

## Модель одноузловой конвейерной линии с постоянной скоростью перемещения предметов труда

О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

В данной статье основное внимание уделяется модели производственной линии конвейерного типа. Записана в одномоментном приближении система уравнений для модели конвейерной линии с постоянной скоростью движения предметов труда и получено ее решение в аналитическом виде, что позволило рассчитать параметры системы в произвольный момент времени. Показано, что решение определяется видом начальных и граничных условий. Получено выражение для расчета производственного цикла конвейерной линии.

**Ключевые слова:** Поточная линия, PDE-модель, предмет труда, система управления, технологический процесс, полупроводниковое производство, модель конвейера

У даній статті основна увага приділяється моделі виробничої лінії конвеєрного типу. Записана в одномоментному наближенні система рівнянь для моделі конвеєрної лінії з постійною швидкістю руху предметів праці і отримано її рішення в аналітичному вигляді, що дозволило розрахувати параметри системи в довільний момент часу. Показано, що рішення визначається видом початкових і граничних умов. Отримано вираз для розрахунку виробничого циклу конвеєрної лінії.

**Ключові слова:** Поточная линия, PDE-модель, предмет праці, система управління, технологічний процес, напівпровідниковий виробництво, модель конвеєра

This paper focuses on the model of the production line of the conveyor type. The system of equations to model of the conveyor line at a constant speed of the moving of the subjects of labor was written in the one-moment description and was receive its solution in analytic form that allowed to calculate the parameters of the system at any given time. It is shown that the solution is determined of the kind of initial and boundary conditions. Here was received an expression for calculation of the production cycle of the conveyor line.

**Key words:** Production line, PDE model, the subject of labor, control system, technological process, semiconductor production, conveyor model

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Поведение параметров поточной линии определяется в значительной степени тем, что между предметами труда в ходе технологической обработки возникает взаимодействие [1,2]. Технологическое взаимодействие проявляется при наличие технологических ограничений, определяющих последовательность выполнения технологических операций и порядок движения предметов труда по технологическому маршруту (рис.1) [3].

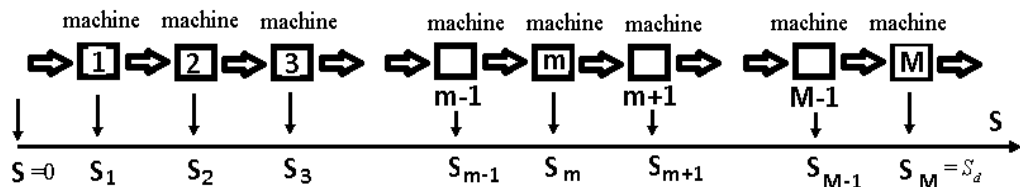


Рис.1. Схема одноузловой поточной конвейерной линии

Система уравнений, определяющая поведение параметров поточной линии в одномоментном описании, имеет вид [1]

$$\frac{\partial [\chi]_0(t,S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t,S)}{\partial S} = 0, \quad (1)$$

$$[\chi]_1(t,S) = [\chi]_{1\psi}(t,S), \quad (2)$$

при начальном

$$[\chi]_0(t_0, S) = \Psi(S), \quad (3)$$

и граничном условии

$$[\chi]_0(t, S_0) = \Phi(t), \quad (4)$$

где  $[\chi]_0(t,S)$  – плотность распределения предметов труда в незавершенном производстве по технологическим позициям;  $[\chi]_1(t,S)$  – темп обработки предметов труда по технологическим позициям в момент времени  $t$ . Позиция предмета труда в технологическом маршруте характеризуется координатой  $S \in [0; S_d]$ . При использовании координат стоимостного пространства константа  $S_d$  соответствует себестоимости продукции. В ряде работ, в качестве координаты, определяющей положение предмета, используется безразмерная величина  $\xi \in [0;1]$  [2], значение которой дает представление о степени обработки предмета труда:  $\xi = 0$  соответствует начальной стадии обработки предмета труда;  $\xi = 1$  соответствует конечной стадии обработки предмета труда, когда предмет труда превращается в готовое изделие. Выбор переменной  $\xi \in [0;1]$  достаточно многообразный. Одним из вариантов представления данной переменной может быть отношение перенесенной стоимости ресурсов  $S \in [0; S_d]$  на предмет труда к его переменной себестоимости  $S_d$ :  $\xi = \frac{S}{S_d}$ . Начальное

условие (3) определяет количество предметов труда в момент времени  $t_0$  на каждой технологической операции. Граничное условие (4) определяет количество предметов труда для технологической позиции  $S_0$  в произвольный момент времени  $t$ . Граничное условие (4) может быть задано из предположений, что размер межоперационных накопителей имеет ограничение или определяться условиями поставок сырья и материалов на соответствующую технологическую операцию. Граничное условие (4) может быть востребовано и в случае, если модель поточной линии учитывает отгрузку предметов труда в виде полуфабриката с технологической позиции, характеризующейся координатой  $S_0$ , или наличием в модели факторов, определяющих учет количества бракованной продукции. Наличие начального (3) и граничного (4) условий приводит к разрывному характеру решения системы уравнений (1),(2), что является характерным для поведения потоковых параметров современных производственных конвейерных линий [4].

Решение системы уравнений (1)–(3) для постоянной скорости движения предметов труда по поточной линии или по ее отдельной части представлено в

работах [1,с.235], [2,с.910], [5,с.97]. Однако подробный анализ полученного решения не приводится. В то же время, расчет параметров состояния для конвейерных линий является важной производственной задачей, которая требует применение новых методов решения. Особое место занимает задача расчета параметров состояния производственной системы, состоящей из нескольких соединяющихся между собой конвейерных линий, расположенных как последовательно, так и параллельно [6]. В работе [2] представлен численный расчет поточной линии, состоящей из трех участков  $\xi \in [0,0.2]$ ,  $\xi \in [0.2,0.8]$ ,  $\xi \in [0.8,1]$ , на каждом из которых скорость движения предметов труда  $g$  постоянна для отдельного участка и равна соответственно [15;10;15], [2,с.910]. Каждый из участков представляет собой конвейер, обеспечивающий постоянную скорость движения предметов труда. Конвейера последовательно расположены друг за другом. В работе [7] дано численное решение системы уравнений (1)–(4) при заданных начальных и граничных условиях, приведен анализ решения. Начальное условие определяет состояние предметов труда на каждой технологической операции в момент времени  $t=0$ , а граничное условие задает интенсивность поступления предметов труда на обработку согласно имеющимся заказам на производство продукции. В работе [8] поставлена задача оптимального управления несколькими потоками, которые соединяются в один общий поток. Несмотря на достаточно большое количество публикаций, посвященных проектированию систем управлений поточными линиями с использованием PDE-моделей [1,2,7,8], анализу модели конвейерной линии, на наш взгляд, не уделено должного внимания. В то же время, конвейерный тип производства является широко распространенным способом организации производственного процесса. Характерная особенность данного способа организации производства заключается в том, что все предметы труда, находящиеся на конвейерной линии, движутся с одинаковой скоростью. Данное обстоятельство позволяет значительно упростить систему уравнений (1)–(4).

## **2. Постановка проблемы и формулировка цели статьи**

Целью настоящей статьи является построение аналитического решения системы уравнений (1)–(4) для случая движения предметов труда вдоль технологического маршрута с постоянной скоростью. Важной и отдельной задачей наряду с анализом полученного решения является демонстрация зависимости вида решения от вида начальных и граничных условий, определяющих функционирование конвейерной линии. Особого внимания в результате решения системы уравнений (1)–(4) заслуживают задачи как определения состояния параметров конвейерной линии для произвольного момента времени, так и расчета продолжительности производственного цикла изготовления изделий [9–11]. Производственный цикл изготовления изделий является одной из важнейших характеристик производственной системы.

## **3. Модель одноузловой конвейерной поточной линии с постоянной скоростью перемещения предметов труда**

Рассмотрим поточную линию, состоящую из  $M$  единиц технологического оборудования, расположенного на технологических позициях с координатой

$S = S_m$  (рис.1). Предметы труда перемещаются по технологическому маршруту, состоящему из  $M$ -технологических позиций с постоянной скоростью  $a$ . Система уравнений для описания параметров поточной линии в модели конвейера имеет вид

$$\frac{\partial [\chi]_0(t,S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t,S)}{\partial S} = 0, \quad (5)$$

$$[\chi]_1(t,S) = a \cdot [\chi]_0(t,S), \quad (6)$$

$a$  – скорость движения конвейера.

Для наглядности представления результатов исследования введем безразмерные переменные  $\tau, \xi$  и безразмерную плотность распределения предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi)$  по технологическим позициям. Тогда возможно представить:

$$t = t_d \cdot \tau, \quad S = S_d \cdot \xi, \quad [\chi]_0(t,S) = [\theta]_0(\tau, \xi) \cdot \Theta, \quad \Theta = \max\{\Psi(S), \Phi(t)\}. \quad (7)$$

$$\Psi(S) = \Theta \cdot \psi(\xi), \quad \Phi(t) = \Theta \cdot \vartheta(\tau) \quad (8)$$

Подставив (6) в (5) и, принимая во внимание (7), система уравнений (1)–(4) может быть записана в безразмерном виде:

$$\Theta \cdot \frac{\partial [\theta]_0(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \Theta \cdot \frac{a \cdot t_d}{S_d} \frac{\partial [\theta]_0(\tau, \xi)}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

$$[\theta]_0(\tau_0, \xi) = \psi(\xi), \quad (9)$$

$$[\theta]_0(\tau, \xi_0) = \vartheta(\tau), \quad (10)$$

Величина характерного времени  $t_d$  определяется из условий функционирования производства. Его выбор определяет значение постоянной безразмерной скорости конвейерной линии  $g$ :

$$g = \frac{a \cdot t_d}{S_d} = \frac{t_d}{T_d}. \quad (11)$$

Если характерное время  $t_d$  соответствует длительности производственного цикла изготовления изделия  $T_d = \frac{S_d}{a}$  (промежутку времени, за которое предмет труда проходит обработку, начиная с первой технологической операции и заканчивая последней технологической операцией), то в таком случае  $g=1$  и безразмерное время  $\tau = \frac{t}{T_d}$  будет характеризовать отношение общего времени

$\tau$  к времени производственного цикла  $T_d$ . С учетом (11) система уравнений (8)–(10) примет вид

$$\frac{\partial [\theta]_0(\tau, \xi)}{\partial \tau} + g \frac{\partial [\theta]_0(\tau, \xi)}{\partial \xi} = 0, \quad (12)$$

$$[\theta]_0(\tau_0, \xi) = \psi(\xi), \quad (13)$$

$$[\theta]_0(\tau, \xi_0) = \vartheta(\tau), \quad (14)$$

которой соответствует система характеристик:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = g, \quad \xi(\tau_0) = \xi_0, \quad (15)$$

$$\frac{d[\theta]_0}{d\tau} = 0, \quad [\theta]_0(\xi, \tau_0) = \psi(\xi) \quad (16)$$

Проинтегрируем (15), получим

$$\xi = g\tau + C, \quad C = \text{const}, \quad (17)$$

где  $\xi(\tau)$  – безразмерная координата. Функция  $\xi(\tau)$  может интерпретироваться как положение на конвейерной линии предмета труда в момент времени  $\tau$ , который в момент времени  $\tau_0$  занимал положение  $\xi_0$ . При этом движение конвейера выполняется с постоянной безразмерной скоростью  $g$  (11). Уравнение (17), определяющее возможные траектории движения предметов труда в фазовом координатном пространстве [12], является первым интегралом уравнения (15). Принимая во внимание начальное условие  $\xi(\tau_0) = \xi_0$ , запишем:

$$\xi = \xi_0 + g(\tau - \tau_0), \quad C = \xi_0 - g\tau_0. \quad (18)$$

Общим решением уравнения (12) есть функция от первого интеграла (17):

$$[\theta]_0(\tau, \xi) = [\theta]_0(\xi - g\tau). \quad (19)$$

В силу того, что:

$$\frac{\partial[\theta]_0(\xi - g\tau)}{\partial\tau} = -g \frac{\partial[\theta]_0(\xi - g\tau)}{\partial(\xi - g\tau)}, \quad \frac{\partial[\theta]_0(\xi - g\tau)}{\partial\xi} = \frac{\partial[\theta]_0(\xi - g\tau)}{\partial(\xi - g\tau)}, \quad (20)$$

непосредственной подстановкой выражений (20) в уравнение (12) получаем тождество

$$-g \frac{\partial[\theta]_0(\xi - g\tau)}{\partial(\xi - g\tau)} + g \frac{\partial[\theta]_0(\xi - g\tau)}{\partial(\xi - g\tau)} = 0. \quad (21)$$

Принимая во внимание начальное условие (13) и граничное условие (14), решение (19) имеет вид

$$[\theta]_0(\tau, \xi) = [\theta]_0(\xi - g\tau) = \psi(r + \xi_0), \quad (22)$$

$$[\theta]_0(\tau, \xi) = [\theta]_0(\xi - g\tau) = \vartheta\left(\tau_0 - \frac{r}{g}\right), \quad \psi(r + \xi_0) = \vartheta\left(\tau_0 - \frac{r}{g}\right) \quad (23)$$

где введена переменная  $r$

$$r(\xi, \tau) = (\xi - \xi_0) - g(\tau - \tau_0). \quad (24)$$

Подстановка  $\tau = \tau_0$  в (22) и  $\xi = \xi_0$  в (23) дает тождественные равенства, соответствующие начальным и граничным условиям:

$$[\theta]_0(\tau_0, \xi) = [\theta]_0(\xi - g\tau_0) = \psi(\xi), \quad r(\xi, \tau_0) = (\xi - \xi_0), \quad (25)$$

$$[\theta]_0(\tau, \xi_0) = [\theta]_0(\xi_0 - g\tau) = \vartheta(\tau), \quad r(\xi_0, \tau) = -g(\tau - \tau_0), \quad (26)$$

$$[\theta]_0(\xi_0 - g\tau_0) = \psi(\xi_0) = \vartheta(\tau_0), \quad r(\xi_0, \tau_0) = 0, \quad \psi(\xi_0) = \vartheta(\tau_0). \quad (27)$$

Таким образом, для построения решения, не имеющего точек разрыва, необходимо задать распределение межоперационных заделов  $\psi(\xi)$  по

конвейерной линии в момент времени  $\tau_0$  или изменение состояния межоперационных заделов  $\vartheta(\tau)$  во времени на технологической позиции, характеризующейся координатой  $\xi_0$ . В силу уравнения (6) функция  $g \cdot \psi(\xi)$  может трактоваться как безразмерный темп движения предметов труда по конвейерной линии для технологической позиции, характеризующей координатой  $\xi$ , в момент времени  $\tau_0$ , а  $g \cdot \vartheta(\tau)$  – как безразмерный темп обработки предметов труда в момент времени  $\tau$  на технологической позиции, характеризующейся координатой  $\xi_0$ . Безразмерные функция  $\psi(\xi)$  и  $\vartheta(\tau)$  связаны с плотностью распределения предметов труда вдоль контейнерной линии  $[\chi]_0(t,S)$  и темпом их движения  $[\chi]_1(t,S)$  соотношениями (6)–(8). Разумно ожидать, что безразмерная величина межоперационных заделов предметов труда  $\vartheta(\tau)$  на позиции  $\xi_0$  в момент времени  $\tau$  должна быть связана с безразмерной величиной межоперационных заделов  $\psi(\xi)$  в момент времени  $\tau_0$  на технологической позиции, характеризующей координатой  $\xi$ . Покажем взаимосвязь между собой функции  $\psi(\xi)$  и  $\vartheta(\tau)$ .

Для технологической позиции с координатой  $\xi = \xi_0$  справедливо равенство:

$$[\theta]_0(\xi_0 - g\tau) = \psi(r(\xi_0, \tau) + \xi_0) = \vartheta\left(\tau_0 - \frac{r(\xi_0, \tau)}{g}\right), \quad r(\xi_0, \tau) = -g(\tau - \tau_0), \quad (28)$$

$$\psi(\xi_0 - g\tau + g\tau_0) = \vartheta(\tau), \quad \psi(\xi_0) = \vartheta(\tau_0). \quad (29)$$

Введем обозначение

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0, \quad (30)$$

с учетом которого равенство (29) можно переписать следующим образом

$$\psi(\xi_0 - g\Delta\tau) = \vartheta(\tau_0 + \Delta\tau), \quad \psi(\xi_0) = \vartheta(\tau_0). \quad (31)$$

Взаимосвязь функций  $\psi(\xi)$  и  $\vartheta(\tau)$  для разных моментов времени  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$  продемонстрирована на рис.2. Наглядно показано, что величина межоперационных заделов  $\vartheta(\tau_0 + \Delta\tau)$  для оборудования на технологической позиции  $\xi_0$  в момент времени  $\tau = (\tau_0 + \Delta\tau)$  определяется состоянием межоперационных заделов на технологической позиции  $\xi = (\xi_0 - g\Delta\tau)$  в момент времени  $\tau = \tau_0$ .

Таким образом, зная начальное распределение предметов труда вдоль конвейера в момент времени  $\tau = \tau_0$  (безразмерная скорость движения конвейера  $g$ ), возможно однозначно определить количество предметов труда, которые будут находиться на технологической позиции  $\xi_0$  в момент времени  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ . За время  $\Delta\tau$  с момента запуска конвейера  $\tau = \tau_0$  предметы труда перемещаются со скоростью движения конвейера  $g$  с технологической позиции  $\xi = (\xi_0 - g\Delta\tau)$  на технологическую позицию  $\xi_0$ . Данная зависимость имеет важное значение для эксплуатации поточных линий конвейерного типа [13]. Распределение технологических ресурсов производства во времени по технологическим операциям может быть определено из текущего состояния распределения предметов труда вдоль технологического конвейера с использованием довольно

простого соотношения вида (31). Текущее распределение предметов труда вдоль конвейерной линии определяет план распределения технологических ресурсов в будущие моменты времени. Имеется возможность, например, заранее определить, какое количество работников необходимо задействовать на выполнение те или иных операций в будущие моменты времени, или определить точное время поставок сырья и материалов на технологические позиции конвейерной линии.

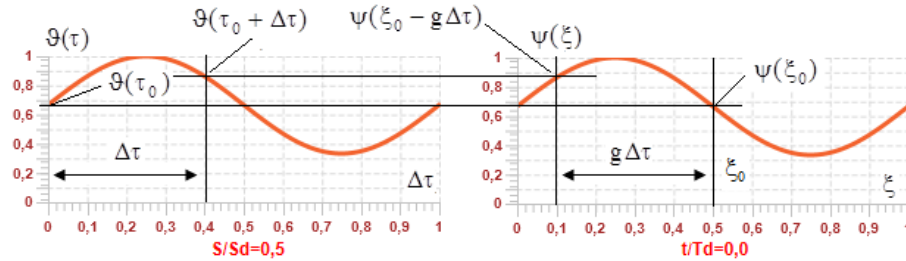


Рис.2. Взаимосвязь функций  $\Psi(\xi)$  и  $\Theta(\tau)$  для разных моментов времени  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ .

С другой стороны, относительно момента времени  $\tau = \tau_0$  возможно записать соотношение

$$[\theta]_0(\xi - g\tau_0) = \Psi(r(\xi, \tau_0) + \xi_0) = \Theta\left(\tau_0 - \frac{r(\xi, \tau_0)}{g}\right), \quad r(\xi, \tau_0) = (\xi - \xi_0), \quad (32)$$

$$\Psi(\xi) = \Theta\left(\tau - \frac{\xi}{g} + \frac{\xi_0}{g}\right), \quad \Psi(\xi_0) = \Theta(\tau_0). \quad (33)$$

Введем обозначение

$$\Delta\xi = \xi - \xi_0, \quad (34)$$

которое позволяет выражение (33) представить следующим образом:

$$\Psi(\xi_0 + \Delta\xi) = \Theta\left(\tau_0 - \frac{\Delta\xi}{g}\right), \quad \Psi(\xi_0) = \Theta(\tau_0). \quad (35)$$

На рис.3 представлена демонстрация взаимосвязи функций  $\Psi(\xi)$  и  $\Theta(\tau)$  для разных значений координаты  $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ . Величина межоперационных заделов для технологического оборудования, находящегося на произвольной технологической позиции  $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$  определяется состоянием межоперационных заделов для оборудования на технологической позиции с координатой  $\xi_0$  в момент времени  $\tau = \left(\tau_0 - \frac{\Delta\xi}{g}\right)$ . Промежуток времени

$\Delta\tau = \frac{\Delta\xi}{g}$  определяет необходимое время, за которое предметы труда,

находящиеся на технологической позиции  $\xi_0$  переместятся на позицию  $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$  при безразмерной скорости движения конвейера  $g$ . Равенство (35) демонстрирует связь величины межоперационных заделов между технологическими позициями  $\xi$  и  $\xi_0$ .

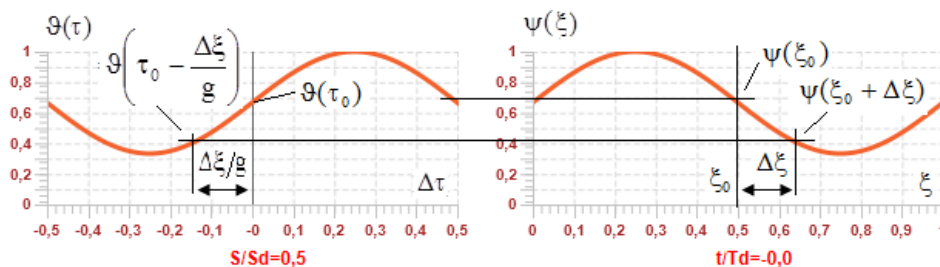


Рис.3. Взаимосвязь функций  $\Psi(\xi)$  и  $\Theta(\tau)$  для значений координаты  $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ .

Семейство кривых  $[\theta]_0(\tau, \xi)$ , каждая из которых определяет состояние межоперационных заделов для технологических позиций конвейера в моменты времени  $\tau = (t/T_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9; 1.0\}$  соответственно, показано на рис.4. Кривые сдвинуты относительно друг друга с шагом  $\Delta\xi = g\Delta\tau$  при значениях  $g=1$  и  $\Delta\tau=0.1$ . Решение  $[\theta]_0(\tau, \xi)$  получено для случая начальных условий  $\Psi(\xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi\xi))$  при  $\tau = 0$ :

$$[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau))), \quad g=1. \quad (36)$$

Граничное условие (14) отсутствует. График демонстрирует сдвиг функции  $\Psi(\xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi\xi))$  с шагом  $\Delta\xi = g\Delta\tau$  для моментов времени  $\tau_i$  (рис.4.).

Показано последовательное перемещение предметов труда вдоль маршрута по конвейерной линии, которая движется с безразмерной скоростью  $g$ . Рис.5 отображает отдельно функции  $[\theta]_0(0, \xi)$ ,  $[\theta]_0(0.1, \xi)$ , ...,  $[\theta]_0(0.8, \xi)$ ,  $[\theta]_0(0.9, \xi)$  в моменты времени  $\tau = (t/T_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots; 0.8; 0.9\}$ . Не менее важна с практической точки зрения информация, представленная на рис.6, где даны сведения о величине межоперационных заделов на заданных технологических позициях и требуемом темпе обработки предметов труда, при котором обеспечивается бесперебойный безостановочный режим работы конвейера [14,15].

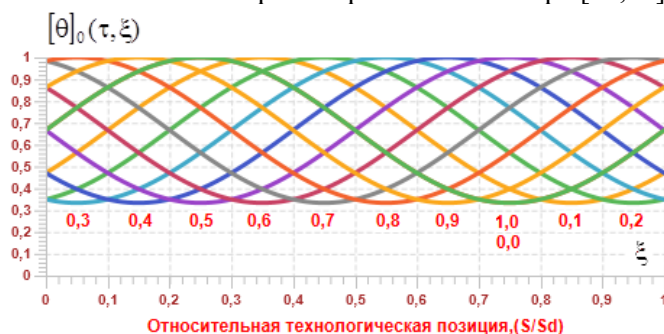


Рис.4. Распределение предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau)))$  по технологическим позициям конвейера для  $\tau = (t/T_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9; 1.0\}$ ,  $g=1$ .



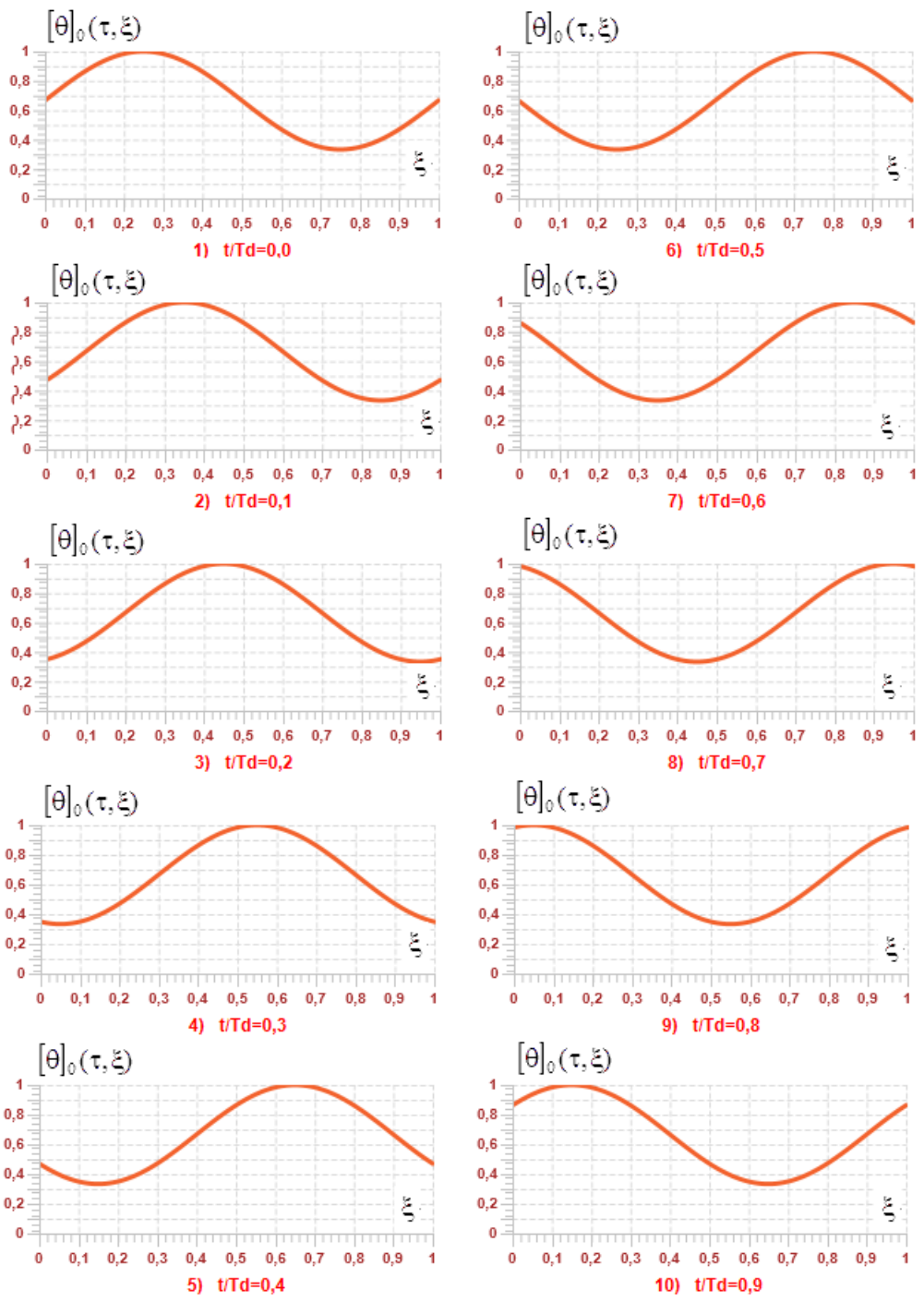


Рис.5. Распределение предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau)))$  по технологическим позициям конвейера для  $\tau = (t/T_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9\}$ ,  $g=1$  (Развернутое представление).

На рис.7 представлены изменения величины межоперационных заделов  $[\theta]_0(\tau, 0.0), [\theta]_0(\tau, 0.1), \dots, [\theta]_0(\tau, 0.8), [\theta]_0(\tau, 0.9)$  для технологических позиций  $\xi = (S/S_d) = \{0.0; 0.1; \dots; 0.8; 0.9\}$ . Нестационарный, зависящий от времени, темп обработки предметов труда  $[\theta]_1(\tau, \xi) = g \cdot [\theta]_0(\tau, \xi)$  на одной и той же технологической позиции при постоянной скорости конвейера  $g$  определяется различием плотности предметов труда на рабочих участках технологической линии. При значении безразмерной скорости движения конвейера  $g=1$  темп обработки предметов труда принимает вид  $[\theta]_1(\tau, \xi) = [\theta]_0(\tau, \xi)$ . Значительный практический интерес для проектирования конвейерной линии представляет рис.8 с отображением семейства характеристик  $\xi - g\tau = C_i$  (17). Каждая из характеристик  $\xi - g\tau = C_i$  связывает значения  $\xi$  и  $\tau$ , для которых величина межоперационных, и соответственно, темп обработки предметов труда постоянный и равен:

$$[\theta]_0(\tau, \xi) = [\theta]_0(C_i) = \psi(C_i + g\tau_0), \quad r(\xi, \tau) = C_i - (\xi_0 - g\tau_0) \quad (37)$$

$$[\theta]_0(\tau, \xi) = [\theta]_0(C_i) = \vartheta\left(\frac{\xi_0 - C_i}{g}\right), \quad (38)$$

На характеристиках (17) величина межоперационных заделов и темп обработки предметов труда сохраняются постоянными. Профиль, определяющий распределение предметов труда (или темпа обработки предметов труда) по технологическим операциям, перемещается вдоль конвейерной линии с постоянной скоростью  $g$ . Характеристики покрывают всю плоскость  $(\tau, \xi)$  и не пересекаются между собой. Уравнение характеристик может быть использовано для отслеживания места нахождения в процессе обработки конкретной партии деталей с целью определения ее состояния и проведения выборочного контроля деталей партии, а также для управления запасами производства [16].

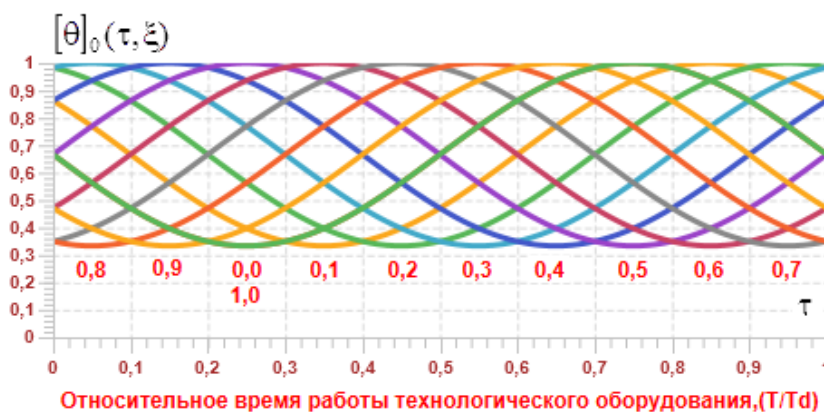


Рис.6. Зависимость количества предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau)))$  от времени для позиции конвейера  $\xi = (S/S_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9; 1.0\}$ ,  $g=1$ .

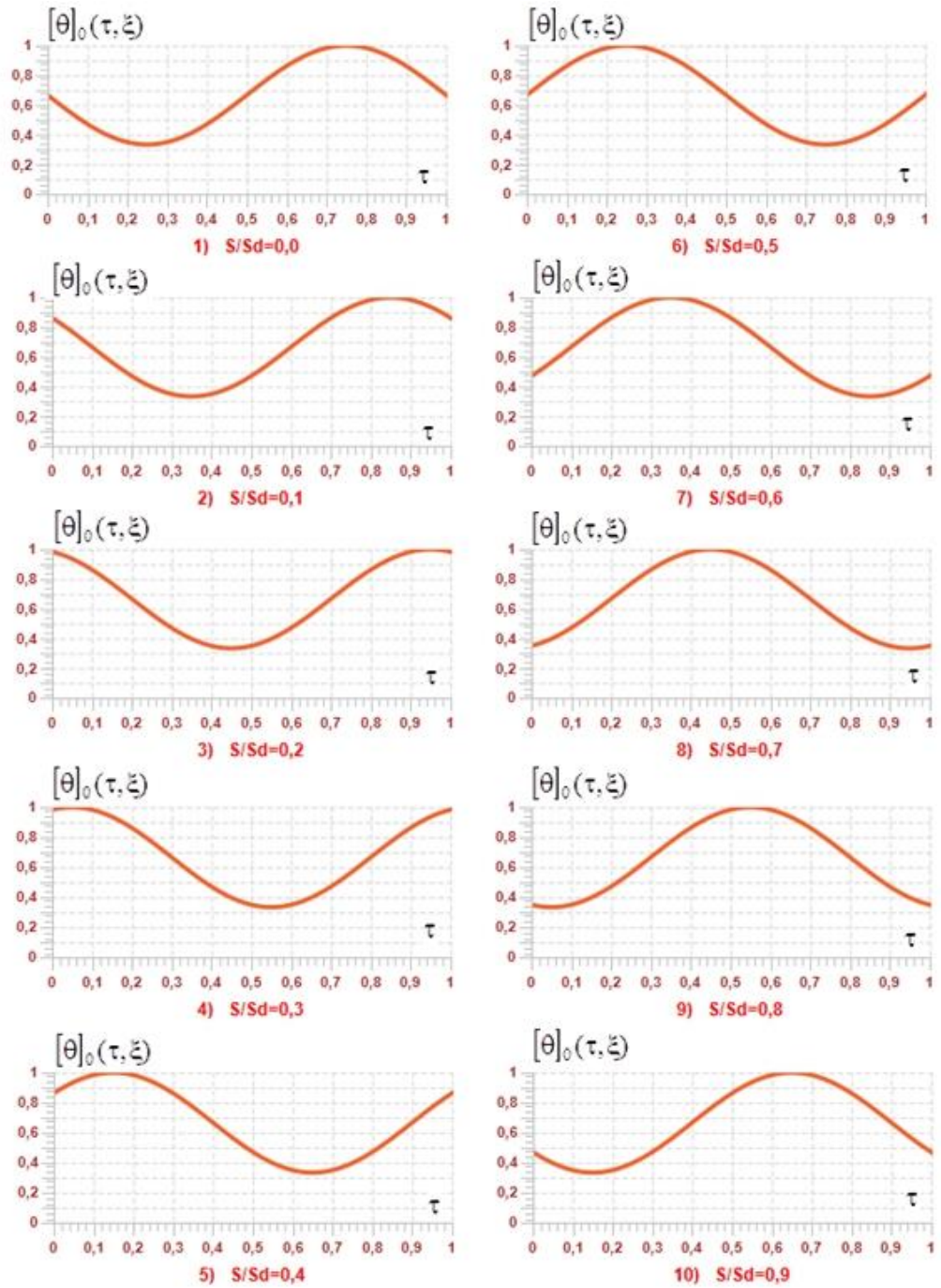


Рис7. Зависимость количества предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau)))$  от времени для позиции конвейера  $\xi = (S/S_d) = \{0,0;0,1;0,2;...;0,9;1,0\}$ ,  $g=1$ . (Развернутое представление).

Уравнения (17) представляют собой уравнений движения отдельных предметов труда по технологическому маршруту вдоль конвейерной линии. Как и следовало ожидать, движение отдельного предмета труда по траектории (17) осуществляется с постоянной скоростью, равной скорости движения конвейерной линии [17]. Значение безразмерной скорости  $g$  (11) определяется выбором величины характерного время  $t_d$  для исследования параметров. поточной линии. Увеличение величины характерного время  $t_d$  по отношению к

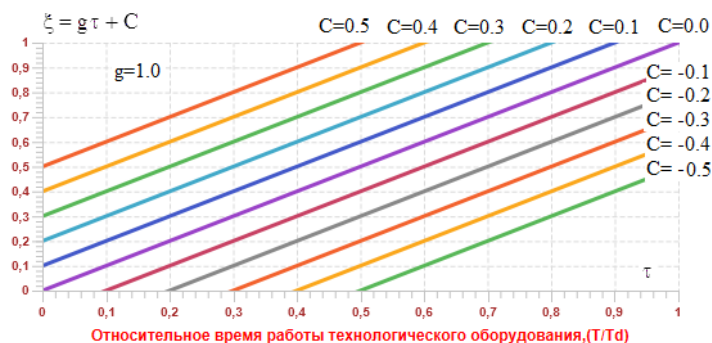


Рис.8. Семейство характеристик  $\xi = g\tau + C$ ,  $g = 1.0$ ,  $C = \{0.5; 0.4; 0.3; \dots - 0.4; -0.5\}$ .

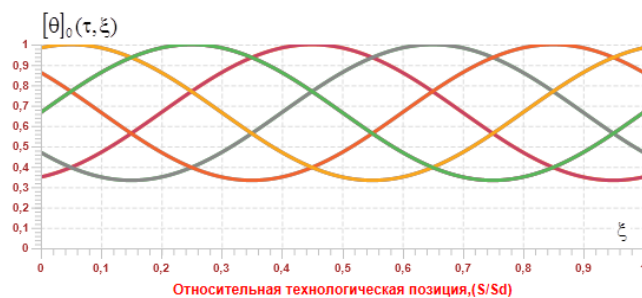


Рис.9. Распределение предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau)))$  по технологическим позициям конвейера для  $\tau = (t/T_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots 0.9; 1.0\}$ ,  $g=2$ .

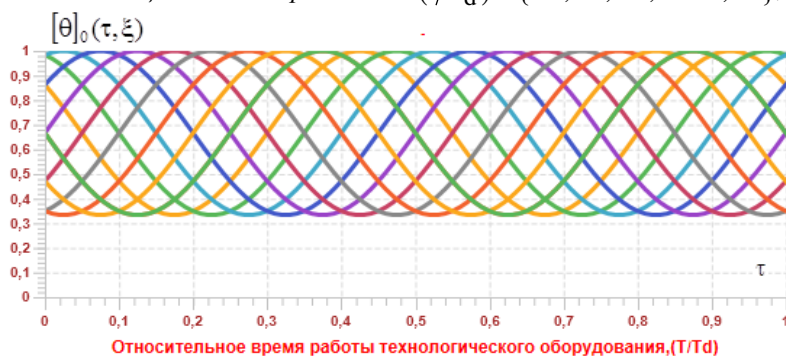


Рис.10. Зависимость количества предметов труда  $[\theta]_0(\tau, \xi) = \frac{1}{3}(2 + \sin(2\pi(\xi - g\tau)))$  от времени для позиции конвейера  $\xi = (S/S_d) = \{0.0; 0.1; 0.2; \dots 0.9; 1.0\}$ ,  $g=2$ .

величине производственного цикла  $T_d$  приводит к растяжению графика с решением  $[\theta]_0(\tau, \xi)$  по оси OS (трансформирование рис.4 в рис.9) и к его сжатию по оси Ot (трансформирование рис.6 в рис.10)). При этом график с характеристиками сжимается (трансформирование рис.8 в рис.11)). Это дает возможность при переходе от одного значения характерного времени  $t_d$  к другому значению характерного времени  $t_d$  использовать на производственном предприятии один и тот же расчетный графический и аналитический материал.

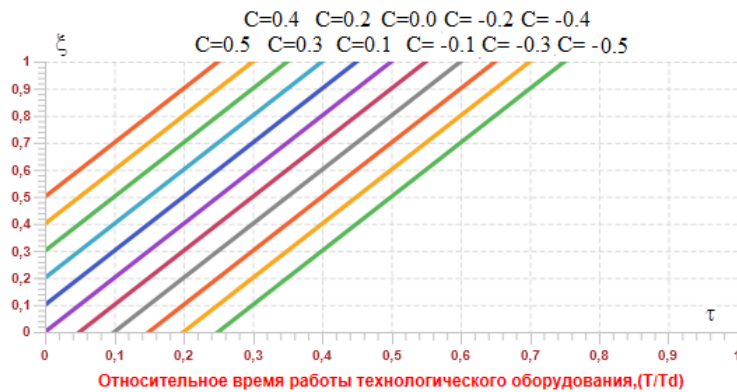


Рис.11. Семейство характеристик  $\xi = g\tau + C$ ,  $g = 2.0$ ,  $C = \{0.5; 0.4; 0.3; \dots - 0.4; -0.5\}$ .

#### 4. Расчет длительность производственного цикла конвейерной линии.

Длительность производственного цикла равна промежутку времени, за которое предмет труда проходит путь от первой технологической позиции до последней. Расчет производственного цикла для производственных систем с поточным способом организации производства приведен в [9–11]. Значение длительности производственного цикла для поточной линии конвейерного типа может быть определено следующим образом

$$T_d = \int_0^1 \frac{dS}{a}$$

Введем обозначения для безразмерной величины, характеризующей длительность производственного цикла  $\tau_d = \frac{T_d}{t_d}$ . Используем обозначения

(7),(8),(11), получим

$$\tau_d = \frac{T_d}{t_d} = \frac{1}{t_d} \int_0^1 \frac{S_d d\xi}{a} = \frac{S_d}{t_d a} \int_0^1 d\xi = \frac{1}{g}$$

Изделия, поступившие в производство в безразмерный момент времени  $\tau_1$ , выходят в качестве готового изделия в момент времени  $\tau_2$  с задержкой  $\tau_d = (\tau_2 - \tau_1)$ , равной времени производственного цикла. Задержка  $(\tau_2 - \tau_1)$  не зависит от момента времени поступления заказа в производство, является постоянной величиной, обратно пропорциональна безразмерной скорости

движения конвейерной линии  $\tau_d = \frac{1}{g}$ . Состояние параметров поточной линии на выходе определяется состоянием поточной линии на входе с задержкой постоянной величины.

### **Выводы**

В работе рассмотрена модель поточной линии конвейерного типа с постоянной скоростью движения предметов труда. Данный способ организации производства довольно распространен, однако вопросу анализа PDE-модели поточной линии конвейерного типа в современной литературе не уделено нужного внимания. Несмотря на то, что модель конвейерного типа имеет довольно простой вид, полученные в ходе ее анализа в настоящей работе результаты имеют важное практическое значение для проектирования систем управления производством. Достоинством работы является то, что решение получено в аналитическом виде. Это позволило провести подробный анализ полученного решения. Наглядно продемонстрирована взаимосвязь между параметрами разных технологических операций. Нарушении этой взаимосвязи приводит к нарушениям бесперебойного режима производства, а также к возникновению неустойчивостей в поведении параметров поточной линии.

В работе проведен расчет продолжительности производственного цикла. Показано, что для конвейерного способа организации производства с постоянной скоростью движения предметов труда производственный цикл не зависит от размера партий обрабатываемых изделий и от последовательности их поступления в производство. Перспективами дальнейших исследований является переход к анализу модели поточной линии конвейерного типа со скоростью движения предметов труда, которая зависит от времени при случайном поступлении заказов в производство.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. / О.М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – С. 388. –Available at: <https://goo.gl/dzcEZk>
2. Armbruster D. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. / D.Armbruster, P.Degond, C.Ringhofer – SIAM Journal on Applied Mathematics 83, 2006. – P. 896–920.
3. Пигнастый О. М. О построении целевой функции производственной системы / О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академпериодика". - 2007. - №5. - С. 50-55. –Available at: <https://goo.gl/dF18Kx>
4. Пигнастый О. М. О новом классе динамических моделей поточных линий производственных систем / О. М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ. - 2014. - № 31/1. - С. 147-157. –Available at: <https://goo.gl/ljFEsS>
5. Демуцкий В. П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок /

- В. П. Демущий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый. – Харьков: ХНУ, 2003. – 272 с. doi: 10.13140/RG.2.1.5018.7123. –Available at: <https://goo.gl/FGryP6>
6. Пигнастый О.М. Сетевая модель многоресурсной поточной производственной линии / О.М. Пигнастый // Научный результат. Серия «Информационные технологии». Белгород: БГУ. –2016. – Т.1. №2. –С.31–45.
  7. Armbruster D. A Continuum Model for a Re-entrant Factory / D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, Jo T -C. // Operations research. – 2006. – VOL 54 – №5. – P. 933 - 950 ..
  8. Colombo R., Guerra G., Herty M., Sachers V.. Modeling and optimal control of networks of pipes and canals. Technical report, Milano Bicocca University, 2008. –Available at: <https://arxiv.org/abs/0802.3613v1>
  9. Ходусов В.Д. Расчет производственного цикла с применением статистической теории производственно-технических систем / О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – Киев: Видавничий дім "Академперіодика". – 2009. – №12. – С. 38 – 44. –Available at: <https://goo.gl/Ow6qqK>
  10. Пигнастый О. М. К вопросу использования статистической теории для расчета производственного цикла / В. Д. Ходусов, О. М. Пигнастый // - Вісник Харківського національного університету. - Харків: ХНУ. -2009. - №868, вип.3/43/ Сер. "Фізична". с.112-118.
  11. Разумов И. М. Организация и планирование машиностроительного производства / И. М. Разумов, Л. Я. Шухгалтер – М.: Машиностроение, 1974. – 592 с.
  12. Власов В.А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции / В. А. Власов, И. А. Тихомиров, И. И. Локтев.– Томск, 2006. – 300 с.
  13. Управление гибкими производственными системами / Е. Д. Воронина и др. / общ. ред. С. В. Емельянов. – М.:Машиностроение, 1987. – 368 с.
  14. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / О.В.Серая – Х.: ФОП Стеценко, 2010, 512 с.
  15. Ходусов В.Д., Пигнастый О.М. Использование методов физической кинетики для исследования колебания параметров поточной линии // - Восточно-европейский физический журнал. - Харьков: ХНУ. - 2014. - Vol.1. – №4. – С. 88-95.
  16. Серая О.В. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами/ О.В.Серая, Т.А.Клименко, В.Б.Самородов // Вестник ХНАДУ. - 2009. - Вып. 45. - С. 31-34.
  17. Заруба В. Я. Моделирование движения предмета труда по технологическому маршруту в двухкоординатном описании / В. Я. Заруба О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”. Збірник наукових праць. Серія: Технічний прогрес та ефективність виробництва. – Харків: НТУ „ХПІ”. - 2015. - № 60 (1169) – С. 39-45.

УДК 658.51.012

**Модель одноузловой конвеєрної лінії з постійною швидкістю переміщення предметів праці / Пігнастий О.М., Ходусов В.Д. // Вісник Харк. нац. ун-ту., – XXXX. – № XXX. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. X. – С. XX-XX: рис. 11. - табл. 0. – Бібліогр.: 17 назв.**

У даній статті основна увага приділяється моделі виробничої лінії конвеєрного типу. Записана в одномоментному наближенні система рівнянь для моделі конвеєрної лінії з постійною швидкістю руху предметів праці і отримано її рішення в аналітичному вигляді, що дозволило розрахувати параметри системи в довільний момент часу. Показано, що рішення визначається видом початкових і граничних умов. Отримано вираз для розрахунку виробничого циклу конвеєрної лінії.

УДК 658.51.012

**Модель одноузловой конвейерной линии с постоянной скоростью перемещения предметов труда / Пигнастый О.М., Ходусов В.Д. // Вестник Харк. нац. ун-та., – XXXX. – № XXX. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. XX. – С. XX-XX: ил. 11. - табл. 0. - Библиогр.: 17 назв.**

В данной статье основное внимание уделяется модели производственной линии конвейерного типа. Записана в одномоментном приближении система уравнений для модели конвейерной линии с постоянной скоростью движения предметов труда и получено ее решение в аналитическом виде, что позволило рассчитать параметры системы в произвольный момент времени. Показано, что решение определяется видом начальных и граничных условий. Получено выражение для расчета производственного цикла конвейерной линии.

UDC 658.51.012

**The model of the production line of the conveyor type at a constant speed moving subjects of labor / Pihnastyi O.M., Khodusov V.D. // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, – XXXX. – № XXX. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», Issue XX. – P. XX-XX: Fig. 11. - Tabl. 0. –Ref.: 17 title**

This paper focuses on the model of the production line of the conveyor type. The system of equations to model of the conveyor line at a constant speed of the moving of the subjects of labor was written in the one-moment description and was receive its solution in analytic form that allowed to calculate the parameters of the system at any given time. It is shown that the solution is determined of the kind of initial and boundary conditions. Here was received an expression for calculation of the production cycle of the conveyor line.

---