

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Тужилина Михаила Алексеевича
"Инварианты 3-мерных и 4-мерных
особенностей интегрируемых
гамильтоновых систем",
представленной на соискание ученой
степени кандидата физико-математических
наук,
по специальности 01.01.04 геометрия и
ТОПОЛОГИЯ.

Диссертация посвящена изучению инвариантов слоений четырехмерных окрестностей особых точек типа седло-седло с одинаковыми слоениями на границах этих окрестностей.

В теории интегрируемых гамильтоновых систем поведение системы почти везде устроено как траектории обмоток торов Лиувилля (торов в два раза меньшей размерности по отношению к фазовому пространству). А вот особые значения, их окрестности и поведение слоения на этих окрестностях представляют собой до сих пор не решенную задачу.

Диссертант рассматривает задачу об изучении так называемых слоений Лиувилля вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Такие вполне интегрируемые гамильтоновы системы действуют на 4-х мерных симплектических многообразиях. На 4-х

мерном многообразии должна быть задана структурная симплектическая форма, относительно которой гамильтоновы векторные поля задаются как косые градиенты функций Гамильтона (или гамильтонианов), в полная интегрируемость определяется двумя функциями Гамильтона, находящимися в инволюции по отношению к заданной симплектической форме. Набор двух функций Гамильтона называется отображение момента в двумерное евклидово пространство. Если значение отображения момента регулярно то на компактном многообразии прообраз точки отображения момента является двумерным тором Лиувилля, траектории на котором в общем положении образуют плотные обмотки.

Таких вполне интегрируемых гамильтоновых систем, разумеется, много, и поэтому их изучают с точностью до некоторого отношения эквивалентности.

Одно из полезных отношений является отношение лиувиллевой эквивалентности, которое заключается в том, что имеется такой диффеоморфизм, который отображает каждый слой слоения Лиувилля одного многообразия в некоторый слой слоения Лиувилля другого многообразия.

Классификация таких классов Лиувиллево эквивалентных гамильтоновых систем описывается при помощи изобретенной А.Т.Фоменко так называемой молекулы интегрируемой гамильтоновой системы и построенных на их основе инвариантов Цишанга-Фоменко.

Особые точки отображения момента в общем положении имеют вполне разумную классификацию. В четырехмерном случае (для систем с двумя степенями свободы) существуют четыре типа невырожденных особенностей ранга нуль:

1. случай центр-центр,
2. случай центр-седло,
3. случай фокус-фокус,
4. случай седло-седло.

В случае четырехмерного симплектического фазового пространства (интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы) А. Т. Фоменко выдвинул гипотезу: слоение границы окрестности невырожденного особого значения ранга нуль полностью определяет (с точностью

до послойной эквивалентности, называемой лиувиллевой эквивалентностью) слоение внутри этой окрестности.

Гипотеза А. Т. Фоменко выполняется для случаев, когда особое значение имеет тип фокус-фокус, центр-центр или центр-седло, а также в случае седло-седло, если прообраз особого значения состоит из одной или двух точек.

В случае же, когда прообраз особого значения состоит из более чем двух точек и имеет тип седло-седло, в работе Грабежного А., был построен контрпример к гипотезе А.Т.Фоменко: были приведены три послойно неэквивалентные четырехмерные многообразия с одинаковыми слоениями Лиувилля на их границах. Таким образом, изучение особенностей седлового типа представляет наибольший интерес и по-этому именно этот случай рассматривается в данной диссертации.

Основные результаты настоящей работы заключаются в построении двух бесконечных серий контр-примеров: в одной серии все четырехмерные многообразия попарно послойно неэквивалентны, а на их границах имеют одинаковые слоения Лиувилля; во второй серии все четырехмерные многообразия тоже попарно послойно неэквивалентны, но на границах они локально-одинаковые.

Данная диссертационная работа посвящена изучению слоений особенностей типа седло-седло. Главный интерес представляет вопрос о связи слоения границы этой особенности (меченой круговой молекулы) со слоением самой особенности. В удобно использовать вместо меченой круговой молекулы другой инвариант слоения Лиувилля — представление 4-мерной особенности в виде почти прямого произведения 2-атомов, предложенное Н.Т.Зунгом. Это представление является полным инвариантом слоения в смысле лиувиллевой эквивалентности.

В первом и втором разделах второй главы настоящей работы описывается структура круговой меченой молекулы для почти прямых произведений атомов $(V_1 \times V_2)/G$, вычисляются матрицы склейки и все метки, соответствующие ребрам круговой молекулы, для случая, когда группа G является циклической группой.

В случае нециклической группы G при ее ограничении на граничный тор T , соответствующий ребру круговой молекулы, доказывается разложение ее стабилизатора тора T в сумму примарных циклических групп, для которых можно применять метод вычисления матрицы склейки и соответственно меток согласно случаю циклической группы G .

Там же приводится метод определения, является ли данная круговая

молекула круговой молекулой особенности седло-седло для фиксированной сложности, в случае, если известен полный список атомов, участвующих в почти прямых произведениях этих особенностей. Каждый такой атом отвечает различному типу “компоненты” круговой молекулы. Идея данного метода заключается в классификации “допустимых” атомов для каждой компоненты фиксированного типа. Далее остается только сравнить атомы, соответствующие данной круговой молекулой, с атомами из классификации и если этих атомов в классификации нет, то данная круговая молекула не является круговой молекулой особенности седло-седло для выбранной сложности.

Приводится классификация “допустимых” атомов для круговых молекул особенностей типа седло-седло сложности два.

В третьем разделе второй главы диссертации приводится способ построения почти прямых произведения по круговым меченым молекулам симметричного вида с атомами со звездочками и без. Для построения атомов в произведениях используется метод “присоединения” атомов. Этот же метод используется в третьей главе настоящей работы для построения бесконечных серий различных почти прямых произведений с лиувиллево эквивалентными слоениями их границ. В частности, в разделе 3.2 приводится серия почти прямых произведений с одинаковой круговой молекулой и метками n и ε на ребрах, но разными метками r . Построена бесконечная серия особенностей типа седло-седло, у которых совпадают круговые молекулы, однако метки на ребрах круговых молекул различаются. Теорема 3.1 утверждает, что “Круговые молекулы почти прямых произведений атомов $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$ и прямого произведения $C_1 \times C_1$ совпадают. Однако их меченые молекулы различаются”.

В теореме 3.2 доказывается, что “прямое произведение $A_{2n} \times A_{2n}$ и почти прямое произведение $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$ представляют собой различные классы особенностей по отношению к лиувиллевой эквивалентности, но имеют совпадающие круговые меченые молекулы для каждого n соответственно, а именно слоения Лиувилля на их 3-границах совпадают (лиувиллево эквивалентны).

В четвертой главе диссертации классифицируются расщепляемые особенности типа седло-седло сложности два и доказывается критерий покомпонентной устойчивости для седловых особенностей любой конечной размерности (Теорема 4.1). В теореме 4.2 приводится классификация расщепленных особенностей типа седло-седло сложности 2. А именно, среди всех возможных особенностей сложности 2 типа седло-седло по-

компонентно расщепляемыми являются 28 особенностей, остальные 11 являются покомпонентно нерасщепляемыми.

В приложении приводится пример применения бигамильтонового формализма к интегрируемой гамильтоновой системе “волчок Лагранжа” (Теорема 5.1).

На основании вышесказанного можно утверждать, что в диссертации получены следующие результаты: Для круговых меченых молекул особенностей типа почти прямого произведения $(V_1 \times V_2)/G$

1. Описаны слоения в терминах 2-атомов,
2. Найдена матрица склейки этих 2-атомов в случае группы $G = \mathbb{Z}_n$,
3. Проведена классификация всех допустимых 2-атомов для 4-особенностей сложности два,
4. Найден метод определения, когда соответствующая круговая молекула является круговой молекулой некоторой 4-особенности фиксированной сложности,
5. Описан метод построения почти прямого произведения по круговой меченой молекуле симметричного вида,
6. Приведены примеры разных особенностей с одинаковой круговой (меченой) молекулой,
7. Исследованы 4-особенности сложности два на устойчивость (нерасщепляемость),
8. Получены связи между расщепляемостью 4-особенности сложности два и свойствами ее круговой молекулы.
9. Получен критерий устойчивости (нерасщепляемости) особенности типа почти прямого произведения $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$.

Все эти результаты представляют решение крупных задач в области гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, дающих новое представление о структуре особенностей интегрируемых гамильтоновых

систем. Диссертация написана четким математическим языком, постановка задач и формулировка теорем отличается логической последовательностью. Все утверждения и положения, выносимые на защиту, снабжены полными доказательствами, значимых недочетов кроме опечаток (на пример на стр.5, 14) в тексте я не обнаружил.

Таким образом я считаю, что диссертация удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология, оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова» и заслуживает присуждения Тужилину Михаилу Алкеевичу ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
профессор
Мищенко Александр Сергеевич

04.12.2018