

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 517.977

Ронжина Мария Игоревна

**Геометрическая структура синтеза оптимальных траекторий
для линеаризации многомерных задач в окрестности
неустойчивого положения равновесия**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Зеликин Михаил Ильич**
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, профессор

Официальные оппоненты: **Асеев Сергей Миронович**
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУН Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН,
главный научный сотрудник

Мельников Николай Борисович
доктор физико-математических наук,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, доцент

Ремизов Алексей Олегович
кандидат физико-математических наук,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН,
старший научный сотрудник

Защита диссертации состоится «12» декабря 2018 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, строение 52, факультет ВМиК, комната 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/152208380/>.

Автореферат разослан « » 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ 01.09
доктор физико-математических наук,
профессор

Захаров Е.В.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена изучению геометрической структуры синтеза оптимальных траекторий для линеаризации многомерных задач в окрестности неустойчивого положения равновесия.

Актуальность темы. Классическим примером задачи стабилизации в окрестности неустойчивого равновесия является задача стабилизации перевернутого маятника около вертикального положения равновесия. Модели перевернутых маятников являются эталонными системами для разработки, вычисления, тестирования различных классических и современных методов управления. Такие модели широко используются в лабораториях, занимающихся разработкой контроллеров, которые затем внедряются в сложные и дорогие реальные системы в робототехнике, аэрокосмической отрасли, автоматике, медицине, инженерии и т.д. Поэтому изучение математических моделей перевернутых маятников, исследование их управляемости и устойчивости продолжает оставаться важной задачей.

Задачами стабилизации перевернутого маятника занимались многие исследователи. Для маятника верхнее вертикальное положение, очевидно, является неустойчивым. Однако, оказалось, что можно это положение превратить в устойчивое, если, например, точка подвеса совершает вертикальные колебания [1]. В последствии появилось большое количество работ о перевернутом маятнике, в которых изучались различные методы его стабилизации в вертикальном положении [2, 3, 6–8].

В [2] рассматривается однозвенный нелинейный маятник. Изучается задача перевода маятника из нижнего (устойчивого) положения равновесия в верхнее (неустойчивое) положение равновесия за минимальное время. Оптимальный синтез строится на основе принципа максимума Понтрягина и численного моделирования.

Поскольку в реальных системах ресурсы управления ограничены, важную роль играют задачи с ограниченным управлением. Задаче стабилизации перевернутого двухзвенного маятника с неподвижной точкой подвеса посвящена работа [3]. Движение маятника управляется с помощью ограниченного момента, приложенного в шарнире, соединяющем точку подвеса и первое звено маятника, или в межзвенном шарнире. Для линеаризованной модели изучаются области управляемости. Предлагается управление, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость маятника.

В работах [4, 5] доказано существование движения перевернутого маятника без падения.

В [6], как и в работе [2], изучается задача перевода маятника из нижнего положения равновесия в неустойчивое верхнее. Маятник нелинейный, состоит из двух звеньев, точка подвеса неподвижна. Управление осуществ-

ляется с помощью ограниченного по абсолютной величине момента, приложенного во внутреннем межзвенном шарнире. Строится управление, которое переводит маятник в малую окрестность верхнего неустойчивого положения равновесия и обеспечивает асимптотическую устойчивость маятника. Приводятся численные исследования предложенного алгоритма управления.

Многозвенный маятник на движущемся основании исследуется в [8]. В качестве управления рассмотрен момент, приложенный к шарниру, соединяющему основание и первое звено маятника. Для системы с однозвенным маятником построены фазовые траектории системы при отсутствии управления. Построено управление, стабилизирующее систему в верхнем положении равновесия. Строится численное решение задачи быстрогодействия для однозвенного (нелинейного) маятника.

Не менее важны исследования задач стабилизации сферического перевернутого маятника. Ниже приведены некоторые последние результаты, связанные с управлением сферическим перевернутым маятником [9–13].

В [9,10] разработан контроллер, стабилизирующий управляемый сферический перевернутый маятник около верхнего (неустойчивого) равновесия. Предложенный контроллер приводит маятник из произвольного начального состояния в верхнюю полусферу в желаемое верхнее положение. В [11] представлен нелинейный контроллер для стабилизации перевернутого сферического маятника на тележке. Предложенный контроллер способен привести маятник в неустойчивое вертикальное положение равновесия вместе с тележкой в начале координат. В [12] выходной стабилизатор был применен к сферическому перевернутому маятнику для отслеживания серии эллиптических траекторий. В [13] была предложена система управления с обратной связью, которая может стабилизировать перевернутый сферический маятник на колесной тележке, а также может направлять тележку в желаемое целевое положение.

В настоящей работе рассматриваются многомерные задачи оптимального управления со скалярным и двумерным (из круга) ограниченным управлением, получающиеся из линеаризации колебательных систем в окрестности неустойчивого положения равновесия.

Построение решения в этих задачах основывается на технике четтеринг-режимов. Суть четтеринг-режимов состоит в том, что управление на оптимальной траектории имеет бесконечное число неустранимых разрывов на конечном интервале времени. Впервые пример такой задачи привел А. Т. Фуллер в 1960 году [14].

Одной из основных причин возникновения четтеринг-режима является наличие у управляемой системы особого режима [15]. Траекторию, в точках которой значение управления с помощью непосредственного при-

менения условия принципа максимума Понтрягина определяется неоднозначно, называют особым режимом. В задачах [16], аффинно порожденных скалярным управлением u (то есть в задачах с гамильтонианом вида $H(q, p, u) = H_0(q, p) + uH_1(q, p)$, где q и p — фазовая и сопряженная переменные соответственно), функция $H_1(q, p)$ вдоль особой траектории есть тождественный нуль. Особое управление получается последовательным дифференцированием тождества $H_1 \equiv 0$ вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H . При этом управление u обязательно появляется на четном шаге дифференцирования $2q$. Число q называется порядком особой траектории [17]. Для таких задач (аффинных по скалярному управлению u) оптимальная траектория, как правило, выходит на особый режим. Однако Келли, Копп и Мойер доказали, что сопряжение кусочно гладкой неособой траектории с особой траекторией любого четного порядка неоптимально [18]. Поэтому для оптимальных траекторий особый участок (четного порядка) сопрягается не с кусочно-гладкой дугой, а с четтеринг-траекторией.

Полная теория четтеринг-режимов второго порядка построена в работах М.И. Зеликина, В.Ф. Борисова [15, 19, 20], в которых дано полное описание фазового портрета разрывных гамильтоновых систем в окрестности особого многообразия второго порядка, показано, что асимптотика решений таких задач определяется решением двумерной классической задачи Фуллера.

Манитой Л.А. [21] был рассмотрен широкий класс управляемых систем с ограниченным скалярным управлением, которые являются малыми (в смысле действия группы Фуллера) возмущениями n -мерной канонической управляемой системы (гамильтонова система в n -мерной задаче Фуллера). Для данного широкого класса возмущений был построен полный синтез оптимальных траекторий, содержащий особые режимы высоких порядков и оптимальные траектории с учащающимися переключениями.

Задачи оптимального управления с многомерным управлением менее изучены. Наиболее разработанными являются задачи с неограниченным управлением. Как правило это субримановы задачи [22]. В [23] рассмотрено несколько конкретных задач с ограниченным управлением, для них построен частичный синтез, а в некоторых случаях синтез был построен полностью. В [24] рассматривалась задача квадратичной оптимизации для линейной системы с постоянными коэффициентами и с ограничением на управление. В задаче исследовался феномен схожий с четтерингом для случая многомерного управления.

При определении порядка особой траектории в случае задач, аффинных по многомерному управлению чаще всего используют условие Гоха-Кренера [25, 26], порядок определяется отдельно по каждой компоненте

управления u_i . Но такое определение не всегда корректно: в разных системах координат может получиться разный порядок. Как правило для таких задач порядок особой траектории определяется как флаг линейных подпространств в пространстве управлений [27]. В терминах этого флага в [27] построены необходимые условия сопряжения неособой экстремали с особой в аффинных по управлению системах.

Локуциевским Л.В. [28] были разработаны методы исследования типичной структуры оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению. Полученные результаты были применены к изучению характерных особенностей гамильтоновых систем с разрывной правой частью. В задаче с двумерным управлением из треугольника был открыт новый феномен хаотической динамики оптимальных траекторий на конечных промежутках времени. Также было доказано, что данный феномен хаотического поведения экстремалей на конечных промежутках времени является ситуацией общего положения в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

Классическим примером задачи с многомерным управлением с гладким ограничением на управление является аналог задачи Фуллера с двумерным управлением. Для данной задачи полный синтез до сих пор не построен, но известны некоторые частные решения. В [20, 24] показано, что оптимальные траектории содержат траектории с четтерингом, а также траектории, бегущие вдоль обобщенной логарифмической спирали, совершающие бесконечное число оборотов вокруг нуля и, в отличие от классического фокуса, доходящие до нуля за конечное время.

Заметим, что синтез, содержащий особые траектории и траектории с учащающимися переключениями, достаточно типичное явление при управлении механическими системами [15, 19, 20, 29–35]. Наличие режимов с учащающимися переключениями управления доказано для задач стабилизации твердого тела [19, 29], управления манипуляторами [19, 30], колебаниями струны [31], балок [32, 34, 35] и др.

Целью работы является исследование многомерных задач оптимального управления со скалярным и двумерным управлением. В таких задачах изучаются оптимальные траектории: вычисляются особые экстремали, строится оптимальный синтез, содержащий особые режимы и описывается качественная геометрия поведения оптимальных траекторий.

В связи с этим в работе основное внимание уделено следующему:

- построению оптимального синтеза в различных задачах в окрестности неустойчивого положения равновесия;
- доказательству теоремы о геометрической структуре оптимального синтеза в ряде прикладных механических задач (в том числе с многомерным управлением с гладким ограничением) в окрестности неустойчивых

положений равновесия и особых экстремалей;

— качественному описанию геометрии оптимального синтеза в задаче стабилизации многозвенного перевернутого маятника на подвижном основании (управление одномерно), а также в задаче стабилизации сферического перевернутого маятника (управление двумерно и лежит в круге) в окрестности неустойчивого верхнего положения равновесия.

При этом в рассматриваемых задачах полагается, что управление ограничено, и что присутствуют особые экстремали второго порядка.

Методы исследования. Один из основных методов для исследования особых экстремалей – это метод, разработанный в школе М.И. Зеликина [20]. Он основан на разрешении особенности точек на особых экстремальных и позволяет качественно исследовать динамику оптимальных траекторий с помощью исследования соответствующего фактор-пространства.

Помимо перечисленного выше специфического метода в исследованиях использовались следующие традиционные методы: классические методы теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина, теория особых экстремалей и др.), традиционные методы дифференциальных уравнений, функционального анализа, алгебры, выпуклого анализа, аналитической механики, динамических систем, теории устойчивости.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем. В настоящей работе рассмотрены две задачи оптимального управления и их применение в задачах стабилизации перевернутого маятника на подвижном основании.

Первая задача посвящена построению оптимального синтеза в задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы со скалярным управлением. Управление ограничено по модулю единиц. Для нее:

1. Полностью построен синтез оптимальных траекторий.
2. Доказано, что оптимальный синтез содержит особые участки и траектории с учащающимися переключениями. Неособые оптимальные траектории выходят на особую поверхность за конечное время с бесконечным числом переключений управления. Затем движение продолжается по особой поверхности с особым управлением, за бесконечное время оптимальная траектория попадает в начало координат.
3. Не смотря на это, доказано, что построенные решения действительно реализуют глобальный минимум.

Данная задача возникла при исследовании задачи стабилизации на бесконечном интервале времени перевернутого n -звенного маятника на движущейся тележке. Управлением является ограниченная по модулю сила, приложенная к тележке.

Заметим, что линеаризация любой задачи стабилизации колебательной системы приводит к задаче управления набором осцилляторов. В результате была решена типичная задача стабилизации системы из конечного числа осцилляторов с помощью единого для всех осцилляторов управления. Построенный оптимальный синтез является эталонным для широкого класса колебательных систем.

Во *второй задаче* рассматривается минимизация квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы уже с двумерным управлением. Управление ограничено по евклидовой норме единицей, т.е. лежит в круге. Для нее:

1. Построен частичный оптимальный синтез.
2. Показано, что оптимальные траектории содержат дуги с учащающимися переключениями управления.
3. Также доказано существование однопараметрического семейства решений (являющегося аналогом логарифмических спиралей), попадающего в начало координат и испытывающего бесконечное число оборотов вокруг начала координат за конечное время.

Основой для второй задачи послужила задача стабилизации сферического перевернутого маятника на тележке за бесконечное время. Внешняя плоская ограниченная сила, приложенная к тележке, рассматривается как функция управления.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть полезны при изучении задач оптимального управления, обладающих особыми режимами, задач стабилизации управляемых систем, а также при изучении задач в робототехнике, аэрокосмической отрасли, автоматике, медицине, инженерии и т.д.

Положения, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту.

1. В задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы со скалярным ограниченным управлением построен полный оптимальный синтез, содержащий особые траектории и траектории с учащающимися переключениями.
2. Изучена задача минимизации среднеквадратичного отклонения от неустойчивого положения равновесия многозвенного перевернутого

маятника на движущейся тележке. Управление – ограниченная сила, приложенная к тележке. Показано, что задача с линеаризованными относительно вертикального положения равновесия уравнениями движения маятника сводится к задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы со скалярным ограниченным управлением.

3. В задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы с двумерным ограниченным управлением были найдены решения с учащающимися переключениями и решения, являющиеся аналогом логарифмических спиралей.
4. Изучена задача минимизации среднеквадратичного отклонения от неустойчивого положения равновесия сферического перевернутого маятника на движущемся основании. Управление – двумерная ограниченная сила, приложенная к подвижному основанию. Показано, что задача с линеаризованными относительно вертикального положения равновесия уравнениями движения маятника сводится к задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы с двумерным ограниченным управлением.

Апробация диссертации. Основные результаты автора докладывались на **семинарах**:

1. "Геометрическая теория управления" на механико-математическом факультете МГУ (2014-2018 гг., неоднократно – руководители семинара чл.-корр. РАН, проф. М.И. Зеликин и проф. Л.В. Локуцкий);

2. "Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения" на механико-математическом факультете МГУ (2015г. – руководители семинара проф. А.В. Фурсиков, проф. В.М. Тихомиров, чл.-корр. РАН, проф. М.И. Зеликин и чл.-корр. РАН, проф. В.Ю. Протасов);

3. "Проблемы математической теории управления" Москва, МИАН, (8 июня 2018 г. – руководители семинара чл.-корр. РАН, проф. С.М. Асеев и проф. М.С. Никольский

и **конференциях**:

1. XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2015" , МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 13-17 апреля 2015. (М.И.Ронжина, Глобально-оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления перевернутым двухзвенным маятником.)

2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2016" , МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11-15 апреля 2016. (М.И.Ронжина, Оптимальный синтез в задаче управления n - звенным перевернутым маятником на движущемся основании.)

3. International Conference "Supercomputer Simulations in Science and Engineering" , Moscow Institute for Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics Tallinskaya ul. 34, Moscow, Russia, September 6-10, 2016. (L.A.Manita, M.I.Ronzhina, Optimal Control of a Spherical Inverted Pendulum.)

4. Международная конференция "Математическая теория оптимального управления" , посвященная 90-летию академика Р. В. Гамкрелидзе, Москва, Россия, 1-2 июня 2017. (Л.В.Локуцкий, Л.А.Манита, М.И.Ронжина, Оптимальные решения в окрестности особых экстремалей в задачах с двумерным управлением.)

5. International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics. Suzdal, Russia, July 7 – 11, 2017. (L.A.Manita, M.I.Ronzhina, Accumulations of control switchings in a control problem for an inverted spherical pendulum on a cart.)

6. International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond (CSP2017). Moscow, Russia, October 9 – 12, 2017. (L.A.Manita, M.I.Ronzhina, Singular solutions for vibration control problems.)

7. International Conference "Systems Analysis: Modeling and Control" in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy, Moscow, Russia, May 31–June 1, 2018. (M.Ronzhina, L.Manita, On optimal solutions in a problem with two-dimensional bounded control.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ. Из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, RSCI, Web of Science, SCOPUS, 3 статьи в сборниках трудов конференций и 4 тезиса докладов на научных конференциях.

Структура диссертации. Настоящая диссертация изложена на 76 страницах и состоит из введения и двух глав, разделенных на параграфы. Библиография содержит 56 наименований.

Содержание диссертации.

Во введении содержится обзор литературы по исследуемой теме и основных результатов, сформулированных в последующих главах.

В первой главе рассматривается задача минимизации квадратичного

функционала (Задача 1.1)

$$\int_0^{\infty} \langle Kx(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \min$$

на траекториях линейной управляемой системы

$$\ddot{x}(t) - \Lambda x(t) = Iu(t),$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0$$

Управление осуществляется ограниченным скалярным параметром

$$|u(t)| \leq 1$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, I — вектор, состоящий из 1, K — постоянная симметричная положительно определенная матрица размера $n \times n$, Λ — постоянная диагональная положительно определенная $n \times n$ -матрица, $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$, $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$.

В параграфе 1.1 исследуются вопросы существования и единственности оптимального решения Задачи 1.1. Существование и единственность доказывается стандартными методами, изложенными в [20] для задачи, обладающей группой симметрий. Также, с помощью свойств функции Беллмана доказано, что решение $x(t)$ Задачи 1.1 и его производная $\dot{x}(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

В параграфе 1.2 выписываются необходимые условия оптимальности. Определяется функция Понтрягина

$$H(x, y, \phi, \psi) = -\frac{\lambda_0}{2} \langle Kx, x \rangle + \langle y, \phi \rangle + \langle \Lambda x, \psi \rangle + \langle I, \psi \rangle u$$

и выписывается соответствующая система принципа максимума Понтрягина

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Lambda x + Iu, \quad \dot{\phi} = \lambda_0 Kx - \Lambda \psi, \quad \dot{\psi} = -\phi, \quad u \in \text{Sign}(\langle I, \psi \rangle).$$

Доказано утверждение о том, что множитель $\lambda_0 \neq 0$ в Задаче 1.1.

В параграфе 1.3 показано, что в Задаче 1.1 существуют особые траектории порядка 2. Поверхность особых траекторий задается уравнениями

$$\begin{aligned} S = \{ & \langle I, \psi \rangle = 0, \quad \langle I, \phi \rangle = 0, \quad \langle I, Kx - \Lambda \psi \rangle = 0, \quad \langle I, Ky + \Lambda \phi \rangle = 0, \\ & |-\langle I, (K\Lambda + \Lambda K)x \rangle + \langle I, \Lambda^2 \psi \rangle| \leq \langle KI, I \rangle \} \end{aligned}$$

Управление на особых экстремальных:

$$u_{oc}(t) = (-\langle I, (KL + LK)x(t) \rangle + \langle I, L^2\psi(t) \rangle) / \langle KI, I \rangle$$

Также доказывается утверждение о том, что в достаточно малой окрестности начала координат неособые решения Задачи 1.1 за конечное время с бесконечным числом переключений управления выходят на особую поверхность. Доказательство данного утверждения основано на проверке выполнения условий теоремы о расслоении Зеликина М.И., Борисова В.Ф. [15]. Для этого система уравнений принципа максимума приводится к полуканонической форме и проверяется выполнение неравенств из условия теоремы о расслоении.

В параграфе 1.4 исследуется поведение экстремалей на особом многообразии. Система уравнений принципа максимума Понтрягина на особой поверхности имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ \dot{y}_k = \lambda_k x_k + \frac{1}{\sigma} \left(- \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(\lambda_i + \lambda_j - (\lambda_1 + \lambda_2))x_i + \sum_{i=3}^n (\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_2 - \lambda_i)\psi_i \right) \\ \quad k = 1, \dots, n; \\ \dot{\psi}_k = -\phi_k, \\ \dot{\phi}_k = \sum_{j=1}^n k_{kj}x_j - \lambda_k\psi_k, \quad k = 3, \dots, n; \end{cases}$$

Характеристический многочлен данной системы $P(\mu) = \frac{1}{\sigma} \langle Km(\mu), m(\mu) \rangle$, где

$$m(\mu) = \left(\prod_{k=2}^n (\lambda_k - \mu^2), \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n (\lambda_k - \mu^2), \dots, \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \mu^2) \right)^T$$

Следовательно, собственные значения симметричны относительно мнимой оси, среди собственных значений нет чисто мнимых и чисто вещественных, то есть ровно $(2n - 2)$ собственных значений имеют строго положительную вещественную часть и $(2n - 2)$ собственных значений имеют строго отрицательную вещественную часть. А это означает, что особое многообразие разбивается на два инвариантных подпространства. Первое подпространство соткано из траекторий, соответствующих собственным значениям с отрицательной вещественной частью. Траектории имеют вид спиралей и при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к началу координат. Второе подпространство соткано из траекторий, соответствующих собственным значениям с положительной вещественной частью. Траектории имеют вид спиралей и при возрастании времени удаляются от начала

координат.

В параграфе 1.5 показывается, что при дополнительных условиях принцип максимума Понтрягина является достаточным условием оптимальности.

Таким образом, основным результатом первой главы является следующая теорема

Теорема. 1.3. *Для начальных положений из малой окрестности начала координат оптимальные решения в Задаче 1.1 устроены следующим образом: неособые траектории с бесконечным числом переключений управления за конечное время выходят на особую поверхность второго порядка, затем траектория с особым управлением остается на особой поверхности, асимптотически приближаясь к началу координат, когда время стремится к бесконечности.*

В параграфах 1.6 и 1.7 рассматривается задача управления плоским многосзвенным перевернутым маятником, шарнирно прикрепленным к тележке. Маятник управляется горизонтальной ограниченной силой, приложенной к тележке. Управление выбирается из условия минимизации среднеквадратичного отклонения маятника от верхнего положения равновесия. Показано, что задача оптимального управления для линеаризации маятника в окрестности вертикали есть в точности частный случай Задачи 1.1.

Во второй главе изучается задача минимизации квадратичного функционала (Задача 2.1)

$$\int_0^{\infty} \|x(t)\|^2 dt \rightarrow \inf$$

на траекториях линейной управляемой системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = Kx + u, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2$$

с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0.$$

Управление $u(t)$ **двумерно** и ограничено: $\|u(t)\| \leq 1$, где $\|\cdot\|$ – стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^2$, $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ – некоторая 2×2 диагональная матрица.

Если (x^0, y^0) достаточно близки к нулю, то существует единственное решение Задачи 2.1. В случае $k_i < 0, i = 1, 2$ решение Задачи 2.1 существует и единственно при любых (x^0, y^0) [20, 28].

Гамильтониан в Задаче 2.1

$$H(x, y, \phi, \psi) = -\frac{\lambda_0}{2} \langle x, x \rangle + \langle y, \phi \rangle + \langle Kx, \psi \rangle + \langle u, \psi \rangle$$

Соответствующая гамильтонова система:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = Kx + \hat{u}, \quad \dot{\phi} = \lambda_0 x - K\psi, \quad \dot{\psi} = -\phi, \quad \hat{u} = \psi / \|\psi\|$$

Решение $z(t) = (x(t), y(t), \phi(t), \psi(t))$ гамильтоновой системы Задачи 2.1 называется **особым** на промежутке (t_1, t_2) , если $\psi(t) = 0$ для всех $t \in (t_1, t_2)$.

В Задаче 2.1 нулевое решение $z(t) = 0$ является особым решением второго порядка, более того оно является единственным особым решением.

В [20, 28, 36] доказано, что решение с начальным условием (x^0, y^0) (из достаточно малой окрестности начала координат в случае $k_i > 0$ для некоторого $i = 1, 2$) достигает нуля за конечное время $T(x^0, y^0)$. При этом функция $T(x^0, y^0)$ непрерывна и

$$C_1 \max\{\sqrt{|x^0|}, |y^0|\} \leq T(x^0, y^0) \leq C_2 \max\{\sqrt{|x^0|}, |y^0|\}$$

для некоторых $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$. Также оптимальное управление $\hat{u}(t)$ не имеет предела при $t \rightarrow T(x^0, y^0) - 0$.

В параграфе 2.2 доказывалось существование четтеринг-траекторий в Задаче 2.1. Показано, что если начальные условия x^0 и y^0 лежат в одном собственном подпространстве L_0 матрицы K , соответствующем собственному значению k , то тогда решения $x(t)$ и $y(t)$ будут лежать в L_0 для всех t . В этом случае поведение оптимальных решений Задачи 2.1 в окрестности начала координат аналогично оптимальному синтезу двумерной задачи Фуллера со скалярным управлением. А именно, оптимальное управление $\hat{u}(t)$ претерпевает бесконечное число переключений за конечный интервал времени, то есть является четтерингом.

В параграфе 2.3 рассматривается случай модельной задачи (Задача 2.1 при $K = 0$). Минимизировать функционал

$$\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \rightarrow \inf$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = u, \quad \|u(t)\| \leq 1, \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

В 1994 году [20, 24] для этой задачи было найдено явное частное решение в виде однопараметрического семейства решений с начальным условием

$(\kappa x^0, \kappa y^0)$, сотканного из логарифмических спиралей

$$x_\kappa^*(t) = \kappa A_2 (T-t)^2 e^{i\alpha \ln|T-t|}, \quad y_\kappa^*(t) = \kappa A_3 (T-t) e^{i\alpha \ln|T-t|}, \quad u_\kappa^*(t) = -\kappa e^{i\alpha \ln|T-t|},$$

$$\kappa \in \mathcal{O}(2), \quad A_0 = 1/126, \quad \alpha = \pm\sqrt{5}, \quad A_{j+1} = -A_j(4-j+i\alpha), \quad j = 0, 1, 2.$$

В отличие от траекторий особой точки фокусного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений, оптимальная траектория модельной задачи приближается к началу координат за конечное время, совершая счетное число вращений вокруг нуля.

Одним из основных результатов главы 2 является доказательство теоремы о том, что существуют похожие решения Задачи 2.1:

Теорема. 2.2. *Существует однопараметрическое семейство решений $(x_\kappa(t), y_\kappa(t), u_\kappa(t))$ Задачи 2.1, попадающее в начало координат, испытывающее бесконечное число оборотов вокруг нуля за конечное время T , определяющееся следующим образом:*

$$x_\kappa(t) = \kappa C_x (T-t)^2 e^{i\beta \ln|T-t|} (1 + g_x(T-t)),$$

$$y_\kappa(t) = \kappa C_y (T-t) e^{i\beta \ln|T-t|} (1 + g_y(T-t)),$$

$$u_\kappa(t) = -\kappa C_u e^{i\beta \ln|T-t|} (1 + g_u(T-t)),$$

где $g_{x,y,u}(T-t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T$, $\kappa \in \mathcal{SO}(2)$, $i^2 = -1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C_{x,y,u} \in \mathbb{C}$. Константа T зависит от начальных данных $(x_\kappa(0), y_\kappa(0))$.

Доказательство данной теоремы основано на применении процедуры разрешения особенности в начале координат и теоремы об устойчивом и неустойчивом многообразии цикла [37].

Классическая процедура разрешения особенностей дифференциального уравнения встречается, например, у Арнольда В.И. [38]. Процедура разрешения особенности точек на особых экстремалих была предложена в [20], а потом усовершенствована в [28]. С аналитической точки зрения речь идет о выборе такой системы координат вблизи особой экстремали, в которой малым перемещениям вблизи особенности соответствуют большие изменения координат.

Разрешением особенности в начале координат будем называть отображение

$$B : (x, y, \phi, \psi) \mapsto (\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}), \text{ задающееся формулами}$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{\mu}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\mu^2}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{\mu^3}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\mu^4},$$

$$\mu = \left(\left| \frac{y}{A_3} \right|^{24} + \left| \frac{x}{A_2} \right|^{12} + \left| \frac{\phi}{A_1} \right|^8 + \left| \frac{\psi}{A_0} \right|^6 \right)^{\frac{1}{24}}$$

где $\mu \in \mathbb{R}_+$, $A_0 = 1/126$, $A_{j+1} = -A_j(4 - j + i\alpha)$, $\alpha = \sqrt{5}$, $j = 0, 1, 2$, а $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^2$ лежат на многообразии

$$S = \left\{ \left| \frac{\tilde{y}}{A_3} \right|^{24} + \left| \frac{\tilde{x}}{A_2} \right|^{12} + \left| \frac{\tilde{\phi}}{A_1} \right|^8 + \left| \frac{\tilde{\psi}}{A_0} \right|^6 = 1 \right\}$$

Заметим, что S переходит в начало координат при отображении B^{-1} .

Применяя разрешение особенности к Задаче 2.1 и к модельной задаче, получим, что разрешение особенности гамильтоновых систем Задачи 2.1 и модельной задачи отличается на члены порядка μ^2 . Более того обе системы имеют общее частное решение и совпадающие характеристические показатели. Один отрицательный характеристический показатель, указывающий на сжатие по направлению μ . Наличие нулевого характеристического показателя указывает на существование периодического решения. Остальные характеристические показатели положительны, что говорит о растяжении по остальным направлениям. А это и означает, что решение Задачи 2.1 имеет схожее поведение с решениями модельной задачи. То есть среди решений гамильтоновой системы Задачи 2.1 имеется устойчивое многообразие, сотканное из аналогов логарифмических спиралей.

В параграфе 2.5 изучается задача управления сферическим перевернутым маятником на подвижной тележке. Тележка движется в горизонтальной плоскости под действием плоской ограниченной силы. Задача управления заключается в оптимальной стабилизации перевернутого маятника в верхнем положении равновесия. Уравнения движения маятника записываются в нетрадиционной для сферических маятников системе координат. Доказано, что линеаризованная модель управления маятником есть частный случай Задачи 2.1 при $k_1 = k_2 > 0$.

Заключение

В настоящей диссертации были исследованы многомерные задачи оптимального управления со скалярным и двумерным ограниченным (по норме) управлением. Рассматривались задачи минимизации квадратичного функционала на линейной управляемой системе. Для задачи со скалярным управлением был построен полный оптимальный синтез, содержащий особые траектории и траектории с четтерингом.

В задаче с двумерным управлением оптимальный синтез построен частично. В качестве оптимальных траекторий были найдены траектории с четтерингом, а также однопараметрическое семейство решений (аналог логарифмических спиралей), попадающее в начало координат и соверша-

ющее бесконечное число вращений вокруг начала координат за конечный промежуток времени.

Построенные синтезы являются эталонными для многих колебательных систем. В качестве наглядного примера была рассмотрена задача управления плоским многозвенным перевернутым маятником на тележке, а также задача управления перевернутым сферическим маятником на тележке. При линеаризации уравнения движения маятника в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия возникает частный случай исследуемых в диссертации задач оптимального управления.

Перспектива дальнейших исследований заключается в построении полного оптимального синтеза в задаче с двумерным управлением, а также в обобщении полученных результатов для нелинейных систем.

Благодарность.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Михаилу Ильичу Зеликину за постановку задач и внимательное руководство процессом исследования, Ларисе Анатольевне Маните и Льву Вячеславовичу Локуциевскому за неоценимую помощь и полезные рекомендации при работе над диссертацией, а также Андрею Венедиктовичу Дмитруку за ценные замечания к тексту работы.

Автор благодарен коллективу кафедры общих проблем управления, в особенности Василию Борисовичу Демидовичу, за помощь в подготовке необходимых документов и различных организационных моментов.

Основные результаты опубликованы в работах:

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. *Ронжина М. И.* Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления перевернутым двухзвенным маятником // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, № 1. С. 24–33. (*Ronzhina M.* Optimal conditions with chattering in the inverted two-link pendulum control problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (English translation of Prikladnaya Matematika i Mekhanika). 2016. Vol. 80, no. 1. P. 16–23.)

2. *Manita L. A., Ronzhina M. I.* Оптимальный синтез в задаче управления n -звенным перевернутым маятником на движущемся основании // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 56. С. 129–144. (*Manita L.A., Ronzhina M.I.* Optimal synthesis in the control problem of an n -link inverted pendulum with a moving base // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 221, no. 1. P. 137–153)

Диссертанту принадлежит вывод уравнений движения маятника и сведение задачи управления маятником к задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы со скалярным ограниченным управлением. А также доказательство основной теоремы о структуре оптимального решения.

3. *Manita L., Ronzhina M.* Optimal control of a spherical inverted pendulum // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, no. 5. P. 954–957.

Диссертанту принадлежит вывод уравнений движения сферического маятника и сведение задачи управления маятником к задаче минимизации квадратичного функционала на траекториях многомерной линейной управляемой системы с двумерным ограниченным управлением. Также пункты 1 и 3 предложения 2.

4. *Manita L., Ronzhina M.* Singular solutions for vibration control problems // J. Phys.: Conf. Ser., 2018. Vol. 955, 012030

Диссертанту принадлежит часть параграфа 1. и параграф 4.

Статьи в сборниках трудов конференций

1. *Manita L. A., Ronzhina M. I.* Accumulations of control switchings in a control problem for an inverted spherical pendulum on a cart // International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics. Abstracts. Suzdal, 7 – 11 July 2017. Vladimir: “Arkaim”, 2017. P. 167–167.

Диссертанту принадлежит вывод уравнений движения маятника и доказательство теоремы о существовании спиралевидных решений.

2. *Lokutsievskiy L.V., Manita L.A., Ronzhina M.I.* Optimal solutions in a neighborhood of a singular extremal for a problem with two-dimensional control. Mathematical theory of optimal control. Materials of the International Conference dedicated to the 90th of Academician R.V. Gamkrelidze, 2017.

Диссертанту принадлежит доказательство основной теоремы.

3. *Ronzhina M., Manita L.* On optimal solutions in a problem with two-dimensional bounded control. // Systems Analysis: Modeling and Control. Materials of the International Conference in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy, Moscow, May 31–June 1, 2018. P. 90 – 93.

Диссертанту принадлежит доказательство основной теоремы.

Тезисы докладов на конференциях

1. *Ронжина М.И.* Глобально-оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления перевернутым двухзвенным маятником. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015», М: МАКС Пресс, 2015.
2. *Ронжина М.И.* Оптимальный синтез в задаче управления n - звенным перевернутым маятником на движущемся основании. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М: МАКС Пресс, 2016.
3. *Manita L.A., Ronzhina M.I* Optimal Control of a Spherical Inverted Pendulum. Abstracts of the Conference “Supercomputer Simulations in Science and Engineering” - SSSE 2016, 2016.
4. *Manita L., Ronzhina M.* Singular solutions for vibration control problems. Abstracts of the International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond - CSP 2017, 2017.

Список цитируемой литературы

- [1] *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом. //Успехи физических наук. 1951. Т. *XLIV*, №5. С. 7–20.
- [2] *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 51–62.
- [3] *Формальский А.М.* О стабилизации двойного перевернутого маятника при помощи одного управляющего момента.//Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №3. С. 5–12.
- [4] *Полехин И. Ю.* Примеры использования топологических методов в задаче о перевернутом маятнике на подвижном основании // Нелинейная динамика. 2014. Т.10, №4. С. 465–472.

- [5] *Болотин С. В., Козлов В. В.* Вариационное исчисление в целом, существование траекторий в области с границей и задача Уитни о перевернутом маятнике // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т.79, №5. С. 39–46.
- [6] *Формальский А.М.* О глобальной стабилизации двойного перевернутого маятника с управлением в межзвенном шарнире. // Известия РАН. МТТ. 2008. №5. С 3–14.
- [7] *Аврейцевич Я., Василевский Г., Кудра Г., Решмин С. А.* Эксперимент по раскачиванию двойного маятника управлением с обратной связью // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 10–16.
- [8] *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* Управляемый маятник на подвижном основании // Известия РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 9–23.
- [9] *Liu G., Nešić D., Mareels I.* A note on the control of a spherical inverted pendulum // IFAC Proceedings. 2007. Vol. 40, no. 12. P. 1161–1166.
- [10] *Liu G., Nešić D., Mareels I.* Nonlocal stabilization of a spherical inverted pendulum // International Journal of Control. 2008. Vol. 81, no. 7. P. 1035–1053.
- [11] *Gutierrez O.F., Ibanez C., Sossa H.A.* Stabilization of the inverted spherical pendulum via Lyapunov approach // Asian Journal of Control. 2009. Vol. 11, no. 6. P. 587–594.
- [12] *Postelnik L., Guangyu L., Stol K., Swain A.* Approximate Output Regulation for a Spherical Inverted Pendulum // Proceedings of the 2011 American Control Conference. 2011. P. 539–544.
- [13] *Yoon M. G.* Dynamics and Stabilization of a Spherical Inverted Pendulum on a Wheeled Cart // International Journal of Control, Automation and Systems. 2010. Vol. 8, no. 6. P. 1271–1279.
- [14] *Fuller A.T.* Relay Control Systems Optimized for Various Criteria. // Automatic and Remote Control. Butterworths, London. (Proc. First World Congress IFAC. Moscow. 1960.) 1961. Vol. 1. P. 510–519.
- [15] *Борисов В.Ф., Зеликин М.И.* Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики. // Современная математика и её приложения. Оптимальное управление. Тбилиси. 2003. т.11
- [16] *Манита Л.А.* Асимптотическое поведение экстремалей в окрестности особых траекторий высокого порядка. Автореф. дис. к. ф.-м. н. – М.: 1996. – 15 с.

- [17] *Локуцкий Л.В.* Гамильтоновость потока особых траекторий // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 3. С. 133–160.
- [18] *Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G.* Singular extremals//Topics in optimization/Ed. G. Leitmann. N. Y.: Acad. Press. 1967. P. 63–103.
- [19] *Борисов В. Ф., Зеликин М. И.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления //Тр. Мат. ин-та АН СССР 1991. Т. 197. С. 85–166.
- [20] *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. //Birkhäuser/ Boston-Basel-Berlin, 1994.
- [21] *Манута Л. А.* Поведение экстремалей в окрестности особых режимов и негладкие функции Ляпунова в задачах оптимального управления // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, № 2. С. 411–447.
- [22] *Agrachev A.A., Barilari D., Boscain U.* Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry // Lecture Notes, Preprint SISSA. 2014.
- [23] *Milyutin A.A., Osmolovskii N.P.* Calculus of Variations and Optimal Control // Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. 1998. Vol. 180.
- [24] *Chukanov S.V., Milyutin A.A.* Qualitative Study of Singularities for Extremals of Quadratic Optimal Control Problem // Russian Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 2, no. 1. P. 31–48.
- [25] *Goh B.S.* The second variation for the singular Bolza problem // SIAM J. Control and Optimization. 1966. Vol. 4.
- [26] *Krener A. J.* The high order maximal principle and its application to singular extremals // SIAM J. Control and Optimization. 1977. Vol. 15, no. 2. P. 256–293.
- [27] *Зеликин М. И., Локуцкий Л. В. , Хильдебранд Р.* Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением // Математическая теория управления и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, МАИК, М. 2012. Т. 277. С. 74–90; Proc. Steklov Inst. Math. 2012. Vol. 277. P. 67–83.

- [28] *Зеликин М. И., Локуцкий Л. В., Хильдебранд Р.* Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью // Оптимальное управление, СМФН. РУДН. М. 2015. Т. 56. С. 5–128; (Journal of Mathematical Sciences. 2017 Vol. 221, no. 1. P. 1–136).
- [29] *Боршевский М. З., Иослович И. В.* К задаче оптимального по быстродействию торможения осесимметричного твердого тела около центра масс // ПММ. 1985. Т. 49, № 1. С. 35–42.
- [30] *Осипов С. Н., Формалзский А. М.* Задача о быстрейшем повороте манипулятора // ПММ. 1988. Т. 52, № 6. С. 929–933.
- [31] *Манита Л. А.* Оптимальный особый режим и режим с учащающимися переключениями в задаче управления колебаниями струны с закрепленными концами // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. № 5. С. 873–880.
- [32] *Салобутина Е.О.* Режимы учащающихся переключений в задаче оптимального управления колебаниями п осцилляторов. // Современная математика. Фундаментальные направления. Оптимальное управление. 2006. Т. 19. С. 171–178.
- [33] *Cherkasov O.Yu., Yakushev A.G.* Singular Arcs in the Optimal Evasion against a Proportional Navigation Vehicle // Journal of Optimization Theory and Applications. 2002. Vol.113, no. 2.
- [34] *Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А.* Оптимальный синтез в бесконечномерном пространстве // Дифференциальные уравнения и топология. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 40–58.
- [35] *Zelikin M.I., Manita L.A.* Optimal control for a Timoshenko beam // Comptes Rendus Mecanique. 2006. Vol. 334. P. 292–297.
- [36] *Zelikin M. I.* One-parameter families of solutions to a class of PDE optimal control problems // Optimization methods in partial differential equations (South Hadley, MA, 1996), Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1997. Vol. P. 339–349.
- [37] *Hartman Ph.* Ordinary Differential equations, J. Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1964.

- [38] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений 2-е изд. // Регулярная и хаотическая динамика. МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999.