right parts have been considered on a real plane. Systems contain two equations: one of them has a right part of the third order, while another one contains form of the second order. A problem is solved to find all different phase portraits possible for these systems in a Poincare circle with coefficient criteria of every portrait's realization. A Poincare method of serial displays – central and orthogonal – has been applied. All stages of a solution have been described. Qualitative and quantitative results for phase portraits are given.

Keywords: dynamical system, phase portrait, Poincare sphere, Poincare circle, singular points, trajectories.

Аннотация

На вещественной плоскости рассматривается семейство динамических систем с полиномиальными правыми частями, которые являются взаимно простыми формами фазовых переменных, причем одно уравнение содержит кубическую, а второе – квадратичную форму. Решается задача определения всех возможных фазовых портретов в круге Пуанкаре с коэффициентными критериями реализации каждого портрета. Используется метод Пуанкаре последовательных отображений, центральных и ортогональных. Описываются все стадии процесса решения. Указаны как качественные, так и количественные результаты.

Ключевые слова: динамическая система, фазовый портрет, сфера Пуанкаре, круг Пуанкаре, особые точки, траектории.

Рассматривается семейство динамических систем [1, 8, 10, 17], заданных на вещественной плоскости их фазовых переменных, у которых полиномиальные правые части являются взаимно простыми формами – в первом уравнении содержится кубическая, во втором –

квадратичная форма. Ставится задача нахождения всех допустимых для таковых систем топологически различных фазовых портретов в круге Пуанкаре с указанием близких к коэффициентным критериев возникновения (реализации) каждого из фазовых портретов. Для решения поставленной задачи применяется метод последовательных отображений Анри Пуанкаре: центрального отображения и ортогонального отображения ([1], стр. 241–249, [3–8]).

Множество всех систем разбивается на подмножества (семейства) нескольких уровней [8, 11, 15, 19]. К ним относятся семейства систем, разложения форм в правых частях которых на вещественные формы нижайших степеней содержат соответственно 3 и 2 различных множителя —

они образуют (3.2)- семейство; по 2 множителя, они образуют два вида (2.2)- семейств в зависимости от конкретной структуры разложения кубической формы ; 3 различных множителя для формы третьего порядка и 1- в форме второго порядка, они образуют (3.1)- семейство; 2- в форме третьего порядка и 1- в форме второго порядка, образуют (2.1)- семейства [12, 18].

Процесс решения поставленной задачи для каждого семейства кубических динамических систем состоит из нескольких шагов [8, 20, 21, 23].

Для произвольной системы рассматривается возрастающая последовательность всех вещественных корней специальных полиномов ее правых частей, полученных для абсциссы на фазовой плоскости, равной единице, при произвольной ординате, и вводится понятие ДЗ-преобразования – двойной замены в системе с изменением знаков времени и ординаты на противоположные [8, 11, 19, 20]. Оно преобразует ее в систему, вообще говоря, другую, для которой знаки и нумерация корней специальных полиномов, а также направление движения по траекториям с возрастанием времени изменяются на обратные по сравнению с таковыми для исходной системы. Две различных системы называются: а) взаимно обратными (относительно ДЗ), если ДЗ преобразует одну из них в другую, б) независимыми (от ДЗ) - в противном случае.

Очевидно, к примеру, что для произвольной системы с числом множителей в разложениях правых частей 3 и 2 соответственно возможны 10 различных вариантов последовательности всех корней специальных полиномов, исходя из комбинаторной формулы для числа сочетаний из 5 по 2 (или по 3) [8, 20].

ДЗ - преобразование всего семейства рассматриваемых (3.2) - си-

систем показывает, что шесть из них попарно независимы, для каждой из остальных существует ДЗ - взаимно обратная среди первых шести. Каждой из различных последовательностей корней специальных полиномов (3.2) -системы присваивается определенный номер от 1 до 10 так, что последовательности с номерами от 1 до 6 оказываются попарно независимыми, а с номерами от 7 до 10 - взаимно обратными таковым с номерами с 1 по 4 соответственно. Они образуют 10 подсемейств систем (3.2) – семейства [8, 15, 20].

Далее поочередно по общей схеме изучаются первые 6 подсемейств. Результаты для подсемейств с номерами 7 – 10 получаются затем из таковых с номерами 1- 4 ДЗ- преобразованием систем последних.

Процесс изучения подсемейства с фиксированным номером возрастающей последовательности всех корней специальных многочленов состоит из следующих шагов.

1. Перечисляются особые точки систем подсемейства в круге Пуанкаре (конечная особая точка $O(0, 0)$ [13] и бесконечно удаленные особые точки [14]). Для любой особой точки вводятся понятия узлового и седлового пучков полутраекторий систем семейства, замыкающихся к этой точке, ее топодинамического типа (ТД-типа), ее сепаратрисы [2, 3, 8, 20]. Для семейства ищутся ТД-типы особых точек его систем и их сепаратрисы [2, 3, 8, 15].

2. Изучается поведение сепаратрис особых точек систем подсемейства на предмет выяснения а) однозначности продолжения каждой из них из малой окрестности особой точки на всю ее длину, и б) взаимного расположения всех их в круге Пуанкаре [2, 3, 8, 22].

3. Строятся фазовые портреты (ФП) систем подсемейства как в графической форме (в виде рисунков: ГФП), так и в описательной форме (в виде таблиц: ОФП). Указываются критерии реализации каждого из них.

Итог данного исследования для всех (3.2) – систем: возможны 93 различных топодинамических типа фазовых портретов. Это число может показаться весьма значительным, но следует учитывать, что в каждом подсемействе семейства число динамических систем – несчетно [8, 20, 24].

По аналогичной схеме задача решается для (2.2) – семейства и прочих семейств [8, 9, 16, 18].

Для систем (2.2)- семейства возможны 2 варианта (класса) семейств: случай, когда меньший из корней специального многочлена кубической формы является кратным, приводит к образованию

класса А, и случай, когда кратным является больший его корень – он создает класс В таких систем. Для каждого из этих классов возможны по 6 вариантов возрастающей последовательности всех корней специальных многочленов (учитывая число сочетаний из 4 по 2). Каждый из классов (2.2) -систем изучается отдельно в соответствии с описанной выше методикой, и для класса А (2.2) – систем мы получаем 45 топодинамически различных фазовых портрета в круге Пуанкаре, а для класса В – 52 различных фазовых портрета. Указываются критерии реализации каждого из них [8, 9, 12].

При решении задачи для (3. 1) – семейства аналогично выясняется, что число различных фазовых портретов для систем данного семейства также составляет 52.

В работе строятся все эти фазовые портреты [4-8]. Строятся они в описательной форме. Для каждого ФП строится таблица, состоящая из 5-6 строк, каждая строка которой детально описывает одну инвариантную ячейку этого ФП: её границу, источник и сток её фазового потока. Такая таблица называется описательным фазовым портретом (ОФП) систем данного семейства.

Подробное изложение всего процесса исследования и его результатов дано в монографии [8].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. - Москва: Наука. 1966. — 586 с.
2. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. — Минск, «Вышэйшая школа», 1979. — 136 с.
3. Андреев А. Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб, Издательство С.-Петербургского университета, 2003. — 160 с.
4. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2007. № 4. С. 17–26.
www.math.spbu.ru/user/diffjournal.
5. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2008. № 1. С. 1–13.
www.math.spbu.ru/user/diffjournal.
6. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2008. № 3. С. 39–54.
www.math.spbu.ru/user/diffjournal.

7. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.IV. 1. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2009. № 4. С. 181–213. www.math.spbu.ru/user/diffjournal.
8. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. [Text]. Lambert Academic Publishing, Germany. 2017. — 70 с.
9. Andreeva, Irina, Andreev, Alexey. Investigation of a Family of Cubic Dynamic Systems. // Vibroengineering Procedia. Vol. 15.Dec. 2017. Pp. 88–93.
10. A.F. Andreev, I.A. Andreeva, L.V. Detchenya, T.V. Makovetskaya, A.P. Sadovskii. Nilpotent Centers of Cubic Systems. // Differential Equations. 2017. Vol. 53. № 8. Pp. 975–980.
11. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О методике и результатах построения фазовых портретов нового подсемейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Том 1. № 5 (27). С. 5–6.
12. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О поведении траекторий одного класса кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2017. Том 1. № 3 (25). С. 1–2.
13. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Исследование особой точки $O(0, 0)$ широкого семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2017. Том 1. № 11 (33). С. 1–3.
14. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Бесконечно удаленные особые точки одного семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2018. Том 1. № 1 (35). С. 1–3.
15. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Выявление фазовых портретов широкого семейства кубических систем в круге Пуанкаре. // Sciences of Europe. 2017. № 13-2 (13). С. 23–17.
16. Андреева И.А., Андреев А.Ф. К вопросу о картине траекторий еще одного семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Том 1. № 9 (31). С. 1–2.
17. Андреев А.Ф., Андреева И.А., Детченя Л.В., Маковецкая Т. В., Садовский А.П. Нильпотентные центры кубических систем. // Дифференциальные уравнения. 2017. Том 53. № 8. С. 1003–1008.
18. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Заметки о кубических динамических системах специального вида. // Евразийское научное объединение. 2018. Том 1. № 3 (37). С. 5–6.
19. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Методика исследования семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2018. Том 1. № 2 (36). С. 5–7.
20. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I. // Вестник РАЕН. 2017. Том 17. № 4. С. 8–18.

21. *Андреева И.А., Андреев А.Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. // XXVIII Крымская осенняя математическая школа – симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017). Сборник материалов Международной конференции. 2017. С. 53–55.
22. *Андреев А.Ф., Андреева И.А.* К вопросу о поведении траекторий некоторого семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Велес. 2017. № 3–1 (45). С. 87–90.
23. *Андреев А.Ф., Андреева И.А.* Study of Trajectories of a Broad Family of Dynamical Systems in a Poincare Circle. // Norwegian Journal of Development of the International science. 2017. Vol. 1. № 7. Pp. 17–19.
24. *Андреева И.А., Андреев А.Ф.* Исследование фазовых портретов некоторого семейства кубических динамических систем в круге Пуанкаре. // Знание. 2017. №4–1 (44). С. 66–70.

П. В. Николенко (Ростов-на-Дону)
petr.v.nikolenko@gmail.com
ОБ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ
ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Аннотация

Изучается вопрос о выборе управления объектом, находящимся в поле скоростей, которое обеспечит наискорейшее перемещение объекта из одного заданного положения в другое. Оказывается, что экстремаль принципа максимума Понтрягина может быть оптимальной лишь тогда, когда она не содержит точек неоднозначности. Приведена конструкция для эффективного вычисления множества неоднозначности, которое, являясь гладкой кривой, пересекает семейство экстремалей, отсекая от них неоптимальную часть.

Ключевые слова: поле скоростей, принцип максимума Понтрягина, точка неоднозначности, экстремаль.

1. Рассмотрим перемещения в фазовом пространстве R^2 , осуществляющиеся по закону

$$\dot{x} = v(x) + u.$$

Здесь $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ достаточно гладкое векторное поле, управление u — вектор-функция, такая что $\|u(t)\| \leq u_0$, кроме того предполагаем, что u — кусочно-непрерывна, непрерывна справа, имеет разрывы лишь первого рода.

Пусть поставлен вопрос о выборе управления u , которое объект из положения x^0 переведет в начало координат за кратчайшее время. Построим функцию Гамильтона-Понтрягина $H = \Psi(v(x) + u)$. Согласно принципу максимума Понтрягина (см. [1, с. 75]), если процесс (x, u) оптимальный, то найдется нетривиальное решение линейной системы $\dot{\Psi} = -\Psi Dv(x(t))$ (Dv — матрица Якоби отображения v) такое, что величина $H(\Psi(t), x(t), u(t))$ принимает значение максимально большое по переменной u . Следовательно, $u = u_0 \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$. Таким образом, если процесс (x, u) оптимальный, то он определяется решением следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) + u_0 \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, \\ \dot{\Psi} = -\Psi Dv(x) \end{cases} \quad (1)$$

координаты $x(t)$ представляют траекторию, величина $u_0 \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$ является управлением. Отметим, что система (1) является гамильтоновой с функцией $H = \Psi v + u_0 \|\Psi\|$.

Отметим также, что если (x, Ψ) — решение системы (1) и $\lambda > 0$, то $(x, \lambda \Psi)$ также решение, но оба эти решения определяют один процесс.

Поэтому, если считать моментом завершения процесса момент нуль, то экстремали в нашей задаче определяются решениями задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) + u_0 \frac{\Psi}{\|\Psi\|}, & \dot{\Psi} = -\Psi Dv(x) \\ x(0) = (0, 0), & \Psi(0) = (\cos s, \sin s). \end{cases} \quad (2)$$

где момент $t = 0$ — финальный.

2. Множество неоднозначности. Как известно, если поле v линейно, то любая экстремаль является оптимальным процессом и, если $(x, u_0 \frac{\Psi}{\|\Psi\|})$, $(\tilde{x}, u_0 \frac{\tilde{\Psi}}{\|\tilde{\Psi}\|})$ два таких процесса, то траектории $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ не пересекаются (при $t < 0$). Однако, в случае нелинейного поля v , траектории могут пересекаться.

Введем следующее:

Определение. Пусть $(x(t), u(t))$, $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, $t \in [t_0, 0]$ две экстремали и $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$. Точку $x^0 = x(t_0)$ назовем точкой неоднозначности.

Отметим, что из теоремы существования и единственности для системы (1) следует, что $u(t_0) \neq \tilde{u}(t_0)$.

Лемма. Пусть $(x(t), u(t))$ ($t \in [t'_0, 0]$, $t'_0 < t_0$) экстремаль и $x(t_0)$ точка неоднозначности. Тогда процесс (x, u) не оптимальный.

Доказательство. Обозначим через $\hat{u}$ управление

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t'_0 \leq t < t_0 \\ \tilde{u}(t), & t_0 \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

Тогда управление $\hat{u}$ точку $x(t'_0)$ переводит в начало координат за время t'_0 . Управление $\hat{u}$ является разрывным, т.е. процесс $(\hat{x}, \hat{u})$ не является экстремалью и тем самым не оптимален. Поскольку у процесса (x, u) время действия такое же, он также не оптимален. *Лемма доказана.*

Итак, у траектории $x(t)$ оптимальной может оказаться лишь часть соответствующая значениям $t \in [t_0, 0]$. Точка неоднозначности $x(t_0)$ отсекает от траектории неоптимальную часть.

Совокупность всех точек неоднозначности обозначим N .

Строение множества неоднозначности в случае плоскопараллельных векторных полей v исследовалось ранее в работах [2, 3]. Так, например, для векторного поля $v(x_1, x_2) = (x_2^2, 0)$ множество неоднозначности представляет собой часть оси ox_1 , лежащую левее точки $\frac{-\pi}{\sqrt{a}}$, где a — значение в нуле второй производной x_2^2 , т.е. в данном случае $a = 2$.

3. Конструкция для вычисления множества неоднозначности. Обозначим

$$(X(t, s), \Psi(t, s)), \quad (X(t, \tau), \Psi(t, \tau))$$

два решения задачи Коши (2) с финальными значениями

$$(0, 0, \cos s, \sin s), \quad (0, 0, \cos \tau, \sin \tau).$$

Если

$$X(t, \tau) = X(t, s) \quad (\tau \neq s), \quad (3)$$

то $X(t, \tau)$ точка неоднозначности, а величины t, τ, s будем называть параметрами неоднозначности. Рассматривая векторное равенство (3) (при фиксированном $t < 0$) как систему с неизвестными τ, s для их поиска можем воспользоваться методом Ньютона. Выясним, как выглядят итерации метода Ньютона применительно к нашей задаче.

Напомним, что если $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и решается уравнение $F(x) = 0$, выбрана точка x_i близкая к z -решению нашего уравнения, то

$$F(z) - F(x_i) \approx DF(x_i)(z - x_i),$$

поскольку $F(z) = 0$, разрешая это уравнение относительно z , получаем

$$z \approx x_i - DF^{-1}(x_i)F(x_i) = x_{i+1}. \quad (4)$$

Если $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и отображение имеет вид $F(t, s) = f(t) - g(s)$, где $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$, то формула (4), выписанная покомпонентно, примет вид:

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ s_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f'_1(t_i) & -g'_1(s_i) \\ f'_2(t_i) & -g'_2(s_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t_i) - g_1(s_i) \\ f_2(t_i) - g_2(s_i) \end{pmatrix}.$$

Если $F(t, s) = f(t) - f(s)$ и ищется решение уравнения

$$f(\tau) = f(s)$$

($\tau \neq s$), то последняя формула приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} \tau_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_i \\ s_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f'_1(\tau_i) & -f'_1(s_i) \\ f'_2(\tau_i) & -f'_2(s_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(\tau_i) - f_1(s_i) \\ f_2(\tau_i) - f_2(s_i) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для того чтобы применить формулу (5) к уравнению (3) нужно знать значения производной функции X по второй переменной. Эти значения вычисляются при решении системы в вариациях соответствующей системе (2).

Далее для удобства записи обозначим переменные Ψ_1, Ψ_2 из системы (2) через x_3, x_4 , а правую часть системы через $\phi(x)$. Таким образом, задача (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x), \\ x(0) = \varphi(s), \end{cases}$$

где $\varphi(s) = (0, 0, \cos s, \sin s)$ — финальное условие. Соответственно, задача в вариациях соответствующая задаче (2) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x), & \dot{y} = D\phi(x)y \\ x(0) = \varphi(s), & y(0) = \varphi'(s). \end{cases} \quad (6)$$

Если $(X(t, s), Y(t, s))$ решение системы (6), то первые две компоненты вектора X — это X из уравнения (3), а первые две компоненты Y — это частные производные X по второй переменной. В следующих формулах, считая момент t фиксированным, вместо $x_1(t, s)$ пишем $x_1(s)$ и т.д. Итак, в нашем случае формулы (5) примут вид:

$$\begin{pmatrix} \tau_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_i \\ s_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(\tau_i) & -y_1(s_i) \\ y_2(\tau_i) & -y_2(s_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(\tau_i) - x_1(s_i) \\ x_2(\tau_i) - x_2(s_i) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

4. Организация вычислений, сходимость итерационного процесса. Сделаем следующее замечание. Пусть по результатам вычислений для $t_1 < t$ параметры неоднозначности τ и s тройки (t, τ, s) заменяют множество A . Тогда, в силу леммы 1, для $t \leq t_1$ нас интересуют лишь такие решения уравнения

$$X(t, \tau) = X(t, s),$$

для которых τ и s не принадлежат A .

Будем предполагать поле v таким, что известна функция $C_2(t)$, для которой $\|X(t)\| \leq C_2(t)$ для всякого решения $(X(t), \Psi(t))$ задачи (2).

Например, легко видеть, что для поля $v(x_1, x_2) = (x_2^2, 0)$ за функцию $C_2(t)$ можно принять $u_0 t^2$ в m — норме $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$; а для поля $v(x_1, x_2) = (0; x_2^2)$ такой функции не существует, т.к. за конечное время точка может переместиться на бесконечность. При сделанных предположениях относительно поля v можно записать аналогичные неравенства для производных первого и второго порядка функции $X(t, s)$, поскольку указанные производные являются решениями управления в вариациях (6), либо уравнения в вариациях, соответствующих системе (6).

Далее нам потребуется следующая

Лемма 2. Пусть X, Y банаховы пространства $U \subset X$, $f: U \rightarrow Y$ дважды дифференцируем по Фреше, причем

$$\|f'^{-1}(\hat{x})\|^{-1} = l, \quad \|f''\| \leq C.$$

Если $r \leq l/c$, то:

а) f инъективно в шаре $B(\hat{x}, r)$, кроме того, $f'(x)$ обратим, если $x \in B(\hat{x}, r)$;

б) образ указанного шара содержит шар $B(f(\hat{x}), r(l - cr))$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in B(\hat{x}, r)$, по теореме о среднем (см. [1, с. 53])

$$\begin{aligned} & \|f(x_1) - f(x_2) - f'(\hat{x})(x_1 - x_2)\| = \\ & = \|(f - f'(\hat{x}))(x_1) - (f - f'(\hat{x}))(x_2)\| \leq \\ & \leq \max \|f'(c) - f'(\hat{x})\| \|x_1 - x_2\| \leq cr \|x_1 - x_2\|, \quad c \in [x_1, x_2]. \end{aligned}$$

С другой стороны $\|f'(\hat{x})(x_1 - x_2)\| \geq l \|x_1 - x_2\|$, поэтому, если $cr < l$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Если оператор A обратим и Δ такой, что $\|A^{-1}\Delta\| < 1$, то $A + \Delta$ обратим, поэтому $f'(x) = f'(\hat{x}) + (f'(x) - f'(\hat{x}))$ обратим, если

$$\|f'(\hat{x})^{-1}(f'(x) - f'(\hat{x}))\| < 1,$$

но $\|f'(\hat{x})^{-1}(f'(x) - f'(\hat{x}))\| \leq \frac{1}{l}Cr$. Что доказывает а).

Докажем б). В силу неравенства $\|f'(\hat{x})x\| \geq l\|x\|$, отображение $f'(\hat{x})$ покрывает с константой l (образ любого шара радиуса a содержит шар радиуса la):

$$f'(\hat{x})(B(x, a)) \supset B(f'(\hat{x})x, la).$$

В силу приведенного неравенства, отображение $f(x) - f'(\hat{x})x$ липшицево с константой Cr . По теореме Милютина (см. [1, с. 221]) отображение $f = f'(\hat{x}) + (f - f'(\hat{x}))$ покрывает с константой $l - Cr$. Лемма доказана.

Далее символы D_i , D_{ik} обозначают указанные частные производные.

Лемма 3. Пусть в точке (t_1, s_1) , $(s_1 \notin A)$ выполняется неравенство $\|DX^{-1}(t_1, s_1)\|^{-1} \leq l$, $\sum_k |D_{ik}x_j| \leq C$ (для тех значений (t, s) , которые рассматриваются). Пусть $\delta = l/c$, тогда δ -окрестность точки (t_1, s_1, s_1) не содержит параметров неоднозначности.

Доказательство. Поскольку константа C служит оценкой для второй производной отображения $(t, s) \rightarrow x(t, s)$, в силу леммы 2, указанное отображение инъективно в δ -окрестности точки (t_1, s_1) , т.е. δ -окрестность точки (t_1, s_1, s_1) не содержит параметров неоднозначности. Лемма доказана.

Рассмотрим отображение $F(\tau, s) = X(t_1, \tau) - X(t_1, s)$, тогда

$$DF(\tau, s) = \begin{pmatrix} y_1(\tau) & -y_1(s) \\ y_2(\tau) & -y_2(s) \end{pmatrix}$$

(как и формуле (7) обозначение параметра времени опущено). Для второй производной выполняется оценка $\|F''\| \leq 2C$ (C — константа из леммы 3). Пусть в точке $(\hat{\tau}, \hat{s})$

$$\|DF^{-1}\| = \frac{1}{l}$$

Лемма 4. Если $\|F(\hat{\tau}, \hat{s})\| < \frac{l^2}{8C}$, то при $\delta = \frac{l}{4c}F$ инъективно в δ -окрестности $(\hat{\tau}, \hat{s})$, итерации (7) сходятся (при $(\tau_0, s_0) = (\hat{\tau}, \hat{s})$) к решению (τ_*, s_*) уравнения $F = 0$, причем

$$2\|(\tau_0, s_0) - (\tau_1, s_1)\| > \|(\tau_0, s_0) - (\tau_*, s_*)\|$$

Доказательство. Согласно лемме 2, F инъективно в δ -окрестности $(\hat{\tau}, \hat{s})$ при $\delta = \frac{l}{4c} \leq \frac{l}{2c}$, и образ окрестности содержит шар

$$B(F(\hat{\tau}, \hat{s}), \delta(l - 2c\delta))$$

$$\delta(l - 2c\delta) = \frac{l}{4c} \left(l - 2c \frac{l}{4c} \right) = \frac{l^2}{8c}.$$

Поскольку выполняются условия

$$A_0 = \|DF^{-1}\| = \frac{1}{B}, \quad \|F''\| \leq 2c = c_0,$$

$$\|DF^{-1}(\hat{\tau}, \hat{s})F(\hat{\tau}, \hat{s})\| \leq \frac{1}{l} \frac{l^2}{8C} = \frac{l}{8C} = B_0,$$

то $A_0 B_0 C_0 \leq 1/4$, что, согласно известной теореме (см. [4, с. 460]), обеспечивает сходимость итераций. *Лемма доказана.*

Рассмотрим также отображение

$$\phi(t, \tau, s) = (t - t_1, X(t, \tau) - X(t, s)),$$

для второй производной ϕ'' выполняется оценка $\|\phi''\| < 2C$; пусть

$$\hat{\tau}, \hat{s} \notin A, \hat{t} = t_1 \quad \text{и} \quad l_1 = \|D\phi^{-1}(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})\|^{-1}.$$

Теорема. Если $\|\phi(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})\| < \frac{l_1^2}{8C}$, $\delta = \frac{l_1}{4C}$, $\delta_1 = \frac{l_1^2}{8C}$, то для t таких, что $|t - \hat{t}| < \delta_1$, δ -окрестность точки $(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})$ содержит параметры неоднозначности, которые образуют гладкую кривую параметра t .

Согласно лемме 2, отображение ϕ инъективно в δ -окрестности точки $(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})$ и образ этой δ -окрестности содержит δ_1 -окрестность точки $\phi(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})$. По теореме об обратной функции параметры неоднозначности образуют кривую $\phi^{-1}(t, 0, 0)$ ($|t| < \delta_1$).

Теорема доказана.

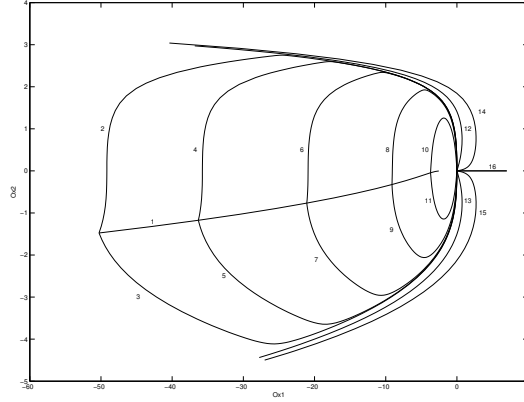
Пусть константа C_1 такова, что $\|D\phi\| < C_1$.

Лемма 5. Если $\|\phi(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})\| = b \geq \frac{l_1^2}{8C}$, $\delta < \frac{b}{C_1}$, то δ -окрестность точки $(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})$ не содержит параметров неоднозначности. Согласно теореме о среднем $\phi(B(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s}), \frac{b}{C_1}) \subset B(\phi(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s}), b)$, но последняя окрестность не содержит начало координат. *Лемма доказана.*

Пример. Рассмотренная конструкция реализована в следующей задаче о наискорейшем перемещении в начало координат в поле скоростей, заданном формулой.

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_2^2, 0), & \text{если } x_2 < 0 \\ (x_2^2 + 0, 1x_2^6, 0), & \text{если } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

На рисунке изображена часть кривой неоднозначности (обозначена цифрой 1).



Перемещение от точек построенной части кривой 1 в начало координат по экстремали вида 2–11 может занять время от 2,5 до 7 единиц. Вообще же, как следует из результатов работы [4], кривая неоднозначности берет свое начало в точке $(-\pi/2, 0)$. Экстремали вида 2–11 отвечает финальное условие $(0, 0, \cos \phi, \sin \phi)$, где $-\pi/2 < \phi < \pi/2$.

Для экстремалей вида 12–16 $|\phi| > \pi/2$. В таблице приводятся время и значение ϕ для изображенной части экстремалей:

№	Время t	Значение φ
1	множество неоднозначности	
2	$[0; -7]$	$-1,55$
3	$[0; -7]$	$1,51$
4	$[0; -6,4]$	$-1,54$
5	$[0; -6,4]$	$1,49$
6	$[0; -5,5]$	$-1,52$
7	$[0; -5,5]$	$1,45$
8	$[0; -4,3]$	$-1,44$
9	$[0; -4,3]$	$1,34$
10	$[0; -3,1]$	$-1,05$
11	$[0; -3,1]$	$0,98$
12	$[0; -3,5]$	—
13	$[0; -5]$	—
14	$[0; -5,5]$	—
15	$[0; -7]$	—
16	$[0; -7]$	—

5. Заключение. Предложенная конструкция позволяет определять параметры точки неоднозначности. Если в исследуемых точках $(\hat{t}, \hat{\tau}, \hat{s})$ константа l_1 окажется отделенной от нуля числом $l_0 > 0$, $l_1 > l_0$, то для исследования полосы $\left\{ (t, \tau, s) : |t - t_1| < \frac{l_0^2}{8C}, \tau, s \notin A \right\}$ потребуется конечное число шагов, количество которых зависит от констант l_0, C_1, C .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Галеев Э. М. и др. Оптимальное управление. М.: изд. МЦМНМО, 2008. 320 с.
2. Николенко П. В. О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2011. Т. 47. № 5. С. 736–743.
3. Николенко П. В. Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 376–384.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1967. 659 с.

В. А. Родин, С. В. Синегубов (Воронеж)
rodin_v@mail.ru, sinusdvm@mail.ru
О ФРАКТАЛЬНОМ ПОСТРОЕНИИ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В работе рассматривается фрактальное построение плоских последовательно-параллельных систем. Показана возможность применить теорему Шеннона-Мура о существовании неподвижной точки для построения таких систем. Определен исходный модуль, обладающей неподвижной точкой, с минимально возможным количеством одинаковых элементарных элементов с невысокой вероятностью безотказной работы. Показан пример фрактального построения сложной системы путем замены каждого элемента исходного модуля самим модулем.

The paper discusses the fractal construction of flat series-parallel systems. It is shown that the Shannon-Moore theorem on the existence of a fixed point can be used to construct such systems. An initial module with a fixed point, with the minimum possible number of identical elementary elements with a low probability of trouble-free operation, is determined. An example of the fractal construction of a complex system is shown by replacing each element of the original module with the module itself.

Работы Дж. Неймана, Э. Мура и К. Шеннона [1,2], по исследованию сложных структур — двухполосников, состоящих из элементарных элементов, послужили основанием для появления обширной теории надежности, основы которой изложены в книге Р. Берлоу и Ф. Прошана [3]. В этих работах для повышения надежности последовательно-параллельных структур используется увеличение размерности соединений и самоподобное размножение определенных модулей. Эффект увеличения надежности происходит не всегда, а зависит от возможности применить теорему Шеннона-Мура [2] о существовании неподвижной точки определенного сжимающего преобразования. В указанных источниках представлен только один модуль участвующий в самоподобном, теперь можно сказать — фрактальном размножении. В этих и дальнейших известных авторам работах, например [4,5] представлен обширный анализ сложных систем составленных из одинаковых элементов, но не рассматривалась задача поиска наилучшего с практической точки зрения модуля удовлетворяющего указанной теореме Шеннона-Мура. В настоящей работе эта задача представлена.

Определение 1. Под надежностью элемента будем понимать вероятность его безотказной работы за время t не меньшее, чем фиксированное время T : $p = P(t \geq T)$. Рассматриваются одинаковые элементы с одним и тем же временным ограничением T . Указанные элементы объединяются в

различные структуры. Надежность этих структур будем обозначать функциями $H(p)$ с разными индексами. Надежность данных структур зависит от p , числа элементов в структуре и способа организации структуры.

Определение 2. Под модулем будем понимать простейшую схему соединений одинаковых элементов с надежностью модуля — $h(p)$, для которой справедливо следующее: решение p_0 уравнения $h(p) = p$ лежит в интервале $(0,1)$.

Определение 3. Надежность ФРС после n итераций вычисляется по формуле

$$H(p, n) = \underbrace{h(h \dots (h(p)) \dots)}_n,$$

где $h(p)$ — надежность модуля. Если k_m — число элементов в модуле, то $N = (k_m)^n$ — число элементов в ФРС.

Для пояснения выбора элемента размножения — модуля, приведем одну формулировку теоремы Шеннона-Мура [2].

Теорема. Если функция $h(p)$ обладает свойствами:

а) непрерывна и монотонно возрастает на $[0,1]$,

б) $h(0) = 0$, $h(1) = 1$,

в) решение p_0 уравнения $h(p) = p$ лежит в интервале $(0,1)$,

то при $n \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) для $p > p_0$ имеем $H(p, n) \rightarrow 1$, а для $p < p_0$ — $H(p, n) \rightarrow 0$.

Фрактальное образование (ФРС) происходит следующим образом. Определяется исходный модуль, который удовлетворяет свойствам а)–в) теоремы Шеннона-Мура. На следующем шаге каждый элемент выбранного модуля представляется в виде самого модуля. Например, если имеется приведенный на рис. 1.1 модуль, то на втором шаге размножения получим схему, изображенную на рис. 2, состоящую из 16 элементов, где пунктирным прямоугольником отмечен исходный модуль.

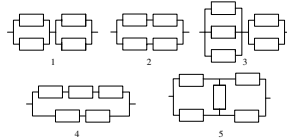


Рис. 1: Варианты модулей

Необходимость модуля иметь неподвижную точку, лежащую внутри интервала $(0,1)$, вызвана известной способностью ФРС увеличивать свою надежность при увеличении размерности системы при использовании элементов в модуле с собственной надежностью больше значения данной

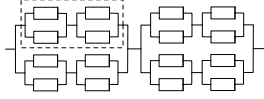


Рис. 2: Размножение модуля

неподвижной точки и основана на применении указанной теоремы. Модулей с небольшим числом составляющих элементов немного. Среди модулей с тремя элементами таких нет. Примеры простейших схем-ячеек (модулей) приведены на рисунке 1.к ($k = 1, 2, 3, 4, 5$).

Число элементов в ФРС растет как $N = (k_m)^n$, где k_m — число элементов в модуле.

Задача выбора наилучшего модуля обладает следующими особенностями:

1. Необходимо найти модуль с надежностью $h(p)$, для которого решение p_0 уравнения $h(p) = p$ имеет наименьшее значение. Это позволит использовать для построения системы элементы с низкой надежностью.

2. По возможности использовать наименьшее число элементов в ФРС при фиксированной надежности одного элемента. В этой работе из практических соображений изучаются свойства модулей составленных из не более пяти одинаковых элементов.

Фактически имеем двухфакторную задачи оптимизации. Выбор преимущественного фактора или построение множества Парето определяется задачами практики.

Сравним значения неподвижной точки для модулей, представленных на рисунке 1.

1. Функция надежности модуля, представленного на рисунке 1.1, имеет вид $h_1(p) = [1 - (1 - p)^2]^2$ и уравнение для определения неподвижной точки $h_1(p) = p$ в качестве решения имеет $p_{01} \approx 0,3820$. Эта схема приведена и в монографии [3].

2. Для схемы, приведенной на рисунке 1.2, аналогично получим функцию надежности $h_2(p) = 1 - (1 - p^2)^2$ и при решении уравнения $h_2(p) = p$, получаем $p_{02} \approx 0,618$. Значит для построения ФРС с использованием данного модуля потребуются более надежные элементы по сравнению с модулем, изображенным на рисунке 1.1.

3. Возможна так же конструкция из пяти элементов. Схема такого модуля приведена на рисунке 1.3, с функцией надежности $h_3(p) = [1 - (1 - p)^3] \cdot [1 - (1 - p)^2]$. Численное решение уравнения $h_3(p) = p$ имеет значение $p_{03} \approx 0,2451$.

4. Двойственная к 1.3 схема 1.4, которая имеет функцию надежности $h_4(p) = 1 - (1 - p^3) \cdot (1 - p^2)$. Неподвижная точка $p_{04} \approx 0,755$. Такое

соединение требует использования элементов с высокой надежностью и не выдерживает конкуренции со схемой 1.3.

5. Мостиковая схема 1.5, состоящая так же из пяти элементов, имеет функцию надежности $h_5(p) = p \cdot [1 - (1 - p)^2]^2 + (1 - p) \cdot [1 - (1 - p^2)^2]$. Значение неподвижной точки составляет $p_{05} \approx 0,5$. Данная схема так же проигрывает схеме 1.3. Кроме того мостиковая схема не применяется в схемах пожаро-охранной сигнализации.

Для сравнения численности ФРС при фиксированной вероятности безотказной работы приведем графики (рис. 3), показывающие следующие закономерности:

1. При использовании малонадежных элементов ($p < p_{03}$) в ФРС невозможно увеличение надежности всей схемы. Использование элементов с надежностью $p < 0,4$ возможно только для модуля, соединенного по схеме 1.3.

2. Если использовать элементы с надежностью $p > 0,7$, то уже третья итерация схемы 1.2, при числе элементов $N = 4^3 = 64$, дает наивысшее, по сравнению с остальными, значение надежности всей схемы $H_2(0,7; 64) \approx 0,865$.

3. Сравнение численности используемых элементов для получения схемы с надежностью с большей 0,8 для модулей 1.2 и 1.3 показывает преимущество схемы, образованной модулем 1.3.

Изменения численности элементов при использовании модуля 1.3 приведены для удобства на одном графике с модулями 1.1 и 1.2 (рис. 3). Так как в модуле 1.3 — 5 элементов, то точки соответствующие численности фрактальных расширений графика $h_3(p)$ сдвинуты на множитель $\log_4 5$. Таким образом, имеем преобразование $k \rightarrow k \cdot \log_4 5$.

Выводы:

1. Для получения ФРС большой надежности, имея надежные элементы, целесообразно применять модуль, изображенный на рисунке 1.2 (кривая $h_2(p)$). Для построения конструкции, использующей малонадежные элементы, преимущество имеет модуль 1.3 (кривая $h_3(p)$).

2. Несложные вычисления показывают, что других моделей составленных из 4 или 5 элементов, функция надежности которых имела бы неподвижную точку расположенную строго в интервале $(0,1)$ нет. Сложность фрактальных изменений при использовании 6 элементов в модуле растет как 6^n и использование таких модулей экономически нецелесообразно.

3. При незначительной цене элемента, образующего модуль, системы большой размерности найдут широкое применение в специальных релейных цепях и системах блокировки в ядерных реакторах. Применение возможно для контроля уровня радиоактивности воздуха в вентиляционной системе в интересах обеспечения остановки реактора в случае опасного уровня радиоактивности. А также при организации пожаро-охранной сигнализации многоярусных шахт, приисков, метрополитенов, куполов анга-

ров и стадионов и др.

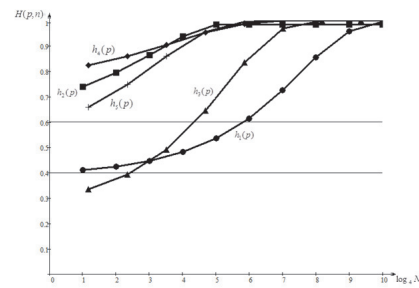


Рис. 3:

Простота расчета надежности размножающихся образований стимулирует их дальнейшее изучение в плане практического использования на охраняемых объектах большой конструктивной размерности.

Для расчета надежности ФРС и ППС с различным количеством элементов авторами были разработаны соответствующие компьютерные программы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонентов. М.: Иностранная литература, 1956.
2. Moore E. E., Shannon C. E. Reliable circuits using less reliable relays // Y. of the Franklin Institute. 1956. Т. 262. С. 191–208.
3. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности // М.: Советское радио, 1969.
4. Tkachev O. Analytical estimation of reliability of networks consisting of identical elements // Reliability-Theory and Application. Т. 2. № 21. С. 9–20.
5. Родин В. А, Синегубов С. В. Анализ надежности некоторых специальных систем большой размерности // Вестник Воронежского института МВД РФ. 1998. № 2. С. 12–14.

Секция III
Алгебра, дискретная
математика, геометрия

С. И. Гуров, Г. В. Кормаков, Т. Д. Жукова (Москва)
sgur@cs.msu.ru, egor2898@mail.ru, zhukova_t@ippm.ru
СБООУСТОЙЧИВЫЕ ОБРАТИМЫЕ СХЕМЫ

Аннотация

В работе рассмотрены основные понятия, связанных с обратимыми вычислениями. Обратимые элементы имеют малое энергопотребления, большую скорость вычислений и повышенную плотность расположения вентилей на кристалле. Последнее обстоятельство послужило причиной их более детального изучения, в частности, сбоеустойчивости и тестируемости. Благодаря указанным преимуществам, обратимая схемотехника отвечает основным требованиям современной технологии ВТ.

Предложен оригинальный метод синтеза сбоеустойчивых обратимых элементов в поляризованном пространстве Хэмминга, обладающий высокой способностью корректировать как единичные, так и многократные ошибки.

Рассмотренные методы синтеза сбоеустойчивых схем уже являются важными для обратимой схемотехники. В то же время на сегодняшний день настоятельной необходимостью является создание обратимых сбоеустойчивых таких стандартных элементов, как мультиплексор, демультиплексор, шифратор, дешифратор, сумматор и триггеры и др. Также требует развития общая теория синтеза рассматриваемых схем.

Abstract

The paper deals with the basic concepts associated with reversible computations. Reversible elements have low power consumption, high computational speed and increased density of the gates on the chip. The latter circumstance caused their more detailed study, in particular, failure stability and testability. Thanks to these advantages, reversible circuitry meets the basic requirements of modern technology BT.

An original method for the synthesis of fault tolerant reversible elements in a polarized Hamming space is proposed, which has a high ability to correct both single and multiple errors.

The considered methods of synthesis of fault tolerant circuits are already important for reversible circuitry. At the same time, for today, an urgent need is to create reversible, fault-tolerant standard elements such as multiplexer, demultiplexer, encoder, decoder, adder and triggers, etc. Also, the general theory of synthesis of the schemes under consideration requires development.

Введение

Современные возрастающие требования по быстродействию, объёмам используемой памяти, плотности элементов на кристалле, надёжности вычислений и др. приводят к тому, что классические информационные технологии на элементной базе интегральных микросхем ИМС перестают им отвечать.

Основной из недостатков связан с тем, что обеспечение указанных требований ведёт к значительному выделению тепла. Современная цифровая электроника изготавливается на основе металл-оксидных полевых транзисторов (MOSFET). Согласно законов термодинамики, при выполнении логических операций классическими схемами на каждый потерянный бит информации выделяется энергия $kT \ln 2$ Дж, k — постоянная Больцмана, T — температура в градусах Кельвина (принцип Ландауэра [1]). Одним из способов принципиального решения проблемы тепловыделения является переход к использованию техники обратимых вычислений [2]. Ш. Бене предложил трёхшаговую процедуру, делающую обычные вычисления обратимыми [2].

В последнее активизировались исследования по разработке синтеза обратимых схем, как комбинационных, так и последовательностных [3, 4, 5, 6].

Второй важной проблемой современной ВТ является надёжность функционирования ИМС, причём на первый план здесь выходит задача обеспечения их устойчивости к кратковременным самоустраиваемым отказам или *сбоям* (SEU, single event upsets). Современные специализированные вычислительные устройства часто работают в условиях воздействия внешней радиации. До 50% отказов в современном оборудовании, работающем в условиях воздействия внешней радиации, связаны с влиянием дозовых и однократных радиационных эффектов. При уменьшении проектных норм до нанометров, энергия активации, вызывающая ошибки, уменьшается. Поэтому сбоеустойчивость является важнейшим требованием к аппаратуре, работающей, например, в тяжелых условиях космоса. Это вызвало появление и активное развитие направления радиационно-стойкого проектирования (RHBD, Radiation Hardening by Design) основанное на использовании различных методов повышения сбоеустойчивости ИМС [7, 8, 9].

В данной статье рассмотрены основные существующие модели построения сбоеустойчивых обратимых комбинационных схем и предложен новый подход к данной проблеме.

1 Обратимые элементы

Обратимые элементы (гейты, вентили) выполняют элементарную логическую операцию, преобразуя входные сигналы в выходные таким обра-

зом, что по выходным величинам можно восстановить входные. Ясно, что этим свойством будет обладать и построенная из них схема.

Элемент с n входами будет обратимым, если и только если он осуществляет некоторую биекцию (перестановку) на множестве всех 2^n возможных своих входов. Как следствие, такой элемент должен иметь n выходов; обозначение — $n \times n$ -элемент. Рассматривают и т. н. *полуобратимые элементы*, осуществляющие инъективное преобразование входы в выход, они имеют n входов и $m \geq n$ выходов.

Входы обратимых элементов разделяются на *управляющие* и *управляемые*. Первые называют также *адресными*, и они суть константы, определяющие конкретную функцию, реализуемую гейтом, а управляемые входы являются аргументами данной функции. На выходах обратимого элемента имеются *сигнальные* (информационные, представляющих значения вычисляемых функций) биты и, как правило, ещё и дополнительные, называемые *мусорными* или *стоками*¹. Последние играют очень важную роль, давая возможность однозначно восстановить входной вектор по выходному, т. е. обратить вычисления. Если их отбросить, стереть, произойдет рассеяние энергии, а именно этого пытаются избежать.

Опишем кратко основные виды обратимых комбинационных элементов [10, 11, 5].

1. *Инвертор* (NOT) — 1×1 -элемент, осуществляющий безусловное инвертирование входа.

2. *Обмен* (SWAP) — 2×2 -элемент, меняющий на выходе местами свои два входа.

3. *Контролируемый инвертор* (CNOT, Controlled NOT, элемент Фейнмана, FG) — 2×2 -элемент, реализующий *условное инвертирование*. Первый вход² A — управляющий, без изменений передающийся на выход P , а второй вход B будет инвертирован на выходе, если и только если $A = 1$: $Q = A \oplus B$.

Изображения описанных элементов приведены на рис. 4.

Ясно, что эти простейшие элементы вычислительно не универсальны. Универсальный элемент должен обеспечить (1) реализацию функциональ-

¹ англ. *garbage* и *sink* соответственно

² Входы рассматриваемых далее элементов будем, как правило, обозначать литерами с начала алфавита: $A, B, \dots$, а выходы — с середины алфавита: $P, Q, \dots$. Иногда удобнее обозначения $A_1, A_2, \dots$ и $P_1, P_2, \dots$ соответственно. В формулах штрихом ' обозначают инвертирование, знак конъюнкции $\cdot$ принято опускать.

Для удобства изображения схем часто элементы изображают указанием соединений ($\bullet$) и операции «сумма по $\text{mod } 2$ » ($\oplus$) на параллельных горизонтальных линиях, на которые подаются входные переменные. На схемах иногда входы и выходы обозначают литерами $x, y, \dots$, а их порядок указывают положением на элементе сверху вниз.

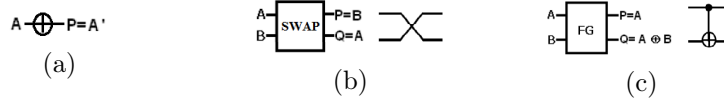


Рис. 4: Изображения элементов (a) NOT, (b) SWAP, (c) FG.

но полной системы булевых функций и (2) организацию последовательного соединения гейтов с ветвлением сигнала — *каскадирование*.

4. Гейт Тоффоли (CCNOT, TG) — 3×3 -гейт, реализующий формулы

$$P = A, \quad Q = B, \quad R = C \oplus AB.$$

Очевидно, TG вычислительно универсален: при $A = B = 1$ он реализует инвертирование NOT, а при $C = 0$ — конъюнкцию AND2. На элементах Тоффоли можно осуществить операцию ветвления и передачу сигнала: при входном векторе $(A, 1, 0)$ на его выходе будет вектор $(A, 1, A)$.

5. Гейт Фредкина (CSWAP, Controlled SWAP, FRG) — 3×3 -гейт. Первый вход A — управляющий: если он равен 1, то остальные два входа B, C на выходе поменяются местами, в противном же случае этого не происходит:

$$P = A, \quad Q = A'B \vee AC, \quad R = AB \vee A'C.$$

Нетрудно видеть, что элемент CSWAP также вычислительно универсален.

6. Гейт Переса (PG) — 3×3 -гейт:

$$P = A, \quad Q = A \oplus B, \quad R = C \oplus A \cdot B.$$

При $C = 0$ PG реализует полусумматор: A и B — суммируемые разряды, Q — сумма, R — перенос в следующий разряд и P — мусорный бит. Гейт Переса может быть представлен в виде гейтов TG и CNOT, соединённых последовательно (рис. 5 (c)).

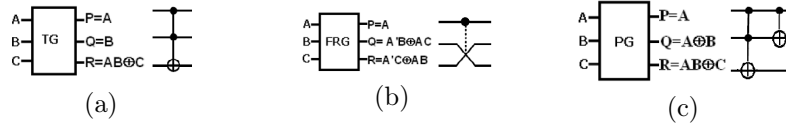


Рис. 5: Изображение элементов (a) TG, (b) FRG, (c) PG.

Следующие элементы возникли как обобщения рассмотренных выше [12, 13, 14].

7. Обобщённый (множественно управляемый) гейт Тоффоли (МСТ, Multiple-Control Toffoli Gate) — $n \times n$ -гейт, у которого первые $n - 1$ входов управляющие, последний из выходов — сигнальный, реализующий сумму по *mod 2* последнего входа и конъюнкции всех остальных:

$$P_i = A_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad P_n = A_n \oplus A_1 \dots A_{n-1}.$$

8. *Гейт Тоффоли с отрицающим управлением* (Negative-Control Toffoli Gate) — $(n \times n)$ -гейт, входы которого разбиваются на положительные и отрицательные, а единственный сигнальный выход инвертируется если и только если все положительные входы имеют значение 1, а все отрицательные — 0.

9. *Расширенный гейт Тоффоли* (ETG) — $(n+1) \times (n+1)$ -гейт, у которого первые $n-1$ входов — управляющие, а последние два выхода сигнальные:

$$P_i = A_i, i = \overline{1, n-1}, P_n = A_n \oplus A_1 \dots A_{n-1}, P_{n+1} = A_{n+1} \oplus A_1 \dots A_{n-1}.$$

Примеры последних двух элементов приведены на рис. 6.

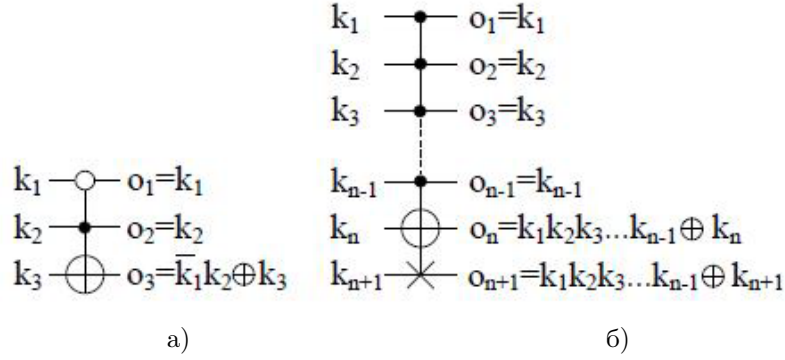


Рис. 6: а) 3-битный гейт Тоффоли с отрицающим управлением; б) n -битный ETG

10. *Множественно управляемый гейт Фредкина* (MCF, Multiple-Control Fredkin Gate) — $n \times n$ -гейт, у которого первых $n-2$ управляющие, и n выходов $P_1, \dots, P_n$, а последние два выхода — сигнальные, повторяющие последние два управляемых входа, если все управляющие входы — единичные, или не делая этого, иначе.

В литературе описаны также обратимые гейты других типов [5, 15, 16, 17, 18].

2 Обратимые схемы

Для целей синтеза схем обратимые элементы объединяют, как обычно, в библиотеки. Ниже указаны наиболее известные из них; три последние библиотеки — параметрические [15, 16].

- **НСТ** — включает в себя NOT, CNOT, TG; является наименьшим набором элементов, из которых можно составить любую обратимую схему.

- **NCTSF** — к **NCT** добавлены SWAP и элемент Фредкина.
- **NCTSFP** — к предыдущей библиотеке добавлен гейт Переса.
- **MCT** — состоит из n -битных обобщённых элементов Тоффоли (включает в себя все гейты из **NCT**);
- **MCT+MCF** — к предыдущей добавлены множественно управляемые гейты Фредкина (включает в себя все предыдущие библиотеки, за исключением **NCTSFP**);
- **MCT+PG** — к **MCT** добавлен гейт Переса.

Среди методов синтеза обратимых схем выделяют следующие методы [19, 17, 6].

Метод отображений — используя обратимость, синтез проводится от выхода к входу, в ходе которого заданная функция, преобразовывая к тождественной.

PPRM (Positive-Polarity Reed–Muller) — создаётся дерево поиска с корневым узлом, от которого расходятся все выходящие переменные. В последствии из всех возможных представлений лучшее преобразуется в элемент Тоффоли.

*ESOP*³ Метод основан на представлении булевой функции в виде суммы по $mod 2$ элементарных конъюнкций. Булева функция представляется в виде списка ячеек, каждая из которых соответствует одному или нескольким обратимым элементам.

Метод решающих диаграмм основан на представлении функции алгебры логики в форме двоичной диаграммы решений (*BDD, Binary Decision Diagram*). Далее узлы построенной диаграммы далее преобразовываются в элементы Тоффоли.

RFTPLA. Эти алгоритмы реализованы для представления функций в форме ESOP. Синтезированные схемы имеют минимальное количество ключей и битов мусора. При синтезе используются элементы FG и F2G.

Cycle-based алгоритмы, основанные на представлении заданного биективного отображения в виде произведения независимых циклов (подстановки). Данное представление заменяется на эквивалентное и, возможно, избыточное, но удобное для синтеза по частям. Алгоритмы синтеза такого типа позволяют получать обратимые схемы с асимптотически оптимальной сложностью.

3 Сбоеустойчивость и сбоеустойчивые элементы

На сегодняшний день в области обратимой схемотехники исследования по повышению сбоеустойчивости схем идут по пути синтеза самокорректиру-

³ SOP — Sum of Production, сумма произведений, дизъюнкция элементарных конъюнкций, ДНФ; ESOP — строгая сумма элементарных конъюнкций.

емых схем, создаваемых на основе различных методов. *Самокорректируемость* функциональных блоков есть свойство обнаруживать и исправлять неисправности как в основной, так и в дополнительной аппаратуре. Последнее свойство позволяет избежать проблемы «сторожа над сторожем». Отметим, что простейшим здесь является *тройного модульного резервирования* (TMR, *Triple Modular Redundancy* или *троирования*), при котором результат определяется *мажорированием* «голосования 2 из 3» выходов трёх экземпляров основной схемы. Данную схему мажорирования называют *воутером*⁴.

Создание самокорректируемых схем является задачей синтеза вычислительных устройств с дополнительными требованиями. Заметим, что для большинства параметрических семейств функций алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ доказана возможность построения самокорректирующих схем, сложность которых на логическом уровне асимптотически, при $n \rightarrow \infty$, равна сложности схем без самокоррекции [20].

В простейшем случае сбоеустойчивая схема обеспечивает лишь обнаружение возникшей ошибки. Для этого используют либо схемы контроля чётности (сумма по *mod 2*), либо схемы, устойчивые к ошибкам. Схемы первого типа обеспечивают обнаружение на выходе однократной ошибки (точнее, ошибок нечётной большей кратности, но не может различить их), в то время как схемы второго типа могут обеспечить обнаружение ошибок произвольной кратности.

Рассмотрим сначала обратимые логические элементы с контролем чётности. Обратимый элемент называют *элементом, сохраняющим чётность*, если чётности входных и выходных данных совпадают. Укажем известные такие элементы [21, 22, 23, 24].

1. Элемент Фредкина FRG, рассмотренный выше.

2. *Двойной элемент Фейнмана* (F2G, Feynman Double Gate) — 3×3 -гейт, реализующий формулы

$$P = A, \quad Q = A \oplus B, \quad R = A \oplus C.$$

3. *Новый сбоеустойчивый элемент* (NFT, New Fault Tolerant Gate) — 3×3 -гейт не имеющий адресных входов, реализующий формулы

$$P = A \oplus B, \quad Q = B'C \oplus AC', \quad R = BC \oplus AC'.$$

4. *Элемент Ислама*⁵ (IG, Islam Gate) — 4×4 -гейт с первым адресным входом, реализующий формулы

$$P = A, \quad Q = A \oplus B, \quad R = AB \oplus C, \quad S = BD \oplus B'(A \oplus D).$$

5. *Модифицированный элемент Ислама* (MIG, Modified IG) — улучшенная версия 4×4 -гейта IG, реализующая для первых трёх выходов те же формулы, что и IG и $S = AB' \oplus D$.

⁴ англ. *voter*, участник голосования

⁵ предложен Сайфулом Исламом в 2009 г.

Обратимый элемент называется *устойчивым*, если вес Хэмминга (количество логических единиц) одинаков для входа и выхода. Только один из приведённых выше элементов является устойчивым — это элемент Фредкина FRG. Устойчивые элементы хоть и обеспечивают обнаружение более чем одной ошибки, имеют большую сложность. Соответственно усложняются и схемы их таких элементов.

Схема называется *сбоеустойчивой*, если она обеспечивает обнаружение или обнаружение и исправление ошибок на своём выходе. Переходя от элементов к схемам, замечаем, что существует два вида сбоеустойчивых схем: схемы, сохраняющие чётность, состоящие из сохраняющих чётность обратимых элементов, и схемы, устойчивые к ошибкам.

Примером схемы первого вида может служить сумматор, предложенный С. Исламом [21] и показанный на рис. 7.

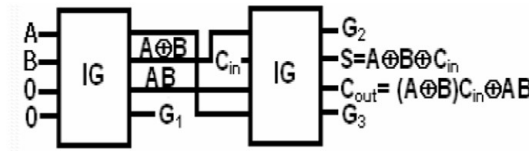


Рис. 7: Однобитный обратимый сумматор на элементах IG.

Пример устойчивого полного сумматора можно найти в [25].

4 Модели сбоев и функциональная диагностика

Для анализа сбоев и разработке методов их парирования рассматривают различные типы возникающих ошибок [26, 27, 28, 29, 30, 31]. К ним относятся возникающие и при исследовании и обычных, необратимых схем *константная ошибка*, когда данный бит выхода всегда принимает константное значение 0 или 1 и *битовая ошибка* — инвертирование выходного бита. Специфической ошибкой обратимых схем является *узловая ошибка* (crosspoint fault model) элементов Тоффоли описанных типов. При этом рассматривают ошибки *возникновения* (appearance fault) или *исчезновения* (disappearance fault) разрядов; см. рис. 13.

Далее мы рассматриваем исключительно *функциональное* (онлайн) *диагностирование*, обеспечивающее контроль объекта в процессе его штатной работы, как ориентированное на решение проблемы сбоеустойчивости.

Далее рассмотрены основные подходы решения указанной задачи.

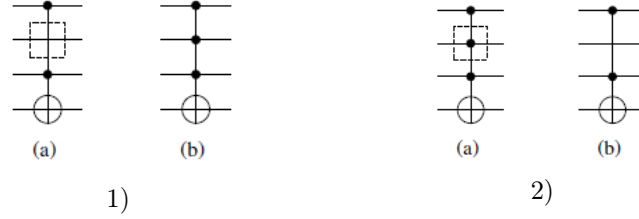


Рис. 8: Схемы появления узловых ошибок возникновения (1) и исчезновения (2): (a) — до появления сбоя, (b) — после.

4.1 Модификация схемы до сбоеустойчивой

Для обеспечения возможности обнаружения ошибки всех основных элементов библиотеки NCTSF были предложены расширения для схем из элементов MCF и Переса [17]. Так, $n \times n$ - элемент MCF становится онлайн-тестируемым: одиночная ошибка может быть обнаружена добавлением дополнительной линией L и p элементов CNOT справа и слева от основного, где p — количество входных линий. На рис. 9 дан пример такого расширения для 3-х битового MCF.

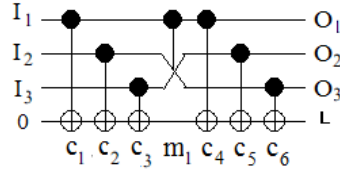


Рис. 9: Схема на элементах MCF, сохраняющая чётность.

Для достижения его онлайн-тестируемости схем на элементах Переса каждый такой элемент замещается на элемент MIG с добавлением $2p$ элементов CNOT. Если представить элемент MIG в виде, показанном на рис. 10, то схема, изображённая на рис. 9 преобразуется модифицируется в тестируемую, показанную на рис. 11. В результате этого замещения на дополнительной линии при безошибочном функционировании появляется 0, а при возникновении ошибки (на остальных линиях) — 1.

4.2 Использование специально разработанных элементов

Перечислим основные методы в рамках этого направления.

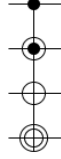


Рис. 10: Элемент MIG.

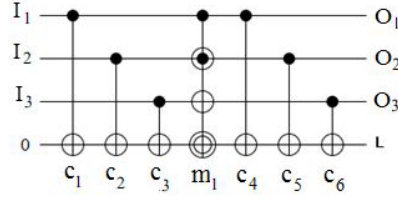


Рис. 11: Модифицированная схема с рис. 9.

1. Схемы на элементах $R1$, $R2$ и R [29, 32]. Данный метод основан на использовании трёх новых обратимых элементов, названных авторами $R1$, $R2$ и R .

$R1$ и $R2$ — 4×4 -элементы, а R — $3 \times$ -элемент. Они реализуют следующие функции; обозначения входов и выходов — авторские.

Элемент $R1$: входы суть a , b , c и p , выходы — u , v , w , q ,

$$u = a \oplus c, v = b \oplus c \oplus ab \oplus bc, w = a \oplus b \oplus a, q = p \oplus c \oplus ab \oplus bc.$$

Элемент $R1$ может при различных адресных входах реализовать штрих Шеффера (NAND), дизъюнкцию (OR), сумму по $mod 2$ (EXOR), эквивалентность (XNOR), а сигнальный выход q реализует сумму по $mod 2$ всех выходов.

Элемент $R2$: входы суть d , e , f и r , выходы — x , y , z , s ,

$$x = d, y = e, z = f, s = r \oplus d \oplus e \oplus f.$$

Элемент $R2$ имеет единственный управляемый вход и сигнальный выход s , реализующий сумму по $mod 2$ всех входов.

Элемент R : входы суть a , b и c , выходы — l , m , n ,

$$l = a \oplus b, m = a, c = ab \oplus c'.$$

Схемы (ТВ, тестируемые блоки) составляются из этих элементов, см. рис. 12.

Итоговая схема ТВ содержит два выхода чётности — q и s . Далее строится проверяющая схема (checker circuits) из 8 элементов R для тестирования указанных выходов двух тестируемых блоков.

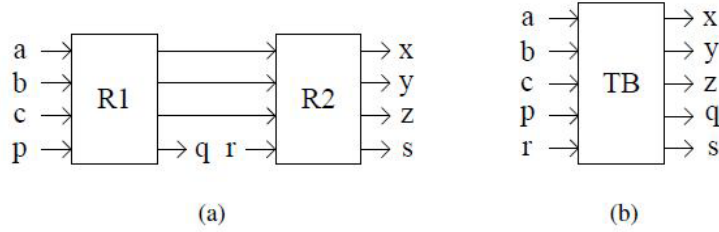


Рис. 12: Соединение элементов R1 и R2 и синтезированная схема TB.

Для большего числа блоков используются каскады проверяющих схем. Также метод требует ресинтеза схемы, при котором увеличивается количество ключей и добавляется проверяющий элемент.

2. *Схемы на тестируемых обратимых ячейках* (TRCs, Testable Reversible Cells). Махаммед и др. в 2006 г. предложили метод синтеза обратимых схем из так называемых $n \times n$ -элементов TRCs [30]. Эти элементы, в свою очередь, составляют комбинацией вводимых гейтов DRG (G) и DRG (X). Для $m \times m$ -схем требуется m экземпляров TRCs. Метод обеспечивает лишь частичное обнаружение ошибок.

3. *Схемы на онлайн-тестируемых элементах* (OTG, Testable Circuits using Online Testable Gate). Метод основан на использовании новых 4×4 обратимых элементов OTG, Фаразманд и др. [33].

Элемент OTG: входы суть a, b, c и p , выходы — u, v, w, q ,

$$u = a, v = a \oplus b, w = (a \oplus b)c \oplus c(ab \oplus p), q = a \oplus c \oplus b.$$

Новые блоки строятся последовательным соединением R2 и OTG.

Метод также обеспечивает частичное обнаружение ошибок (проблема «сторожа над сторожем»). Однако основным недостатком описанных методов является обеспечение лишь частичного фиксирования ошибок.

4. *Схемы с парофазными каналами* (Testable Circuits using Dual Rail Reversible Gates). Метод использует набор вводимых обратимых 4×4 элементов с двумя парами входов, на каждый из которых сигнал подаётся в парофазном виде: 01 или 10 [34]. Непарофазный выход означает возникновение битовой ошибки. Здесь нет необходимости в элементе проверки, так как ошибка фиксируется проверкой выходного вектора. Однако недостатком этого метода является необходимость ресинтеза основной схемы, поскольку он неприменим к базовым обратимым элементам.

Метод обеспечивает исчерпывающее тестирование, однако требует переконструирования схем.

5. *Схемы на ESOP*. Найим и др. в 2011 году предложили метод конструирования таких схем [35]. Рассматриваются схемы на n -битовых эле-

ментах Тоффоли. Метод превращения такой схемы в сбоеустойчивую заключается в следующем:

- 1) в схему добавляют одну чётную линию L ;
- 2) все n -битовые элементы Тоффоли заменяются на $(n + 1)$ -битовые ETG;
- 3) для каждого элемента NOT, найденного в схеме, добавляется один элемент NOT на линии L ;
- 4) добавляется q элементов Фейнмана (CNOT) на линию L для всех выходных линий, где q — количество выходных линий;
- 5) добавляются $2p$ элементов CNOT на линию L , по p элементов с каждой стороны от уже полученной схемы, где p — количество входных линий.

Пример получения из обратимой схемы, основанной на ESOP, функционально тестируемой схемы, приведён на см. рис. 13.

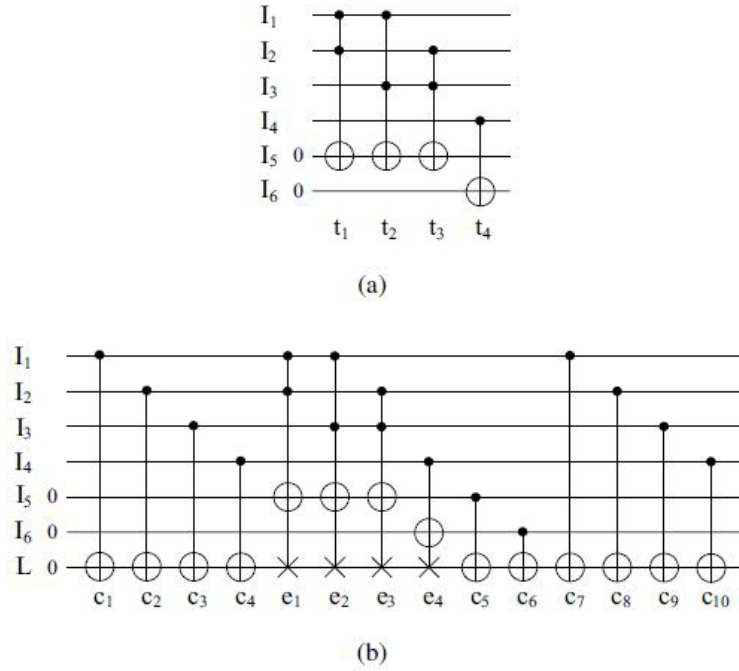


Рис. 13: Построение схемы ESOP: (a) — исходная и (b) — полученная сбоеустойчивая схемы.

Плюсами данного метода является лёгкость в реализации.

6. *Схемы на ETG*. В 2011 г. Найим и др. предложили ещё один метод, являющийся модификацией предыдущего [28]. Данный метод, являющийся модификацией предыдущего, возможно применить для схем, имеющих только элементы Тоффли:

- 1) в схему добавляют одну чётную линию L ;
- 2) все n -битовые элементы Тоффли заменяются на $(n + 1)$ -битовые ETG;
- 3) добавляются $2p$ элементов Фейнмана (CNOT) на линию L , по p элементов с каждой стороны от уже полученной схемы, p — количество линий, которые работают как выходные, так и входные.
- 4) в отличие от предыдущего метода, количество элементов NOT подсчитывается и, если оно нечётное, то добавляется один элемент NOT на линию L в конец схемы.

Пример см. на рис. 14.

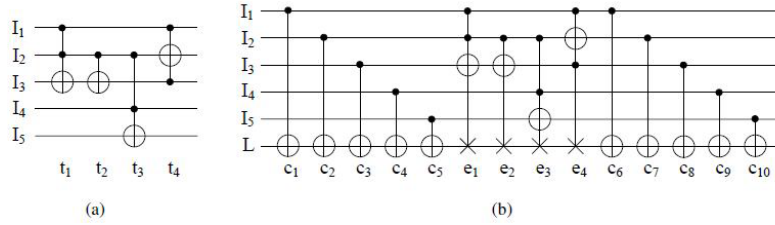


Рис. 14: Построение сбоеустойчивой схемы на ETG: (a) — исходная и (b) — полученная сбоеустойчивая схемы.

Последние два метода не требуют ресинтеза исходной схемы. Также они явно эффективнее предыдущих по количеству добавляемых ключей и мусора.

4.3 Использование элементов, сохраняющих чётность

Это простейший из методов обеспечения сбоеустойчивости, не приводящий к значительному увеличению сложности схемы. Заметим, однако, что использование контроля чётности для диагностирования ошибок имеет ограниченную эффективность; примеры приведены в [36]. Поэтому даже если обратимая схема сохраняет четность, она должна быть протестирована на возможность появления ошибки в рамках конкретной модели.

Необходимым и достаточным условием того, что схема будет контролировать чётность, является условие её синтеза из сохраняющих чётность

элементов. Для обеспечения этого свойства возможны следующие подходы.

Во-первых, поскольку сохраняют чётность указанные в п. 4. элементы F2G, FRG, NFT, IG, MIG (и SWAP), то возможен синтез схем с использованием только этих элементов. Отметим, что в большинстве работ основными элементами, используемыми при синтезе сбоеустойчивых обратимых схем являются F2G и MIG.

Во-вторых, возможна модификация обратимых гейтов, в результате которых они приобретут требуемое свойство.

Сохраняющий чётность элемент Тоффли [22] (с выходом $AB \oplus C$) и его улучшенный вариант [21] представлен на рис. 15.

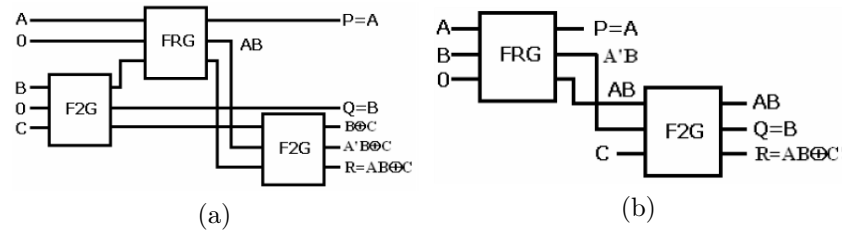


Рис. 15: Обратимый сохраняющий чётность элемент Тоффли: схемы (a) — Пархами, (b) — Ислама.

А. Джейном предложен универсальный механизм преобразования обратимых элементов в сохраняющие чётность [17]. В частности, результатами работы данного алгоритма являются:

- 1) сохраняющий чётность 4×4 -элемент Тоффли (PPTG, Parity-Preserving Toffoli Gate):

$$P = A, \quad Q = B, \quad R = AB \oplus C, \quad S = AB \oplus D;$$

- 2) сохраняющий чётность 2×2 дважды инвертирующий элемент (TIG, Two Inverted Gate):

$$P = A', \quad Q = B';$$

- 3) сохраняющий чётность элемент Переса — рассмотрен ниже.

Таким образом была получена сохраняющая чётность библиотека NCTSFP с уменьшенной сложностью вводимых элементов.

В последнее время предложены следующие схемы сбоеустойчивых вычислительных устройств, использующих контроль чётности; все ссылки см. в [36]:

- полный сумматор из сохраняющих чётность блоков (2010);
- АЛУ (2013);
- компрессор (устройство для сжатия динамического диапазона звукового сигнала);
- полный сумматор (2015).

5 Схемы на элементах преобразований в пространстве Хэмминга

Предложим новый метод построения сбоеустойчивых обратимых схем на основе использования элементов преобразований в пространстве Хэмминга [37]. Метод заключается в замене обратимых гейтов на их сбоеустойчивые аналоги, обеспечивающих гарантированное автоматическое исправление любой одиночной ошибки, т. е. основанный на принципе селективной защиты на уровне отдельных элементов.

В простейшем случае помехоустойчивого кодирования будем кодировать булевы значения 0 и 1 тремя битами 000 и 111, используя 3 проводника вместо одного и называя данные 3-битовые значения из Полусом_0 и Полусом_1 соответственно. Пространство n -мерного единичного куба 2^n называют *пространством Хэмминга*; мы будем работать в 3-мерном таком пространстве. При возникновении не более чем одиночной ошибки хэммингово расстояние (число несовпадающих бит) не превосходит 1, что позволяет однозначно определить полюс искаженного сигнала. Булевы операции будем производить над сигналами как над соответствующими полюсами. Коррекция ошибки происходит автоматически в неявном виде. Для обратимой схемотехники это существенно: происходит исправление ошибки, а не просто фиксация факта, что ошибка произошла.

Нетрудно заметить, что предлагаемый подход имеет сходство с методом TMR на уровне элементов. Различие заключается в том, что при троировании элемента имеется воутер, который не защищен от ошибок. При использовании метода кодирования в пространствах Хэмминга эта проблема принципиально отсутствует [38]. Дело в том, что воутером в этом подходе выступают последующие элементы в схеме, воутером которых в свою очередь, являются следующие за ними и т. д. Это обеспечивает исправление любой однократной битовой ошибки элемента. Более того, предлагаемый метод имеет существенные преимущества относительно многократных ошибок. Строго говоря, любое число кратных ошибок гарантированно исправляется, при условии, что на один расширенный элемент приходится не больше одного сбоя.

Очевидной платой за столь высокий уровень сбоеустойчивости являются значительные аппаратные затраты. Кратное увеличение числа используемых ключей делают этот метод вряд ли применимым для всей схемы, оставляя его целесообразным для наиболее уязвимых элементов и подсхем, сбоеустойчивость которых критически важна для функционирования всей вычислительной системы.

На рис. 16 представлен⁶ обратимый воутер «2 из 3», который будем

⁶ Это одна из возможных реализаций; то же относится и к другим элементам, рассмотренным далее. Авторы старались найти и представить наиболее простые

обозначать $V1(x_1, x_2, x_3)$, реализующий на выходе функцию $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ от входов x_1, x_2 и x_3 . Три параллельно соединённых воутера V1

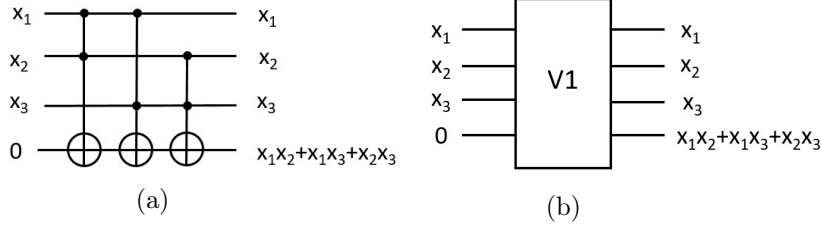


Рис. 16: Обратимый воутер «2 из 3» с одним сигнальным выходом: (a) схема на элементах Тoffоли, (b) изображение в виде блока.

образуют 12×12 -обратимый элемент HV с тремя сигнальными выходами, реализующий мажорирование «2 из 3» в хэмминговом пространстве.

Троированный сигнал A в пространстве Хэмминга будем обозначать нижними индексами от 1 до 3: A_1, A_2, A_3 , и аналогично для других сигналов.

Гейт HNOT, с 6 выходами и входами, реализующий инвертирование в пространстве Хэмминга, показан на рис. 17. Он построен «последователь-

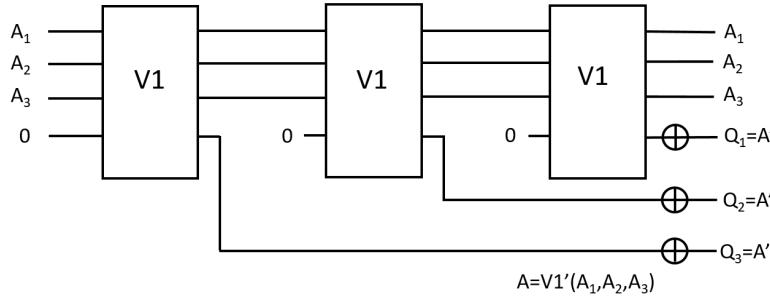


Рис. 17: Элемент HNOT

ным соединением» трёх воутеров V1 с инвертированием их сигнальных выходов и, очевидно, содержит 12 элементов $mod 2$.

Поясним на примере этой схемы отличие и преимущество рассматриваемого подхода от простого поэлементного троирования. Утраивающая сигнал схема ветвления Br3 наиболее просто синтезируется на двух элементах

схемы.

Фейнмана и имеет вид, представленный на рис. 18. Тогда обратимая схе-

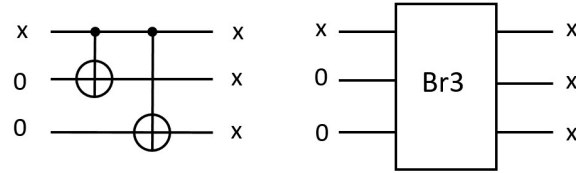


Рис. 18: Схема Br3 для утроения сигнала.

ма 3*NOT троированного элемента NOT будет иметь вид, представленный на рис. 19. Сбой в воутере V1, приводящий к искажению единственного

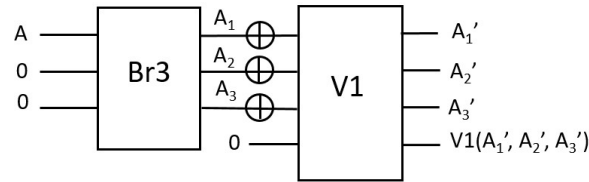


Рис. 19: Схема 3*NOT троирования инвертора.

сигнального выхода, данной схемой исправляться не будет. В тоже время аналогичный единичный сбой в любом из воутеров или элементов инвертирования гейта HNOT не приведёт к ошибке, поскольку она исправится на входе следующего элемента.

На рис. 20 представлена имеющая 15 вентилей *mod 2* схема 10×10 управляемого инвертирования HCNOT в пространстве Хэмминга.

Возможен и «облегчённый» вариант этого элемента, где исправление возможной ошибки на входах B_1, B_2, B_3 отложено до следующего гейта схемы. Соответствующий 7×7 элемент HLCNOT имеющий 6 вентилей *mod 2* показан на рис. 21.

Гейт Тоффоли HTG в пространстве Хэмминга представлен на рис. 22. Этот 14×14 элемент образован пятью воутеров V1 и трёх схем суммы обычных гейтов Тоффоли. Сигнальные выходы всей схемы суть S_1, S_2 и S_3 .

«Облегчённый» HLTG 11×11 элемент Тоффоли в пространстве Хэмминга с исправлением возможной ошибки на C_1, C_2, C_3 на входах гейта схемы, показан на рис. 23.

При входах $(x, y, 0)$ гейт Переса, полученный последовательным соединением TG и CNOT, реализует полусумматор, как показано на рис. 24. Яс-

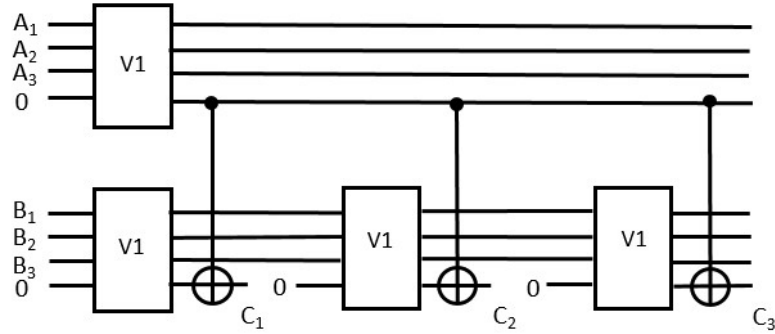
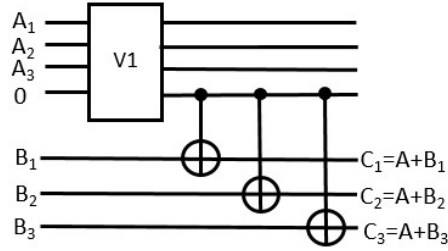


Рис. 20: Гейт HCNOT управляемого инвертирования на элементах Тоффоли.



(a)

(b)

Рис. 21: Облегчённый гейт HCNOT управляемого инвертирования: (a) схема на элементах Тоффоли, (b) изображение в виде блока.

но, что обратимый полусумматор в пространстве Хэмминга может быть реализован последовательным соединением гейтов HTG и HCNOT, возможно и в «облегчённом варианте».

Сравнение сложности и моделирование сбоеустойчивости обычных необратимых схем с их аналогами, построенных на элементах в хэмминговом пространстве позволило сделать следующие выводы [38].

Во-первых, число вентилях в методе тройного резервирования возрастает примерно в четыре раза, в то время как при кодировании в пространстве Хэмминга оно возрастает на порядок. Примерно то же мы видим и в случае обратимых схем. Действительно, будем считать сложность элемента количеством использованных в ней гейтов Тоффоли или символов $\oplus$ на изображениях схем. Тогда получим, что сложность гейтов V1 и Br3

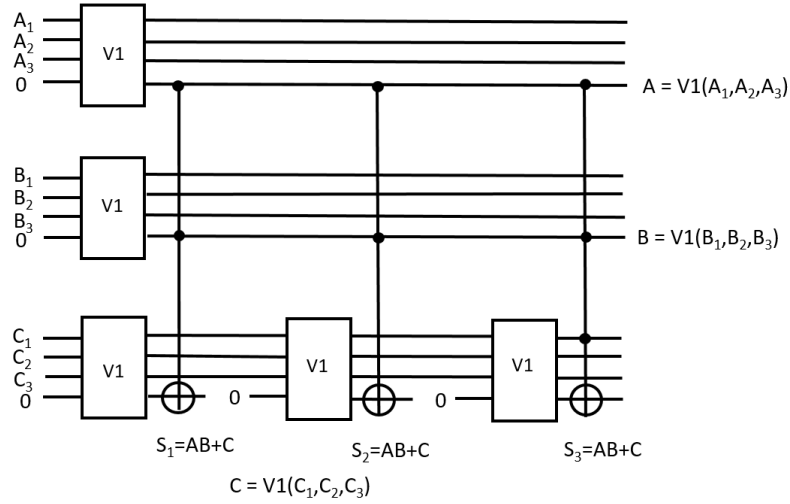


Рис. 22: Гейт Тоффоли НТГ в пространстве Хэмминга

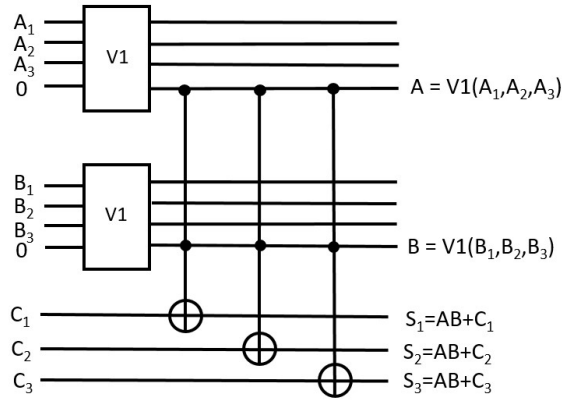


Рис. 23: Облегчённая схема гейта НЛТГ в пространстве Хэмминга.

равны 3 и 2 соответственно; сложность схемы $3 \cdot \text{NOT}$ есть 8, для синтеза гейта НТГ потребовалось 14 элементов ТГ, а для НЛТГ — 9.

Во-вторых, сбоеустойчивость предлагаемого метода практически во всех случаях превосходит, и метод тройного резервирования, что также

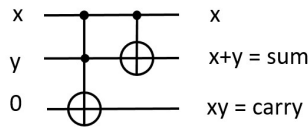


Рис. 24: Реализация полусумматора на гейтах TG и CNOT; sum — сумма разрядов, carry — перенос в следующий разряд.

продемонстрировано при соответствующем сравнении.

В целях более сбалансированного представления сигналов 0 и 1, и, соответственно, нагрузки на транзисторные вентили при реализации схем на кристалле, более эффективным является выбор при кодировании в пространстве Хэмминга в качестве Полюса_0 некоторого 3-битного вектора единичного веса и, соответственно, инверсного ему в качестве Полюса_1. Для этого, например, могут быть выбраны векторы 010 и 101. Первый назовём *вектором поляризации*, он является двоичным представлением числа 2, а второй, очевидно, есть двоичное представление 5. Переход к такому *поляризованному хеммингову пространству* геометрически эквивалентен вращению единичного куба вокруг своего центра с переносом нулевого вектора в вершину, представляемую вектором поляризации.

Несложно понять, как изменятся рассмотренные схемы с учётом такого представления. Бутер V1, например, в рассматриваемом поляризованном пространстве Хэмминга будет отличаться от представленного на рис. 16 инвертором $\oplus$ на входе x_2 .

Чтобы отличать схемы в указанном поляризованном пространстве от ранее построенных, литеру Н в их обозначении будем снабжать нижним индексом 2. На рис. 25 представлен элемент H_2NOT , реализующий инвертирование в поляризованном пространстве Хэмминга с вектором поляризации 010.

Заключение. В работе рассмотрены основные понятия, связанных с обратимыми вычислениями: это обратимые элементы и схемы. Основное внимание уделяется проблеме сбоеустойчивости обратимых схем и модели их сбоев. Описаны основные известные подходы к данной проблеме.

Рассмотренные методы синтеза сбоеустойчивых схем уже являются важными для обратимой схемотехники. В то же время на сегодняшний день настоятельной необходимостью является создание обратимых сбоеустойчивых таких стандартных элементов, как мультиплексор, демультиплексор, шифратор, дешифратор, сумматор и триггеры и др.

Предложен оригинальный метод синтеза сбоеустойчивых обратимых элементов в поляризованном пространстве Хэмминга, обладающий высо-

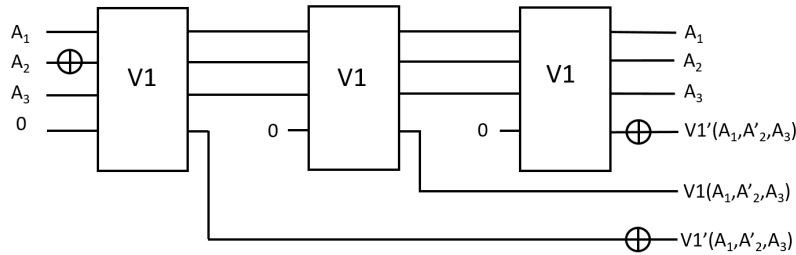


Рис. 25: Элемент H_2NOT

кой способностью корректировать как единичные, так и многократные ошибки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00196).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Landauer R.* Irreversibility and heat generation in the computing process, IBM Journal of Research and Development, 5: 183–191, July 1961.
2. *Bennet C.* Logical Reversibility of Computation, IBM Journal of Research and Development, vol. 17, no. 6, pp. 525–532, 1973.
3. *Бобровский С.* Будет ли обратимым зеттафлопсный компьютер? // PC Week/RE (474) 12'2005.
4. *Kalyan S. Perumalla.* Introduction to Reversible Computing. — CRC Press, 2014.
5. *Saeedi M., Markov I. L.* Synthesis and Optimization of Reversible Circuits — A Survey. Oct 2011. [<https://arxiv.org/pdf/1110.2574>]
6. *Закаблукое Д. В.* Методы синтеза обратимых схем из функциональных элементов NOT, CNOT и 2-CNOT. — Дисс. ... к. ф.-м. н. Специальность 01.01.09. М., 2018.
7. *Юдинцев В.* Радиационно-стойкие интегральные схемы. Надежность в космосе и на земле // Электроника: Наука, технология, бизнес, 2007. Вып. 5. С. 72–77.
8. *Попович А.* Топологическая норма и радиационная стойкость // Компоненты и Технологии, Выпуск № 110, 2010. С. 100–102.
9. *Телец В., Цибин С., Быстрицкий А., Подъяпольский С.* ПЛИС для космических применений. Архитектурные и схемотехнические особенности // ЭЛЕКТРОНИКА: Наука, Технология, Бизнес. 6/2005. — С. 44–48.

10. *Feynman R.* Quantum mechanical computers, *Optical News*, vol. 11, 1985, pp. 11–20.
11. *Fredkin E., Toffoli T.* Conservative Logic, *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 21, No. 3/4, 1982, pp. 632–644.
12. *Wille R. M., Saeedi M. and Drechsler R.* Synthesis of Reversible Functions Beyond Gate Count and Quantum Cost, *International Workshop on Logic Synthesis (IWLS)*, USA, 2009.
13. *Arabzadeh M., Saeedi M., and Zamani M.* Rule-based optimization of reversible circuits. In *Proceedings of Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASPDAC)*, pp. 849–854, 2010.
14. *Chen J., Zhang X., Wang L., Wei X. and Zhao W.* Extended Toffoli gate implementation with photons. In *Proceedings of 9th International Conference on Solid-State and Integrated-Circuit Technology (ICSICT)*, pp. 575–578, China, 20–23 Oct. 2008.
15. *Wille R., Große D, Teuber L., Dueck G. W. and Drechsler R.* Revlib: An online resource for reversible functions and reversible circuits, *International Symposium on Multiple Valued Logic*, pp. 220–225, May 2008.
16. *Maslov D., Dueck G. W. and Scott N.* Reversible logic synthesis benchmarks page. [<http://www.cs.uvic.ca/~dmaslov/>].
17. *Jain A.* Fault Tolerant Synthesis of Reversible Circuits. A Dissertation submitted in partial fulfillment for the award of degree of Master of Technology (with specialization in Computer Science) in Department of Computer Science and Engineering, CoRR.
[<https://arxiv.org/abs/1310.5231v2>],
[<https://dblp.org/rec/bib/journals/corr/Jain13>].
18. *Бобков С. Г.* Высокопроизводительные вычислительные системы. — М.: НИИСИ РАН. — 2014.
19. *Miller D., Maslov D. and Dueck G. W.* A transformation based algorithm for reversible logic synthesis. In *Proceedings of the 40th annual Design Automation Conference (DAC)*, pp. 318–323, 2003.
20. *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1988. Вып. 1. — С. 5–25.
21. *Islam Md. Saiful, Rahman M. M. and Begum Zerina.* Synthesis of fault tolerant reversible circuits, *IEEE International Conference on Testing and Diagnosis*, 28–29 April, 2009, Chengdu, China.
22. *Parhami B.* Fault tolerant reversible circuits, in *Proceedings of 40th Asimolar Conf. Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, CA, pp. 1726–1729, October 2006.

23. *Haghparsat M. and Navi K.* A novel fault tolerant reversible gate for nanotechnology based systems, *Am. J. of App. Sci.*, vol. 5, no. 5, pp. 519–523, 2008.
24. *Babazadeh S. and Haghparsat M.* Design of a nanometric fault tolerant reversible multiplier circuit, *J. Basic. Appl. Sci. Res.*, 2 (2) 1355–1361, 2012.
25. *Bruce J. W., Thornton M. A., Shivakumaraiah L., Kokate P. S., Li X.* Efficient adder circuits based on a conservative reversible logic gates. In *Proceedings of IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI*, Pittsburg, PA, pp. 83–88, 2002.
26. *Lala P. K.* *An Introduction to Logic Circuit Testing*, Morgan & Claypool, 2008.
27. *Rice J. E.* An Overview of Fault Models and Testing Approaches for Reversible Logic, accepted for presentation at the 2013 Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing (PACRIM), Aug. 2013, Victoria, BC, Canada.
28. *Nayeem N. M. and Rice J. E.* Online fault detection in reversible logic. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems (DFT)*, Vancouver, Canada, October 2011.
29. *Vasudevan D. P., Lala P. K. and Parkerson J. P.* Online testable reversible logic circuit design using NAND blocks. In *Proceedings of IEEE International Symposium on Defect and Fault-Tolerance in VLSI Systems*, pp. 324–331, Los Alamitos, CA, USA, 10–13 October 2004.
30. *Mahammad S. N., Hari S., Shroff S. and Kamakoti V.* Constructing on-line testable circuits using reversible logic. In *Proceedings of 10th IEEE International VLSI Design and Test Symposium (VDAT)*, pp. 373–383, Goa, India, August 2006.
31. *Zhong J. and Muzio J. C.* Analyzing fault models for reversible logic circuits. In *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 2422–2427, Vancouver, BC, 2006.
32. *Vasudevan D. P., Lala P. K., Jia D. and Parkerson J. P.* Reversible logic design with online testability, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 55(2): 406–414, 2006.
33. *Thapliyal H. and Vinod A. P.* Designing efficient online testable reversible adders with new reversible gate. In *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp. 1085–1088, New Orleans, LA, 27–30 May 2007.
34. *Farazmand N., Zamani M. and Tahoori M. B.* Online fault testing of reversible logic using dual rail coding. In *Proceedings of 16th IEEE International On-Line Testing Symposium (IOLTS)*, pp. 204–205, 5–7 July 2010.

35. *Nayeem N.M. and Rice J.E.* A simple approach for designing on-line testable reversible circuits. In Proceedings of the IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing (PACRIM), Victoria, Canada, August 2011.
36. *Przigoda Nils, Dueck Gerhard, Wille Robert and Drechsler Rolf.* Fault Detection in Parity Preserving Reversible Circuits. In IEEE 46th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL), 2016, pp. 44–49.
37. *Alagoz B. B.* Boolean Logic with Fault Tolerant Coding, OncuBilim Algorithm and Systems Labs., 2009, Vol. 09, Art. No: 03.
38. *Стемковский А. Л., Тельпухов Д. В., Жукова Т. Д., Гуров С. И., Соловьев Р. А.* Методы синтеза сбоеустойчивых комбинационных КМОП схем, обеспечивающих автоматическое исправление ошибок. // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2017. № 7 (192). — С. 197–210.

Секция V
Математические модели в
естественных науках, технике,
экономике и экологии

Н. В. Зеликин (Москва)
n-zl@math.msu.ru
**КАТЕГОРИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ
ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА**

Аннотация

Теория категорий позволила получить ряд замечательных результатов в математике. Кроме того, её применение в прикладных науках оказалось полезным для концептуального охвата сложных областей знания, недостижимого иными способами. Показана применимость основных положений теории категорий к анализу проблем управления бизнес-объектами. Категориальная модель работающих производственных компаний способствует правильной постановке и нахождению рациональных способов решения практических задач.

**CATEGORIAL MODEL of ECONOMIC REPRODUCTION
Summary**

The category theory paved the way to remarkable achievements in mathematics. Besides, its application to some applied sciences was useful for conceptual insight of complicated areas of knowledge unattainable in other ways. The applicability of category theory basic provisions to the analysis of business objects management issues is shown. The categorial model of the production enterprises promotes the correct vision and finding of rational ways to a solving of practical tasks.

Концептуальная модель сложной предметной области, опирающаяся на соответствующий математический аппарат, позволяет найти наилучшие технические инструменты для решения практических задач. Такой задачей, например, является создание эффективных систем управления бизнес-объектами. Теория категорий (ТК) предлагает развитый понятийный аппарат для перспективных применений в области экономики. Одной из первых попыток использовать ТК за пределами чистой математики была предпринята исследователем-математиком из MIT D.Spivak [1]. Автор использовал концепцию логически связанных категорий, Ologs, к которым применим термин “предметно-смысловая область” (ПСО). Целью работ D.Spivak было практическое использование таких возможностей ТК, как описание систем классов, реляционные отношения в базах данных и др.

Ряд исследователей приблизились к идеям ТК, опираясь на теорию множеств и исходя из потребностей прикладных наук в полезных обобщениях и концептуальных идеях. Математик N. Rashevsky [2], проявлявший интерес к биологии, и его ученик и последователь R. Rosen [3] развили идеи концептуальной целостности биологических систем, на основе

теоретико-множественных представлений, а с появлением первых работ по ТК применили её аппарат. Теоретико-биологические исследования проводятся в МГУ под руководством А.П. Левича [4]. На основе теоретико-категорных моделей С.П. Ковалёвым получены важные результаты для проектирования вычислительных систем [5]. Следует отметить, что в ТК особое внимание обращено на естественные преобразования, в которых преобразованная категория сохраняет внутреннюю логику и систему морфизмов исходной [6], поэтому идеи и аппарат ТК был воспринят исследователями из прикладных наук. Абстрактный характер основных определений и понятий ТК служит основанием для разнообразных применений её результатов в построении прикладных моделей. Трансформации категорий описываются функторами – операторами весьма широкого класса. Функторы представляют собой обобщенные операции: функциональные преобразования, фазовые переходы, отражения, симметрию, подобия и др.

Одним из наиболее перспективных приложений ТК является описание социально-экономических систем. В работе [7] предложено описание экономического цикла как реализации предметно-смысловых трансформаций последовательности экономических категорий: «Абстрактные идеи и ценности» – «Конкретные потребительские свойства» – «Образ товара/услуги» – «Конструктивный образ продукции», «Технологический образ продукции» – «Производственная инфраструктура» – «Потребительские товары и услуги» – «Реализация и потребление». Применение терминологии и образов ТК оправдано в данном случае наличием единого универсального пространства всех сущностей, экономических и социальных, и связей между ними, что отражает их неразрывное единство и общее развитие. Выделение того или иного ракурса, в виде предметно-смысловой области (ПСО), представимо как действие определённого функтора, соответствующего выбранной подсистеме признаков. Это – виртуальное выделение для целей анализа специфических свойств данной ПСО. Помимо очевидного соответствия терминологии есть глубокая существенная обоснованность категориального подхода. Каждый экономический объект адекватно описывается ПСО – категорией множеств с элементами соответствующей природы. Главное для применимости ТК в экономике – «естественность» трансформаций, то есть свойство сохранения системы связей между элементами. Для таких категорий действительны все теоремы и заключения ТК. Всякая экономическая ПСО (категория) по определению является малой, то есть состоит из множеств. Она объединяется (входит как часть) в локально малую категорию, то есть категорию, состоящую из конечного множества множеств. Универсальная социально-экономическая категория соответствует категории Set в теории категорий, и она является локально малой, но не является малой, так как объединяет произвольно большое количество множеств. Формальные математические характеристики экономических категорий выводимы из положе-

ний ТК, поскольку может быть показано соответствие свойств и характеристик экономических объектов и объектов ТК. Одним из важнейших достижений ТК является выявление универсальных свойств категорий, наличие в них особых, универсальных конструкций, объектов и отношений. То, что категории могут «переходить одна в другую» [8, с.20], следует из того, что каждая из смежных категорий является суб-категорией, предметно-смысловым фрагментом универсальной, при сохранении связности и логической структуры в производных категориях, наследующих свойства исходной. Универсальные конструкции сопряжены, логически связаны в смежных экономических категориях, образуя звенья единой цепи трансформаций. Это позволяет последовательно проследить логику преобразований сущностей и смыслов, например, в приведенных выше экономических ПСО. В ТК подчеркивается первостепенное значение системы связей и зависимостей (морфизмов и функторов), при относительно меньшей, даже несущественной роли узлов категорий. Для экономических приложений одно не может существовать без другого. Узлы категорий представляют собой экономические сущности/состояния, а связи – процессы между ними. Ещё одним важным достижением ТК является лемма Йонеды, в которой рассматривается естественная трансформация произвольной категории A при помощи категории представительных функторов (Ном-функтор), пообъектно переносящих полную структуру морфизмов в категорию Set , категорию всех множеств (универсальную), или в её суб-катеорию B , являющуюся предметно-смысловым развитием исходной категории A .

Лемма Йонеды эффективно применима для анализа смежных экономических категорий, и позволяет находить простые, но важнейшие интерпретации. Исходя из того, что представительный функтор, порождающий категорию связей между элементами в смежной категории, передаёт всю совокупность признаков исходной категории, можно рассмотреть, например, набор технологий для производства определённого вида продукции, изделия или услуги. Из применимости леммы Йонеды следует, что в каждом случае требуется одна и та же сумма технологий, практически реализованных на дату производства продукции. При поверхностном рассмотрении кажется парадоксальным, что производство стального болта и микросхемы требуют всех достижений технологии. Однако, при детальном рассмотрении технологических процессов и применяемого оборудования, а также квалифицированного труда, несложно убедиться, что так или иначе, прямо или косвенно, все технологии взаимно увязаны в единый технологический комплекс.

Одной из перспективных задач автоматизации управления производством является создание условий для управления бизнес-процессами во взаимодействующих компаниях, поверх границ собственности, когда производственный процесс, по согласованию сторон, последовательно пере-

ходит с одного предприятия на другое, а процесс учета затрат и взаимных расчётов решается автоматизированными системами. Это становится возможным лишь при наличии универсальной и гибкой информационной платформы. Последовательное применение категориальных методов в экономике предоставляет необходимые средства для разработки согласованных систем классов для всех видов объектов, на их основе — структур баз данных, способов обработки информации, всего комплекса средств поддержки единого производственного процесса. Производителями программных средств автоматизированных систем управления активно применяются единые стандарты, например CORBA (технологический стандарт создания распределённых приложений), и другие. Подобные решения разрабатываются и при создании единой государственной системы Электронного Правительства, на основе принятой Концепции стандартизации программного обеспечения. Применение теории категорий в экономике, как в других прикладных науках, не подменяет их специфических методик, не создаёт для них новых инструментальных средств. Однако, создание концептуального, целостного видения сложного многозвенного процесса способствует правильной постановке и нахождению рациональных способов решения практических задач.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *David I. Spivak*. Category theory for the sciences. MIT Press, Cambridge, 2013. 268 p.
2. *Nikolas Rashevsky*. Mathematical biophysics. Second Edition. University of Chicago Press, Chicago, 1948.
3. *Robert Rosen*. The Representation of biological systems from the standpoint of the theory of categories // Bull. Math. Biophys., 20, 1958.
4. *А. П. Левич*. Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической биологии. М. Изд-во МГУ, 1982, 191 с.
5. *С. П. Ковалев*. Теоретико-категорный подход к проектированию программных систем // Фундаментальная и прикладная математика, т. 19, № 3, Изд. «Открытые системы», с. 111–170, 2014.
6. *С. Маклейн*. Категории для работающего математика. М. Физматлит, 2004. 352 с.
7. *Н. В. Зелликин*. Теория категорий как понятийный аппарат для исследования ряда задач экономики. Тезисы докладов XXIV конференции МКО. — Москва, с. 294, 2017. <http://www.mce.su/rus/archive/mce24/doc282550>
8. *F. W. Lawvere, S. H. Schanuel*. Conceptual mathematics. A first introduction to categories. Cambridge University Press, 1997, 376 p.

Л. В. Карташева (Ростов-на-Дону)
ludmila.kartasheva@mail.ru
СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Сетевые методы и модели широко применяются для решения задач коммерции. На их основе создаются системы сетевого планирования и управления (СПУ).

Методы и модели СПУ применяются в коммерции для решения задач по заготовке, переработке и хранению плодовоовощной продукции; строительстве торговой базы или супермаркета; подготовке и проведению ярмарок, выставок; поставке товаров покупателям и др.

Сетевой моделью называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ и событий в графической форме. Графическая часть состоит из линий (работ) и узлов (событий), т.е. математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов.

В сетевых моделях кроме основных показателей (критический путь, резервы времени событий, работ и путей) имеются и другие, которые являются исходными для определения не менее важных характеристик для анализа и оптимизации сетевого графика комплекса работ.

К ним относятся:

Ранний срок совершения k -го события $t_p(k)$, определяется величиной наиболее длительного отрезка пути от исходного до рассматриваемого события:

$$t_p(k) = \max_i(t_p(i) + t_{(i,k)}), \quad k = 2, \dots, n, \quad (1)$$

т.е. раннее событие k равно раннему событию i , сложенному с длительностью работы (i, k) .

Поздним совершению события называется максимально допустимый срок (самый поздний) наступления этого события, т.е. не требующий увеличения времени на выполнение всего проекта (выполнение всех последующих работ в установленный срок).

$$t_n(i) = \min_i(t_n(k) - t_{(i,k)}), \quad k = 2, \dots, N - 1, \quad (2)$$

т.е. позднее допустимое равняется разности позднего окончания события k и продолжительности последующих работ.

Резерв времени k -го события R_k , показывает, на какой промежуток времени может быть отсрочено наступление события k без наступления сроков завершения всего комплекса работ.

Для всех работ (i, k) на основе ранних и поздних сроков свершения всех событий можно представить в табл. 1.

Таблица 1

	Показатели работы	Формулы для вычислений
1	Ранний срок начала	$t_{p.n.}(i, k) = t_p(i)$
2	Ранний срок окончания	$t_{p.o.}(i, k) = t_p(i) + t_{п.о.}(i, k)$
3	Поздний срок начала	$t_{п.н.}(i, k) = t_{п.}(k) - t_{п.о.}(i, k)$
4	Поздний срок окончания	$t_{п.о.}(i, k) = t_{п.}(k)$
5	Полный резерв времени	$r_p(i, k) = t_{п.}(k) - t_p(i) - t_{п.н.}(i, k)$
6	Свободный резерв времени	$r_{с.в.}(i, k) = t_o(k) - t_p(i) - t_{п.н.}(i, k)$

Полный резерв времени пути R_L показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ на пути L относительно критического пути $L_{кр}$.

$$R_L = T_{кр} - T_i. \quad (3)$$

Коэффициент напряженности работы $K_n(i, k)$ характеризует напряженность по срокам выполнения работы (i, k) и определяется по формуле:

$$K_n(i, k) = \frac{t_{L \max} - t_{кр}}{T_{кр} - t_{кр}} = 1 - \frac{r_{п.}(i, k)}{t_{кр} - t'_{кр}}, \quad (4)$$

где: $t_{кр}$ — критическая работа;

$t_{(L \max)}$ — продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i, k) ;

$r_n(i, k)$ — полный резерв времени работы (i, k) ;

$t'_{кр}$ — продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем. $0 \leq K_n(i, k) \leq 1$.

Самыми напряженными являются работы критического пути, для которых он равен 1.

В данной работе рассматривается задача минимизации времени, отведенного для выполнения комплекса работ по организации выставки-продажи товаров.

Дана упорядоченная структурно-временная таблица 2 перечня работ для данного комплекса работ. Требуется построить сетевой график, определить критический путь, критические работы, резервы времени, провести графический анализ комплекса работ и оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени T при заданных ресурсах B . Определить экономию. Построить оптимальный сетевой план работ.

Таблица 2

	Содержание работ	Обозначение a_i	Опорные работы a_j	Длительность работ t_i
1	Заказ на оборудование и товары	a_1	—	$t_1 = 8$
2	Разработка системы учета спроса	a_2	—	$t_2 = 15$
3	Отбор товаров и выписка счетов	a_3	a_1	$t_3 = 6$
4	Завоз товара	a_4	a_3	$t_4 = 3$
5	Завоз оборудования	a_5	a_1	$t_5 = 4$
6	Установка оборудования	a_6	a_5	$t_6 = 5$
7	Выкладка товара	a_7	a_4	$t_7 = 5$
8	Учет наличия товара	a_8	a_4	$t_8 = 5$
9	Оформление витрины	a_9	a_6, a_7	$t_9 = 3$
10	Изучение документов учета	a_{10}	a_2, a_8	$t_{10} = 3$
11	Репетиция выставки-продажи	a_{11}	a_9, a_{10}	$t_{11} = 2$
12	Проведение выставки	a_{12}	a_{11}	$t_{12} = 1$
13	Анализ результатов	a_{13}	a_{12}	$t_{13} = 1$

Чтобы провести анализ сетевой модели, а затем ее оптимизацию, необходимо определить основные характеристики СМ (сетевое моделирование). Эти характеристики определим двумя способами аналитически с помощью формул (результаты вычислений заносим в таблицу) и графически — построением сетевой модели.

Табличный способ моделирования. Графы (колонки) 1, 2 и 3 таблицы 2 заполняем на основании исходных данных таблицы 1. В графе 4 заполняем раннего срока начала работ, определяемые с графика, путем выбора максимального из сроков раннего окончания предшествующих работ. Количество сравниваемых сроков равно количеству предшествующих работ графы 2. Заполнение графы 5 производится суммированием значений граф 3 и 4, т.е. раннее окончание каждой работы определяется сложением величин раннего начала и продолжительности работы.

После заполнения граф 4 и 5 определяется критический путь, равный максимально раннему сроку окончания работ, т.е. $T_{кр.} = 50$ часам.

Значение критического пути заносится в последнюю строку графы 7, и заполнение ее ведется снизу вверх. Время каждой работы определяется как разности между поздним окончанием работ и их продолжительностью. Наименьшее значение записывается в графу 7.

Значения графы 6 получаются вычислением данных графы 7 и значений колонки 3.

Значения графы 8 — полный резерв времени равный разности величин колонок 6 и 4 или 7 и 5. Если $r_n(i, k)$ равен нулю, то работа является критической.

В графу 10 резерв времени событий записывается величина, равная разности между поздним событием окончания работы, заканчивающимся событием k графы 7, и ранним началом работы, начинающимся событием k , т. е. значения $10_{\text{графа}} = 7_{\text{графа}} - 3_{\text{графа}}$ (но не по строкам).

Значения свободного резерва времени работы $r_{\text{св}}(i, k)$ вычисляются как разность значений граф 10 и 8. Величины графы 9 указывают на резервы работ, необходимые для оптимизации модели.

Таблица 3 (начало)

Работы (i, k)	Кол-во предш. работ	Время работ (i, k)	Сроки выполнения работ			
			Ранние		Поздние	
			нач. $t_{\text{р.н.}}(i, k)$	оконч. $t_{\text{р.о.}}(i, k)$	нач. $t_{\text{п.н.}}(i, k)$	оконч. $t_{\text{п.о.}}(i, k)$
1	2	3	4	$5 = 3 + 4$	$6 = 7 - 3$	7
$a_1, (1,2)$	0	11	0	11	0	11
$a_2, (1,7)$	0	18	0	18	19	37
$a_3, (2,4)$	1	10	11	21	11	21
$a_4, (4,5)$	1	7	21	28	21	28
$a_5, (2,3)$	1	8	11	19	20	28
$a_6, (3,6)$	1	9	19	28	28	37
$a_7, (5,6)$	1	9	28	37	28	37
$a_8, (5,7)$	1	9	28	37	28	37
$a_9, (6,8)$	2	7	37	44	37	44
$a_{10}, (7,8)$	2	7	37	44	37	44
$a_{11}, (8,9)$	2	2	44	46	44	46
$a_{12}, (9,10)$	1	1	46	47	46	47
$a_{13}, (10,11)$	1	3	47	50	47	50

В графе 11 записаны значения коэффициента напряженности, вычисленные по формуле (4).

Таблица 3 (окончание)

Работы (i, k)	Кол-во предш. работ	Время работ (i, k)	Резервы времени			K_H
			Работ		собы- тий R_k	
			полный $r_n(i, k)$	свободный $r_c(i, k)$		
1	2	3	8 = 6 - 4 или (7 - 5)	9	10	11
$a_1, (1,2)$	0	11	0	0	0	1
$a_2, (1,7)$	0	18	19	19	0	0,38
$a_3, (2,4)$	1	10	0	0	0	1
$a_4, (4,5)$	1	7	0	0	0	1
$a_5, (2,3)$	1	8	9	9	0	0,7
$a_6, (3,6)$	1	9	9	0	9	1
$a_7, (5,6)$	1	9	0	0	0	1
$a_8, (5,7)$	1	9	0	0	0	1
$a_9, (6,8)$	2	7	0	0	0	1
$a_{10}, (7,8)$	2	7	0	0	0	1
$a_{11}, (8,9)$	2	2	0	0	0	1
$a_{12}, (9,10)$	1	1	0	0	0	1
$a_{13}, (10,11)$	1	3	0	0	0	1

Графический способ решения задачи сетевого моделирования. Решим задачу графическим способом, построив сетевую модель по данным таблицы 3.

Решение. 1. Построим сетевую модель по данным структурно-временной таблицы 3, указывая события: начальное — 1 и конечное — 11, работы $a_1 \div a_{13}$ и соответствующие им длительности.

2. Укажем пути на сетевом графике (последовательность работ, соединяющая начальное и конечное событие) рассматриваемой модели (4 пути):

1 путь: $a_1, a_5, a_6, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ — содержит 7 работ;

2 путь: $a_1, a_3, a_4, a_7, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ — содержит 8 работ;

3 путь: $a_1, a_3, a_4, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ — содержит 8 работ;

4 путь: $a_2, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ — содержит 5 работ.

3. Определим длительность пути во времени, подставляя соответствующие значения работ:

$$T_1 = 11 + 8 + 9 + 7 + 2 + 1 + 3 = 41 \text{ час.}$$

$$T_2 = 11 + 10 + 7 + 9 + 7 + 2 + 1 + 3 = 50 \text{ час.}$$

$$T_3 = 11 + 10 + 7 + 9 + 7 + 2 + 1 + 3 = 50 \text{ час.}$$

$$T_4 = 18 + 7 + 2 + 1 + 3 = 31 \text{ час.}$$

Длительность максимального пути $T_2 = 50, T_3 = 50$. За это время все работы по организации выставки-продажи могут быть выполнены. Т.е. пути T_2 и T_3 являются критическими. Длительность минимального пути $T_4 = 31 \text{ час.}$ За это время организовать выставку-продажу не получится.

4. Определяем полные резервы времени по всем путям:

$$T_{кр} - T_1 = 50 - 41 = 9 \text{ час.} \quad T_{кр} - T_2 = 50 - 50 = 0 \text{ час.}$$

$$T_{кр} - T_3 = 50 - 50 = 0 \text{ час.} \quad T_{кр} - T_4 = 50 - 31 = 19 \text{ час.}$$

5. Строим сетевой график в масштабе времени 1 см — 2 часа рис. 1 и 2, построение начинается с критического пути $T_2 = T_3 = 50$ час. Затем строим остальные пути. Критические работы указаны двойными линиями (дугами). События отмечены цифрами в кружочках и соответствуют вершинам графа, а работы указаны отрезками со стрелками, проекции которых на ось $0t$ равны длительности соответствующих работ.

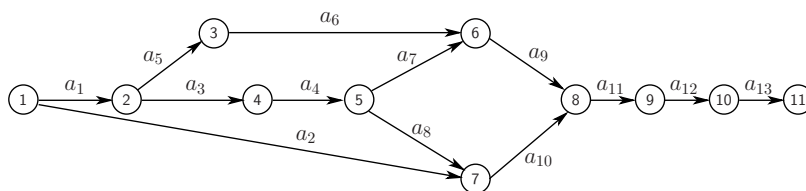


Рис. 1

М: 1 см — 2 ч.

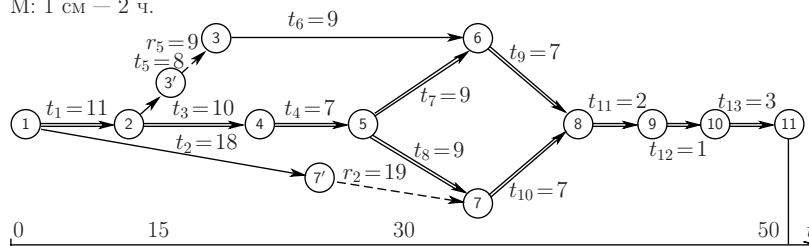


Рис. 2

Ю. А. Фарков, И. В. Нейштадт, М. Г. Робакидзе (Москва)
farkov-ya@ranepa.ru, i.neustadt@yandex.ru, irubak@gmail.com
О ВНЕДРЕНИИ РИСК-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОДХОДА
В КОНТРОЛЬНО-НАДЗОРНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Внедрение риск-ориентированного подхода при осуществлении контрольно-надзорной деятельности является одним из основных направлений приоритетной программы «Реформа контрольной и надзорной деятельности», утвержденной Президиумом Совета при Президенте Российской Федерации по стратегическому развитию и приоритетным проектам 21 декабря 2016 г. Риск-ориентированный подход предполагает концентрацию ограниченных ресурсов государства в зонах наибольшего риска в целях предотвращения причинения вреда охраняемым законом ценностям при одновременном снижении административной нагрузки на добросовестных хозяйствующих субъектов. Данные о сокращении общего количества плановых проверок в различных видах надзорной деятельности в Российской Федерации за 2016-2017 годы приведены в докладе [1].

Согласно статье 26 проекта ФЗ «О государственном и муниципальном контроле (надзоре) в Российской Федерации» [2], под риском понимается «вероятность наступления в результате несоблюдения гражданами и организациями обязательных требований событий, следствием которых могут стать потенциальные негативные последствия различной степени тяжести». Это определение приводит к следующим практически значимым вопросам:

1. Насколько высока вероятность того, что произойдет некоторое негативное событие?
2. Какое отрицательное последствие это событие может потенциально вызвать?
3. Какие требования следует соблюдать для предотвращения этого события?

Ответы на эти вопросы зависят от вида федерального государственного контроля (надзора), от имеющихся статистических данных и от применяемых методов анализа данных. Для оценки рисков подконтрольные объекты разделяются на категории (высокий риск; значительный риск; средний риск и т.д.) в сочетании с уровнями опасности (высокий, повышенный средний, пониженный средний, низкий), что позволяет составить матрицу риска и планировать периодичность проверок. Например, плановые проверки земельных участков категории умеренного риска проводятся Россельхознадзором [3] не чаще чем один раз в пять лет.

В статье [4] разработана целевая модель риск-ориентированного подхода при осуществлении государственного контроля и даны предложения по ее реализации. Для описания и классификации систем оценки рисков

предлагается анализировать следующие элементы: объект, шкала, способ и метод оценки уровня риска подконтрольных субъектов (объектов). Представлена общая характеристика систем управления рисками в 12 видах контроля. Сформулированы 10 основных принципов, реализация которых позволит создать высокоэффективные системы управления рисками при осуществлении органами власти контрольно-надзорной деятельности.

13 февраля 2018 года был утвержден «Стандарт зрелости управления результативностью и эффективностью контрольно-надзорной деятельности» [5]. Стандарт предназначен для использования контрольно-надзорными органами Российской Федерации в целях разработки и совершенствования системы управления результативностью и эффективностью контрольно-надзорной деятельности. В зависимости от качества и полноты источников данных контрольно-надзорные органы классифицируются по четырем уровням зрелости. Накопление статистических данных и детализация ключевых показателей осуществляются на третьем уровне, а на высшем четвертом уровне [5, с. 89] «накопленная статическая база позволяет перейти к инструментам продвинутой аналитики данных, поиска скрытых закономерностей, анализа больших массивов данных, машинному обучению. Углубление аналитики позволяет не только прогнозировать показатели, но и в автоматизированном режиме корректировать приоритеты государственного контроля (надзора) в зависимости от оперативно меняющейся ситуации».

В статье [6] метод Байеса и метод последовательного анализа Вальда применяются для уточнения теоретической вероятности отнесения проверяемых организаций к той или иной категории риска. Условную вероятность в формуле Байеса предлагается определять как вероятность попадания частоты попадания нарушений в заданный интервал нормально распределенных значений этого параметра. Границы интервала, в свою очередь, являются условием отнесения организации к той или иной категории риска. Отмечается, что метод последовательного анализа предпочтительно использовать при наличии информации о значениях нескольких параметров. Для применения данного метода требуется проводить систематическую оценку издержек, которые несут проверяемые организации из-за избыточного контроля и надзора. Кроме того, требуется проверка гипотезы о нормальности распределения количества нарушений в каждом конкретном виде проверок.

Анализ зарубежных публикаций показывает, что для внедрения риск-ориентированного подхода в контрольно-надзорную деятельность могут быть полезны оценки риска методом регрессионного анализа с дискретным выбором (бинарный выбор, множественный выбор и др.), оценки риска методами анализа выживаемости и оценки относительной эффективности объектов методом анализа среды функционирования (АСФ, англ. DEA - data envelopment analysis). Ниже будут приведены примеры приме-

нения этих методов в пожарном надзоре.

Основная задача АСФ заключается в определении эффективных однородных объектов из анализируемой группы объектов (например, университетов) и построении границы эффективности, которая используется в качестве эталона для неэффективных объектов. Различают модели АСФ, ориентированные на входные параметры, и модели, ориентированные на выходные параметры. В этих моделях граница эффективности определяется как выпуклая линейная оболочка точек в пространстве входных (или выходных) параметров, соответствующих эффективным объектам. Существуют модели, в которых одновременно учитываются снижение издержек и улучшение результатов на выходе, а также модели, которые предполагают возможные непропорциональные изменения входных и выходных параметров (см., например, [7]). В работе [8] одна из моделей АСФ применяется для оценки ущерба, причинённого странам ЕС лесными пожарами. Используемая авторами модель АСФ позволяет объединять множественные входные затраты и результаты на выходе для выявления предотвращённого ущерба от лесных пожаров в отдельных странах. Предложенный подход помог определить относительные показатели ущерба от лесных пожаров в европейских странах, а также выявить потенциальные цели в управлении лесным хозяйством, чтобы уменьшить ущерб от пожаров за счет применения лучших европейских практик. Аналогичный подход может быть применен для оценки эффективности применения противопожарных методов в субъектах РФ. С этой целью мы предлагаем анализировать методом АСФ статистические данные по следующим входным параметрам: 1) количество лесных пожаров, 2) площадь сгоревших лесистых территорий, 3) средний индекс пожароопасной погоды (аналог канадского индекса FWI), 4) количественная оценка противопожарных средств, 5) количественная оценка потерь от пожаров (каждый параметр вычисляется в выбранном для исследования субъекте РФ и для фиксированного списка пожароопасных сезонов). Отметим, что методология вычисления канадского индекса пожарной опасности применяется в модели развития пожара ИСДМ-Рослесхоз, разработанной на основе модели CFFBPS (Canadian Forest Fire Behavior Prediction System).

В статье [9] логистическая регрессия и методология машинного обучения Random Forest применяются для оценки определяющих факторов возникновения пожаров в китайской провинции Фуцзянь. Потенциальные определяющие факторы разделены на две группы в зависимости от масштаба влияния: «климатические факторы», которые действуют на региональном уровне, а также «местные факторы», которые включают в себя инфраструктуру, растительность, топографические и социально-экономические данные. Климатическая база данных для пожароопасного сезона была сгенерирована Исследовательским институтом географических наук и ресурсов научно-исследовательского института Китайской академии на-

ук. Ежедневные климатические данные были получены из 22 национальных метеорологических станций, расположенных в провинции Фуцзянь. Результаты показывают, что климатические факторы являются основными определяющими факторами возникновения пожара в лесах провинции Фуцзянь. Из местных факторов наиболее значимыми оказались: высота над уровнем моря, расстояние до железной дороги и ВВП на душу населения. Применение методологии Random Forest продемонстрировало более высокую прогностическую способность, чем логистическая регрессия по всем группам факторов (климатические, местные и климатические и местные в комбинации).

Факторы, влияющие на распределение площадей лесных пожаров, включают в себя прогноз погоды, количества топлива и деятельности по предотвращению и тушению пожаров. В статье [10] анализ выживаемости используется для количественной оценки влияния этих факторов на примере площадей грозových пожаров, возникших в провинции Альберта, Канада. Для каждого пожара измерялась площадь при первоначальной оценке (первыми пожарными, прибывшими на место происшествия) и площадь в состоянии, когда дальнейшее увеличение площади пожара не ожидается. Разработан статистический классификатор, чтобы предсказывать случаи, когда площадь пожара будет расти (т.е. площадь при повторном измерении будет превышать площадь при первоначальной оценке). Были выбраны три показателя: индекс пожарной погоды на день начала пожара, тип сжигания топлива при первоначальной оценке, и коэффициент для оценки способа начала тушения пожара. Выяснилось, что погода во время пожара и тип использованного топлива являются весьма значимыми факторами. Эффекты первоначального метода тушения пожара не были статистически значимыми, но могут использоваться при априорной оценке роста пожара.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Контрольно-надзорная и разрешительная деятельность в Российской Федерации. Аналитический доклад – 2017. М.: Издательский дом РСПП, 2018. - 124 с.
2. Проект федерального закона «О государственном и муниципальном контроле (надзоре) в Российской Федерации». Электронный ресурс: <http://www.consultant.ru/law/hotdocs/47724.html>
3. О реализации Россельхознадзором мероприятий по совершенствованию контрольно-надзорной деятельности. Электронный ресурс: <http://www.fsvps.ru/fsvps/council/>
4. Чаплинский А.В., Плаксин С.М. Управление рисками при осуществлении государственного контроля в России // Вопросы государственного и муниципального управления. 2016. № 2. С. 7-29.
5. Стандарт зрелости управления результативностью и эффективностью контрольно-надзорной деятельности. Электронный ресурс: <http://xn—>

-8sbmmlgncfbgqis7m.xn-p1ai/explibrary/?showID=63

6. *Дмитриев А.А.* Диагностика рисков при осуществлении контрольно-надзорной деятельности с использованием методов Байеса и последовательного анализа Вальда // Экономика и управление: проблемы, решения. 2017. Т. 3. № 1. С.9-17.

7. *Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.* Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2006.

8. *Gutierrez E., Lozano S.* Avoidable damage assessment of forest fires in European countries: an efficient frontier approach // European Journal of Forestry Research. 2013. Vol. 132. P. 9-21.

9. *Guo F., Wang G., Su Z., Liang H., Wang W., Lin F., Liu A.* What drives forest fire in Fujian, China? Evidence from logistic regression and Random Forests // International Journal of Wildland Fire. 2016. Vol. 25. P. 505–519.

10. *Tremblay P.-O., Duchesne T., Steven G. C.* Survival analysis and classification methods for forest fire size // PLoS ONE. 2018. V. 13: e0189860.

Секция X
Современные проблемы
образования

Г. А. Дреев, А. В. Кутовой (Ростов-на-Дону)
sinilga-rnd@mail.ru
**К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПОДГОТОВКИ
СТУДЕНТОВ**

Аннотация

В статье представлена новая система стимулирования качества подготовки студентов. Она базируется на развитии соревновательных отношений.

Abstract

A new system of stimulation for student s quality training is presented. It is based on the development of competitive relationships.

В настоящее время система стимулирования студентов в вузовской подготовке основывается на аттестации усвоенных ими знаний по пятибалльной системе. Такая система не отражает в достаточной степени качество подготовки студентов и не представляет большого стимула для развития соревновательных отношений между ними. Это объясняется большим диапазоном уровня знаний, приходящихся на балл оценки. Другими словами один и тот же балл может соответствовать слишком разному уровню знаний.

Это соображение привело к поиску другой системы оценок, представленной в работе [1]. В ней предложено оценивать знания студента долей усвоенного им программного материала предмета (от 0 до 100% или от 0 до 1). Такая система более логична, как для аттестуемого, так и аттестующего. Она может легко переводиться и в пятибалльную систему установлением диапазонов соответствия. При этом становится понятным, что одинаковая оценка в пятибалльной системе может свидетельствовать о достаточно разном качестве знаний.

С точки зрения развития соревновательных отношений, предложенная система оценок, дает возможность более дискретно подходить к выявлению лучших студентов. Если рассматривать группу отличников, то с помощью предложенной системы, в ней можно выявить «первого и последнего». Таким образом, создаются психологические предпосылки к стремлению студентов занять положение не только в группе успешных, но и занять в ней лидирующее положение.

Учитывая трудоёмкость, осваиваемых в процессе обучения, дисциплин и выполняемых заданий (курсовые, контрольные, дипломные и др.) получаемые студентами оценки целесообразно «взвешивать». В качестве весов использовать количество часов, отведенных на них. Обобщенный показатель студента рассчитывать по формуле

$$A = \frac{\sum a_i q_i}{\sum q_i} \quad (1)$$

где a_i — оценка вида испытаний; q_i — вес оценки.

Такой подход позволит оценить уровень знаний, приобретаемых студентом, с учётом трудозатрат. Этот комплексный показатель целесообразно использовать при ранжировании студентов на всех этапах обучения и при выпуске. Рассчитанный таким образом балл для каждого студента маловероятно будет повторяться. Возможность постоянства занятия первого места по успеваемости в каждом периоде подведения итогов усложняется, что делает состязательность, за это, более совершенной.

Рассчитываемая указанным образом аттестация студента может быть использована в качестве инструмента стимулирования уровня успеваемости. Например, пропорционально набранному баллам, с учётом предельной границы, можно распределять стипендию, изменять уровень оплаты за обучение или осуществлять другие стимулирующие воздействия. Такой подход в большей степени соответствует принципу социальной справедливости, чем существующий в настоящее время.

Если этот подход применять к начислению уровня оплаты за обучение, то целесообразно использовать модель, предусматривающую возможности, как её снижения — так и увеличения

$$O = \left(1 - \frac{Q - B}{B}b\right) \times N, \quad (2)$$

где Q — суммарный балл набранный студентом в анализируемом периоде; B — нормативно установленный балл фиксированной оплаты; N — норматив оплаты за обучение.

Представленная система позволяет отразить в аттестационном вкладыше диплома и ранговую оценку выпускника, которая в пределе может составлять единицу, если выпускник имел по всем видам аттестации высший балл. В других случаях она будет меньше единицы. Такая оценка весьма информативна для работодателя с точки зрения потенциала приобретаемого специалиста. Кроме того, её можно использовать при отборе студентов в магистратуру и аспирантуру.

Данная система установления потенциального уровня выпускника станет корректней, если ежегодно будет проводиться оценка ранга вузов по соответствующим специальностям. В этом случае ранговую оценку выпускника следует определять путём умножения оценки полученной по зависимости (2) на ранг вуза. Таким образом, данная система будет способствовать развитию соревнования за качество выпускников между вузами, и побуждать их к повышению его уровня.

В качестве критериев оценки ранга вуза целесообразно использовать показатели: уровень качества дипломных работ; уровень участия студентов в межвузовских конкурсах; уровень материально-технической базы; уровень методического обеспечения.

Определение уровня качества дипломных работ следует вести на основе экспертной оценки независимой комиссии, в которую должны включаться представители организаций, заинтересованных в выпускниках данной специальности. Количественную оценку уровня качества рассчитывать по случайной выборке девяти дипломов, с усреднением по триадам: трёх аттестованных на отлично, трёх- на хорошо, трёх- на удовлетворительно. На основе частных показателей уровня дипломов рассчитывать комплексный показатель качества дипломов, как средневзвешенное, принимая за веса соответственно пять, четыре, три.

Уровень участия студентов в межвузовских конкурсах рассчитывать на основе количественного и качественного критериев. За количественный критерий предложено принять уровень участия студентов в конкурсах

$$y = \frac{Q_y}{Q}, \quad (3)$$

где Q_y количество участников конкурса; Q количество студентов обучающихся по данной специальности.

За качественный критерий принять уровень качества участия

$$y_x = \frac{Q_o}{Q_y}, \quad (4)$$

где Q_o количество студентов занявших места на конкурсе (отмеченных); Q_y количество участников конкурса от ВУЗа. Уровень участия в конкурсах оценивать как средневзвешенное от данных показателей, присвоив веса соответственно 0,6 и 0,4).

Два следующих показателя оценивать на основе экспертной оценки независимой комиссии. Рейтинг ВУЗа можно рассчитать усреднением представленных выше показателей.

Если возникнет необходимость оценки рейтинга ВУЗа по совокупности выпускаемых специальностей, его можно рассчитать как средневзвешенное от рейтингов по каждой специальности. При этом приняв за веса количество выпускаемых студентов по каждой специальности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дреев Г. А. Стимулирование качества подготовки студентов на конкурентной основе // Материалы научно-практической конференции «Научные подходы к решению проблем предприятий агропромышленного комплекса-2000». МГТА, 2000.

Т. О. Ефимова, И. А. Андреева (Санкт-Петербург)
ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» НА
ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

УДК 378.147

Abstract

The article outlines aims of teaching of the Higher Mathematics at the Civil Engineering and Construction faculty. The aims are to create specialists able to apply the mathematical apparatus to analyze, model and solve properly all possible problems arising in the fields of production, construction, organizing and control in their future professional sphere, using computers or without them. Students must obtain skills of a logical and algorithmic mentality, an ability to formalize a problem, to construct a mathematical model of it and to investigate it from different points of view.

Keywords: study of the Higher Mathematics, aims of teaching a discipline, a mathematical apparatus, an algorithmic mentality, competences.

Аннотация

В статье обсуждаются цели изучения дисциплины «Высшая математика» на инженерно-строительном факультете, состоящие в овладении студентами математическим аппаратом, помогающим анализировать, моделировать и решать производственные и управленческие задачи с возможным применением компьютера. Задачи преподавания дисциплины заключаются в развитии у студентов логического и алгоритмического мышления, обучении их методам математической формализации задач, связанных с их будущей профессиональной сферой, развитии навыков самостоятельного изучения научной литературы.

Ключевые слова: преподавание математики, цели изучения дисциплины, компетенции, математические методы, алгоритмическое мышление.

Курс математики служит фундаментом специального образования и призван сформировать у студента знания, умения и навыки, составляющие профессиональные и общие компетенции [1, 2]:

- готовность использовать информационные технологии, в том числе современные средства компьютерной графики [3];
- способность применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;
- способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке целей и выбору путей их достижения [4];

- способность в условиях развития науки и изменяющейся социальной практики к переоценке накопленного опыта, анализу своих возможностей, готовность приобретать новые знания, использовать новые технологии обучения [5];

- готовность к самостоятельной, индивидуальной работе, принятию решений в рамках профессиональной компетенции;

- владение методами получения, хранения, переработки информации, соблюдение требований информационной безопасности [3].

В современной науке и технике математические методы исследования, моделирования и проектирования играют все возрастающую роль [6].

Основные цели, на достижение которых направлено изучение курса высшей математики, состоят в том, чтобы 1) сообщить студентам определенную сумму математических знаний; 2) привить им навыки применения изученного математического аппарата в стандартных и нестандартных ситуациях профессиональной сферы их будущей деятельности; 3) воспитать математическую культуру, уровень которой должен обеспечить способность самостоятельно приобретать нужные математические знания путем чтения математической и специальной профессионально-технической литературы.

Результаты обучения (компетенции) выпускника, на формирование которых ориентировано изучение дисциплины «Высшая математика» суть:

– умение применять математические методы (в частности, методы математического анализа, статистической обработки данных) для решения типичных задач профессиональной области;

– умение ориентироваться в математическом аппарате профессиональной области, работать с математическими таблицами, справочниками, подбирать, интерпретировать и оценивать необходимую информацию;

– умения, позволяющие с высокой степенью самостоятельности осваивать новые математические методы и модели, используемые в профессиональной области;

– умение использовать методы количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

– умение применять количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений и строить организационно-управленческие модели.

Планируемые результаты обучения, обеспечивающие достижение целей изучения дисциплины «Высшая математика» и её вклад в формирование результатов обучения (компетенций) выпускника таковы:

– знание основных понятий, методов линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, теории вероятностей и математической статистики [7];

– умение применять математические методы для решения различных задач геометрии, механики и физики с доведением решения до практиче-

ски приемлемого результата при возможном использовании компьютера и стандартного программного обеспечения;

- умение работать с математическими таблицами, справочниками, подбирать, интерпретировать и оценивать необходимую информацию;

- учебные умения, позволяющие с высокой степенью самостоятельности осваивать новые математические методы и модели, используемые в других дисциплинах.

Место дисциплины в структуре общеобразовательной подготовки: высшая математика является первой фундаментальной дисциплиной, изучаемой в техническом ВУЗе. Она основывается на знаниях, умениях и навыках в области математики, полученных учащимися в средней школе. В ВУЗе на ней основано преподавание естественнонаучных и профессиональных специальных дисциплин, в первую очередь – информатики, физики, теоретической и строительной механики.

Высшая математика изучается на инженерно-строительном факультете (ныне – Инженерно-строительный институт Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого) в течение первых двух семестров и относится к циклу базовых естественнонаучных дисциплин.

Оценка результатов учебной деятельности учащихся, качества знаний, умений и полученных профессиональных компетенций производится традиционно по трехбалльной шкале: «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично». Оценкой академической успеваемости студента является экзаменационная оценка за семестр. Система текущего контроля построена так, чтобы охватить все темы курса. Все промежуточные семестровые оценки: ежемесячная аттестация, оценки за проверочные работы и индивидуальные домашние задания являются рейтинговыми. Экзаменационные оценки выставляются в зачетную книжку студента. Экзамен может проводиться устно, письменно или в виде теста. Программа реализуется на лекциях и практических занятиях. На лекциях излагается основная часть теоретического материала, разбираются характерные примеры. Основные теоремы доказываются, формулы выводятся. Только при этом условии можно обеспечить у студента развитие математического мышления. Основная цель практических занятий – приобретение умений и навыков, используемых в приложениях математики.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Плотникова Е. Г.* Концептуальные положения процесса обучения математике в ВУЗе. // Высшее образование сегодня. 2011. № 3.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. М., 2000.
3. *Петрова С. Н.* Опыт использования информационных технологий в процессе обучения высшей математике. // Фундаментальные исследования. 2008. № 5. С. 104–105.

4. Александров А. Д. Математика и диалектика. // Математика в школе. 1972. № 1. С. 3–8. № 2. С. 4–10.
5. Успенский В. А. Апология математики. СПб.: Амфора, 2009. — 560 с.
6. Андреева И. А., Андреев А. Ф. О поведении траекторий одного класса кубических динамических систем. Евразийское научное объединение. Том 1. № 3 (25), с. 1–2.
7. Бортковская М. Р., Романов М. Ф., Хватов Ю. А. Математика. Вып. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье и интеграл Фурье. Опорный конспект. Изд. СПбГПУ. 2003–2008.

Н. А. Леонова, М. Р. Болтовская (Санкт-Петербург)
mbort@mail.ru

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ КУРСОВ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

УДК 316.334

Abstract

Relying on the results of the pedagogical monitoring, interaction of disciplines of the natural-science cycle is developed. Methodical ways of optimization of the content of disciplines within the specialty "Technosphere security" are offered, to exclude duplication of educational information within the natural-science cycle; parallel studying of courses is also carried out, professional examples and exercises are introduced in the process of practical training. The courses "Advanced Mathematics" and "Physics" agreed the best way are prepared. The educational and methodical complex "Mathematical Concepts of Examples and Tasks in Physics" is prepared.

Keywords: professional education, integration of disciplines, mathematical education, physical appendix.

Аннотация

Проведена работа для создания взаимосвязи учебных дисциплин естественнонаучного цикла, с учетом педагогического мониторинга. Предложены способы оптимизации содержания дисциплин в рамках направления подготовки «Техносферная безопасность», исключено дублирование учебной информации естественнонаучного цикла, а также проведено согласование изучения курсов по времени, в содержание практических занятий включены примеры и упражнения, непосредственно связанные с профессиональной подготовкой студентов. Сформированы взаимосвязанные по содержанию курсы учебных дисциплин «Высшая математика» и «Физика». Подготовлен учебно-методический комплекс «Математические понятия в примерах и задачах по физике».

Ключевые слова: профессиональное образование, интеграция дисциплин, математическое образование, физическое приложение.

Как показывает практика обучения студентов, основные трудности, возникающие перед студентами младших курсов технических специальностей, связаны с изучением дисциплин естественнонаучного цикла: физика, математика. Математический аппарат необходим физике как язык для описания физических процессов и явлений, как один из методов физического исследования. Практика показывает, что первокурсники, прежде всего, испытывают трудности в применении математических понятий и теорем к решению конкретных и наглядно сформулированных физических задач. Математический материал, который нужно использовать, как правило, усвоен ещё недостаточно глубоко, и у студентов (по их собственному признанию) возникает ощущение, что есть «математика для математики» и «математика для физики». В основе проблемы лежит «конфликт» между физикой и математикой: при изучении математики учащиеся иногда воспринимают материал вне связи с практикой, и потому при практическом применении математического аппарата в курсе физики делают много ошибок или используют математические знания без достаточной строгости понимания и обоснования используемых методов. Авторы попытались практически решить описанную проблему при обучении физике и математике студентов Высшей школы техносферной безопасности Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Дисциплины «Высшая математика» и «Физика» начинают изучаться одновременно с первого семестра первого курса. Именно поэтому освоение студентами математических понятий и практических методов сильно отстает от потребностей курса физики. Уже на первом занятии по физике, посвященном разделу «Кинематика», основные понятия вводятся с использованием дифференциального и интегрального исчисления. С ними студенты знакомятся на занятиях по математике значительно позже. Каждый преподаватель физики может привести множество подобных примеров расхождения интересов физики и возможностей математики. Так у студентов младших курсов объективно возникают трудности в изучении физики, что подтверждается результатами контроля текущей успеваемости, результатами экзамена. Та же ситуация создает и дополнительные трудности в усвоении математики будущими инженерами: не имея возможности сразу оценить полезность получаемых знаний, студенты зачастую воспринимают математический материал как сухой и отвлеченный.

Параллельное изучение двух курсов требует оптимизации и сопряжения содержания дисциплин. Именно такой путь был выбран преподавателями Высшей школы техносферной безопасности. Курс «Высшей математики» и физики изучаются в первом и втором семестрах. Содержание дисциплин «Физика» и «Высшая математика» полностью пересмотрены и выделены общие базовые понятия, закономерности, научные подходы к исследованию, сформирован учебно-профессиональный заказ. Резуль-

татом совместной работы является создание преемственных курсов «Высшей математики», «Физики». Разработан учебно-методический комплекс, который обеспечит взаимосвязь освоения дисциплин естественнонаучного цикла, а именно для студентов направления «Техносферная безопасность» написаны учебные пособия [4], [5], [6]. Пособия построены по принципу: математические факты плюс примеры решения физических задач. Такое пособие может использоваться как справочное руководство на практических занятиях по физике, а также как иллюстративный материал на занятиях по математике, что мотивирует студентов осваивать математические знания, осознавая их полезность в профессиональной сфере инженера-физика. Созданный учебно-методический комплекс используется уже несколько лет. Ниже приводим данные педагогического мониторинга студентов направления «Техносферная безопасность». Работа начата еще в 2014 году, когда было разработано и стало применяться учебное пособие [4]. Результаты текущей аттестации и итогового (семестрового) контроля показали повышение успеваемости по физике и математике: - 1 семестр учебного года (2013/2014) – 40%; - 1 семестр учебного года (2014/2015) – 54%. В дальнейшем разработанный учебно-методический комплекс применялся в течение двух семестров первого курса, результаты мониторинга таковы:

2015 год	Выпускники физ.-мат. школ: 60%	Успеваемость в конце 1 курса 68% (имеют 4 и 5) по физике и математике
2016 год	Выпускники физ.-мат. школ: 45%	Успеваемость в конце 1 курса 77% (имеют 4 и 5) по физике и математике
2017 год	Выпускники физ.-мат. школ: 47%	Успеваемость в конце 1 курса 60% (имеют 4 и 5) по физике и математике

Таким образом, видим за последние годы весьма высокий уровень успеваемости при снижении количества выпускников физ.-мат. школ среди студентов направления, что, вероятно, означает некоторое снижение среднего уровня школьной подготовки по физике и математике. При обсуждении и разработке учебно-методического комплекса нами также изучен опыт прошлых лет и различные практические и теоретические подходы к рассматриваемой проблеме, отраженные в книгах и статьях [1], [3], [9], [10], [11]. Такое обсуждение и анализ опыта прошлого способствовали совместной работе преподавателей дисциплин естественнонаучного и общепрофессионального циклов (см. [7]), которая нашла отражение и

в подготовке новых учебных пособий собственно по физике (см. [2], [8]). Совместная работа преподавателей различных дисциплин по формированию межпредметных связей в педагогической практике обеспечивает преемственность обучения студентов, что повышает качество их профессиональной подготовки (см. об этом в статье [7]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982. 512 с.
2. *Каверзнева Т. Т., Леонова Н. А., Ульянов А. И.* Техносферная безопасность в примерах и задачах по физике. Часть 1. Учебное пособие, Изд-во Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014, с. 58.
3. *Коробов В. А.* Опыт применения математики в преподавании физики. // Физика в школе. 1999. № 4.
4. *Леонова Н. А., Бортковская М. Р.* Математические понятия в примерах и задачах по физике. Учебное пособие, Изд-во Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014, 70 с.
5. *Бортковская М. Р., Леонова Н. А.* Некоторые главы математического анализа и обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах по физике. Учебное пособие, Изд-во Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2016, 111 с.
6. *Бортковская М. Р., Леонова Н. А.* Математические модели физических явлений в техносферной безопасности. Учебное пособие, Изд-во Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2016, 179 с.
7. *Леонова Н. А., Каверзнева Т. Т., Ульянов А. И.* Междисциплинарная связь курсов физики, безопасности жизнедеятельности и техносферной безопасности. // Научно-технические ведомости СПбПУ. 3(203): Научный журнал СПбГПУ. 2014. С. 160–164.
8. *Леонова Н. А., Каверзнева Т. Т., Ульянов А. И.* Техносферная безопасность в примерах и задачах по физике. Часть 2. Учебное пособие, Изд-во Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014, с. 70.
9. *Новиков С. П.* Математика на пороге XXI века (Историко-математические исследования). URL: www2.rsuh.ru (Официальный информационный ресурс Российского государственного гуманитарного университета) — РГГУ, 14.09.2006.
10. *Понтрягин Л. С.* Математический анализ для школьников. М.: Наука, 1980. 88 с.

Содержание

Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения	3
Фарков Ю. А., Робакидзе М. Г. О фреймах Парсеваля в пространствах периодических последовательностей	4
Секция I Дифференциальные уравнения	9
Андреева И. А., Андреев А. Ф. Исследование фазовых портретов в круге Пуанкаре для некоторых семейств кубических динамических систем	10
Николенко П. В. Об одной прикладной экстремальной задаче	16
Родин В. А., Синегубов С. В. О фрактальном построении сложных систем	24
Секция III Алгебра, дискретная математика, геометрия	29
Гуров С. И., Кормаков Г. В., Жукова Т. Д. Сбоеустойчивые обратимые схемы	31
1 Обратимые элементы	32
2 Обратимые схемы	35
3 Сбоеустойчивость и сбоеустойчивые элементы	36
4 Модели сбоев и функциональная диагностика	38
4.1 Модификация схемы до сбоеустойчивой	39
4.2 Использование специально разработанных элементов	39
4.3 Использование элементов, сохраняющих чётность	43
5 Схемы на элементах преобразований в пространстве Хэмминга	45

Секция V	
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии	55
Зеликин Н. В. Категориальная модель экономического воспроизводства	56
Карташева Л. В. Сетевое планирование для оптимизации деятельности предприятия	60
Фарков Ю. А., Нейштадт И. В., Робакидзе М. Г. О внедрении риск-ориентированного подхода в контрольно-надзорную деятельность	66
Секция X	
Современные проблемы образования	71
Дреев Г. А., Кутовой А. В. К вопросу управления качеством подготовки студентов	72
Ефимова Т. О., Андреева И. А. Задачи изучения дисциплины «Высшая математика» на инженерно-строительном факультете	75
Леонова Н. А., Болтовская М. Р. Обеспечение взаимосвязи курсов физики и математики	78