

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОПОНЕНТА

доктора физико-математических наук, доцента Рябова Павла Евгеньевича на диссертационную работу Тужилина Михаила Алексеевича «Инварианты 3-мерных и 4-мерных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем», представленную в диссертационный совет МГУ.01.17 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – Геометрия и топология.

Диссертация М.А. Тужилина посвящена исследованию ряда интересных и важных задач описания топологической структуры гиперболических особенностей ранга нуль в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы. Полезность и актуальность диссертационного исследования не вызывает сомнений. Хорошо известно, что регулярными слоями слоения Лиувилля являются торы Лиувилля, а особые слои описываются в терминах бифуркаций этих торов. Топологической классификации особенностей с двумя и более степенями свободы посвящено немало работ (Л.М.Лерман, Я.Л.Уманский, А.Т. Фоменко, А.В. Болсинов, А.А.Ошемков, В.С. Матвеев, Н.Т.Зунг и др.). Изучению особенностей в конкретных интегрируемых гамильтоновых системах посвящены работы М.П. Харламова, П.Е. Рябова, П.В. Морозова, Д.Б. Зотьева, С.В. Соколова и др. Диссертационная работа М.А. Тужилина является естественным продолжением изучения топологических свойств гиперболических особенностей, представленных в виде почти прямых произведений.

В *первой главе* диссертации приводятся основные определения и теоремы для дальнейшего изложения результатов диссертации. Во *второй главе* исследуются свойства  $r$  меток круговой молекулы, которая отвечает четырехмерной особенности, представленной в виде почти прямого произведения. Здесь же приводится способ их вычисления.

В случае четырехмерного симплектического фазового пространства (интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы) А. Т. Фоменко была выдвинута гипотеза, которая состоит в том, что для так называемых боттовских интегрируемых систем *слоение границы* окрестности невырожденного особого слоя с точками ранга нуль полностью определяет (с точностью до послышной эквивалентности, называемой лиувиллевой эквивалентностью) слоение *внутри* этой окрестности. Гипотеза А.Т. Фоменко справедлива, когда особые точки имеют тип фокус-фокус, центр-центр или центр-седло, а также в случае седловой особенности, если особый слой содержит одну или две точки ранга нуль. В случае,

когда прообраз особого значения состоит более чем из двух точек и имеет гиперболическую особенность, это оказывается неверно. Используя понятие  $f$ -графа, в *третьей главе* диссертации удалось обнаружить две бесконечные серии *послойно неэквивалентных* четырехмерных многообразий с *одинаковыми слоениями* Лиувилля на их границах. Данный результат сформулирован в виде теоремы 3.2, стр. 57. Для доказательства теоремы была использована техника «присоединения» 2-атомов, которая приобретает самостоятельный исследовательский интерес, поскольку с помощью этой техники можно строить бесконечные серии почти прямых произведений с одинаковыми или разными круговыми мечеными молекулами.

Центральным исследованием, на мой взгляд, является *четвертая глава* диссертации, посвященная проблеме расщепляемости седловых особенностей почти прямых произведений. Уже давно замечено при исследовании фазовой топологии конкретных интегрируемых гамильтоновых систем неустойчивость некоторых бифуркаций к интегрируемым возмущениям, например, бифуркация двух торов в четыре в случае Ковалевской-Горячева-Чаплыгина в динамике твердого тела, которая описывается в терминах 2-атома  $P_4$ , или бифуркация одного тора сразу в три в интегрируемых задачах вихревой динамики, которая соответствует 2-атому  $D_1$ . Автору диссертации удалось обнаружить более тонкие свойства поведения так называемых  $r$ -меток при интегрируемом возмущении. Это свойство оказалось исключительно важным для доказательства нерасщепляемости определенного списка особенностей типа седло-седло сложности 2. Основной же результат диссертации (теорема 4.2, стр. 67) является тем необходимым инструментом, который существенно упрощает исследование по фазовой топологии конкретных интегрируемых систем в части определения самой бифуркации лиувиллевых торов. Для этого достаточно посмотреть приведенную в диссертации таблицу 2-атомов, как приложение к указанной теореме (таблица 4.1, стр. 77) и их возмущенные слоения (Рис. 4.5 – 4.8, стр. 78 – 81) и получить исчерпывающий ответ, а что может быть в том или ином конкретном случае. Ряд результатов диссертации уже нашли применение в работах специалистов. Так, основная теорема 4.2 и ее доказательство послужило поводом более глубокого изучения транзитивного действия группы на вершины атомов в случае нерасщепляемости седловой особенности, что привело к формулировке и доказательству уже *критерия покомпонентной устойчивости* седловых особенностей почти прямых произведений ранга нуль *в системах с  $n$  степенями свободы*. Этот критерий принадлежит А.А. Ошемкову. Подчеркнем еще раз, что указанный критерий был подсказан диссертационным исследованием М.А. Тужилина в этой части.

Последняя глава диссертации посвящена бигамильтонову подходу классификации особенностей отображения момента для волчка Лагранжа. В заключении диссертации

приводится список расщепляемых особенностей, которые наблюдались в конкретных интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых системах.

Какие же замечания можно указать? Подробно описаны примеры расщепляемости *двух* конкретных четырехмерных особенностей, представленных в виде почти прямых произведений:  $K_3 \times C_2/\mathbb{Z}_2(\beta\gamma^2, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \beta)$  (здесь в обозначении на стр. 67 диссертации присутствует неточность) и  $P_4 \times B/\mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$ . А далее сказано (стр. 67 диссертации) «остальное будет доказываться аналогично» и такого подробного доказательства для *всех оставшихся 26* расщепляемых особенностей типа седло-седло сложности 2, к сожалению, не приводится. Тем не менее на стр. 78 – 81 приведена исчерпывающая таблица 4.1 2-атомов и их возмущенных слоений.

Далее, приводится введенное автором понятия *внешнего* и *внутреннего* расщепления, указывается на примерах *внешнее* расщепление круговой молекулы особенности  $K_3 \times C_2/\mathbb{Z}_2(\beta\gamma^2, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \beta)$  и *внутреннее* расщепление круговой молекулы особенности  $L_2 \times B/\mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$ , что дает другое доказательство их расщепляемости. Тем не менее из таблицы 4.1, стр. 77 и рис.4.5 – 4.8, стр. 78 – 81, трудно усмотреть для каких расщепляемых особенностей имеет место *внешнее* расщепление, а для каких – *внутреннее*.

Отмеченные выше замечания носят исключительно рекомендательный характер и не снижают ценность диссертационной работы М.А. Тужилина.

Отметим следующее обстоятельство. Интегрируемый случай Ковалевской содержит *невырожденные* особенности типа седло-седло ранга нуль сложности 1, круговые меченые молекулы которых хорошо известны и, очевидно, не могут быть расщепляемыми. Тем не менее существует интегрируемое возмущение (по разным параметрам, например, добавление гиростата) случая Ковалевской (случай Ковалевской – Яхья, случай Ковалевской – Соколова и другие ее обобщения). В классическом случае Ковалевской кроме нерасщепляемых *невырожденных* особенностей ранга нуль присутствуют и *вырожденные* особенности ранга 1, которые соответствуют, например, точкам касания бифуркационных кривых, и как раз различные интегрируемые возмущения классического случая Ковалевской «расщепляют» круговые меченые молекулы, но уже *вырожденных* особенностей ранга 1. Данное обстоятельство носит рекомендательный характер дальнейшего исследования проблемы расщепляемости применительно к *вырожденным* особенностям.

**Заключение.** Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается прежде всего публикациями в высокорейтинговых журналах, выступлениями на престижных конференциях и семинарах. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены строгими доказательствами. По автореферату и опубликованным работам автора можно оценить

диссертационную работу «Инварианты 3-мерных и 4-мерных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем», как актуальное, законченное научное исследование, удовлетворяющее критериям, определенным пп.2.1 – 2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова от 28 марта 2018 г., а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова от 28 марта 2018 г. По моему мнению, автор диссертации, Тужилин Михаил Алексеевич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – Геометрия и топология (физико-математические науки).

Официальный оппонент,  
профессор Департамента анализа данных,  
принятия решения и финансовых технологий  
федерального государственного образовательного  
бюджетного учреждения высшего образования  
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика,  
доцент

**Павел Евгеньевич Рябов**

125993, Ленинградский проспект, 49  
Тел.: +7 (495) 249-5222  
E-mail: PERYabov@fa.ru

Подпись Рябова П. Е.

**ЗАВЕРЯЮ**

Ученый секретарь Ученого совета  
Финансового университета

В.В. Звягинцева

16 ноября 2018 г.

