МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи

Сарданашвили Геннадий Александрович

ХИГГСОВСКАЯ МОДЕЛЬ КЛАССИЧЕСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва 1997

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Содержание диссертации составляет построение калибровочной теории гравитации, в которой классическое гравитационное поле описывается как хиггсовское поле, отвечающее спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий. Геометрически такое нарушение симметрий обусловлено принципом эквивалентности, а физически – фактом существования дираковской спинорной материи с группой симметрий Лоренца. Дираковские фермионные поля не допускают общих ковариантных преобразований, индуцируемых диффеоморфизмами пространства-времени. Математически это означает, что спинорные расслоения, описывающие эти поля, не являются объектами категории геометрических расслоений. Физическим следствием такого нарушения симметрий является то, что необходимым условием существования дираковской фермионной материи является существование геометрического (тетрадного) гравитационного поля и что всякое дираковское фермионное поле может быть задано только в паре с таким тетрадным полем. Главным результатом диссертации является построение, согласно общей процедуре геометрического описания спонтанного нарушения симметрий в терминах расслоений, конфиругационного пространства и лагранжиана полной системы фермионных и гравитационных полей. Это конфиругационное пространство естественным образом допускает общие ковариантные преобразования. Если следовать общей процедуре построения дифференциальных законов сохранения, исходя из первой вариационной формулы, именно инвариантность лагранжианов относительно общих ковариантных преобразований приводит к закону сохранения потока энергии-импульса в теории гравитации, который во всех основных моделях гравитации сводится, как мы показываем, к обобщенному суперпотенциалу Комара. В диссертации излагаются и другие следствий хиггсовской природы гравитационного поля.

А.

То что сегодня называют теориями гравитации – это фактически попытка построения объединенной картины физической материи, пространства-времени и гравитации. При этом как правило (но не всегда [1,2]) абстрагируются от внутренних характеристик материи таких, как аромат, цвет, барионный и другие заряды. Мы не касаемся здесь моделей так называемого суперобъединения гравитации и элементарных частиц [3,4], поскольку их описание не ограничивается геометрией только пространства-времени.

На физическом уровне можно указать три главных принципа, на которых традиционно основываются модели гравитации. Это принцип относительности, принцип эквивалентности и принцип Маха. Анализу и различным формулировкам этих принципов посвящена обширная литература [5-8]. Большинство таких формулировок оперирует понятиями инерциальных и неинерциальных систем отсчета, силы и массы, взятыми из нерелятивистской механики. Трудность состоит в том, что все эти понятия изначально возникают при формулировке первого и второго законов ньютоновской механики и не могут быть определены независимо друг от друга, если не предполагать, как это сделал Ньютон, наличие абсолютного пространства, с которым ассоциированы инерциальные системы отсчета. Отказ от концепции абсолютного пространства (Дж.Беркли, Г.Лейбниц) ведет к построению "релятивной" механики, использующей взаимные расстояния, скорости и ускорения тел. Такая механика развивалась, но не привела к серьезному успеху [9]. Определенный компромис, что инерция индуцируется всей материей космоса, предлагает принцип Маха.

Наш подход состоит в том, чтобы, не апеллируя к понятиям из механики, описать гравитацию в рамках калибровочной теории классических полей, когда материя представляется классическими полями.

Мы исходим из того, что классическая теория поля допускает адекватную геометрическую формулировку в терминах расслоений [10-13]. Она основывается на следующем положении. Классические поля представляются сечениями некоторого дифференцируемого расслоения

$$\pi : Y \to X, \qquad \pi : (x^\lambda, y^i) \mapsto (x^\lambda), \tag{1}$$

с координатами (x^λ, y^i), где база X играет роль мирового многообразия с координатами (x^λ). Конфигурационным пространством этих полей в лагранжевом формализме первого порядка является конечномерное многообразие струй J^1Y сечений расслоения $Y \to X$ [13-18].

Замечание 1. Многообразие струй J^1Y образовано классами эквивалентности $j^1_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$, отождествляемых по своим значениям и значениям первых производных в точках $x \in X$. Многообразие струй наделяется координатами $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)$, такими что

$$(y^i \circ s)(x) = s^i(x), \qquad (y^i_\lambda \circ s)(x) = \partial_\lambda s^i(x)$$

для всякого сечения s расслоения Y. Многообразия струй являются стандартным аппаратом теории дифференциальных уравнений и дифференциальных операторов [18-21]. Применение многообразий струй в дифференциальной геометрии основано на взаимно однозначном соответствии между связностями на расслоении $Y \to X$ и сечениями

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i)$$

расслоения струй $J^1Y \to Y$. Всякая такая связность определяет дифференциальный оператор первого порядка (ковариантный дифференциал)

$$D : J^1Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY,$$
$$D = (y^i_\lambda - \Gamma^i_\lambda) dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

на расслоении Y [22-24]. Символами TM и T^*M в дальнейшем обозначаются касательные и кокасательные расслоения к многообразию M, а VY и V^*Y – вертикальные касательные и кокасательные расслоения к расслоению $Y \to X$. •

Лагранжиан системы полей на конфигурационном пространстве J^1Y представляется горизонтальной плотностью

$$L = \mathcal{L}(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)\omega, \qquad \omega = dx^1 \wedge \cdots dx^n, \qquad n = \mathrm{dim}X.$$

Такое описание возникло как обобщение известной геометрической формулировки теории калибровочных полей, когда Y – расслоение, ассоциированное с главным расслоением $P \to X$ с некоторой структурной группой G. Связности на главном расслоении отождествляются с калибровочными потенциалами, описывающими взаимодействие с группой симметрий G [25-28]. При этом калибровочный принцип трансформируется в своего рода принцип относительности, требующий инвариантности лагранжиана полей относительно группы автоморфизмов расслоения (1). Говорят о калибровочной теории внутренних симметрий, если эти автоморфизмы оставляют неподвижной базу X расслоения (1).

Из фундаментальных взаимодействий только гравитационное поле долгое время не удавалось удовлетворительным образом описать в рамках калибровочной теории. Предлагались калибровочные модели разных групп симметрий: групп Лоренца, Пуанкаре, де Ситтера, общей линейной $GL(4, \mathbf{R})$ и общей аффинной групп, конформной группы $SO(2,4)$ и других (см. в обзорах [27,29-34]). При этом всегда подразумевалось, что калибровочная теория гравитации (КТГ) обязательно должна включать в себя эйнштейновскую ОТО.

Сразу же однако обнаружилось, что традиционный калибровочный принцип, введенный в пионерских работах Янга и Миллса в 1954 г., а затем Утиямы в 1956 г. (см. их русский перевод в сборнике [35]) и успешно использованный в калибровочных моделях внутренних симметрий, не вполне применим к КТГ. Дело в том, что, исходя из требования соответствия с ОТО, калибровочная группа пространственно-временных преобразований, должна включать в себя группу общих ковариантных преобразований, которая сама не является локализаций какой-либо группы Ли. Выделенность общих ковариантных преобразований объясняется тем, что только они переводят голономные реперы $\{\partial_\mu\}$ на X в голономные, а только голономные реперы можно считать чисто кинематическими объектами – операторами частных производных, не содержащими динамических переменных.

Однако главная трудность при построении КТГ состояла в том, что с математической точки зрения калибровочные поля – это связности на расслоениях, тогда как, если следовать ОТО, гравитация

– это метрическое (или тетрадное) поле.

Предпринимались многочисленные попытки представить гравитационное поле ОТО как калибровочные потенциалы, отвечающие калибровочной группе трансляций, основываясь на видимом совпадении тензорных рангов тетрадного поля h^a_μ и калибровочного поля трансляций A^a_μ [36-42] (наиболее полный список литературы по этому вопросу приведен в обзоре [34]). Эти попытки не привели к успеху. Анализ в терминах расслоений показал, что h^a_μ и A^a_μ – это разные математические объекты с разными законами преобразований [31,33, 42-44].

В Главе 4 диссертации показано, что калибровочная модель группы трансляций, формулируемая в терминах аффинных расслоений, с геометрической точки зрения описывает деформации мирового многообразия, а с физической – приводит к калибровочной модели пятой силы [45-47].

Все модели КТГ так или иначе являются аффинно-метрическими. Однако как в первой калибровочной модели гравитации Утиямы в 1956 г., так и в недавнем обзоре [34] метрическое (тетрадное) поле вводится вне рамок калибровочной схемы. При этом упускается из виду, что в калибровочных моделях со спонтанным нарушением симметрий, помимо калибровочных потенциалов, присутствуют еще хиггсовские поля.

Б.

Спонтанное нарушение симметрий является в настоящее время неприменным атрибутом объединенных теорий в физике элементарных частиц. Более того, обнаружение хиггсовских бозонов стоит сейчас в ряду первоочередных экспериментальных задач.

В то же время физическая природа хиггсовского поля остается невыясненной. В лагранжианы объединенных моделей оно вводится как своего рода феноменологическое поле, возникающее в результате некоего фазового перехода при определенной энергии. Предлагалось описывать хиггсовское поле как коллективное поле связанных пар материальных полей (типа конденсата куперовских пар) [27,48-51], включая гравитацию [52-54] и коллективное поле кручения [27]. Для этого использовалась техника среднего поля и построения эффективных лагранжианов методом функционального интегрирования. Предпринимались также попытки связать голдстоновские компоненты хиггсовского поля с голдстоновскими состояниями из известной теоремы Голдстоуна в аксиоматической квантовой теории [55,56]. Однако строгое математическое описание явления спонтанного нарушения симметрий на квантовом уровне до сих пор отсутствует. Не вдаваясь в детали, можно сказать, что хиггсовские поля характеризуют неэквивалентные гауссовы состояния алгебр квантовых полей [57,58].

На классическом уровне спонтанное нарушение симметрий описывается классическими хиггсовскими полями h, принимающими значения в фактор-пространстве G/H группы симметрий G по подгруппе точных симметрий H. Они представляются сечениями фактор-расслоения

$$\Sigma = P/H \to X, \tag{2}$$

где $P \to X$ – главное расслоение со структурной группой G [27,59,60]. В случае внутренних симметрий для всякого хиггсовского поля h существуют соответствующие калибровочные преобразования – унитарная калибровка, в которой оно представляется постоянным полем со значениями в H-инвариантном центре h_0 фактор-пространства G/H. Пусть h' - другое хиггсовское поле, гомотопное данному. Его можно представить как отклонение

$$h'(x) = \exp[\epsilon(x)]h_0$$

от $h(x) = h_0$, где $\epsilon(x)$ – локальные функции на X со значениями в алгебре Ли группы G, которые называются голдстоновскими полями. В случае малых отклонений они совпадают с так называемыми классическими голдстоновскими полями в формализме нелинейных реализаций групп (частный случай индуцированных представлений [61]), когда представление группы G строится на парах (v, h) элементов v пространства V, реализующего некоторое линейное представление подгруппы H группы G, и элементов σ фактор-пространства G/H [27,62,63]. Переходом к унитарной калибровке, отвечающей полю h', его голдстоновские компоненты устраняются. Поэтому хиггсовские поля в случае внутренних симметрий не являются, вообще говоря, динамическими.

Существует взаимно однозначное соответствие между сечениями h расслоения (2) и подрасслоениями P^h со структурной группой H главного расслоения P [64,65]. Выделение подрасслоения $P^h \subset P$ называется редуцированной H-структурой [64,66,67]. Разным полям h и h' соответствуют неэквивалентные H-структуры. Расслоения P^h и $P^{h'}$ в общем случае не изоморфны и во всяком случае не канонически изоморфны. В этом смысле мы говорим, что имеет место нарушение симметрий.

Рассмотрим случай спонтанного нарушения симметрия в калибровочной модели для группы симметрий G, когда материальные поля допускают только подгруппу точных симметрий H. Такие поля описываются только в паре с определенным хиггсовским полем h и задаются сечениями ассоциированного с $P^h \subset P$ расслоения

$$Y^h = (P^h \times V)/H \tag{3}$$

с типичным слоем V, на котором реализуется представление подгруппы точных симметрий H, но не всей группы G. Материальные поля в присутствии разных хиггсовских полей представляют собой сечения разных расслоений (3), которые в общем случае не изоморфны и во всяком случае не канонически изоморфны. Проблема состоит в том, чтобы построить конфигурационное пространство всей совокупности пар (s_h, h) материальных и хиггсовских полей.

В диссертации дается следующее ее решение [10,11,13,60,68]. Расслоение $P \to \Sigma$, где Σ – фактор-расслоение (2), является главным расслоением со структурной группой H. Рассмотрим композицию расслоений

$$Y \xrightarrow{\pi_{Y\Sigma}} \Sigma \xrightarrow{\pi_{\Sigma X}} X, \tag{4}$$

где $Y \to \Sigma$ – ассоциированное с $P \to \Sigma$ расслоение

$$Y = (P \times V)/H \tag{5}$$

с типичным слоем V. Она наделяется координатами $(x^\lambda, \sigma^m, y^i)$, где (x^λ, σ^m) – координаты на расслоении $\Sigma \to X$. В §3.2 показано, что для всякого h ограничение расслоения $Y \to \Sigma$ (5) на $h(X) \subset \Sigma$ является подрасслоением расслоения $Y \to X$, изоморфным расслоению Y^h (3). Отсюда следует, что всякое сечение расслоения Y^h соответствует некоторому сечению s композиционного расслоения $Y \to X$, проектируемого на $h = \pi_{P\Sigma} \circ s$. Таким образом, вышеупомянутым конфигурационным пространством пар материальных и хиггсовских полей является многообразие струй J^1Y расслоения (4).

Нами была разработана геометрия композиционных расслоений [10,11,13]. В результате описание динамики на композиционном расслоении (4) имеет ту специфику, что всякая связность

$$A_\Sigma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + A^i_\lambda \partial_i) + d\sigma^m \otimes (\partial_m + A^i_m \partial_i) \tag{6}$$

на расслоении $Y \to \Sigma$ определяет дифференциальный оператор первого порядка (вертикальный ковариантный дифференциал)

$$\widetilde{D} : J^1Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY, \tag{7}$$
$$\widetilde{D}_A = (y^i_\lambda - A^i_m \sigma^m_\lambda) dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

на расслоении $Y \to X$, который и используется при построении лагранжианов на J^1Y для моделей с нарушенными симметриями.

В.

Именно тот факт, что пространство псевдоримановых билинейных форм на $\mathbf{R}^4$ изоморфно фактор-пространству группы $GL(4, \mathbf{R})$ по группе Лоренца O(1,3), привело к предположению, что гравитационное поле ОТО имеет хиггсовскую природу [69-72]. В геометрических терминах эта идея была сформулирована А.Траутманом [73] и нами [31,74,75]. Сейчас уже вполне определенно можно сказать, что, если гравитационное поле отождествить с метрическим (принцип геометризации), то как физическое поле оно является хиггсовским, отвечающим спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий [27,31,33,76-78].

Подчеркнем, что в КТГ принцип геометризации гравитационного поля изначально не фигурирует, а наличие псевдоримановой метрики обусловлено нарушением пространственно-временных симметрий. В частности, в качестве одного из двух возможных вариантов КТГ мы приходим к афинно-метрическому обобщению релятивистской теории гравитации (РТГ) А.А.Логунова [79,80] в присутствии спинорных полей (см. §3.7). Таким образом, конструкция КТГ затрагивает фундаментальные принципы, лежащие в основе теории гравитации.

Замечание 2. Известно, что именно принцип геометризации гравитационного поля как псевдоримановой метрики составил конструктивную основу эйнштейновской ОТО и фактически отодвинул в тень и принцип относительности, и принцип эквивалентности. В ОТО принцип относительности сводится к условию общей ковариантности и по мнению ряда авторов вообще тривиален [5]. Следует однако различать так называемые пассивные преобразования, преобразования систем отсчета, и активные преобразования, когда изменяются сами поля. Инвариантность относительно активных общих ковариантных преобразований приводит к закону сохранения энергии-импульса.

"Слабый" принципа эквивалентности (для систем, уравнения движения которых содержат производные гравитационного поля не выше первого порядка) автоматически выполняется при описании гравитации как искривления пространства-времени [7,81,82]. Это создало ОТО репутацию естественного варианта теории гравитации. Однако в той же мере "слабый" принцип эквивалентности выполняется в моделях, где динамика материи описывается как движение в эффективной геометрии. Заметим, что принцип эквивалентности не применим к самому гравитационному полю ("сильный" принцип эквивалентности) и, вообще говоря, не выполняется, если уравнения движения зависят от вторых производных гравитационного поля ("среднесильный" принцип эквивалентности). Это и делает допустимым модели, отличающиеся собственно гравитационным сектором, такие как ОТО и РТГ. При этом следует различать принцип эквивалентности, устанавливающий, что гравитационные силы могут быть локально скомпенсированы силами инерции в соответствующей системе отсчета, и своего рода принцип соответствия, требующий, чтобы при "выключении" гравитационного поля движение происходило как в СТО. Последний вообще не имеет смысла в ОТО и предполагает наличие минковского фона.

В ОТО, как известно, не выполняется принцип Маха [8,9,83]. Заметим, что принцип геометризации в ОТО, не только устанавливает тождественность метрического и гравитационного полей, но и предполагает, что не существует какой-либо пространственно-временной структуры, которая не изменялась бы при переходе к другому гравитационному полю. В частности, это должно относиться и к заданию системы отсчета, о которой, следуя этому принципу, можно говорить только в связи с определенным гравитационным полем. Тогда казалось бы в каких-то аспектах принцип Маха тоже выполняется как следствие принципа геометризации. Однако в ОТО нет преимущественных систем отсчета. Они могут вводиться независимо от гравитационного поля и одна и та же – для разных гравитационных полей. Учитывая эти обстоятельства, В.А.Фок в свое время предложил рассматривать гармонические координаты как систему отсчета действительно реализуемую в данном гравитационном поле [8]. Однако многие усмотрели в этом предложении новый фундаментальный принцип, выводящий за рамки ОТО. •

В отличие от калибровочной теории внутренних симметрий, физическая специфика КТГ состоит в том, что получаемая в ней геометрия касательного расслоения TX трактуется как реальная геометрия мирового пространства, которая однако может не совпадать с эффективной геометрией, характеризующей динамику материи в присутствии физического гравитационного поля.

Если не обсуждаются гравитационные сингулярности, мы будем предполагать, что мировое многообразие X в КТГ – это 4-мерное ориентированное многообразие, локально компактное, паракомпактное и связное. Под геометрией мирового многообразия X подразумевается, как обычно, дифференциальная геометрия касательного к нему расслоения TX со структурной группой $GL_4 = GL^+(4, \mathbf{R})$. Ассоциированным с TX главным расслоением является расслоение LX ориентированных реперов в касательных пространствах к X. Каждый такой касательный репер принято интерпретировать как локальную систему отсчета, хотя ее реализация физическими наблюдателями и приборами остается одной из нерешенных проблем теории гравитации [7,84,85].

КТГ строится на так называемых геометрических расслоениях, к которым относятся тензорные расслоения, а в присутствии фермионной материи расширяется на спинорные расслоения. Спонтанное нарушение симметрий в КТГ на геометрических расслоениях обусловлено принципом эквивалентности, который при обобщении КТГ на фермионные поля следует из самого факта существования этих полей.

Чтобы адаптировать принцип эквивалентности к калибровочной теории, мы формулируем его в геометрических терминах [7,27,31,86-89]. Общим для всех известных формулировок принципа эквивалентности является возможность перехода к СТО в некоторой системе отсчета. В геометрическом аспекте СТО можно характеризовать как геометрию инвариантов группы Лоренца (в духе эрлангенской программы Ф.Клейна). Тогда принцип эквивалентности может быть сформулирован как требование существования лоренцевских инвариантов в некоторой системе отсчета. Математически это требование сводится к условию существования подрасслоения L^hX реперного расслоения LX со структурной группой – связной группой Лоренца L= $SO^0(3,1)$ (лоренцевской структуры). В этом случае говорят, что имеется редукция структурной группы GL_4 расслоения LX к группе Лоренца L. Необходимым и достаточным условием такой редукции является существования атласа Ψ^h расслоения LX (системы отсчета) с лоренцевскими функциями перехода. Он задается локальными сечениями

$$h_a(x) = h_a^\mu(x)\partial_\mu \tag{8}$$

реперного расслоения $LX \to X$ (реперными полями), принимающими значения в лоренцевском подрасслоении L^hX.

Как уже указывалось, имеет место взаимно однозначное соответствие между лоренцевскими подрасслоениями L^hX главного реперного расслоения LX и глобальными сечениями h фактор-расслоения

$$\Sigma_{\mathrm{T}} = LX/\mathrm{L} \tag{9}$$

с типичным слоем GL_4/L. Расслоение (9) является двулистным накрытием расслоения псевдоримановых билинейных форм в кокасательных пространствах T_x^*X к X. Поэтому его глобальное сечение h можно отождествить с тетрадным полем. Если же следовать принципу геометризации, то h – гравитационное поле ОТО. Поэтому, говоря на физическом уровне, мы будем именовать h геометрическим гравитационным полем, чтобы при необходимости отличать его от реального физического гравитационного поля.

Таким образом, в КТГ само существование геометрического гравитационного поля является необходимым и достаточным условием выполнения геометрического принципа эквивалентности. При этом разным таким полям соответствуют неэквивалентные лоренцевские структуры. В этом смысле имеет место нарушение пространственно-временных симметрий в теории гравитации, где роль хиггсовского поля играет геометрическое гравитационное поле.

Важно подчеркнуть, что, в сравнении с хиггсовскими полями в случае внутренних симметрий, геометрическое гравитационное поле h является динамическим. Хотя в ассоциированной лоренцевской системе отсчета Ψ^h тетрадное поле h принимает значения в центре фактор-пространства GL_4/L, а соответствующее метрическое поле сводится к метрике Минковского, базисные реперы $\{h_a\}$ (8) в общем случае не голономны и содержат компоненты динамического тетрадного поля h.

Нарушение симметрий в КТГ не только приводит к появлению геометрического гравитационного поля, но и индуцирует пространственно-временную структуру на мировом многообразии X. Если структурная группа реперного расслоения LX редуцирована к группе Лоренца L, последняя в свою очередь всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе SO(3). Это означает, что всякое главное лоренцевское расслоение L^hX содержит подрасслоение со структурной группой SO(3). Соответствующее глобальное сечение фактор-расслоения $L^hX/\mathrm{SO}(3) \to X$ с типичным слоем $\mathbf{R}^3$ представляет собой пространственноподобное (относительно h) распределение $FX \subset TX$ на X, производящей 1-формой которого является тетрадная форма $h^0 = h^0_\mu dx^\mu$. Следствием этого является пространственно-временное разложение

$$TX = FX \oplus NF,$$

где NF – 1-мерное подрасслоение, определяемое временилодобным векторным полем $h_0 = h^\mu_0 dx^\mu$. Таким образом, мы приходим к известному соотношению

$$g = 2h^0 \otimes h^0 + g_R$$

между псевдоримановыми метриками, пространственно-временными распределениями и римановыми метриками на мировом многообразии X [64,90]. Отсода следует, что сингулярности метрического гравитационного поля могут быть описаны или как сингулярности римановой метрики (конформные сингулярности), или как сингулярности пространственно-временных распределений [91-93]. Как показано в Главе 6 диссертации, последние включают в себя нарушения причинности, топологические переходы и каустики пространственно-временных слоений [94-96]. В отличии от других существующих критериев гравитационных сингулярностей, в том числе известного критерия b-полноты [90,97], такой подход позволяет описывать топологию пространства-времени вблизи гравитационных сингулярностей.

По аналогии с метрическим гравитационным полем в Главе 5 диссертации дано геометрическое (в отличие от алгебраического подхода [98]) описание супергравитации в терминах суперрасслоений [99] как суперметрики, определяемой из условия редукции структурной группы касательного суперрасслоения над супермногообразием [100,101].

Г.

Физическим основанием для нарушения пространственно-временных симметрий является существование фермионной материи с лоренцевскими симметриями [33,78,102,103].

Предлагаются различные спинорные модели фермионной материи. Однако, поскольку все известные до сих пор фермионы являются дираковскими фермионами, мы ограничимся случаем дираковских спинорных полей. Сам факт их существования вводит жесткие ограничения на 4-мерное мировое многообразие X. Предположим, что X ориентируемо и некомпактно, чтобы удовлетворять принципу причинности. Тогда оно должно быть параллелизуемым, т.е. его касательное расслоение TX тривиально и главное расслоение LX линейных реперов в TX имеет глобальное сечение [104,105].

Дираковские фермионные поля представляются сечениями спинорного расслоения $S^h \to X$ со структурной группой L_s =SL(2, **C**) – универсальным двулистным накрытием связной группы Лоренца L. Чтобы они описывали реальные фермионы, расслоение S^h должно быть ассоциировано с лоренцевским подрасслоением L^hX главного реперного расслоения LX, отвечающим некоторому тетрадному полю h, а точнее с двулистным накрытием P^h расслоения L^hX, т.е.

$$S^h = (P^h \times V)/L_s, \tag{10}$$

где V – пространство 4-спинорного представления группы L_s. В этом случае определено представление

$$\hat{d}x^\lambda = \gamma_h(dx^\lambda) = h_a^\lambda(x)\gamma^a \tag{11}$$

кокасательных векторов к мировому многообразию X дираковскими γ-матрицами на элементах S^h. Соответственно оператор Дирака на сечениях расслоения S^h дается выражением

$$\mathcal{D}_h = \hat{d}x^\lambda D_\lambda, \tag{12}$$

где D_λ – ковариантные производные относительно связности на S^h, порождаемой некоторой общей линейной связностью K на X [106,107]. Сечения s_h спинорного расслоения $S^h \to X$ описывают дираковские фермионные поля в присутствии фонового тетрадного поля h.

Таким образом, спонтанное нарушение пространственно-временных симметрий и существование геометрического гравитационного поля h является необходимым условием существования дираковской фермионной материи. При этом хиггсовский характер геометрического гравитационного поля проявляется в том, что для разных таких полей h и h' представления γ_h и $\gamma_{h'}$ (11) не эквивалентны друг другу. Поэтому всякое дираковское фермионное поле может рассматриваться только в паре (s_h, h) с определенным тетрадным полем h. Проблема состоит в том, что общие ковариантные преобразование реперного расслоения LX переводит всякое его лоренцевское подрасслоение L^hX в другое лоренцевское подрасслоение $L^{h'}X$. Здесь возможны две конструкции.

В первом случае различные спинорные расслоения S^h представляются подрасслоениями некоторого расслоения S, а общие ковариантные преобразования реализуются как автоморфизмы S, переводящие $S^h \subset S$ друг в друга [13,33,107]. Сечения расслоения S описывают все множество пар фермионных и тетрадных полей (так называемый фермион-гравитационный комплекс [33,71]).

В диссертации построено конфигурационное пространство и полный лагранжиан фермион-гравитационного комплекса (§3.6). Для этого мы следуем упомянутой выше процедуре описания спонтанного нарушения симметрий, когда материальные поля допускают только группу точных симметрий.

Рассмотрим группу $\widetilde{GL}_4$, являющуюся универсальным двулистным накрытием общей линейной группы GL_4, и соответствующее двулистное накрытие $\widetilde{LX}$ реперного расслоения LX [108-111]. Спинорные представления группы $\widetilde{GL}_4$ бесконечномерны [34,71,112]. В то же время тотальное пространство гланого $\widetilde{GL}_4$-расслоения $\widetilde{LX} \to X$ имеет структуру главного расслоения $\widetilde{LX} \to \Sigma_T$ со структурной группой L_s над фактор-пространством Σ_T (9). Рассмотрим спинорное расслоение

$$S = (\widetilde{LX} \times V)/L_s,$$

ассоциированное с главным расслоением $\widetilde{LX} \to \Sigma_T$. Обозначим его S_Σ. Его тотальное пространство имеет структуру композиционного расслоения

$$S \to \Sigma_{\mathrm{T}} \to X. \tag{13}$$

При этом для всякого тетрадного поля $h : X \to \Sigma_{\mathrm{T}}$ ограничение h^*S_Σ на $h(X) \subset \Sigma_T$ является подрасслоением расслоения $S \to X$ (13), которое изоморфно спинорному расслоению S^h (10). Отсюда следует, что всякое сечение спинорного расслоения S^h соответствует некоторому сечению s композиционного расслоения $S \to X$, проектируемого на h. Таким образом, конфигурационным пространством упомянутого выше фермион-гравитационного комплекса является многообразие струй J^1S расслоения (13) [107,113,114]. На S строится оператор Дирака, который при ограничении на $h(X)$ воспроизводит оператор Дирака (12) для фермионных полей в присутствии фонового тетрадного поля h.

Расслоение $\widetilde{LX}$ наследует общие ковариантные преобразования реперного расслоения LX [108], которые индуцируют соответственно общие ковариантные преобразования расслоения S. Это позволяет получить закон сохранения потока энергии-импульса в КТГ [13,107].

Во втором случае рассматривается фоновое тетрадное поле h и соответствующее спинорное расслоение S^h. Всякое общее ковариантное преобразование $\tilde f$ реперного расслоения LX можно представить как суперпозицию его автоморфизма $\tilde f_h$ над f, сохраняющего подрасслоение L^hX, и некоторого вертикального автоморфизма Φ. Автоморфизм $\tilde f_h$ продолжается до автоморфизма главного спинорного расслоения P^h и до соответствующего автоморфизма $\tilde f_s$ спинорного расслоения S^h. Он с очевидностью сохраняет представление (11). Обратимся поэтому к вертикальному автоморфизму Φ.

Рассмотрим ассоциированное с LX групповое расслоение $Q \to$

X, типичным слоем которого является группа GL_4, действующая на себя по присоединенному представлению [33,115]. Для всякого LX-ассоциированного расслоения Y имеет место каноническое отображение

$$\rho : Q \underset{X}{\times} Y \to Y. \tag{14}$$

При этом для любого вертикального автоморфизма Φ определено отображение $\overline{\Phi}$ расслоения Q на себя, такое что

$$\rho(\overline{\Phi}(Q) \times \Phi_Y(Y)) = \rho(Q \times Y), \tag{15}$$

где Φ_Y – ассоциированный с Φ автоморфизм Y. Пусть $Y = T^*X$ и $(x^\lambda, q^\lambda{}_\mu)$ – координаты на Q. Тогда выражения (14), (15) принимают простой координатный вид

$$\begin{aligned}
&\rho : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu, t_\mu) \mapsto (x^\lambda, t_\lambda q^\lambda{}_\mu),\\
&\overline{\Phi} : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu) \mapsto (x^\lambda, \Phi^\lambda{}_\nu q^\nu{}_\mu),\\
&\rho(x^\lambda, \Phi^\lambda{}_\nu q^\nu{}_\mu, t_\alpha(\Phi^{-1})^\alpha{}_\lambda) = (x^\lambda, t_\lambda q^\lambda{}_\mu).
\end{aligned}$$

В результате определено представление

$$\gamma_Q = \gamma_h \circ \rho : Q \underset{X}{\times} T^*X \ni (q, t^*) \mapsto t_\lambda q^\lambda{}_\mu \hat{d}x^\mu = t_\lambda q^\lambda{}_\mu h^\mu_a \gamma^a \tag{16}$$

на элементах спинорного расслоения S^h. Используя это представление, можно построить оператор Дирака

$$\mathcal{D}_Q = q^\lambda{}_\mu h^\mu_a \gamma^a D_\lambda \tag{17}$$

на расслоении $Q \times S^h$, где D_λ – ковариантные производные относительно связности на расслоении S^h. Пусть q_0 – каноническое глобальное сечение расслоения $Q \to X$, которое принимает значения в единичных элементах слоев расслоения Q. При ограничении на q_0 представление γ_Q (16) сводится к представлению γ_h (11), а оператор Дирака (17) к оператору Дирака (12) на S^h. Для всякого общего ковариантного преобразования $\tilde{f} = \Phi \circ \tilde{f}_h$ над f реперного расслоения LX рассмотрим преобразование

$$\tilde{f}_Q : Q \to \overline{\Phi}_Q \circ \tilde{f}_h(Q), \qquad S^h \to \tilde{f}_s(S^h), \qquad T^*X \to T^*f(T^*X). \qquad (18)$$

Оно сохраняет представление (16).

Сечение $q(x)$ группового расслоения Q является динамической переменной в данной моделе и может интерпретироваться как гравитационное поле РТГ [116]. Действительно, имеет место каноническое отображение

$$\rho : Q \underset{X}{\times} \Sigma_{\mathrm{T}} \to \Sigma_{\mathrm{T}},$$

которое при ограничении на $h(X) \subset \Sigma_{\mathrm{T}}$ принимает вид

$$\rho_h : Q \to \Sigma_{\mathrm{T}},$$
$$\rho_h : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu) \mapsto (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu h^\mu_a),$$

где расслоение Σ_{T} наделено лоренцевской структурой ассоциированного с L^hX расслоения. Обозначим его Σ_h с координатами $\tilde{\sigma}^\mu_a$. Легко проверить, что преобразование $\tilde{f}_Q$ расслоения (18) индуцирует общее ковариантное преобразование расслоения Σ_h. Его сечение $\tilde{h} \neq h$, можно трактовать как эффективное тетрадное поле, а $\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{h}^\mu_a \tilde{h}^\nu_b \eta_{ab}$ – как эффективную метрику. Однако такое сечение $\tilde{h}$ не является вторым тетрадным полем, а $\tilde{g}$ – второй метрикой, поскольку ковекторы $\tilde{h}^a = \tilde{h}^a_\mu dx^\mu$ реализуются γ-матрицами в том же представлении, что и ковекторы $h^a = h^a_\mu dx^\mu$, а греческие индексы поднимаются и опускаются фоновой метрикой $g^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_b \eta_{ab}$.

Другими динамическими переменными модели, помимо q, являются мировые связности K и спинорные поля s_h. В результате мы приходим к аффинно-метрическому варианту РТГ в присутствии фермионных полей [116]. Ее лагранжиан РТГ представляет собой сумму лагранжианов аффинно-метрической теории L_{AM} и фермионных полей $L_{\rm D}$, записанных в эффективной метрике $\tilde{g}$ и инвариантных относительно общих ковариантных преобразований, и лагранжиана тензорного гравитационного поля q, в котором свертка осуществляется посредством метрики Минковского η и который тем самым не инвариантен относительно общих ковариантных преобразований. В частности, если в отсутствии фермионных полей выбрать

$$L_{\rm AM} = (-\lambda_1 R + \lambda_2)\sqrt{\mid \tilde{g} \mid}, \qquad L_q = \lambda_3 \eta_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} \sqrt{\mid \tilde{g} \mid},$$

где R – скалярная кривизна связности K, образованная сверткой посредством эффективной метрики $\tilde{g}$, то в отсутствии фермионных полей воспроизводится стандартная модель РТГ [8].

Заметим, что дополнительные тензорные поля q в составе обобщенных тетрад $H_a^\mu = q^\mu{}_\nu h_a^\nu$ рассматривались в разных вариантах в калибровочных моделях группы $GL(4, \mathbf{R})$ [34,117].

В частности, поскольку разным псевдоримановым метрикам отвечают неэквивалентные представления (11), геометрическое гравитационное поле (каким бы слабым оно ни было) не удовлетворяет принципу суперпозиции. Поэтому описание флуктуаций такого гравитационного поля приводит опять к варианту РТГ, но уже на фоне неминковской метрики и с динамическим по q лагранжианом, зависящим от его производных (Глава 4). Геометрически такие флуктуации представляют собой деформации пространственно-временного многообразия [45,118] и описываются в рамках калибровочной модели группы трансляций [46,47,119]. Показано, что их вклад в гравитационные явления воспроизводит эффекты типа пятой силы [120].

Д.

В диссертации разработана универсальная процедура построения дифференциальных законов сохранения в лагранжевой теории поля, основанная на применении первой вариационной формулы (Глава 2). Она дает возможность впервые получить законы сохранения энергии-импульса в аффинно-метрической модели гравитации и КТГ.

Существуют различные подходы к построению законов сохранения энергии-импульса в теории гравитации. Мы не затрагиваем здесь бесконечномерный гамильтонов формализм [121-123], а рассматриваем лагранжеву теорию поля, в которой энергия-импульс гравитационного поля понимается или как нетеровский ток [124-127], или как тензор типа Белинфанте–Розенфельда [128-130].

Наш анализ дифференциальных законов сохранения в лагранжевой теории поля основывается на первой вариационной формуле [13,114,131,132], которая обеспечивает каноническое разложение производной Ли $\mathbf{L}_{J^1 u}L$ лагранжиана L вдоль проектируемого векторного поля u на $Y \to X$. Первый член в этом разложении включает оператор Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}_L$, отвечающий L, а второй представляет собой дивергенцию $d_\lambda \mathcal{T}^\lambda$. На решениях полевых уравнений первая вариационная формула сводится к слабому тождеству

$$\mathbf{L}_{J^1 u}L \approx -d_\lambda \mathcal{T}^\lambda. \tag{19}$$

Если лагранжиан L инвариантен относительно локальной 1-параметрической группы калибровочных преобразований, генератором которой является векторное поле u, его производная Ли $\mathbf{L}_{J^1 u}L$ равна 0 и мы получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx d_\lambda \mathcal{T}^\lambda$$

соответствующего тока симметрий $\mathcal{T}$ вдоль векторного поля u. При этом ток симметрий может принять форму

$$\mathcal{T}^\lambda = W^\lambda + d_\lambda U^{\mu\lambda}, \tag{20}$$

где W^λ выражается через вариационные производные лагранжиана L, а $U^{\mu\lambda}$ – антисимметричный тензор, который называется суперпотенциалом. В частности, мы показываем, что нетеровские токи в калибровочной теории внутренних симметрий и потоки энергии-импульса в важнейших гравитационных моделях сводятся к суперпотенциальной форме (20) [12,13,107,132,133], поскольку в обоих этих случаях векторные поля u, генераторы калибровочных преобразований, зависят от производных параметров этих преобразований.

Существенно, что, поскольку тождества (19) линейны по векторным полям u, можно рассматривать суперпозицию законов сохранения вдоль различных векторных полей на расслоении Y. В частности, всякий ток симметрии представляется суперпозицией нетеровского тока вдоль вертикального векторного поля на $Y \to X$ и потока энергии-импульса вдоль горизонтального лифта на Y векторного поля τ на X [12,13,107,132]. Соответственно разные такие поднятия векторных полей τ на X приводят к разным потокам энергии-импульса, которые отличаются друг от друга нетеровскими токами.

В случае геометрических (например, тензорных) расслоений Y существует канонический лифт $\tilde{\tau}$ на Y всякого векторного поля τ на X. Ранее было установлено, что в ОТО [134] и в формализме Палатини [125] поток энергии-импульса гравитационного поля сводится к известному суперпотенциалу Комара. В диссертации этот результат обобщается на аффинно-метрическую теорию гравитации, где суперпотенциалом является обобщенный суперпотенциал

Комара [13,114,131,132]. Мы показываем, что и в КТГ на композиционном спинорном расслоении S (13) существует канонический лифт на S векторных полей на X, что приводит к закону сохранения потока-энергии импульса, выражаемого тоже через обобщенный суперпотенциал Комара [13,107]. Тот же результат при определенных условиях воспроизводится и в аффинно-метрическом варианте РТГ.

Таким образом обобщенный суперпотенциал Комара оказывается универсальным для всех основных гравитационных моделей.

В Заключении суммируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1.
Многообразия струй

В этой главе мы введем основные обозначения и математические понятия, используемые в дальнейшем [10,12,13,22,23].

Все отображения считаются гладкими, класса C^∞, а многообразия – локально компактными, паракомпактными и связными топологическими пространствами.

Касательное и кокасательное расслоения TM и T^*M к многообразию M наделяются соответствующими голономными координатами $(z^\lambda, \dot{z}^\lambda)$ и $(z^\lambda, \dot{z}_\lambda)$ относительно голономных базисов $\{\partial_\lambda\}$ и $\{dz^\lambda\}$. Если $f : M \to M'$ – морфизм многообразий, символом

$$Tf : TM \to TM',$$
$$\dot{z}'^\lambda \circ Tf = \frac{\partial f^\lambda}{\partial z^\alpha}\dot{z}^\alpha,$$

обозначается касательный морфизм к f.

1 Расслоения

Расслоением называется локально тривиальное расслоенное многообразие

$$\pi : Y \to X,$$

где π – проекция, т.е. π и $T\pi$ – это сюръекции. Расслоение $Y \to X$ наделяется атласом расслоенных координат (x^λ, y^i), где (x^λ) – координаты базы X. Предплагается, что база X – это n-мерное ориентированное многообразие.

Касательное расслоение $TY \to Y$ расслоения Y содержит вертикальное касательное подрасслоение

$$VY = \operatorname{Ker} T\pi,$$

которое образовано векторами, касательными к слоям расслоения Y. Вертикальное кокасательное расслоение $V^*Y \to Y$ к Y определяется как дуальное векторному расслоению $VY \to Y$.

Имеют место точные последовательности:

$$0 \to VY \hookrightarrow TY \to Y \underset{X}{\times} TX \to 0, \tag{1.1a}$$

$$0 \to Y \underset{X}{\times} T^*X \hookrightarrow T^*Y \to V^*Y \to 0, \tag{1.1b}$$

где все отображения – это послойные морфизмы над Y.

В дальнейшем для упрощения выражений мы будем использовать символы TX и T^*X для обозначения любых индуцированных расслоений вида

$$Y \underset{X}{\times} TX, \qquad Y \underset{X}{\times} T^*X.$$

Хотя TX не является каноническим подрасслоением TY, а V^*Y не является каноническим подрасслоением T^*Y, могут существовать различные вложения

$$Y \underset{X}{\times} TX \underset{Y}{\hookrightarrow} TY, \qquad \partial_\lambda \mapsto \partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda(y)\partial_i, \tag{1.2}$$

$$V^*Y \underset{Y}{\hookrightarrow} T^*Y, \qquad \overline{d}y^i \mapsto dy^i - \Gamma^i_\lambda(y)dx^\lambda, \tag{1.3}$$

которые расщепляют точные последовательности (1.1a) и (1.1b). Каждое такое расщепление соответствует заданию некоторой связности Γ на расслоении $Y \to X$.

Во многих случаях вертикальное касательное расслоение $VY \to Y$ представляет собой произведение

$$VY = Y \underset{X}{\times} \overline{Y},$$

где $\overline{Y} \to X$ – векторное расслоение. В частности, векторное расслоение $Y \to X$ допускает каноническое расщепление

$$VY = Y \underset{X}{\times} Y.$$

Аффинное расслоение Y с ассоциированным векторным расслоением $\overline{Y}$ также имеет каноническое расщепление

$$VY = Y \underset{X}{\times} \overline{Y}.$$

Мы имеем дело со следующими типами векторных полей и дифференциальных форм на расслоении $Y \to X$:

- проектируемое векторное поле

$$u = u^\mu(x)\partial_\mu + u^i(y)\partial_i,$$

  накрывающее векторное поле $\tau_u = u^\mu(x)\partial_\mu$ на базе X;

- вертикальное векторное поле

$$u = u^i(y)\partial_i : Y \to VY;$$

- внешние дифференциальные формы

$$\sigma : Y \to \overset{r}{\wedge} T^*X;$$

- тангенциально-значные горизонтальные формы

$$\sigma : Y \to \overset{r}{\wedge} T^*X \underset{Y}{\otimes} TY;$$

- вертикально-значные (припаивающие) формы

$$\sigma : Y \to T^*X \underset{Y}{\otimes} VY,$$
$$\sigma = \sigma^i_\lambda(y)dx^\lambda \otimes \partial_i;$$

  и, в частности, каноническая припаивающая форма

$$\theta_X = dx^\lambda \otimes \partial_\lambda$$

  на TX;

- внешняя форма

$$\pi^*\sigma(t_1,\ldots,t_k) = \sigma(T\pi(t_1),\ldots,T\pi(t_k)), \qquad t_1,\ldots,t_k \in TY,$$

на Y, индуцированная внешней k-формой σ на X.

Внешние горизонтальные n-формы называются горизонтальными плотностями. Ввведем обозначения

$$\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \qquad \omega_\lambda = \partial_\lambda \rfloor \omega.$$

Производная Ли $\mathbf{L}_u\sigma$ внешней формы σ вдоль векторного поля u удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{L}_u\sigma = u\rfloor d\sigma + du\rfloor\sigma,$$
$$\mathbf{L}_u(\sigma\wedge\sigma') = \mathbf{L}_u\sigma\wedge\sigma' + \sigma\wedge\mathbf{L}_u\sigma'.$$

Напомним полезные формулы

$$u\rfloor(\sigma\wedge\sigma') = u\rfloor\sigma\wedge\sigma' + (-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge u\rfloor\sigma',$$
$$d\pi^*\sigma = \pi^* d\sigma.$$

2 Многообразия струй

Многообразие струй первого порядка J^1Y расслоения $Y \to X$ образовано классами эквивалентности $j^1_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$, отождествляемых по их значениям и значениям их первых прозводных в точках $x \in X$. Оно наделяется системой координат $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)$ с функциями перехода

$$y'^i_\lambda = \left(\frac{\partial y'^i}{\partial y^j} y^j_\mu + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}.$$

В частности, видно, что расслоение струй

$$\pi^1_0 : J^1Y \to Y$$

является аффинным расслоением с ассоциированным векторным расслоением

$$T^*X \underset{Y}{\otimes} VY \to Y.$$

Существуют канонические мономорфизмы

$$\begin{aligned}
&\lambda : J^1Y \underset{Y}{\hookrightarrow} T^*X \underset{Y}{\otimes} TY, \\
&\lambda(z) = dx^\lambda \otimes d_\lambda = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

и

$$\begin{aligned}
&\theta : J^1Y \hookrightarrow T^*Y \underset{Y}{\otimes} VY, \\
&\theta(z) = \theta^i \otimes \partial_i = (dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda) \otimes \partial_i,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

которые позволяют формулировать аппарат многообразий струй в терминах тангенциально-значных форм. Операторы

$$d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i$$

называются полными производными, а

$$\theta^i = dy^i - y^i_\lambda dx^\lambda$$

– контактными формами.

Всякий послойный морфизм $\Phi : Y \to Y'$ над диффеоморфизмом f базы X продолжается до морфизма многообразий струй

$$\begin{aligned}
&j^1\Phi : J^1Y \to J^1Y', \\
&{y'}^i_\mu \circ j^1\Phi = (\partial_\lambda \Phi^i + \partial_j \Phi^i y^j_\lambda) \frac{\partial (f^{-1})^\lambda}{\partial x'^\mu}.
\end{aligned}$$

В частности, всякое сечение s расслоения $Y \to X$ имеет продолжение до сечения $J^1 s$ расслоения $J^1Y \to X$:

$$\begin{aligned}
&(j^1 s)(x) \overset{\text{def}}{=} j^1_x s, \\
&(y^i, y^i_\lambda) \circ j^1 s = (s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)).
\end{aligned}$$

Всякое проектируемое векторное поле u на расслоении $Y \to X$ поднимается до проектируемого векторного поля

$$\overline{u} = j_0^1 u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y_\lambda^j \partial_j u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu)\partial_i^\lambda \tag{1.6}$$

на расслоении $J^1Y \to X$. Если u – вертикальное векторное поле, его лифт

$$\overline{u} : J^1Y \to VJ^1Y$$

(1.6) совпадает с его продолжением на многообразие струй

$$J^1u : J^1Y \to J^1VY$$

благодаря каноническому изоморфизму

$$VJ^1Y = J^1VY.$$

Морфизм (1.4) порождает каноническое расщепление

$$\begin{gathered}
J^1Y \underset{Y}{\times} TY = TX \underset{J^1Y}{\oplus} VY, \\
\dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i = \dot{x}^\lambda(\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda y_\lambda^i)\partial_i.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

В частности, всякое векторное поле u на $Y \to X$ допускает каноническое расщепление

$$\pi_0^{1*} u = u_H + u_V = u^\lambda(\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i) + (u^i - u^\lambda y_\lambda^i)\partial_i \tag{1.8}$$

над J^1Y.

Пусть Γ – сечение расслоения струй $J^1Y \to Y$. Подставляя

$$y_\lambda^i = \Gamma_\lambda^i(y)$$

в выражение (1.7), мы получаем известное горизонтальное расщепление касательного расслоения TY к Y посредством связности Γ

на Y. Более того, существует взаимно однозначное соответствие между глобальными сечениями

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i)$$

аффинного расслоения $J^1Y \to Y$ и связностями на расслоении $Y \to X$. Например, линейная связность K на касательном расслоении TX к многообразию X и дуальная связность K^* на кокасательном расслоении T^*X имеют вид

$$K^\alpha_\lambda = K_\lambda{}^\alpha{}_\nu(x)\dot{x}^\nu,$$
$$K^*_{\alpha\lambda} = -K_\lambda{}^\nu{}_\alpha(x)\dot{x}_\nu.$$

Связности на расслоении $Y \to X$ образуют аффинное пространство над линейным пространством припаивающих форм на расслоении Y. Это означает, что, если Γ – связность и σ – припаивающая форма на Y, то их сумма

$$\Gamma + \sigma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + (\Gamma^i_\lambda + \sigma^i_\lambda)\partial_i]$$

– связность на Y. Обратно, если Γ и Γ' – связности на расслоении Y, тогда их разность

$$\Gamma - \Gamma' = (\Gamma^i_\lambda - \Gamma'^i_\lambda)dx^\lambda \otimes \partial_i$$

– это припаивающая форма на Y.

Кривизной связности Γ называется VY-значная 2-форма

$$R = \frac{1}{2}R^i_{\lambda\mu}dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i,$$
$$R^i_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \Gamma^i_\mu - \partial_\mu \Gamma^i_\lambda + \Gamma^j_\lambda \partial_j \Gamma^i_\mu - \Gamma^j_\mu \partial_j \Gamma^i_\lambda.$$

Всякая связность Γ на расслоении $Y \to X$ задает дифференциальный оператор первого порядка

$$D_\Gamma : J^1Y \ni z \mapsto z - \Gamma(\pi^1_0(z)) \in T^*X \underset{Y}{\otimes} VY,$$
$$D_\Gamma = (y^i_\lambda - \Gamma^i_\lambda)dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

называемый ковариантным дифференциалом относительно связности Γ. Соответствующая ковариантная производная сечения s расслоения Y имеет вид

$$\nabla_\Gamma s = D_\Gamma \circ J^1 s = [\partial_\lambda s^i - (\Gamma \circ s)^i_\lambda] dx^\lambda \otimes \partial_i.$$

В частности, сечение s называется интегральным сечением для связности Γ на Y, если $\nabla_\Gamma s = 0$, т.е. $\Gamma \circ s = J^1 s$.

3 Расслоения со структурными группами

Расслоение $\pi_P : P \to X$ называется главным расслоением со структурной группой Ли G, если задано послойное свободное и транзитивное действие группы G на P справа:

$$R_g : p \mapsto pg, \qquad p \in P, \qquad g \in G, \tag{1.9}$$

[64,65]. База главного расслоения X диффеоморфна факторпространству P/G, а проекция π_P совпадает с каноническим морфизмом $P \to P/G$.

Всякое главное расслоение P однозначно задается выбором базы X, структурной группы G и атласа главного расслоения $\Psi^P = \{U_\xi, \varphi^P_\xi, g_{\xi\zeta}\}$, где функции перехода $g_{\xi\zeta}$ – G-значные гладкие функции на $U_\xi \cap U_\zeta$. Морфизмы тривиализации главного расслоения удовлетворяют условию

$$\varphi^P_\xi(pg) = \varphi^P_\xi(p)g.$$

Поэтому всякому атласу Ψ^P главного расслоения P можно однозначно сопоставить набор его локальных сечений $\{z_\xi\}$ таких, что

$$\begin{aligned} &(\varphi^P_\xi \circ z_\xi)(x) = 1_G, \qquad x \in U_\xi, \\ &z_\zeta(x) = z_\xi(x) g_{\xi\zeta}(x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Главное G-расслоение $P \to X$ допускает каноническое вертикальное расщепление

$$\begin{aligned} &\alpha : VP \to P \times \mathcal{G}_l, \\ &\mathrm{pr}_2 \circ \alpha \circ e_m = J_m, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\{J_m\}$ – базис левой алгебры Ли $\mathcal{G}_l$ и $\{e_m\}$ – соответствующие фундаментальные векторные поля на P, отвечающие каноническому действию G на P справа.

Всякому главному расслоению $P \to X$ со структурной группой G можно сопоставить ассоциированное расслоение $Y \to X$ с данным типичным слоем V, реализующим эффективное действие группы G слева. Такое расслоение Y можно определить как фактор

$$Y = (P \times V)/G \tag{1.12}$$

прямого произведения $P \times V$ относительно действия группы G, т.е. когда точки $(p \times v)$ и $(pg \times g^{-1}v)$, $g \in G$, отождествляются.

Пусть Y – ассоциированное с P расслоение с типичным слоем V. Для $p \in P$ обозначим $[p]_V$ сужение канонического отображения

$$P \times V \to (P \times V)/G$$

на подмногообразие $p \times V$. Тогда $v \mapsto [p]_V v$ есть отображение типичного слоя V в слой $Y_{\pi_P(p)}$ расслоения Y, такое что

$$[pg]_V(v) = [p]_V(gv)$$

для всех $g \in G$.

В частности, если $\Psi^P = \{U_\xi, z_\xi\}$ – атлас главного расслоения P, то отображение

$$[z_\xi(x)]_V : V \to Y_x, \qquad x \in U_\xi$$

задает атлас $\Psi = \{U_\xi, \varphi_\xi\}$ ассоциированного расслоения Y.

В случае главного расслоения $P \to X$ со структурной группой G, точная последовательность (1.1a) сводится к точной последовательности

$$0 \to V^G P \underset{X}{\hookrightarrow} T^G P \to TX \to 0,$$

где

$$T^G P = TP/G, \qquad V^G P = VP/G.$$

Типичным слоем расслоения $V^G P$ является правая алгебра Ли $\mathcal{G}_r$ право-инвариантных векторных полей на группе G. Группа G действует на этот типиный слой по присоединенному представлению.

Связностью на главном расслоении $P \to X$ называется глобальное сечение A расслоения струй $J^1 P \to P$, эквивариантное относительно канонического правого действия (1.9) группы G на P, т. е.

$$A \circ J^1 r_g = r_g \circ A, \qquad g \in G.$$

Она представляется тангенциально-значной формой

$$A = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + A^m_\lambda(p) e_m), \tag{1.13}$$

коэффициенты которой вследствие условия эквивариантности удовлетворяют соотношению

$$A^m_\lambda(pg) = A^m_\lambda(p) \mathrm{ad} g^{-1}(e_m).$$

Используя канонический морфизм (1.5) и каноническое горизонтальное расщепление (1.11), из формы A можно воспроизвести известную форму связности

$$\overline{A} = \alpha \circ \theta_1 \circ A$$

на главном расслоении P. Пусть $\Psi^P = \{z_\xi\}$ – некоторый атлас главного расслоения P. Относительно атласа Ψ^P, связность на главном расслоении (1.13) характеризуется, как обычно, семейством локальных 1-форм связности

$$A_\xi = z_\xi^* \overline{A} = -A_\lambda^m(x) dx^\lambda \otimes J_m \tag{1.14}$$

на базе X.

В силу условия эквивариантности существует взаимно однозначное соответствие между связностями на главном расслоении $P \to X$ со структурной группой G и глобальными сечениями расслоения

$$C := J^1 P/G \to X, \tag{1.15}$$

получаемого из расслоения струй $J^1 P \to P$ переходом к фактору относительно струйных продолжений канонических морфизмов (1.9). Мы будем называть расслоение (1.15) расслоением связностей. Это аффинное расслоение, ассоциированное с векторным расслоением

$$\overline{C} = T^* X \underset{X}{\otimes} V^G P.$$

В частности, оно допускает каноническое вертикальное расщепление

$$VC = C \times \overline{C}.$$

Подчеркнем однако, что расслоение связностей C (1.15) не является расслоением со структурной группой.

Если задан атлас Ψ^P главного расслоения P, расслоение связностей C наделяется ассоциированной системой расслоенных координат (x^μ, a_μ^m), таких что для любого его сечения A координатные функции

$$(a_\mu^m \circ A)(x) = A_\mu^m(x)$$

являются коэффициентами локальной 1-формы связности (1.14). Многообразие струй J^1C расслоения связностей C параметризуется координатами

$$(x^\mu, a^m_\mu, a^m_{\mu\lambda}). \tag{1.16}$$

Аффинное расслоение струй $J^1C \to C$ моделируется над векторным расслоением

$$T^*X \underset{C}{\otimes} (C \times T^*X \otimes V^G P).$$

Имеет место его каноническое расщепление

$$J^1C = C_+ \underset{C}{\oplus} C_- = (J^2P/G) \underset{C}{\oplus} (\overset{2}{\wedge} T^*X \underset{C}{\otimes} V^G P) \tag{1.17}$$

над C, где

$$C_- = C \times \overset{2}{\wedge} T^*X \underset{X}{\otimes} V^G P,$$

а $C_+ \to C$ – это аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$\overline{C}_+ = \overset{2}{\vee} T^*X \underset{C}{\otimes} V^G P.$$

В координатах (1.16), расщепление (1.17) имеет вид

$$a^m_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(a^m_{\lambda\mu} + a^m_{\mu\lambda} - c^m_{nl} a^n_\lambda a^l_\mu) + \frac{1}{2}(a^m_{\lambda\mu} - a^m_{\mu\lambda} + c^m_{nl} a^n_\lambda a^l_\mu),$$

где c^k_{mn} структурные константы алгебры Ли $\mathcal{G}_r$ группы G. Выпишем соответствующие канонические проекции

$$\mathcal{S} : J^1C \to C_+, \qquad \mathcal{S}^m_{\lambda\mu} = a^m_{\lambda\mu} + a^m_{\mu\lambda} - c^m_{nl} a^n_\lambda a^l_\mu,$$

$$\mathcal{F} : J^1C \to C_-, \qquad \mathcal{F}^m_{\lambda\mu} = a^m_{\lambda\mu} - a^m_{\mu\lambda} + c^m_{nl} a^n_\lambda a^l_\mu.$$

Легко убедиться, что для всякой связности A величина

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \circ J^1 A = F, \\ &F = \frac{1}{2} F^m_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes I_m, \\ &F^m_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A^m_\mu - \partial_\mu A^m_\lambda - c^m_{nk} A^n_\lambda A^k_\mu, \end{aligned} \tag{1.18}$$

– это напряженность калибровочного потенциала A.

Связность A на главном расслоении P индуцирует связность Γ на ассоциированном с P расслоении Y (1.12) в соответствии с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} J^1P\times V & \longrightarrow & J^1Y \\ {\scriptstyle A\times \mathrm{Id}_V}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma} \\ P\times V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Относительно ассоциированных атласов Ψ на Y и Ψ^P на P, эта связность дается выражением

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + A^m_\mu(x) I_m{}^i{}_j y^j \partial_i], \tag{1.19}$$

где $A^m_\mu(x)$ – коэффициенты локальной 1-формы связности (1.14) и I_m – генераторы структурной группы G, действующей на типичном слое V расслоения Y. Кривизна связности (1.19) принимает вид

$$R^i_{\lambda\mu} = F^m_{\lambda\mu} I_m{}^i{}_j y^i,$$

где $F^m_{\lambda\mu}$ – коэффициенты напряженности (1.18) связности A.

Проблема возникает со связностью на расслоении связностей $C \to X$, поскольку оно не является расслоением со структурной группой. Она решается, например, следующим образом. Если задана симметричная линейная связность K^* (т.е. $K_\lambda{}^\nu{}_\alpha = K_\alpha{}^\nu{}_\lambda$) на кокасательном расслоении T^*X над X, всякая связность B на главном расслоении $P \to X$ индуцирует связность

$$S_B{}^m_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}[\partial_\lambda B^m_\mu + \partial_\mu A^m_\lambda - c^m_{pq}(a^q_\mu B^p_\lambda + a^q_\lambda B^p_\mu) - 2K_\lambda{}^\nu{}_\mu (B^m_\nu - a^m_\nu) - c^m_{pq} a^p_\lambda a^q_\mu] \tag{1.20}$$

на расслоении связностей C.

4 Многообразия струй высшего порядка

Пусть J^1Y – многообразие струй расслоения $Y \to X$. Многообразие струй J^1J^1Y расслоения $J^1Y \to X$ называется повторным многообразием струй. Его подмногообразиями являются полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2Y$ и собственно многообразие струй второго порядка J^2Y расслоения Y.

Многообразие струй J^1J^1Y наделяется соответствующими координатами

$$\begin{aligned}
&(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{(\mu)}, y^i_{\lambda\mu}),\\
&y'^i_{(\lambda)} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}(\partial_\mu + y^j_{(\mu)}\partial_j)y'^i,\\
&y'^i_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}(\partial_\alpha + y^j_{(\alpha)}\partial_j + y^j_{\nu\alpha}\partial^\nu_j)y'^i_\lambda.
\end{aligned}$$

Имеют место два разных расслоения J^1J^1Y над J^1Y:

- обычное расслоение струй над J^1Y:

$$\pi_{11} : J^1J^1Y \to J^1Y, \qquad y^i_\lambda \circ \pi_{11} = y^i_\lambda, \tag{1.21}$$

- и расслоение

$$J^1\pi^1_0 : J^1J^1Y \to J^1Y, \qquad y^i_\lambda \circ J^1\pi^1_0 = y^i_{(\lambda)}. \tag{1.22}$$

Точки, в которых проекции π_{11} и $J^1\pi^1_0$ совпадают, образуют аффинное подрасслоение

$$\widehat{J}^2Y \to J^1Y \tag{1.23}$$

расслоений (1.21) и (1.22), задаваемое координатным условием $y^i_{(\lambda)} = y^i_\lambda$. Оно называется полуголономным многообразием струй и параметризуется координатами $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu})$.

Многообразие струй второго порядка J^2Y расслоения $Y \to X$, которое также именуют голономным многообразием струй, определяется как подрасслоение

$$\pi_1^2 : J^2Y \to J^1Y$$

аффинного расслоения (1.23), задаваемое координатным условием $y^i_{\lambda\mu} = y^i_{\mu\lambda}$ и параметризуемое координатами $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu} = y^i_{\mu\lambda})$.

Можно дать другое эквивалентное определение многообразия 2-струй J^2Y как объединения всех классов эквивалентности $j^2_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$, таких что

$$y^i_\lambda(j^2_x s) = \partial_\lambda s^i(x), \qquad y^i_{\lambda\mu}(j^2_x s) = \partial_\mu \partial_\lambda s^i(x).$$

Иначе говоря, сечения $s \in j^2_x s$ отождествляются по их значениям и значениям их частных производных первого и второго порядков в точке $x \in X$.

Пусть s – сечение расслоения $Y \to X$ и J^1s – его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1Y \to X$. Рассмотрим в свою очередь струйное продолжение последнего до сечения J^1J^1s расслоения $J^1J^1Y \to X$. Легко убедиться, что оно принимает значения в голономном многообразии струй J^2Y и поэтому будем его обозначать J^2s:

$$(J^1J^1s)(x) = (J^2s)(x) = j^2_x s.$$

Имеют место следующие условия интегрируемости.

Пусть $\overline{s}$ – сечение расслоения $J^1Y \to X$ и $J^1\overline{s}$ – его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1J^1Y \to X$. Следующие условия эквивалентны:

- сечение $\overline{s}$ является голономным, т.е. $\overline{s} = J^1s$, где s - некоторое сечение $Y \to X$,

- сечение $J^1\overline{s}$ принимает значения в $\widehat{J}^2Y$,
- сечение $J^1\overline{s}$ принимает значения в J^2Y.

Приведенные выше определения многообразий струй 2-го порядка почти дословно распространяются на многообразия струй произвольного k-го порядка.

Многообразие струй k-го порядка J^kY расслоения $Y \to X$ состоит из классов эквивалентности $j^k_x s$, $x \in X$, сечений s расслоения Y, таких что сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу $j^k_x s$ тогда и только тогда, когда их значения и значения их частных производных до k-го порядка включительно совпадают в точке x. Многообразие r-струй J^rY наделяется соответствующей системой координат (x^λ, y^i_Λ), $0 \leq\mid \Lambda \mid\leq r$, где мулти-индекс Λ обозначает набор индексов $(\lambda_k ... \lambda_1)$, $\mid \Lambda \mid= k$, по модулю перестановок. Соответственно, символ $\Lambda + \Sigma$ обозначает набор индексов

$$\Lambda + \Sigma = (\lambda_k \ldots \lambda_1 \sigma_s \ldots \sigma_1)$$

по модулю перестановок, который следует отличать от объединения мульти-индексов

$$\Lambda\Sigma = (\lambda_k \ldots \lambda_1 \sigma_s \ldots \sigma_1),$$

где индексы λ и σ не переставляются. Мы будем использовать сокращения

$$\partial_\Lambda = \partial_{\lambda_k} \circ \cdots \circ \partial_{\lambda_1}, \qquad \Lambda = (\lambda_k \ldots \lambda_1). \tag{1.24}$$

Многообразия струй высшего порядка образуют обратную последовательность

$$X \xleftarrow{\pi} Y \xleftarrow{\pi^1_0} J^1Y \xleftarrow{\pi^2_1} \cdots \xleftarrow{\pi^r_{r-1}} J^rY \xleftarrow{\pi^{r+1}_r} \cdots .$$

Всякое сечение s расслоения $Y \to X$ допускает r-струйное продолжение $(J^rs)(x) = j^r_x s$ до сечения расслоения $J^rY \to X$.

Всякое проектируемое векторное поле u на $Y \to X$ поднимается до проектируемого векторного поля $J^r u$ на многообразии r-струй $J^r Y$. Имеет место обратная последовательность

$$\mathcal{P}(Y) \xleftarrow{T\pi^1_0} \mathcal{P}_1 \xleftarrow{T\pi^2_1} \cdots \xleftarrow{T\pi^r_{r-1}} \mathcal{P}_r \xleftarrow{T\pi^{r+1}_r} \cdots$$

алгебр Ли $\mathcal{P}_r$ проектируемых векторных полей на многообразиях струй высшего порядка $J^r Y$.

Имеет место прямая последовательность

$$\mathcal{O}^*(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}^*(Y) \xrightarrow{\pi^{1*}_0} \mathcal{O}^*_1 \xrightarrow{\pi^{2*}_1} \cdots \xrightarrow{\pi^r_{r-1}{}^*} \mathcal{O}^*_r \xrightarrow{\pi^{r+1*}_r} \cdots$$

векторных пространств $\mathcal{O}^*_r$ внешних форм на $J^r Y$. Предел этой последовательности $\mathcal{O}^*_\infty$ существует [135-137]. Он наследует операции внешнего произведения и внешнего дифференцирования. Локально его базис составляют горизонтальные формы dx^λ и контактные формы

$$\theta^i_\Lambda = dy^i_\Lambda - y^i_{\lambda+\Lambda} dx^\lambda, \qquad 0 \leq \mid \Lambda \mid .$$

В частности, векторное подпространство $\mathcal{O}^s_\infty \subset \mathcal{O}^*_\infty$ внешних s-форм допускает каноническое разложение

$$\mathcal{O}^s_\infty = \mathcal{O}^{0,s}_\infty \oplus \mathcal{O}^{1,s-1}_\infty \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}^{s,0}_\infty.$$

Элементы $\mathcal{O}^{k,s-k}_\infty$ называются k-контактными формами, а элементы $\mathcal{O}^{k,n}_\infty$, $n = \dim X$ – k-контактными плотностями. Введем k-контактную проекцию

$$h_k : \mathcal{O}^s_\infty \to \mathcal{O}^{k,s-k}_\infty, \qquad k \leq s.$$

Например, горизонтальная проекция $h_0 : \mathcal{O}^s_\infty \to \mathcal{O}^{0,s}_\infty$ задается отображениями

$$dx^\lambda \mapsto dx^\lambda, \qquad dy^i_\Lambda \mapsto y^i_{\lambda+\Lambda} dx^\lambda, \qquad 0 \leq \mid \Lambda \mid .$$

Соответственно оператор внешнего дифференцирования раскладывается в сумму $d = d_H + d_V$ операторов горизонтального и вертикального дифференцирований d_H и d_V, таких что

$$
\begin{aligned}
&d : \mathcal{O}_\infty^{k,s-k} \to \mathcal{O}_\infty^{k+1,s-k} \oplus \mathcal{O}_\infty^{k,s-k+1},\\
&d_H : \mathcal{O}_\infty^{k,s-k} \to \mathcal{O}_\infty^{k,s-k+1},\\
&d_V : \mathcal{O}_\infty^{k,m-k} \to \mathcal{O}_\infty^{k+1,s-k}.
\end{aligned}
$$

Они обладают гомологическими свойствами

$$
d_H d_H = 0, \qquad d_V d_V = 0, \qquad d_V d_H + d_H d_V = 0.
$$

Приведем полезное соотношение

$$
h_0 \circ d = d_H \circ h_0.
$$

Чтобы получить явный вид этих операторов, удобно ввести операторы полных производных

$$
d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + y^i_{\lambda\mu}\partial^\mu_i + \cdots = \partial_\lambda + y^i_{\lambda+\Lambda}\partial^\Lambda_i, \tag{1.25}
$$

где суммирование осуществляется по мульти-индексам Λ, $0 \leq \mid \Lambda \mid$. Они действуют на внешние формы следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&d_\lambda(\phi \wedge \sigma) = d_\lambda(\phi) \wedge \sigma + \phi \wedge d_\lambda(\sigma),\\
&d_\lambda(d\phi) = d(d_\lambda(\phi)).
\end{aligned}
$$

Подобно (1.24), мы используем компактное обозначение

$$
d_\Lambda = d_{\lambda_k} \circ \cdots \circ d_{\lambda_1}, \qquad \Lambda = (\lambda_k ... \lambda_1).
$$

Тогда горизонтальный дифференциал d_H представим в виде

$$
d_H\phi = dx^\lambda \wedge d_\lambda(\phi), \qquad \phi \in \mathcal{O}^*_\infty, \tag{1.26}
$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{array}{lll}
d_H f = d_\lambda f dx^\lambda, & f \in \mathcal{O}^0_\infty, & \\
d_\lambda(dx^\mu) = 0, & d_H(dx^\mu) = 0, & \\
d_\lambda(dy^i_\Lambda) = dy^i_{\lambda+\Lambda}, & d_H dy^i_\Lambda = dx^\lambda \wedge dy^i_{\lambda+\Lambda}, & 0 \leq \mid \Lambda \mid, \\
d_\lambda(\theta^i_\Lambda) = \theta^i_{\lambda+\Lambda}, & d_H \theta^i_\Lambda = dx^\lambda \wedge \theta^i_{\lambda+\Lambda}, & 0 \leq \mid \Lambda \mid .
\end{array}$$

Соответственно вертикальный дифференциал имеет свойства

$$\begin{array}{lll}
d_V f = \partial^\Lambda_i f \theta^i_\Lambda, & 0 \leq \mid \Lambda \mid, & f \in \mathcal{O}^0_\infty, \\
d_V(dx^i) = 0, & & \\
d_V dy^i_\Lambda = -dx^\lambda \wedge dy^i_{\lambda+\Lambda}, & d_V \theta^i_\Lambda = 0. &
\end{array}$$

Глава 2.
Лагранжевы законы сохранения

Мы ограничимся лагранжевым формализмом первого порядка, поскольку таковыми является большинство современных полевых моделей. В этом формализме конфигурационным пространством полей, представляемых сечениями s расслоения $Y \to X$, является многообразие струй J^1Y. Лагранжиан на J^1Y определяется как горизонтальная плотность

$$L : J^1Y \to \overset{n}{\wedge} T^*X, \qquad n = \dim X,$$
$$L = \mathcal{L}\omega, \qquad \omega = dx^1 \cdots dx^n.$$

Введем обозначение $\pi_i^\lambda = \partial_i^\lambda \mathcal{L}$.

В этой главе, исходя из первой вариационной формулы (2.4), получены формулы (2.20), (2.22) и (2.27) для дифференциальных законов сохранения. Показано, что в случае калибровочной теории внутренних симметрий нетеровский ток сводится к суперпотенциалу. Построены законы сохранения энергии-импульса в калибровочной теории внутренних симметрий и в аффинно-метрической модели гравитации. Показано, что поток энергии-импульса аффинно-метрической гравитации не зависит от полей материи и сводится к обобщенному суперпотенциалу Комара.

1 Первая вариационная формула

Будем следовать стандартной постановке вариационной задачи, когда вариации сечений расслоения $Y \to X$ порождаются локальной 1-параметрической группой локальных автоморфизмов расслоения Y над $\mathrm{Id}\, X$ [14,135-137]. Пусть N – n-мерное компактное подмногообразие X с границей ∂N. Вертикальное векторное поле u на $Y \to X$ называется допустимым, если оно исчезает в окрестности $\pi^{-1}(\partial N)$. Сечение s расслоения $Y \to X$ называется критическим для вариационной задачи для внешней n-формы ρ на J^1Y тогда и только тогда, когда

$$\int_N s^*\mathbf{L}_{J^1u}\rho = 0 \tag{2.1}$$

для всякого допустимого векторного поля u на $Y \to X$. Используя соотношение

$$\mathbf{L}_{J^1u}\rho = d(J^1u\rfloor\rho) + (J^1u\rfloor d\rho),$$

приведем функционал (2.1) к виду

$$\int_N s^*\mathbf{L}_{J^1u}\rho = \int_{\partial N} s^*(J^1u\rfloor\rho) + \int_N s^*(J^1u\rfloor d\rho), \tag{2.2}$$

где первый член в правой части (2.2) равен нулю, если u – допустимое векторное поле. Однако соотношение (2.2) может оказаться неподходящим для вариационной задачи, поскольку второй член в его правой части может зависить от производных векторного поля u и давать вклад в интеграл по границе. Условие

$$s^*(J^1u\rfloor d\rho) = 0$$

определяет критические сечения, если для любого сечения s форма $s^*(J^1u\rfloor d\rho)$ не зависит от производных векторного поля u. Внешняя форма ρ, удовлетворяющая этому условию, называется лепажевой формой. Лагранжиан L в общем случае не является такой формой, но вариационная задача для него может быть заменена вариационной задачей для его лепажева эквивалентна ρ_L. Это лепажева форма на многообразии $(r+1)$-струй $J^{r+1}Y$, которая удовлетворяет условию

$$h_0(\rho_L) = L.$$

Мы ограничимся случаем, когда в качестве лепажева эквивалента лагранжиана первого порядка выбирается форма Пуанкаре–Картана

$$\begin{aligned} &H_L : J^1Y \to T^*Y \wedge (\overset{n-1}{\wedge} T^*X), \\ &H_L = \mathcal{L}\omega + \pi_i^\lambda \theta^i \wedge \omega_\lambda. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда первая вариационная формула принимает вид

$$\mathbf{L}_{J^1u}L = u_V \rfloor \mathcal{E}_L + d_H h_0(u\rfloor H_L), \tag{2.4}$$

где

$$u_V = (u\rfloor\theta^i)\partial_i = (u^i - u^\lambda y^i_\lambda)\partial_i$$

– вертикальная часть канонического горизонтального разложения (1.8) векторного поля u над J^1Y и

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_L : J^2Y \to T^*Y \wedge (\overset{n}{\wedge} T^*X), \\ &\mathcal{E}_L = (\partial_i - d_\lambda\partial_i^\lambda)\mathcal{L}\theta^i \wedge \omega = \delta_i\mathcal{L}\theta^i \wedge \omega, \end{aligned} \tag{2.5}$$

– оператор Эйлера–Лагранжа, отвечающий лагранжиану L. Его коэффициенты $\delta_i\mathcal{L}$ называются вариационными производными.

Критические сечения для лагранжиана L удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа второго порядка

$$\partial_i\mathcal{L} - (\partial_\lambda + \partial_\lambda s^j\partial_j + \partial_\lambda\partial_\mu s^j\partial_j^\mu)\partial_i^\lambda\mathcal{L} = 0. \tag{2.6}$$

Эти уравнения можно заменить дифференциальными уравнениями первого порядка на многообразии струй $J^1Y \to X$. Рассмотрим для этого вариационную задачу для формы Пуанкаре–Картана H_L (2.3) на сечениях $\overline{s}$ расслоения $J^1Y \to X$. Критические сечения для этой задачи удовлетворяют соотношению

$$\overline{s}^*(u\rfloor dH_L) = 0 \tag{2.7}$$

для любого вертикального векторного поля

$$u = u^i\partial_i + u^i_\mu\partial^\mu_i$$

на $J^1Y \to X$, что эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial^\mu_j\pi^\lambda_i(\partial_\lambda\overline{s}^i - \overline{s}^i_\lambda) = 0, \tag{2.8a}$$

$$\partial_i\mathcal{L} - (\partial_\lambda + \overline{s}^j_\lambda\partial_j + \partial_\lambda\overline{s}^j_\mu\partial^\mu_j)\partial^\lambda_i\mathcal{L} + \partial_i\pi^\lambda_j(\partial_\lambda\overline{s}^j - \overline{s}^j_\lambda) = 0. \tag{2.8b}$$

Они называются уравнениями Картана.

Напомним, что системой дифференциальных уравнений k-порядка на расслоении $Y \to X$ называется замкнутое подрасслоение расслоения k-струй $J^kY \to X$ [19-21]. Соответственно уравнения Эйлера–Лагранжа определяются как ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{E}_L \subset J^2Y$ оператора Эйлера–Лагранжа (2.5), задаваемого координатными условиями

$$(\partial_i - d_\lambda\partial^\lambda_i)\mathcal{L} = 0. \tag{2.9}$$

Уравнения Картана (2.8a) – (2.8b) соответствуют ядру

$$\partial^\lambda_i\pi^\mu_j(\widehat{y}^j_\mu - y^j_\mu) = 0, \tag{2.10a}$$

$$\partial_iL - d_\lambda\pi^\lambda_i + (\widehat{y}^j_\lambda - y^j_\lambda)\partial_i\pi^\lambda_j = 0. \tag{2.10b}$$

оператора Эйлера–Лагранжа–Картана

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{\overline{L}} : J^1J^1Y \to T^*J^1Y \wedge (\overset{n}{\wedge} T^*X),\\
&\mathcal{E}_{\overline{L}} = [(\partial_iL - \widehat{d}_\lambda\pi^\lambda_i + \partial_i\pi^\lambda_j(\widehat{y}^j_\lambda - y^j_\lambda))dy^i + \\
&\qquad \partial^\lambda_i\pi^\mu_j(\widehat{y}^j_\mu - y^j_\mu)dy^i_\lambda] \wedge \omega,\\
&\widehat{d}_\lambda = \partial_\lambda + \widehat{y}^i_\lambda\partial_i + y^i_{\lambda\mu}\partial^\mu_i.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Это дифференциальный оператор первого порядка на расслоении струй $J^1Y \to X$. Он может быть получен как оператор Эйлера–Лагранжа, отвечающий лагранжиану первого порядка

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + (\widehat{y}^i_\lambda - y^i_\lambda)\pi^\lambda_i$$

на повтороном многообразии струй J^1J^1Y.

Ограничение $\mathcal{E}_L$ на полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2Y$ приводит к оператору Эйлера–Лагранжа первого порядка

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{E}}_L : \widehat{J}^2Y \underset{J^1Y}{\to} T^*Y \wedge (\overset{n}{\wedge} T^*Y), \\ &\widehat{\mathcal{E}}_L = (\partial_i - d_\lambda \partial^\lambda_i)\mathcal{L}\theta^i \wedge \omega, \\ &d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + y^i_{\lambda\mu}\partial^\mu_i. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Его ядро

$$\operatorname{Ker} \widehat{\mathcal{E}}_L \subset \widehat{J^2Y} \subset J^1J^1Y$$

задает систему дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа первого порядка

$$\widehat{y}^i_\lambda - y^i_\lambda = 0, \tag{2.13a}$$

$$(\partial_i - d_\lambda \partial^\lambda_i)\mathcal{L} = 0. \tag{2.13b}$$

Они эквивалентны уравнениям Эйлера–Лагранжа второго порядка и представляют собой их обычную редукцию к дифференциальным уравнениям первого порядка. Легко заметить, что уравнения (2.13a) – (2.13b) (и соответственно уравнения (2.9)) эквивалентны уравнениям Картана (2.10a) – (2.10b) на голономных сечениях расслоения $J^1Y \to X$. Они полностью эквивалентны уравнениям Картана в случае регулярных лагранжианов.

2 Законы сохранения

Первая вариационная формула (2.4) позволяет разработать стандартную процедуру получения лагранжевых законов сохранения. Главными формулами являются (2.20), (2.22) и (2.27). Под дифференциальным законом сохранения в классической теории поля понимается равенство

$$d(s^*\mathcal{T}) = 0, \tag{2.14}$$

где $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\lambda \omega_\lambda$ – горизонтальная $(n-1)$-форма (поток) на конфигурационном пространстве $J^1Y \to X$ и s – сечение расслоения $Y \to X$. Равенство (2.14) называется сильным законом сохранения, если оно выполняется для всех сечений s расслоения $Y \to X$, и слабым законом сохранения, если оно имеет место только для решений полевых уравнений. Для слабых равенств мы используем символ "$\approx$".

Первая вариационная формула приводит к закону сохранения, если лагранжиан оказывается инвариантен относительно 1-параметрической группы калибровочных преобразований.

Замечание 2.1. В теории поля выделяют разные типы калибровочных преобразований [28,138-140]. Различают активные калибровочные преобразования, автоморфизмы Φ расслоения $Y \to X$ над диффеоморфизмами f базы X, и пассивные калибровочные преобразования, преобразования атласа расслоения $Y \to X$. Соотношения между ними следующие.

Пусть Φ – автоморфизм расслоения $Y \to X$. Для всякого атласа $\Psi = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ расслоения Y существует атлас

$$\Psi' = \{U'_\alpha = \Phi(U_\alpha),\ \psi'_\alpha = \psi_\alpha \circ \Phi^{-1}\} \tag{2.15}$$

этого расслоения, такой что координаты всякой точки $\Phi(y)$ относительно атласа Ψ' (2.15) совпадают с координатами точки y относительно атласа Ψ. Таким образом, инвариантность относительно пассивных калибровочных преобразований влечет за собой инваринтность относительно активных калибровочных преобразований. В дальнейшем под калибровочными преобразованиями подразумеваются именно активные преобразования.

Введем следующие обозначения:

- $\mathrm{AUT}\,(Y)$ – для группы всех автоморфизмов расслоения $Y \to X$,
- $\mathrm{Aut}\,(Y)$ для группы автоморфизмов $Y \to X$ над X,
- $\mathrm{Diff}\,(X)$ – для группы диффеморфизмов X.

Автоморфизмы $Y \to X$ над X называются вертикальными калибровочными преобразованиями.

В общем случае не всякий диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}\,(X)$ базы X может быть поднят до автоморфизма расслоения $Y \to X$. Если это имеет место, то говорят, что расслоение Y принадлежит категории геометрических расслоений. Например, всякий диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}\,(X)$ поднимается до касательного автоморфизма $Tf \in \mathrm{AUT}\,(TX)$ касательного расслоения TX и соответствующих автоморфизмов тензорных расслоений. •

Чтобы получить законы сохранения, достаточно ограничиться 1-параметрическими группами калибровочных преобразований. Всякой такой группе $[\Phi_t] \subset \mathrm{AUT}\,(Y)$ соответствует проектируемое векторное поле

$$u = u^\lambda(x)\partial_\lambda + u^i(y)\partial_i \tag{2.16}$$

на $Y \to X$, которое является генератором группы $[\Phi_t]$. Оно проектируется на векторное поле $\tau = u^\mu\partial_\mu$ на X – генератор 1-параметрической группы $[f_t] \subset \mathrm{Diff}\,(X)$ диффеоморфизмов X. Обратно, всякое проектируемое векторное поле (2.16) на расслоении $Y \to X$ является генератором локальной 1-параметрической группы автоморфизмов Y. В частности, вертикальное векторное поле u на $Y \to X$ является генератором локальной 1-параметрической группы вертикальных автоморфизмов $Y \to X$.

Замечание 2.2. Всякая связность

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i)$$

на расслоении $Y \to X$ задает горизонтальный лифт

$$\tau_\Gamma = \tau \rfloor \Gamma = \tau^\lambda (\partial_\lambda + \Gamma^i_\lambda \partial_i) \tag{2.17}$$

на Y векторного поля $\tau = \tau^\lambda \partial_\lambda$ на X. •

Пусть u – проектируемое векторное поле на расслоении $Y \to X$ и

$$J^1 u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (d_\lambda u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i$$

– его струйное продолжение (1.6) на J^1Y. Последнее является генератором струйного продолжения $J^1\Phi_t$ локальной 1-параметрической группы $[\Phi_t]$, генерируемой u. Тогда производная Ли $\mathbf{L}_{J^1u}L$ лагранжиана L на J^1Y вдоль J^1u (или просто вдоль u) равна 0 тогда и только тогда, когда L инвариантен относительно вышеупомянутой группы калибровочных преобразований, т.е.

$$J^1\Phi^*_t L = L, \qquad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Первая вариационная формула (2.4) дает каноническое разложение производной Ли

$$\mathbf{L}_{J^1u}L = [\partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + (u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (d_\lambda u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i)\mathcal{L}]\omega. \tag{2.18}$$

Оно имеет вид

$$\partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (d_\lambda u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i]\mathcal{L} = \\ (u^i - y^i_\mu u^\mu)(\partial_i - d_\lambda \partial^\lambda_i)\mathcal{L} - d_\lambda[\pi^\lambda_i (u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}]. \tag{2.19}$$

На динамической поверхности (2.9) это тождество превращается в слабое тождество

$$\mathbf{L}_{J^1 u} L \approx d_H h_0(u \rfloor H_L), \\ \partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (d_\lambda u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i]\mathcal{L} \approx \\ -d_\lambda[\pi^\lambda_i (u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}], \tag{2.20}$$

где

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^\lambda \omega_\lambda = -h_0(u \rfloor H_L), \\ \mathcal{T}^\lambda = \pi^\lambda_i (u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}, \tag{2.21}$$

– ток симметрий вдоль векторного поля u.

Если производная Ли $\mathbf{L}_{J^1 u} L$ (2.18) обращается в нуль, мы получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx d_H h_0(u \rfloor H_L), \\ 0 \approx -d_\lambda[\pi^\lambda_i (u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}], \tag{2.22}$$

тока симметрий $\mathcal{T}$ (2.21) вдоль векторного поля u.

Замечание 2.3. Как уже указывалось, ток симметрий $\mathcal{T}$ может принимать вид

$$\mathcal{T} = W + d_H U = (W^\lambda + d_\mu U^{\mu\lambda})\omega_\lambda, \tag{2.23}$$

где компонента W выражается через вариационные производные (2.5), т.е. $W \approx 0$, а

$$U = U^{\mu\lambda}\omega_{\mu\lambda} : J^1 Y \to \overset{n-2}{\wedge} T^* X$$

– горизонтальная $(n-2)$-форма на $J^1Y \to X$. Тогда говорят, что $\mathcal{T}$ сводится к суперпотенциалу U [114,132,133]. При этом равенство

$$\mathcal{T} - d_H U = W(\delta_i \mathcal{L}) = 0 \tag{2.24}$$

представляет собой комбинацию уравнений Эйлера–Лагранжа $\delta_i\mathcal{L} = 0$. •

Фоновые поля, которые не принадлежат динамической поверхности (2.9), являются стандартной причиной нарушения законов сохранения. Чтобы описать этот случай, рассмотрим произведение

$$Y_{\rm tot} = Y \underset{X}{\times} Y' \tag{2.25}$$

расслоения Y с координатами (x^λ, y^i), сечения которого представляют динамические поля, и расслоения Y' с координатами (x^λ, y^A), сечениями которого являются фоновые поля

$$y^B = \phi^B(x), \qquad y^B_\lambda = \partial_\lambda \phi^B(x).$$

Полный лагранжиан L системы динамических и фоновых полей задается на конфигурационном пространстве $J^1Y_{\rm tot}$.

Пусть u – проектируемое векторное поле на $Y_{\rm tot}$, которое проектируется также на Y', поскольку калибровочные преобразования фоновых полей не могут зависить от полей динамических. Это векторное поле имеет вид

$$u = u^\lambda(x)\partial_\lambda + u^A(x^\mu, y^B)\partial_A + u^i(x^\mu, y^B, y^j)\partial_i. \tag{2.26}$$

Подставляя (2.26) в (2.19), получаем первую вариационную формулу в присутствии фоновых полей [13,107,132]:

$$\begin{aligned}
&\partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda\partial_\lambda + u^A\partial_A + u^i\partial_i + (d_\lambda u^A - y^A_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_A + \\
&\quad (d_\lambda u^i - y^i_\mu \partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i]\mathcal{L} = (u^A - y^A_\lambda u^\lambda)\partial_A\mathcal{L} + \pi^\lambda_A d_\lambda(u^A - y^A_\mu u^\mu) + \\
&\quad (u^i - y^i_\lambda u^\lambda)\delta_i\mathcal{L} - d_\lambda[\pi^\lambda_i(u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda\mathcal{L}].
\end{aligned}$$

Тогда на динамической поверхности (2.9) выполняется слабое тождество

$$\partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda\partial_\lambda + u^A\partial_A + u^i\partial_i + (d_\lambda u^A - y^A_\mu\partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_A + (d_\lambda u^i - y^i_\mu\partial_\lambda u^\mu)\partial^\lambda_i]\mathcal{L} \approx (u^A - y^A_\lambda u^\lambda)\partial_A\mathcal{L} + \pi^\lambda_A d_\lambda(u^A - y^A_\mu u^\mu) - d_\lambda[\pi^\lambda_i(u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda\mathcal{L}].$$

Поскольку полный лагранжиан L обычно выбирается инвариантным относительно калибровочных преобразований произведения (2.25), мы получаем слабый закон сохранения в присутствии фоновых полей:

$$(u^A - y^A_\mu u^\mu)\partial_A\mathcal{L} + \pi^\lambda_A d_\lambda(u^A - y^A_\mu u^\mu) \approx d_\lambda[\pi^\lambda_i(u^\mu y^i_\mu - u^i) - u^\lambda\mathcal{L}]. \qquad (2.27)$$

3 Законы сохранения энергии-импульса

Легко видеть, что слабое тождество (2.20) линейно по векторному полю u. Поэтому можно рассмотреть суперпозицию таких тождеств, отвечающих разным векторным полям.

Например, если векторные поля u и u' на расслоении Y проектируются на одно и то же векторное поле на X, разность соответствующих тождеств (2.20) приводит к слабому тождеству (2.20), отвечающему вертикальному векторному полю $u - u'$.

Всякое векторное поле u на расслоении $Y \to X$, которое проектируется на векторное поле τ на X, может быть представлено как сумма $u = \tilde{\tau} + \vartheta$ некоторого горизонтального лифта $\tilde{\tau}$ векторного поля τ и вертикального векторного поля ϑ на Y. Тогда тождество (2.20), ассоциированное с векторным полем u, является суперпозицией подобных тождеств для векторных полей $\tilde{\tau}$ и ϑ.

В случае вертикального векторного поля $\vartheta = \vartheta^i\partial_i$ на $Y \to X$, слабое тождество (2.20) принимает вид

$$[\vartheta^i\partial_i + d_\lambda\vartheta^i\partial_i^\lambda]\mathcal{L} \approx d_\lambda(\pi_i^\lambda\vartheta^i). \tag{2.28}$$

В теории поля вертикальные калибровочные преобразования отвечают внутренним симметриям. Если лагранжиан инвариантен относительно этих преобразований, имеет место закон сохранения

$$0 \approx d_\lambda(\pi_i^\lambda\vartheta^i)$$

нетеровского тока

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= -\vartheta\rfloor H_L, \\ \mathcal{T}^\lambda &= -\pi_i^\lambda\vartheta^i, \end{aligned} \tag{2.29}$$

примером которого являются законы сохранения в калибровочной теории внутренних симметрий.

В общем случае векторное поле τ на X может быть поднято на Y посредством некоторой связности Γ на $Y \to X$. Им является горизонтальное векторное поле τ_Γ (2.17). В этом случае тождество (2.20) принимает вид

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\tau^\mu\mathcal{L} + [\tau^\mu\partial_\mu + \tau^\mu\Gamma^i_\mu\partial_i + (d_\lambda(\tau^\mu\Gamma^i_\mu) - y^i_\mu\partial_\lambda\tau^\mu)\partial_i^\lambda]\mathcal{L} \approx \\ &\quad -d_\lambda[\pi_i^\lambda\tau^\mu(y^i_\mu - \Gamma^i_\mu) - \delta^\lambda_\mu\tau^\mu\mathcal{L}]. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Соответствующим током (2.21) вдоль τ_Γ является поток энергии-импульса

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\Gamma &= -h_0(\tau_\Gamma\rfloor H_L), \\ \mathcal{T}_\Gamma^\lambda &= \tau^\mu(\pi_i^\lambda(y^i_\mu - \Gamma^i_\mu) - \delta^\lambda_\mu\mathcal{L}), \end{aligned}$$

относительно связности Γ [114,128,132,141].

Чтобы получить закон сохранения энергии-импульса, можно выбрать разные связности на расслоении $Y \to X$ (например, разные связности для разных векторных полей τ на X или разные связности для разных решений уравнений Эйлера–Лагранжа). Легко видеть, что потоки энергии-импульса относительно разных связностей Γ и Γ' отличаются друг от друга нетеровским током (2.29) вдоль вертикального векторного поля

$$\vartheta = \tau^\mu(\Gamma^i_\mu - \Gamma'^i_\mu)\partial_i.$$

Например, пусть все векторные поля τ на X поднимаются на Y посредством одной и той же связности Γ на $Y \to X$. Тогда слабое тождество (2.30) может быть переписано в виде

$$\tau^\mu\{[\partial_\mu + \Gamma^i_\mu\partial_i + (\partial_\lambda\Gamma^i_\mu + y^j_\lambda\partial_j\Gamma^i_\mu)\partial^\lambda_i]\mathcal{L} - d_\lambda[\pi^\lambda_i(\Gamma^i_\mu - y^i_\mu) + \delta^\lambda_\mu\mathcal{L}]\} \approx 0.$$

Так как это соотношение выполняется для произвольного векторного поля τ на X, оно эквивалентно системе слабых равенств

$$(\partial_\mu + \Gamma^i_\mu\partial_i + d_\lambda\Gamma^i_\mu\partial^\lambda_i)\mathcal{L} + d_\lambda\mathcal{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu = (\Gamma^i_\mu - y^i_\mu)\delta_i\mathcal{L} \approx 0,$$

где $\mathcal{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu$ – компоненты тензора энергии-импульса относительно связности Γ:

$$\overline{\mathcal{T}}_\Gamma = -h_0(\Gamma\rfloor H_L) = \mathcal{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu dx^\mu \otimes \omega_\lambda,$$
$$\mathcal{T}_\Gamma{}^\lambda{}_\mu = \pi^\lambda_i(y^i_\mu - \Gamma^i_\mu) - \delta^\lambda_\mu\mathcal{L}.$$

Если выбрать локальную тривиальную связность $(\Gamma_0)^i_\mu = 0$, тождество (2.30) принимает вид

$$\partial_\mu\mathcal{L} \approx -d_\lambda\mathcal{T}_0{}^\lambda{}_\mu, \qquad (2.31)$$
$$\mathcal{T}_0{}^\lambda{}_\mu = \pi^\lambda_i y^i_\mu - \delta^\lambda_\mu\mathcal{L},$$

где $\mathcal{T}_0{}^\lambda{}_\mu$ – известный канонический тензор энергии-импульса. Хотя это не истинный тензор, слабое тождество (2.32) на решениях s уравнений Эйлера–Лагранжа хорошо определено:

$$\frac{\partial(\mathcal{L}\circ s)}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\mathcal{T}_0{}^\lambda{}_\mu \circ s) \approx 0. \qquad (2.32)$$

Оно получается из тождества (2.30), когда для всякого решения s выбирается связность Γ, для которого s является интегральным сечением, т.е.

$$\Gamma^i_\mu \circ s = \partial_\mu s^i.$$

Особый случай представляют гравитационные модели на геометрических расслоениях (§2.5). Как уже отмечалось, в этом случае существует канонический лифт на Y векторных полей на X, хотя локально он также может быть представлен как горизонтальный лифт (2.17).

4 Законы сохранения в калибровочной теории

Покажем, что в калибровочной теории внутренних симметрий нетеровские токи сводятся к суперпотенциалу. Пусть $P \to X$ – главное расслоение со структурной группой G. Рассмотрим калибровочную модель связностей на этом расслоении. Имеет место взаимно однозначное соответствие между связностями на $P \to X$ и глобальными сечениями расслоения связностей $C \to X$ (1.15). Пусть Ψ^P – атлас P. Расслоение C наделяется координатами (x^λ, a^p_λ), такими что для всякого его сечения A

$$a^p_\mu \circ A = A^p_\mu$$

– коэффициенты локальной 1-формы связности (1.14) относительно атласа Ψ^P. Соответствующими координатами на многообразии струй J^1C расслоения C являются $(x^\lambda, a^p_\lambda, a^p_{\mu\lambda})$.

Под калибровочным преобразованием главного расслоения P подразумевается его автоморфизм Φ_P, который эквивариантен относительно канонического действия (1.9), т.е.

$$R_g \circ \Phi_P = \Phi_P \circ R_g,$$

для всех $g \in G$. Всякий автоморфизм P порождает соответствующий автоморфизм

$$\Phi_Y : (p, v) \cdot G \mapsto (\Phi_P(p), v) \cdot G, \qquad p \in P, \qquad v \in V, \tag{2.33}$$

P-ассоциированного расслоения Y (1.12). Коротко можно написать

$$\Phi_Y : (P \times V)/G \to (\Phi_P(P) \times V)/G.$$

Автоморфизмы Φ расслоения P индуцируют также автоморфизмы

$$\Phi_C : J^1P/G \to J^1\Phi_P(J^1P)/G \tag{2.34}$$

расслоения C [142].

Чтобы получить нетеровские законы сохранения рассмотрим вертикальные автоморфизмы P, которые и будем называть калибровочными преобразованиями в калибровочной теории.

Замечание 2.4. Всякое калибровочное преобразование P представимо в виде

$$\Phi_P(p) = pf(p), \qquad p \in P, \tag{2.35}$$

где f – G-значная эквивариантная функция на P, т.е.

$$f(pg) = g^{-1}f(p)g, \qquad \forall g \in G. \tag{2.36}$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между функциями f (2.36) и глобальными сечениями s группового расслоения

$$P^G = (P \times G)/G \tag{2.37}$$

с типичным слоем – группой G, которая действует на себя по присоединенному представлению. Имеет место каноническое послойное действие группового расслоения P^G на всякое P-ассоциированное расслоение Y:

$$\begin{aligned} &P^G \underset{X}{\times} Y \to Y, \\ &((p, g)/G, (p, v)/G) \to (p, gv)/G, \qquad \forall g \in G, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Тогда вышеупомянутое соответствие задается соотношением

$$(s(\pi_{PX}(p)), p) \mapsto pf(p).$$

•

Пусть ξ – G-инвариантное вертикальное векторное поле на главном расслоении P, соответствующее 1-параметрической группе $[\Phi_P]$ калибровочных преобразований P. Всякое такое поле представимо сечением расслоения $V_G P \to X$, которое имеет вид

$$\xi = \xi^p e_p, \tag{2.38}$$

где $\{e_p\}$ – базис правой алгебры Ли $\mathcal{G}_r$ группы G. Его компоненты $\xi^p(x)$ могут рассматриваться как калибровочные параметры. При действии на них генераторов калибровочных преобразований калибровочные векторные поля (2.38) преобразуются по присоединенному представлению

$$\xi' : \xi \to [\xi', \xi] = c^p_{rq} \xi'^r \xi^q e_p, \qquad \xi, \xi' \in \mathcal{S}(V_G P).$$

Соответственно калибровочные параметры преобразуются по коприсоединенному представлению

$$\xi' : \xi^p \mapsto c^p_{qr} \xi'^r \xi^q. \tag{2.39}$$

Всякое инвариантное векторное поле ξ (2.38) на P индуцирует соответствующее калибровочное векторное поле

$$\xi_Y = \xi^p I^i_p \partial_i$$

на P-ассоциированном расслоении $Y \to X$, которое соответствует локальной 1-параметрической группе $[\Phi_Y]$ калибровочных преобразований (2.33) расслоения Y. Соответственно калибровочное векторное поле на расслоении C, соответствующее 1-параметрической группе $[\Phi_C]$ его вертикальных калибровочных преобразований

(2.34), имеет вид

$$\xi_C = (\partial_\mu \xi^r + c^r_{qp} a^q_\mu \xi^p) \partial^\mu_r. \tag{2.40}$$

Замечание 2.5. Генератором локальной 1-параметрической группы общих автоморфизмов $[\Phi_P]$ главного расслоения $P \to X$ является G-инвариантное векторное поле

$$\xi = \tau_\lambda \partial_\lambda + \xi^p e_p : X \to T_G P.$$

Оно индуцирует векторное поле

$$\xi_C = \tau^\lambda \partial_\lambda + (\partial_\mu \xi^r + c^r_{qp} a^q_\mu \xi^p - a^r_\lambda \partial_\mu \tau^\lambda) \partial^\mu_r \tag{2.41}$$

на C – генератор соответствующих автоморфизмов (2.34) расслоения $C \to X$. ●

В случае ненарушенных симметрий калибровочная теория описывается на произведении $C \underset{X}{\times} Y$ расслоения C и P-ассоциированного расслоения Y. Калибровочное векторное поле на этом произведении имеет вид

$$\xi_{YC} = (\partial_\mu \xi^r + c^r_{qp} a^q_\mu \xi^p) \partial^\mu_r + \xi^p I^i_p \partial_i = (u^{A\mu}_p \partial_\mu \xi^p + u^A_p \xi^p) \partial_A, \tag{2.42}$$

где введены коллективные индексы A, такие что

$$u^{A\mu}_p \partial_A = \delta^r_p \partial^\mu_r, \qquad u^A_p \partial_A = c^r_{qp} a^q_\mu \partial^\mu_r + I^i_p \partial_i.$$

Лагранжиан L на конфигурационном пространстве $J^1(C \times Y)$ считается калибровочно инвариантным, если он удовлетворяет сильному равенству

$$\mathbf{L}_{J^1 \xi_{YC}} L = 0$$

для всякого калибровочного векторного поля ξ (2.38) [143].

В этом случае первая вариационная формула (2.19) приводит к сильному равенству

$$0 = (u_p^A \xi^p + u_p^{A\mu} \partial_\mu \xi^p) \delta_A \mathcal{L} + d_\lambda [(u_p^A \xi^p + u_p^{A\mu} \partial_\mu \xi^p) \pi_A^\lambda], \tag{2.43}$$

где $\delta_A \mathcal{L}$ – вариационные производные и

$$d_\lambda = \partial_\lambda + a^p_{\lambda\mu} \partial_p^\mu + y^i_\lambda \partial_i.$$

В силу произвольности калибровочных параметров $\xi^p(x)$ это равенство эквивалентно следующей системе равенств:

$$u_p^A \delta_A \mathcal{L} + d_\mu (u_p^A \pi_A^\mu) = 0, \tag{2.44a}$$

$$u_p^{A\mu} \delta_A \mathcal{L} + d_\lambda (u_p^{A\mu} \pi_A^\lambda) + u_p^A \pi_A^\mu = 0, \tag{2.44b}$$

$$u_p^{A\lambda} \pi_A^\mu + u_p^{A\mu} \pi_A^\lambda = 0. \tag{2.44c}$$

На динамической поверхности первая вариационная формула (2.43) сводится к слабому закону сохранения

$$0 \approx d_\lambda [(u_p^A \xi^p + u_p^{A\mu} \partial_\mu \xi^p) \pi_A^\lambda] \tag{2.45}$$

нетеровского тока

$$\mathcal{T}^\lambda = -(u_p^A \xi^p + u_p^{A\mu} \partial_\mu \xi^p) \pi_A^\lambda. \tag{2.46}$$

Соответственно уравнения (2.44a) – (2.44c) на динамической поверхности превращаются в известные нетеровские тождества для калибровочно инвариантного лагранжиана L:

$$d_\mu (u_p^A \pi_A^\mu) \approx 0, \tag{2.47a}$$

$$d_\lambda (u_p^{A\mu} \pi_A^\lambda) + u_p^A \pi_A^\mu \approx 0, \tag{2.47b}$$

$$u_p^{A\lambda} \pi_A^\mu + u_p^{A\mu} \pi_A^\lambda = 0. \tag{2.47c}$$

Они эквивалентны слабому равенству (2.45) в силу произвольности калибровочных параметров $\xi^p(x)$.

Выражения (2.45) и (2.46) показывают, что нетеровский закон сохранения и нетеровский ток зависят от калибровочных параметров. Слабые тождества (2.47a) – (2.47c) представляют собой необходимые и достаточные условия, чтобы слабый закон сохранения (2.45) был ковариантен (форм-инвариантен) относительно изменений калибровочных параметров. Это означает, что, если равенство (2.45) имеет место при калибровочных параметрах ξ, оно остается справедливым при любых их девиациях $\xi + \delta\xi$. Тогда закон сохранения (2.45) ковариантен также относительно калибровочных преобразований, когда калибровочные параметры изменяются по коприсоединенному представлению (2.39).

Легко видеть, что уравнения (2.47a) – (2.47c) не являются независимыми. Действительно, (2.47a) получается из (2.47b) и (2.47c). Это следует из того, что согласно сильным равенствам (2.44b) и (2.44c) нетеровский ток (2.46) сводится к виду (2.23):

$$\mathcal{T}^\lambda = \xi^p u_p^{A\lambda}\delta_A\mathcal{L} - d_\mu(\xi^p u_p^{A\mu}\pi_A^\lambda),$$

где

$$U^{\mu\lambda} = -\xi^p u_p^{A\mu}\pi_A^\lambda$$

– суперпотенциал. Так как лагранжиан материальных полей не зависит от координат $a^p_{\lambda\mu}$, нетеровский суперпотенциал

$$U^{\mu\lambda} = \xi^p\pi_p^{\mu\lambda} \tag{2.48}$$

зависит только от калибровочных потенциалов.

Следует подчеркнуть, что суперпотенциальная форма нетеровского тока (2.46) обусловлена тем фактом, что калибровочные векторные поля (2.42) зависят от производных калибровочных параметров.

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии-импульса в калибровочной теории. Для простоты мы рассмотрим калибровочную модель без материальных полей в присутствии фоновой метрики g на базе X. Она описывается лагранжианом Янга–Миллса

$$L_{\rm YM} = \frac{1}{4\varepsilon^2} a^G_{pq} g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathcal{F}^p_{\lambda\beta} \mathcal{F}^q_{\mu\nu} \sqrt{\mid g \mid}\,\omega, \qquad g = \det(g_{\mu\nu}), \tag{2.49}$$

на конфигурационном пространстве J^1C, где a^G – невырожденная G-инвариантная метрика на алгебре Ли $\mathcal{G}_r$ и ε - константа взаимодействия.

Пусть τ – векторное поле на X, B – связность на главном расслоении $P \to X$ и

$$\tau_B = \tau^\lambda(\partial_\lambda + B^p_\lambda e_p)$$

– горизонтальный лифт τ на P посредством связности B. Это векторное поле, в свою очередь, поднимается до векторного поля $\tilde\tau_B$ (2.41) на расслоении C. Оно имеет вид

$$\tilde\tau_B = \tau^\lambda\partial_\lambda + [\tau^\lambda(\partial_\mu B^r_\lambda + c^r_{pq} a^p_\mu B^q_\lambda) - \partial_\mu\tau^\beta(a^r_\beta - B^r_\beta)]\partial^\mu_r. \tag{2.50}$$

Рассмотрим поток энергии-импульса вдоль векторного поля $\tilde\tau_B$ (2.50) [132,144].

Так как янг-миллсовский лагранжиан (2.49) зависит от фоновой метрики g, построим полный лагрангжиан

$$L = \frac{1}{4\varepsilon^2} a^G_{pq} \sigma^{\lambda\mu} \sigma^{\beta\nu} \mathcal{F}^p_{\lambda\beta} \mathcal{F}^q_{\mu\nu} \sqrt{\mid \sigma \mid}\,\omega, \qquad \sigma = \det(\sigma_{\mu\nu}), \tag{2.51}$$

на полном конфигурационном пространстве $J^1(C \underset{X}{\times} \Sigma_{\rm PR})$, где $\Sigma_{\rm PR}$ – расслоение псевдоримановых метрик (2.70) с координатами $(x^\lambda, \sigma^{\mu\nu})$.

Пусть τ – векторное поле на X. Его канонический лифт

$$\tilde\tau = \tau^\lambda\partial_\lambda + (\partial_\nu\tau^\alpha\sigma^{\nu\beta} + \partial_\nu\tau^\beta\sigma^{\nu\alpha})\partial_{\alpha\beta}$$

(2.60) на $\Sigma_{\rm PR} \subset \overset{2}{\vee} T^*X$ является генератором локальной 1-параметрической группы общих ковариантных преобразований $\Sigma_{\rm PR}$. Таким образом, мы получаем горизонтальный лифт

$$\tilde\tau_B = \tau^\lambda\partial_\lambda + [\tau^\lambda(\partial_\mu B^r_\lambda + c^r_{pq}a^p_\mu B^q_\lambda) - \partial_\mu\tau^\beta(a^r_\beta - B^r_\beta)]\partial^\mu_r +$$
$$(\partial_\nu\tau^\alpha\sigma^{\nu\beta} + \partial_\nu\tau^\beta\sigma^{\nu\alpha})\partial_{\alpha\beta}$$

векторного поля τ на произведение $C \underset{X}{\times} \Sigma_{\rm PR}$ [144,145]. Лагранжиан (2.51) по построению инвариантен относительно калибровочных преобразований и общих ковариантных преобразований. Следовательно его производная Ли вдоль векторного поля $J^1\tilde\tau_B$ равна нулю. Используем поэтому формулу (2.27). На динамической поверхности и на значениях фонового поля $\sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x)$ она принимает вид

$$0 \approx (\partial_\nu\tau^\alpha g^{\nu\beta} + \partial_\nu\tau^\beta g^{\nu\alpha} - \partial_\lambda g^{\alpha\beta}\tau^\lambda)\partial_{\alpha\beta}\mathcal{L} - d_\lambda\mathcal{T}^\lambda_B,$$

где

$$\mathcal{T}^\lambda_B = \pi^{\lambda\nu}_r[-\tau^\mu(\partial_\nu B^r_\mu + c^r_{pq}a^p_\nu B^q_\mu - a^r_{\mu\nu}) + \partial_\nu\tau^\mu(a^r_\mu - B^r_\mu)] - \delta^\lambda_\mu\tau^\mu\mathcal{L}_{\rm YM} \quad (2.52)$$

– поток энергии-импульса вдоль векторного поля (2.50).

Это слабое тождество может быть переписано в виде

$$0 \approx \partial_\lambda\tau^\mu t^\lambda_\mu\sqrt{|\,g\,|} - \tau^\mu\{_\mu{}^\beta{}_\lambda\}t^\lambda_\beta\sqrt{|\,g\,|} - d_\lambda\mathcal{T}^\lambda_B, \quad (2.53)$$

где $\{_\mu{}^\beta{}_\lambda\}$ – символы Кристоффеля метрики g и

$$t^\mu_\beta\sqrt{|\,g\,|} = 2g^{\mu\alpha}\partial_{\alpha\beta}\mathcal{L}_{\rm YM}$$

– метрический тензор энергии-импульса калибровочных потенциалов. Имеет место соотношение

$$t^\lambda_\mu\sqrt{|\,g\,|} = \pi^{\lambda\nu}_q\mathcal{F}^q_{\mu\nu} - \delta^\lambda_\mu\mathcal{L}_{\rm YM}.$$

Пусть A – решение уравнения Янга–Миллса. Рассмотрим лифт (2.50) на C векторного поля τ на X посредством связности $B = A$. В этом случае поток энергии-импульса (2.52) принимает вид

$$\mathcal{T}_A^\lambda \circ A = \tau^\mu (t_\mu^\lambda \circ A)\sqrt{\mid g \mid},$$

а слабое тождество

$$0 \approx -\{_\mu{}^\beta{}_\lambda\}(t_\beta^\lambda \circ A)\sqrt{\mid g \mid} - d_\lambda[(t_\mu^\lambda \circ A)\sqrt{\mid g \mid}]$$

(2.53) на решении A приводит к обычному ковариантному закону сохранения

$$\nabla_\lambda((t_\mu^\lambda \circ A)\sqrt{\mid g \mid}) = 0, \tag{2.54}$$

где ∇ – ковариантная производная относительно символов Кристоффеля $\{_\mu{}^\beta{}_\lambda\}$ фоновой метрики g.

Отметим, что в случае произвольной связности B на главном расслоении слабое тождество (2.53) отличается от (2.54) на нетеровский закон сохранения

$$0 \approx d_\lambda(\xi_\nu^r \pi_r^{\lambda\nu}),$$

где

$$\xi_C = \xi_\nu^r \partial_r^\nu = (\partial_\nu \xi^r + c_{qp}^r a_\nu^q \xi^p)\partial_r^\nu, \qquad \xi^r = \tau^\mu(B_\mu^r - A_\mu^r),$$

– калибровочное векторное поле (2.40) на C.

5 Законы сохранения в аффинно-метрической теории гравитации

Рассмотрим сначала теорию гравитации в отсутствии фермионных полей. Она формулируется на геометрических расслоениях $T \to X$

[24], которые допускают канонический горизонтальный лифт $\tilde{\tau}$ всякого векторного поля τ на X. Он является генератором локальной 1-параметрической группы общих ковариантных преобразований геометрического расслоения T. Исследуем законы сохранения потока энергии-импульса вдоль таких векторных полей.

Замечание 2.6. В дальнейшем X – мировое многообразие, которое предполагается некомпактным и параллелизуемым. Это обеспечивает существование псевдоримановой метрики и спиновой структуры на X [104,105]. Более того, ориентация X предполагается фиксированной. Напомним, что всякое некомпактное мировое многообразие допускает неособое векторное поле и, как следствие, псевдориманову метрику [146]. Некомпактное 4-мерное многообразие X имеет спиновую структуру тогда и только тогда, когда оно параллелизуемо, т.е. касательное расслоение $TX \to X$ тривиально [104]. Более того, эта спиновая структура единственна с точность до эквивалентности [104,147].

Будем называть мировыми метрику и связность на мировом многообразии X. Координатные выражения для (мировой) связности на касательном TX и кокасательном T^*X расслоениях имеют вид

$$K = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + K_\lambda{}^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}), \tag{2.55}$$

$$K^* = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda - K_\lambda{}^\mu{}_\nu \dot{x}_\mu \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\nu}). \tag{2.56}$$

•

Пусть

$$\pi_{LX} : LX \to X$$

– главное расслоение ориентируемых линейных реперов касательных пространств к мировому многообразию X со структурной группой GL_4. Обозначим T расслоения, ассоциированные с LX, например, тензорные расслоения

$$T = (\overset{m}{\otimes} TX) \otimes (\overset{k}{\otimes} T^*X). \tag{2.57}$$

В голономном атласе $\{\partial_\mu\}$ всякий элемент $\{H_a\}$ реперного расслоения LX имеет вид

$$H_a = H^\mu{}_a \partial_\mu,$$

где $H^\mu{}_a$ – матричные элементы группы GL_4. Эти матричные элементы образуют послойные координаты

$$(x^\lambda, H^\mu{}_a), \qquad H'^\mu{}_a = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} H^\lambda{}_a,$$

расслоения LX. В этих координатах каноническое действие (1.9) структурной группы GL_4 на LX имеет вид

$$R_g : H^\mu{}_a \mapsto H^\mu{}_b g^b{}_a, \qquad g \in GL_4.$$

Реперное расслоение LX наделено канонической $\mathbf{R}^4$-значной 1-формой

$$\theta_{LX} = H^a{}_\mu dx^\mu \otimes t_a, \tag{2.58}$$

где $\{t_a\}$ – фиксированный базис $\mathbf{R}^4$ и $H^a{}_\mu$ – обратные элементы к $H^\mu{}_a$.

Реперное расслоение $LX \to X$ принадлежит к категории геометрических расслоений. Всякий диффеоморфизм f базы X поднимается канонически до автоморфизма

$$\widetilde{f} : (x^\lambda, H^\lambda{}_a) \mapsto (f^\lambda(x), \partial_\mu f^\lambda H^\mu{}_a) \tag{2.59}$$

расслоения LX и до соответствующих автоморфизмов (2.33), т.е. общих ковариантных преобразований, ассоциированных расслоений T. Например, если $T = TX$ – касательное расслоение, $\widetilde{f} = Tf$ –

обычный касательный морфизм к диффеоморфизму f. Лифт (2.59) индуцирует канонический горизонтальный лифт $\tilde{\tau}$ произвольного векторного поля τ на X на реперное расслоение LX и ассоциированные с ним расслоения. Канонический лифт τ на LX задается соотношением

$$\mathbf{L}_{\tilde{\tau}}\theta_{LX} = 0.$$

Соответствующий канонический лифт τ на тензорное расслоение (2.57) имеет вид

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu\partial_\mu + [\partial_\nu\tau^{\alpha_1}\dot{x}^{\nu\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k} + \ldots - \partial_{\beta_1}\tau^\nu\dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\nu\beta_2\cdots\beta_k} - \ldots]\frac{\partial}{\partial\dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k}} \tag{2.60}$$

и, в частности,

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu\partial_\mu + \partial_\nu\tau^\alpha\dot{x}^\nu\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\alpha} \tag{2.61}$$

на касательное расслоение TX и

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu\partial_\mu - \partial_\beta\tau^\nu\dot{x}_\nu\frac{\partial}{\partial\dot{x}_\beta} \tag{2.62}$$

на кокасательное расслоение T^*X.

Расслоение C_K связностей на LX также допускает канонический лифт (2.87) векторных полей на X.

Замечание 2.7. Если векторное поле τ не равно 0 в точке $x \in X$, тогда в окрестности x существует локальная симметричная мировая связность K, такая что τ является ее интегральным сечением

$$\partial_\nu\tau^\alpha = K_\nu{}^\alpha{}_\beta\tau^\beta.$$

Отсюда следует, что канонический лифт $\tilde{\tau}$ (2.60) может быть получен локально как горизонтальный лифт τ посредством этой симметричной связности. •

Как видно из выражения (2.60), генераторы $\tilde{\tau}$ общих ковариантных преобразований (так же как генераторы (2.42) калибровочных преобразований в калибровочной теории) зависят от производных компонент векторного поля τ. Это обуславливает главную особенность законов сохранения энергии-импульса в теории гравитации. Она состоит в том, что поток энергии-импульса в теории гравитации на геометрических расслоениях сводится к суперпотенциалу. Это имеет место в ОТО [134], в формализме Палатини [125,149] и, как будет показано ниже, в аффинно-метрической теории гравитации. Однако мы начнем со случая тензорных полей.

Пусть T – тензорное расслоение (2.57) с координатами (x^λ, y^A), где мы используем коллективный индекс A:

$$y^A = \dot{x}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k}. \tag{2.63}$$

В этих обозначениях канонический лифт $\tilde{\tau}$ (2.60) на T векторного поля τ на X имеет вид

$$\tilde{\tau} = \tau^\lambda\partial_\lambda + u^{A\beta}_{\alpha}\partial_\beta\tau^\alpha\partial_A. \tag{2.64}$$

Замечание 2.8. Выражение (2.64) является общим для всякого канонического лифта τ на геометрическое расслоение T, когда этот лифт зависит от первых производных компонент векторного поля τ. Поэтому получаемый ниже результат справедлив для любого такого расслоения. •

Пусть L – лагранжиан на J^1T, который инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, т.е. L удовлетворяет строгому равенству

$$\mathbf{L}_{J^1\tilde{\tau}}L = 0.$$

В координатной форме (2.18), это равенство записывается следующим образом:

$$\partial_\alpha(\tau^\alpha\mathcal{L}) + u^{A\beta}_{\alpha}\partial_\beta\tau^\alpha\partial_A\mathcal{L} + d_\mu(u^{A\beta}_{\alpha}\partial_\beta\tau^\alpha)\pi^\mu_A - y^A_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha\pi^\beta_A = 0. \tag{2.65}$$

Соответствующее слабое тождество (2.22) принимает вид

$$0 \approx -d_\lambda[\pi^\lambda_A(y^A_\alpha \tau^\alpha - u^{A\beta}{}_\alpha \partial_\beta \tau^\alpha) - \tau^\lambda \mathcal{L}]. \tag{2.66}$$

В силу произвольности калибровочных параметров τ^α равенство (2.65) эквивалентно системе сильных равенств

$$\partial_\lambda \mathcal{L} = 0, \tag{2.67a}$$

$$\delta^\beta_\alpha \mathcal{L} + u^{A\beta}{}_\alpha \delta_A \mathcal{L} + d_\mu(u^{A\beta}{}_\alpha \pi^\mu_A) = y^A_\alpha \pi^\beta_A, \tag{2.67b}$$

$$u^{A\beta}{}_\alpha \pi^\mu_A + u^{A\mu}{}_\alpha \pi^\beta_A = 0, \tag{2.67c}$$

где

$$\delta_A \mathcal{L} = (\partial_A - d_\mu \partial^\mu_A)\mathcal{L}$$

– вариационные производные (2.5).

Подставляя соотношения (2.67b) и (2.67c) в слабое тождество (2.66), мы получаем закон сохранения энергии-импульса

$$0 \approx -d_\lambda[u^{A\lambda}{}_\alpha \delta_A \mathcal{L} \tau^\alpha + d_\mu(u^{A\lambda}{}_\alpha \pi^\mu_A \tau^\alpha)]. \tag{2.68}$$

Из этого выражения видно, что на динамической поверхности соответствующий поток энергии-импульса сводится к суперпотенциальной форме (2.23), т.е.

$$\mathcal{T}^\lambda_T = u^{A\lambda}{}_\alpha \delta_A \mathcal{L} \tau^\alpha + d_\mu(u^{A\lambda}{}_\alpha \pi^\mu_A \tau^\alpha),$$

где

$$U_T{}^{\mu\lambda} = u^{A\lambda}{}_\alpha \pi^\mu_A \tau^\alpha \tag{2.69}$$

– суперпотенциал тензорных полей. Очевидно, что такой вид потока энергии-импульса обусловлен зависимостью канонического лифта $\tilde{\tau}$ (2.64) от производных компонент векторного поля τ. Эта зависимость обеспечивает ковариантность закона сохранения энергии-импульса (2.68) относительно общих ковариантных преобразований. Рассмотрим теперь тензорные поля, рассматриваемые как материальные, в присутствии фоновой псевдоримановой метрики на мировом многообразии X.

Замечание 2.9. Псевдориманова метрика g на мировом многообразии X представляется сечением расслоения

$$\Sigma_{\mathrm{PR}} = GLX/\mathrm{O}(1,3), \tag{2.70}$$

где GLX обозначает расслоение всех линейных реперов в касательных пространствах к X и $\mathrm{O}(1,3)$ – полная группа Лоренца. Так как X ориентируемо, оно ассоциировано с реперным расслоением LX. Типичным слоем Σ_{PR} служит фактор-пространство

$$\mathrm{GL}(4,\mathbf{R})/\mathrm{O}(1,3),$$

гомеоморфное $\mathbf{RP}^3 \times \mathbf{R}^7$, где $\mathbf{RP}^3$ – 3-мерное проективное пространство. Часто удобно отождествлять это расслоение с открытым подрасслоением тензорного расслоения

$$\Sigma_{\mathrm{PR}} \subset \overset{2}{\vee} TX.$$

Оно параметризуется координатами $(x^\lambda, \sigma^{\mu\nu})$. •

Чтобы получить закон сохранения энергии-импульса тензорных полей в присутствии фоновой метрики, рассмотрим полное конфигурационное пространство этих полей J^1Y, где

$$Y = T \underset{X}{\times} \Sigma_{\mathrm{PR}}.$$

Это произведение наделяется координатами $(x^\lambda, y^A, \sigma^{\mu\nu})$, где использованы обозначения (2.63). Пусть τ – векторное поле на X. Его канонический лифт на Y имеет вид

$$\tilde{\tau} = \tau^\lambda \partial_\lambda + u^{A\beta}_{\alpha} \partial_\beta \tau^\alpha \partial_A + (\partial_\nu \tau^\alpha \sigma^{\nu\beta} + \partial_\nu \tau^\beta \sigma^{\nu\alpha}) \partial_{\alpha\beta}. \tag{2.71}$$

Предположим, что лагранжиан системы L на J^1Y инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, т.е.

$$\mathbf{L}_{J^1\tilde{\tau}}L = 0 \tag{2.72}$$

для произвольного векторного поля $\tilde{\tau}$ (2.71). В дальнейшем мы предполагаем, что гравитационные лагранжианы не зависят от координат скоростей $\sigma_\lambda{}^{\mu\nu}$ метрического поля.

В силу произвольности калибровочных параметров τ^α, равенство (2.72) эквивалентно системе строгих равенств

$$\partial_\lambda \mathcal{L} = 0, \tag{2.73a}$$

$$\delta^\beta_\alpha \mathcal{L} + 2\sigma^{\beta\nu}\partial_{\alpha\nu}\mathcal{L} + u^{A\beta}{}_\alpha \delta_A \mathcal{L} + d_\mu(u^{A\beta}{}_\alpha \pi^\mu_A) = y^A_\alpha \pi^\beta_A, \tag{2.73b}$$

$$u^{A\beta}{}_\alpha \pi^\mu_A + u^{A\mu}{}_\alpha \pi^\beta_A = 0. \tag{2.73c}$$

На динамической поверхности

$$\delta_A \mathcal{L} = 0, \qquad \sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x),$$

слабое тождество (2.27) принимает форму

$$\begin{aligned} 0 \approx & -(\partial_\nu \tau^\alpha g^{\nu\beta} + \partial_\nu \tau^\beta g^{\nu\alpha} - \partial_\lambda g^{\alpha\beta}\tau^\lambda)\partial_{\alpha\beta}\mathcal{L} - \\ & d_\lambda[\pi^\lambda_A(y^A_\alpha \tau^\alpha - u^{A\beta}{}_\alpha \partial_\beta \tau^\alpha) - \tau^\lambda \mathcal{L}]. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Подставляя (2.73b) и (2.73c) в (2.74), получаем

$$\begin{aligned} 0 \approx & \partial_\lambda \tau^\mu t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} - \tau^\mu \{_\mu{}^\beta{}_\lambda\} t^\lambda_\beta \sqrt{\mid g \mid} - \\ & d_\lambda[\tau^\mu t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} + u^{A\lambda}{}_\alpha \delta_A \mathcal{L}\tau^\alpha + d_\mu(u^{A\lambda}{}_\alpha \pi^\mu_A \tau^\alpha)], \end{aligned} \tag{2.75}$$

где

$$t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} = 2g^{\lambda\nu}\partial_{\nu\mu}\mathcal{L} \tag{2.76}$$

– метрический тензор энергии-импульса тензорных полей.

Замечание 2.10. Пусть L – лагранжиан на многообразии струй произведения

$$Y \underset{X}{\times} \Sigma_{\mathrm{PR}}.$$

Метрический тензор энергии-импульса определяется как

$$t_\mu^\lambda \sqrt{|\sigma|} = 2\sigma^{\lambda\nu}\delta_{\nu\mu}\mathcal{L},$$

где $\delta_{\nu\mu}\mathcal{L}$ – вариационные производные по метрическим координатам $\sigma^{\nu\mu}$. •

Выражение (2.75) показывает, что на динамической поверхности поток энергии-импульса в присутствии фоновой псевдоримановой метрики представляет собой сумму

$$\mathcal{T}^\lambda = \tau^\mu t_\mu^\lambda \sqrt{|g|} + d_\mu(u^{A\lambda}{}_\alpha \pi_A^\mu \tau^\alpha) \tag{2.77}$$

метрического тензора энергии-импульса (2.76) этих полей и суперпотенциала (2.69). Последний однако не дает вклада в дифференциальный закон сохранения, который принимает форму

$$\nabla_\lambda t_\mu^\lambda \approx 0.$$

Рассмотрим поле Прока в качестве примера тензорных полей. Оно описывается сечениями кокасательного расслоения $T = T^*X$. Его конфигурационное пространство J^1T^*X параметризуется координатами $(x^\lambda, k_\mu, k_{\mu\lambda})$, где $k_\mu = \dot{x}_\mu$ – голономные координаты на T^*X. Расслоение струй $J^1T^*X \to T^*X$ – аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$T^*X \underset{X}{\times} (\overset{2}{\otimes} T^*X) \to T^*X.$$

Если дана мировая связность K, конфигурационное пространство J^1T^*X допускает разбиение

$$J^1T^*X = S_+ \underset{T^*X}{\oplus} (T^*X \underset{X}{\times} \overset{2}{\wedge} T^*X), \tag{2.78}$$

где S_+ – аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$T^*X \underset{X}{\times} (\overset{2}{\vee} T^*X) \to T^*X.$$

В координатах это разбиение имеет вид

$$k_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\lambda\mu} + \mathcal{F}_{\lambda\mu}),$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu} + S_\mu{}^\alpha{}_\nu k_\alpha, \tag{2.79}$$

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} + k_{\nu\mu} - S_\mu{}^\alpha{}_\nu k_\alpha, \tag{2.80}$$

где

$$S_\mu{}^\alpha{}_\nu = K_\mu{}^\alpha{}_\nu - K_\nu{}^\alpha{}_\mu$$

– кручение мировой связности K. Если связность K симметричная,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu}. \tag{2.81}$$

Рассмотрим соотношение (2.67c). В координатах $(\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{S}_{\mu\nu})$, отвечающих разбиению (2.78), оно принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{P}}}{\partial \mathcal{S}_{\lambda\nu}} = 0.$$

Отсюда следует, что, для того чтобы быть инвариантным относительно общих ковариантных преобразований, лагранжиан полей Прока должен факторизоваться посредством морфизма

$$\mathcal{F} : J^1T^*X \underset{T^*X}{\longrightarrow} T^*X \underset{X}{\times} \overset{2}{\wedge} T^*X.$$

И в самом деле, лагранжиан полей Прока в присутствии фоновой метрики g и фоновой связности K дается выражением

$$L_{\mathrm{P}} = [-\frac{1}{4\gamma} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\lambda} k_\mu k_\lambda] \sqrt{|\, g\,|}\omega. \tag{2.82}$$

Рассмотрим закон сохранения энергии-импульса полей Прока в присутствии фоновой метрики g, когда K – связность Леви–Чивита метрики g. Пусть τ – векторное поле на X и

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu - \partial_\alpha \tau^\nu k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\alpha}$$

– его канонический лифт (2.62) на T^*X. В этом случае слабое тождество (2.75) имеет вид

$$0 \approx \partial_\lambda \tau^\mu t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} - \tau^\mu \{_\mu{}^\beta{}_\lambda\} t^\lambda_\beta \sqrt{\mid g \mid} -$$
$$d_\lambda [\tau^\mu t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} - k_\alpha \tau^\alpha \delta^\lambda \mathcal{L} - d_\mu (k_\alpha \pi^{\mu\lambda} \tau^\alpha)],$$

где

$$\pi^{\mu\lambda} = -\frac{1}{\gamma} g^{\mu\alpha} g^{\lambda\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \sqrt{\mid g \mid},$$
$$t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} = \pi^{\nu\lambda} \mathcal{F}_{\mu\nu} - m^2 g^{\nu\lambda} k_\mu k_\nu \sqrt{\mid g \mid} - \delta^\lambda_\mu \mathcal{L}_{\mathrm{P}}.$$

Отсюда видно, что поток энергии-импульса (2.77) поля Прока в присутствии фоновой метрики представляет собой сумму

$$\mathcal{T}^\lambda_{\mathrm{P}} = \tau^\mu t^\lambda_\mu \sqrt{\mid g \mid} - d_\mu (k_\alpha \pi^{\mu\lambda} \tau^\alpha) \tag{2.83}$$

его метрического тензора энергии-импульса и суперпотенциала

$$U_{\mathrm{P}}{}^{\mu\lambda} = -k_\alpha \pi^{\mu\lambda} \tau^\alpha. \tag{2.84}$$

Перейдем теперь к случаю динамического гравитационного поля и рассмотрим его аффинно-метрическую модель [13,131,132]. В этой модели, гравитация описывается псевдоримановой метрикой g и мировой связностью K на X [1,34].

Так как мировые связности ассоциированы со связностями на реперном расслоении LX, существует взаимно однозначное соответствие между ними и сечениями фактор-расслоения связностей

$$C_K = J^1 LX / GL_4. \tag{2.85}$$

В голономном атласе C_K наделяется координатами $(x^\lambda, k_\lambda{}^\nu{}_\alpha)$ так, что для всякого сечения K расслоения $C_K \to X$ его координаты

$$k_\lambda{}^\nu{}_\alpha \circ K = K_\lambda{}^\nu{}_\alpha$$

– коэффициенты мировой связности K (2.55). Многообразие струй J^1C_K допускает каноническое разложение (1.17). Обозначим соответствующую проекцию $\mathcal{F}$ символом R. Она дается координатным выражением

$$R_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta = k_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta - k_{\mu\lambda}{}^\alpha{}_\beta + k_\mu{}^\alpha{}_\varepsilon k_\lambda{}^\varepsilon{}_\beta - k_\lambda{}^\alpha{}_\varepsilon k_\mu{}^\varepsilon{}_\beta. \tag{2.86}$$

Легко видеть, что, если K – сечение расслоения $C_K \to X$, то $R \circ J^1K$ – кривизна связности K.

Расслоение мировых связностей C_K (2.85) допускает канонический лифт

$$\tilde{f}_C : J^1LX/GL_4 \to J^1\tilde{f}(J^1LX)/GL_4$$

всякого диффеоморфизма f базы X и соответственно канонический лифт

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu\partial_\mu + [\partial_\nu\tau^\alpha k_\mu{}^\nu{}_\beta - \partial_\beta\tau^\nu k_\mu{}^\alpha{}_\nu - \partial_\mu\tau^\nu k_\nu{}^\alpha{}_\beta + \partial_{\mu\beta}\tau^\alpha]\frac{\partial}{\partial k_\mu{}^\alpha{}_\beta} \tag{2.87}$$

всякого векторного поля τ на X.

Используем ради удобства компактные обозначения

$$\tilde{\tau} = \tau^\lambda\partial_\lambda + (u^{A\beta}_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha + u^{A\beta\mu}_\alpha\partial_{\beta\mu}\tau^\alpha)\partial_A$$

для лифта (2.87), где

$$\begin{aligned}
y^A &= k_\mu{}^\alpha{}_\beta, \\
u_\mu{}^\alpha{}_\beta{}^{\varepsilon\sigma}_\gamma &= \delta^\varepsilon_\mu\delta^\sigma_\beta\delta^\alpha_\gamma, \\
u_\mu{}^\alpha{}_\beta{}^\varepsilon_\gamma &= k_\mu{}^\varepsilon{}_\beta\delta^\alpha_\gamma - k_\mu{}^\alpha{}_\gamma\delta^\varepsilon_\beta - k_\gamma{}^\alpha{}_\beta\delta^\varepsilon_\mu.
\end{aligned}$$

Конфигурационным пространством аффинно-метрической теории гравитации является многообразие струй произведения расслоений

$$\Sigma_{\mathrm{PR}} \underset{X}{\times} C_K,$$

которое наделено координатами

$$(x^\lambda, \sigma^{\alpha\beta}, k_\mu{}^\alpha{}_\beta, \sigma_\lambda{}^{\alpha\beta}, k_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta).$$

Возьмем поля Прока как материальный источник аффинно-метрической гравитации. Тогда полное конфигурационное пространство – это многообразие струй J^1Y произведения

$$Y = T^*X \underset{X}{\times} \Sigma_{\mathrm{PR}} \underset{X}{\times} C_K. \tag{2.88}$$

Полный лагранжиан L на этом конфигурационном пространстве является суммой

$$L = L_{\mathrm{AM}} + L_{\mathrm{P}} \tag{2.89}$$

аффинно-метрического лагранжиана L_{AM} и лагранжиана (2.82) полей Прока, где $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ дается выражением (2.79) и

$$S_\mu{}^\alpha{}_\nu = k_\mu{}^\alpha{}_\nu - k_\nu{}^\alpha{}_\mu. \tag{2.90}$$

Сделаем естественное предположение, что лагранжиан L_{AM} выражается через кривизну (2.86) и не зависит от производных метрики $\sigma_\lambda{}^{\alpha\beta}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\pi^{\lambda\nu}{}_\alpha{}^\beta = -\pi^{\nu\lambda}{}_\alpha{}^\beta, \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{AM}}}{\partial k_\nu{}^\alpha{}_\beta} = \pi^{\lambda\nu}{}_\alpha{}^\sigma k_\lambda{}^\beta{}_\sigma - \pi^{\lambda\nu}{}_\sigma{}^\beta k_\lambda{}^\sigma{}_\alpha, \tag{2.92}$$

а также равенства

$$\pi^\lambda_A u^{A\beta\mu}_{\ \alpha} = \pi^{\lambda\mu}{}_\alpha{}^\beta,$$

$$\pi^\varepsilon_A u^{A\beta}_{\ \alpha} = -\partial^\varepsilon{}_\alpha{}^\beta \mathcal{L}_{\mathrm{AM}} - \pi^{\varepsilon\beta}{}_\sigma{}^\gamma k_\alpha{}^\sigma{}_\gamma.$$

Канонический лифт векторного поля τ на произведение (2.88) имеет вид

$$\widetilde{\tau} = \tau^\lambda\partial_\lambda - \partial_\alpha\tau^\nu k_\nu\partial^\alpha + (\sigma^{\nu\beta}\partial_\nu\tau^\alpha + \sigma^{\alpha\nu}\partial_\nu\tau^\beta)\partial_{\alpha\beta} +$$
$$(u^{A\beta}{}_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha + u^{A\beta\mu}{}_\alpha\partial_{\beta\mu}\tau^\alpha)\partial_A.$$

Пусть полный лагранжиан L (2.89) инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, т.е.

$$\mathbf{L}_{J^1\widetilde{\tau}}(L_{\mathrm{AM}} + L_{\mathrm{P}}) = 0. \tag{2.93}$$

Тогда первая вариационная формула (2.19) на динамической поверхности приводит к слабому закону сохранения

$$0 \approx -d_\lambda[\pi^\lambda_A(y^A_\alpha\tau^\alpha - u^{A\beta}{}_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha - u^{A\varepsilon\beta}{}_\alpha\partial_{\varepsilon\beta}\tau^\alpha) + \tag{2.94}$$
$$\pi^{\lambda\mu}(k_{\alpha\mu}\tau^\alpha + k_\alpha\partial_\mu\tau^\alpha) - \tau^\lambda\mathcal{L}],$$

где

$$\mathcal{T}_{\mathrm{AM}}{}^\lambda = \pi^\lambda_A(y^A_\alpha\tau^\alpha - u^{A\beta}{}_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha - u^{A\varepsilon\beta}{}_\alpha\partial_{\varepsilon\beta}\tau^\alpha) \tag{2.95}$$

– поток энергии-импульса аффинно-метрической гравитации.

В силу произвольности калибровочных параметров τ^λ, равенство (2.93) эквивалентно системе сильных равенств

$$\partial_\lambda\mathcal{L} = 0,$$
$$\delta^\beta_\alpha\mathcal{L} + 2\sigma^{\beta\mu}\delta_{\alpha\mu}\mathcal{L} + u^{A\beta}{}_\alpha\delta_A\mathcal{L} - k_\alpha\delta^\beta\mathcal{L} + d_\mu(\pi^\mu_A u^{A\beta}{}_\alpha - k_\alpha\pi^{\mu\beta}) - \tag{2.96}$$
$$(y^A_\alpha\pi^\beta_A + k_{\alpha\mu}\pi^{\beta\mu}) = 0,$$
$$[(u^{A\varepsilon\sigma}{}_\gamma\partial_A + u^{A\varepsilon}{}_\gamma\partial^\sigma_A)\mathcal{L}_{\mathrm{AM}} + (\partial^\varepsilon{}_\gamma{}^\sigma + 2k_\gamma\pi^{\varepsilon\sigma})\mathcal{L}_{\mathrm{P}}]\partial_{\sigma\varepsilon}\tau^\gamma = 0, \tag{2.97}$$
$$\pi^{(\lambda\varepsilon}{}_\gamma{}^{\sigma)} = 0, \tag{2.98}$$

где $\delta_{\alpha\mu}\mathcal{L}$, $\delta_A\mathcal{L}$ и $\delta^\beta\mathcal{L}$ – вариационные производные.

Легко видеть, что равенство (2.97) выполняется в силу соотношения (2.92) и того факта, что лагранжиан L_{P} факторизуется посредством $\mathcal{F}$. Равенство (2.98) следует из соотношения (2.91).

Подставляя член $y^A_\alpha \pi^\beta_A + k_{\alpha\mu}\pi^{\beta\mu}$ из выражения (2.96) в закон сохранения (2.94), мы приводим его к виду

$$0 \approx -d_\lambda[2\sigma^{\lambda\mu}\tau^\alpha\delta_{\alpha\mu}\mathcal{L} + u^{A\lambda}{}_\alpha\tau^\alpha\delta_A\mathcal{L} - k_\alpha\tau^\alpha\delta^\lambda\mathcal{L} - \pi^\lambda_A u^{A\beta}{}_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha + d_\mu(\pi^{\lambda\mu}{}_\alpha{}^\beta)\partial_\beta\tau^\alpha + d_\mu(\pi^\mu_A u^{A\lambda}{}_\alpha)\tau^\alpha - d_\mu(\pi^{\lambda\mu}{}_\alpha{}^\beta\partial_\beta\tau^\alpha) - d_\mu(k_\alpha\pi^{\mu\lambda}\tau^\alpha)]. \tag{2.99}$$

Заметим, что последний член в этом выражении – в точности дивергенция суперпотенциала (2.84) полей Прока. После выделения вариационных производных закон сохранения энергии-импульса (2.99) аффинно-метрической гравитации и полей Прока приводится к суперпотенциальной форме

$$0 \approx -d_\lambda[2\sigma^{\lambda\mu}\tau^\alpha\delta_{\alpha\mu}\mathcal{L} + (k_\mu{}^\lambda{}_\gamma\delta^\mu{}_\alpha{}^\gamma\mathcal{L} - k_\mu{}^\sigma{}_\alpha\delta^\mu{}_\sigma{}^\lambda\mathcal{L} - k_\alpha{}^\sigma{}_\gamma\delta^\lambda{}_\sigma{}^\gamma\mathcal{L})\tau^\alpha + \delta^\lambda{}_\alpha{}^\mu\mathcal{L}\partial_\mu\tau^\alpha - d_\mu(\delta^\mu{}_\alpha{}^\lambda\mathcal{L})\tau^\alpha + d_\mu(\pi^{\mu\lambda}{}_\alpha{}^\nu(\partial_\nu\tau^\alpha - k_\sigma{}^\alpha{}_\nu\tau^\sigma))],$$

где поток энергии-импульса на динамической поверхности сводится к обобщенному суперпотенциалу Комара

$$U_{\mathrm{AM}}{}^{\mu\lambda} = \pi^{\mu\lambda}{}_\alpha{}^\nu(\partial_\nu\tau^\alpha - k_\sigma{}^\alpha{}_\nu\tau^\sigma). \tag{2.100}$$

Его можно переписать в виде

$$U_{\mathrm{AM}}{}^{\mu\lambda} = 2\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{AM}}}{\partial R_{\mu\lambda}{}^\alpha{}_\nu}(D_\nu\tau^\alpha + S_\nu{}^\alpha{}_\sigma\tau^\sigma),$$

где D_ν – ковариантная производная связности $k_\nu{}^\alpha{}_\sigma$ и $S_\nu{}^\alpha{}_\sigma$ – кручение этой связности.

Следует подчеркнуть, что поля Прока не дают вклад в полный суперпотенциал (2.100). Соответствующий член

$$-d_\mu(k_\alpha\pi^{\mu\lambda}\tau^\alpha)$$

в выражении (2.99) исчезает благодаря зависимости лагранжиана L_{P} от кручения.

Рассмотрим в качестве примера гильберт-эйнштейновский лагранжиан в афинно-метрической теории

$$L_{\mathrm{HE}} = \frac{1}{2\kappa} R\sqrt{|\,\sigma\,|}\omega,$$
$$R = \sigma^{\lambda\nu} R_{\alpha\lambda}{}^{\alpha}{}_{\nu}.$$

В этом случае обобщенный суперпотенциал Комара (2.100) приводится потенциалу Комара, если подставить связность Леви–Чивита

$$k_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\sigma} = \{_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\sigma}\}.$$

Обобщим этот пример на лагранжиан

$$L_{\mathrm{PL}} = f(R)\sqrt{|\,\sigma\,|}\omega,$$

где $f(R)$ – некоторая полиномиальная функция скалярной кривизны R. В случае симметричной связности мы воспроизведем суперпотенциал

$$U_{\mathrm{PL}}{}^{\mu\lambda} = \frac{\partial f}{\partial R}\sqrt{|\,\sigma\,|}(\sigma^{\lambda\nu} D_{\nu}\tau^{\mu} - \sigma^{\mu\nu} D_{\nu}\tau^{\lambda})$$

формализма Палатини [125]. Отметим также, в локальной калибровке, когда векторное поле τ постоянно, поток энергии-импульса аффинно-метрической гравитации (2.95) сводится к каноническому тензору энергии-импульса

$$\mathcal{T}^{\lambda}_{\mathrm{AM}} = (\pi^{\lambda\mu}{}_{\beta}{}^{\nu} k_{\alpha\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\mathcal{L}_{\mathrm{MA}})\tau^{\alpha}.$$

Он был предложен для описания комплекса энергии-импульса в формализме Палатини [148-150].

Глава 3. Калибровочная теория гравитации

В этой главе описана геометрия спонтанного нарушения симметрий в КТГ и определено конфигурационное пространство и лагранжиан полной системы гравитационных и фермионных полей в КТГ. Построен канонический лифт на это пространство векторных полей на X, что соответствует генератору его общих ковариантных преобразований, и получен закон сохранения энергии-импульса в КТГ. Показано, что поток энергии-импульса сводится к обобщенному потенциалу Комара. В рамках КТГ построено аффинно-метрическое расширение РТГ А.А.Логунова в присутствии фермионных полей.

1 Дираковские фермионные поля

Введем дираковские спиноры следующим образом [151-153]. Пусть M – пространство Минковского с метрикой Минковского

$$\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1),$$

записанной относительно фиксированного базиса $\{e^a\}$. Пусть $\mathbf{C}_{1,3}$ – комплексная алгебра Клиффорда, порождаемая элементами M. Это комплексифицированный фактор тензорной алгебры $\otimes M$ по двустороннему идеалу, порождаемому элементами вида

$$e \otimes e' + e' \otimes e - 2\eta(e, e') \in \otimes M, \qquad e, e' \in M.$$

Комплексная алгебра Клиффорда $\mathbf{C}_{1,3}$ изоморфна вещественной алгебре Клиффорда $\mathbf{R}_{2,3}$ с производящим пространством $\mathbf{R}^5$ и метрикой

$$\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, 1).$$

Ее подалгебра, порождаемая элементами $M \subset \mathbf{R}^5$ – это вещественная алгебра Клиффорда $\mathbf{R}_{1,3}$.

Спинорное пространство V определяется как минимальный левый идеал алгебры $\mathbf{C}_{1,3}$, на который она действует левыми умножениями. Имеет место представление

$$\begin{aligned} &\gamma : M \otimes V \to V, \\ &\hat{e}^a = \gamma(e^a) = \gamma^a, \end{aligned} \tag{3.1}$$

элементов пространства Минковского $M \subset \mathbf{C}_{1,3}$ дираковскими γ-матрицами на V. Явный вид этого представления зависит от выбора левого идеала $V \subset \mathbf{C}_{1,3}$. Различные такие идеалы ведут к эквивалентным представлениям (3.1). Спинорное пространство V наделено спинорной метрикой

$$a(v, v') = \frac{1}{2}(\overline{v}v' + \overline{v}'v) = \frac{1}{2}(v^+\gamma^0 v' + v'^+\gamma^0 v), \tag{3.2}$$

где элемент $e^0 \in M$ удовлетворяет условиям

$$(e^0)^+ = e^0, \qquad (e^0 e)^+ = e^0 e, \qquad \forall e \in M.$$

Группа Клиффорда $G_{1,3}$ состоит из обратимых элементов l_s вещественной алгебры Клиффорда $\mathbf{R}_{1,3}$, таких что соответствующие внутренние автоморфизмы сохраняют пространство Минковского $M \subset \mathbf{R}_{1,3}$, т.е.

$$l_s e l_s^{-1} = l(e), \qquad e \in M, \tag{3.3}$$

где l – преобразования Лоренца пространства Минковского M. Таким образом, существует эпиморфизм группы Клиффорда $G_{1,3}$ на группу Лоренца O(1,3). Так как действие (3.3) группы Клиффорда на пространство Минковского M не является эффективным, рассмотрим ее pin и spin подгруппы.

Подгруппа Pin(1,3) порождается элементами $e \in M$, такими что $\eta(e,e) = \pm 1$. Четная часть Pin(1,3) составляет спиновую группу Spin(1,3). Ее компонента единицы

$$L_{\rm s} = {\rm Spin}^0(1,3) \simeq {\rm SL}(2,\mathbf{C})$$

– это универсальное двулистное накрытие

$$z_L : L_{\rm s} \to {\rm L} = L_{\rm s}/\mathbf{Z}_2, \qquad \mathbf{Z}_2 = \{1,-1\}, \tag{3.4}$$

собственной группы Лоренца

$${\rm L} = {\rm SO}^0(1,3),$$

которая гомеоморфна $\mathbf{RP}^3 \times \mathbf{R}^3$ [154].

Группа Лоренца L действует на пространство Минковского M генераторами

$$L_{ab}{}^c{}_d = \eta_{ad}\delta^c_b - \eta_{bd}\delta^c_a. \tag{3.5}$$

Группа Клиффорда $G_{1,3}$ действует на спинорное пространство V левыми умножениями

$$G_{1,3} \ni l_s : v \mapsto l_s v, \qquad v \in V.$$

Это действие сохраняет представление (3.1), т.е.

$$\gamma(lM \otimes l_s V) = l_s \gamma(M \otimes V).$$

Спиновая группа $L_{\rm s}$ действует на спинорное пространство V генераторами

$$L_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]. \tag{3.6}$$

Так как

$$L_{ab}^{+}\gamma^0 = -\gamma^0 L_{ab},$$

это действие сохраняет спиновую метрику (3.2).

Рассмотрим теперь расслоение на пространства Минковского $MX \to X$ со структурной группой $SO(1,3)$. Это расслоение может быть расширено до расслоения CX на алгебры Клиффорда, слои которого C_xX порождаются слоями M_xX расслоения MX [155,156]. CX – расслоение со структурной группой $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_{1,3})$ внутренних автоморфизмов алгебры Клиффорда $\mathbf{C}_{1,3}$. Эта структурная группа редуцируема к группе Лоренца $\mathrm{SO}(1,3)$, и расслоение на алгебры Клиффорда CX содержит подрасслоения на пространства Минковского MX. Однако в общем случае CX не содержит спинорного подрасслоения, поскольку спинорное подпространство V алгебры $\mathbf{C}_{1,3}$ не инвариантно относительно внутренних автоморфизмов алгебры $\mathbf{C}_{1,3}$. Спинорное подрасслоение S_M существует, если функции перехода CX могут быть продолжены с $\mathrm{Aut}\mathbf{C}_{1,3}$ до $G_{1,3}$ [156,157]. Расслоение MX на пространство Минковского должно быть изоморфно кокасательному расслоению T^*X для того, чтобы сечения спинорного расслоения S_M описывали реальные фермионные поля на мировом многообразии X [109].

Известны несколько эквивалентных определений спиновой структуры на X [109,126,147,155]. Псевдоримановой спиновой структурой на X называется пара $(P_\mathrm{s}, z_\mathrm{s})$ главного L_s-расслоения $P_\mathrm{s} \to X$ и морфизма

$$z_\mathrm{s} : P_\mathrm{s} \underset{X}{\to} LX \tag{3.7}$$

расслоения P_s в реперное расслоение $LX \to X$. Так как гомоморфизм $L_\mathrm{s} \to GL_4$ факторизуется посредством эпиморфизма (3.4), всякий морфизм расслоений (3.7) факторизуется посредством морфизма P_s на лоренцевское подрасслоение реперного расслоения LX. Таким образом, необходимым условием существования псевдоримановой спиновой структуры на X является редукция структурной группы GL_4 расслоения LX к группе Лоренца L. С физической точки зрения это означает, что существование дираковских фермионных полей предполагает существование геометрического гравитационного поля.

2 Геометрия композиционных расслоений

Построим геометрию композиционных расслоений, которая позволяет описывать спонтанное нарушение симметрий в полевых моделях [10,11,13,60].

Рассмотрим композицию расслоений $Y \to Z$ и $Z \to X$, которая образует композиционное расслоение

$$\pi : Y \xrightarrow{\pi_{YZ}} Z \xrightarrow{\pi_{ZX}} X. \tag{3.8}$$

Оно наделяется координатами (x^λ, z^p, y^i), где (x^λ, z^p) – координаты расслоения $Z \to X$. Это означает, что функции перехода координат $z^m \to z'^p(x^\lambda, z^q)$ не зависят от координат y^i.

Следующие два свойства обуславливают применение композиционных расслоений в теории поля.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $h : X \to Z$ и $g : Z \to Y$ – сечения расслоений π_{ZX} и π_{YZ}, соответственно. Тогда их композиция

$$s = g \circ h \tag{3.9}$$

является сечением композиционного расслоения $\pi : Y \to X$ (3.8). Обратно, если $\pi_{YZ} : Y \to Z$ – расслоение с типичным слоем, изоморфным эвклидову пространству, тогда всякое глобальное сечение $s : X \to Y$ представимо как композиция (3.9), где $h = \pi_{YZ} \circ s$ и

$g : Z \to Y$ является продолжением локального сечения $\widetilde{g} : h(X) \to Y$.
□

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть дано композиционное расслоение (3.8), и $h : X \to Z$ – глобальное сечение. Тогда расслоение $h^*Y \to X$, индуцированное $\pi_{YZ} : Y \to Z$ посредством морфизма h, является подрасслоением расслоения $\pi : Y \to X$, как это следует из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h^*Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & \searrow \swarrow & {\scriptstyle \pi} \\ & X & \end{array} \tag{3.10}$$

□

Рассмотрим соотношение между связностями на расслоениях $Z \to X$, $Y \to Z$ и $Y \to X$. Многообразия струй J^1Z, J^1Y_Z и J^1Y соответственно расслоений $Z \to X$, $Y \to Z$ и $Y \to X$ параметризуются координатами

$$(x^\lambda, z^p, z^p_\lambda), \qquad (x^\lambda, z^p, y^i, \widetilde{y}^i_\lambda, y^i_p), \qquad (x^\lambda, z^p, y^i, z^p_\lambda, y^i_\lambda).$$

Пусть

$$A = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + A^i_\lambda \partial_i) + dz^p \otimes (\partial_p + A^i_p \partial_i) \tag{3.11}$$

– связность на расслоении $Y \to Z$ и Γ – связность на $Z \to X$. Тогда их композиция

$$\gamma = A \circ \Gamma, \tag{3.12}$$

является связностью на композиционном расслоении $Y \to X$. Она имеет вид

$$\gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma^p_\lambda \partial_p + (A^i_\lambda + A^i_p \Gamma^p_\lambda)\partial_i). \tag{3.13}$$

В частности, пусть τ – векторное поле на базе X, $\Gamma\tau$ – его горизонтальный лифт (2.17) на Z посредством связности Γ и, в свою очередь, $A(\Gamma\tau)$ – горизонтальный лифт $\Gamma\tau$ на Y посредством связности A. Тогда $A(\Gamma\tau)$ – совпадает с горизонтальным лифтом $\gamma\tau$ векторного поля τ на Y посредством композиционной связности γ (3.12).

Всякая связность A (3.11) на расслоении $Y\to Z$ задает разбиение

$$
\begin{aligned}
& VY = (Y\underset{Z}{\times} VZ)\underset{Y}{\oplus} VY_Z, \\
& \dot z^p\partial_p + \dot y^i\partial_i = \dot z^p(\partial_p + A^i_p\partial_i) + (\dot y^i - A^i_p\dot z^p)\partial_i,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

и определяет тем самым дифференциальный оператор первого порядка (вертикальный ковариантный дифференциал)

$$
\begin{aligned}
& \widetilde D_A = J^1Y \overset{(\mathrm{Id},\widetilde A)}{\longrightarrow} J^1Y\underset{Y}{\times} J^1Y \longrightarrow T^*X\underset{Y}{\otimes} VY_Z \subset T^*X\underset{Y}{\otimes} VY, \\
& \widetilde D_A = (y^i_\lambda - A^i_\lambda - A^i_p z^p_\lambda)dx^\lambda\otimes\partial_i,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

на расслоении $Y\to X$.

Композиционная связность (3.13) и вертикальный ковариантный дифференциал (3.15) обладают следующими важными свойствами.

Как уже указывалось, для всякого глобального сечения h расслоения $Z\to X$ сужение

$$h^*Y_Z = Y_Z|_{h(X)}$$

является порасслоением

$$i_h : Y^h = h^*Y_Z \hookrightarrow Y \tag{3.16}$$

расслоения $Y\to X$ и

$$VY^h = VY_Z\,|_{Y^h}\ .$$

Пусть A (3.11) – связность на $Y\to Z$ и

$$A_h = dx^\lambda\otimes(\partial_\lambda + [A^i_\lambda\circ h + (A^i_p\circ h)\partial_\lambda h^p]\partial_i) \tag{3.17}$$

– индуцированная ею связность на $Y^h \to X$. Легко показать, что ковариантный дифференциал

$$D_{A_h} : J^1Y^h \to T^*X \otimes VY^h, \tag{3.18}$$
$$D_{A_h} = (y^i_\lambda - A^i_\lambda \circ h - (A^i_p \circ h)\partial_\lambda h^p)dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

относительно связности A_h совпадает с ограничением вертикального ковариантного дифференциала $\widetilde{D}_A$ (3.15) на $J^1 i_h(J^1Y^h) \subset J^1Y$. Пусть теперь Γ – связность на $Z \to X$ и $\gamma = A \circ \Gamma$ – композиционная связность (3.12). Тогда связность γ редуцируема к связности A_h тогда и только тогда, когда сечение h является интегральным сечением связности Γ, т.е.

$$\Gamma^p_\lambda \circ h = \partial_\lambda h^p.$$

Такая связность Γ всегда существует.

3 Спонтанное нарушение симметрий в КТГ

Пусть $\pi_{PX} : P \to X$ - главное расслоение со структурной группой G и H – подгруппа Ли группы G. Тогда

$$P \to P/H \to X \tag{3.19}$$

– композиционное расслоение, где

$$\Sigma = P/H \xrightarrow{\pi_{\Sigma X}} X \tag{3.20}$$

– ассоциированное с P расслоение с типичным слоем G/H и структурной группой G, а

$$P_\Sigma = P \xrightarrow{\pi_{P\Sigma}} P/H \tag{3.21}$$

– главное расслоение со структурной группой H [65]. Говорят, что структурная группа G главного расслоения P редуцируема к подгруппе H, если существует главное подрасслоение P^h расслоения

P со структурной группой H. Это подрасслоение называется $G^{\downarrow}H$-структурой [64,66,67]. Напомним две теоремы [65].

ТЕОРЕМА 3.3. Структурная группа G главного расслоения P редуцируема к замкнутой подгруппе H тогда и только тогда, когда P имеет атлас Ψ_P с H-значными функциями перехода. □

Такой атлас Ψ_P задается семейством локальных сечений $\{z_\alpha\}$, которые принимают значения в редуцированном подрасслоении P^h.

ТЕОРЕМА 3.4. Имеет место взаимно однозначное соответствие

$$P^h = \pi_{P\Sigma}^{-1}(h(X))$$

между H-подрасслоениями P^h расслоения P и глобальными сечениями h фактор-расслоения $P/H \to X$. □

Пусть h – такое сечение. Рассмотрим сужение h^*P_Σ главного H-расслоения P_Σ (3.21) на $h(X) \subset \Sigma$. Это главное H-расслоение над X, которое изоморфно редуцированному подрасслоению P^h.

В общем случае имеются топологические препятствия редукции структурной группы главного расслоения к подгруппе. В частности, структурная группа G всегда редуцируема к подгруппе H, если фактор-пространство G/H гомеоморфно эвклидову пространству.

ТЕОРЕМА 3.5. В этом случае все H-подрасслоения P изоморфны друг другу как главные H-расслоения [158]. □

В частности, структурная группа G главного расслоения всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе.

Могут быть доказаны следующие две теоремы [13].

ТЕОРЕМА 3.6. Всякий вертикальный автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Gau}(P)$ главного расслоения $P \to X$ отображает всякое его H-подрасслоение P^h на изоморфное H-подрасслоение $P^{h'}$. □

ТЕОРЕМА 3.7. Обратно, пусть два редуцированных подрасслоения P^h и $P^{h'}$ главного расслоения P изоморфны как главные H-расслоения и пусть $\Phi : P^h \to P^{h'}$ – их изоморфизм. Тогда Φ может быть продолжен до автоморфизма расслоения P. □

Пусть P^h – редуцированное подрасслоение P и

$$Y^h = (P^h \times V)/H \tag{3.22}$$

– ассоциированное расслоение с типичным слоем V. Пусть $P^{h'}$ – другое редуцированное подрасслоение P, изоморфное P^h и

$$Y^{h'} = (P^{h'} \times V)/H.$$

Тогда расслоения Y^h и $Y^{h'}$ изоморфны, но не обязательно канонически изоморфны.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть P^h – H-подрасслоение главного G-расслоения P и Y – P^h-ассоциированное расслоение (3.22) с типичным слоем V. Если V допускает представление всей группы G, расслоение Y^h канонически изоморфно P-ассоциированному расслоению $Y = (P \times V)/G$ [13]. □

Отсюда следует, что для любого H-подрасслоения P^h главного расслоения P, всякое P-ассоциированное расслоение Y со структурной группой G имеет каноническую структуру P^h-ассоциированного расслоения Y^h со структурной группой H, т.е.

$$Y = (P \times V)/G \simeq (P^h \times V)/H = Y^h.$$

Однако, если $P^h \neq P^{h'}$, структуры P^h- и $P^{h'}$-ассоциированных расслоений на Y неэквивалентны. Действительно, объединение атласа Ψ^h расслоения P^h и атласа $\Psi^{h'}$ расслоения $P^{h'}$ с необходимостью имеет G-значные функции перехода и не является атласом H-расслоения.

Вернемся к КТГ. Так как мировое многообразие X считается параллелизуемым, очевидно, что структурная группа GL_4 реперного расслоения LX редуцируема к группе Лоренца L. Обозначим соответствующее L-подрасслоение символом L^hX. Оно определяет лоренцевскую структуру на X.

Согласно Теореме 3.4, имеет место взаимно однозначное соответствие между L-подрасслоениями L^hX реперного расслоения LX и тетрадными полями – глобальными сечениями h фактор-расслоения

$$\Sigma_{\mathrm{T}} = LX/\mathrm{L}. \tag{3.23}$$

Это LX-ассоциированное расслоение с типичным слоем GL_4/L, который гомеоморфен топологическому пространству $S^3 \times \mathbf{R}^7$. Расслоение (3.23) является двулистным накрытием расслоения метрик Σ_{PR} (2.70).

Так как X параллелизуемо, всякие два лоренцевских подрасслоения L^hX и $L^{h'}X$ реперного расслоения изоморфны друг другу. Отсюда следует, что в силу Теоремы 3.7 существует вертикальный автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Gau}(LX)$, который отображает L^hX на $L^{h'}X$. Соответствующий вертикальный автоморфизм Φ_Σ расслоения $\Sigma_{\mathrm{T}} \to X$ переводит тетрадное поле h в h'.

Каждое тетрадное поле h определяет лоренцевский атлас $\Psi^h = \{(U_\zeta, z_\zeta^h)\}$ реперного расслоения LX, такой что соответствующие локальные сечения z_ζ^h реперного расслоения LX принимают значения в лоренцевском подрасслоении L^hX.

Для всякого лоренцевского атласа Ψ^h определена тетрадная форма

$$h^a \otimes t_a = z_\zeta^{h*}\theta_{LX} = h_\lambda^a dx^\lambda \otimes t_a, \tag{3.24}$$

индуцированная канонической 1-формой θ_{LX} (2.58) посредством локального сечения z^h_ζ. Тетрадная форма (3.24) определяет тетрадные кореперы

$$h^a = h^a_\mu(x)dx^\mu, \qquad x \in U_\zeta, \tag{3.25}$$

в кокасательном расслоении T^*X, ассоциированные с лоренцевским атласом Ψ^h. Коэффициенты h^a_μ тетрадной формы и обратные элементы

$$h^\mu_a = S^\mu_a \circ z^h_\zeta \tag{3.26}$$

называются тетрадными функциями. Относительно лоренцевского атласа Ψ^h, тетрадное поле h представляется семейством тетрадных функций $\{h^\mu_a\}$. В частности, имеет место известное соотношение

$$g = h^a \otimes h^b \eta_{ab},$$
$$g_{\mu\nu} = h^a_\mu h^b_\nu \eta^{ab},$$

между тетрадными функциями и соответствующей псевдоримановой метрикой $g : X \to \Sigma_{\mathrm{PR}}$.

Пусть h – тетрадное поле и L^hX – соответствующее лоренцевское подрасслоение. Так как X некомпактно и параллелизуемо, главное расслоение L^hX может быть однозначно продолжено (с точностью до автоморфизмов) до главного L_{s}-расслоения $P^h \to X$ [104]. Имеет место морфизм главных расслоений

$$z_h : P^h \to L^hX \subset LX,$$

такой что

$$z_h \circ R_g = R_{z_L(g)}, \qquad \forall g \in L_s.$$

Пара (P^h, z_h) представляет собой спиновою структуру на мировом многообразии X, ассоциированную с h. Всякий лоренцевский атлас

$\Psi^h = \{z_\zeta^h\}$ расслоения L^hX также расширяется до атласа главного спинорного расслоения P^h.

Рассмотрим L^hX-ассоциированное расслоение на пространства Минковского

$$M^hX = (L^hX \times M)/\mathrm{L} = (P^h \times M)/L_s \tag{3.27}$$

и P^h-ассоциированное спинорное расслоение

$$S^h = (P^h \times V)/L_s, \tag{3.28}$$

называемое для простоты h-ассоциированным спинорным расслоением.

Согласно Теореме 3.8, расслоение M^hX (3.27) изоморфно кокасательному расслоению

$$T^*X \simeq (L^hX \times M)/\mathrm{L} = M^hX. \tag{3.29}$$

В результате задано представление

$$\gamma_h : T^*X \otimes S^h = (P^h \times (M \otimes V))/L_s \to (P^h \times \gamma(M \otimes V))/L_s = S^h \tag{3.30}$$

ковекторов к X дираковскими γ-матрицами на элементах спинорного расслоения S^h. Относительно атласа $\{z_\zeta\}$ расслоения P^h и ассоциированного лоренцевского атласа $\{z_\zeta^h = z_h \circ z_\zeta\}$ реперного расслоения LX представление (3.30) записывается в виде

$$y^A(\gamma_h(h^a \otimes v)) = \gamma^{aA}{}_B y^B(v), \qquad v \in S^h_x,$$

где y^A – послойные координаты на S^h и h^a – тетрадные кореперы (3.25). Коротко можно написать

$$\widehat{h}^a = \gamma_h(h^a) = \gamma^a,$$
$$\widehat{d}x^\lambda = \gamma_h(dx^\lambda) = h_a^\lambda \gamma^a.$$

Сечения s_h h-ассоциированного спинорного расслоения S^h (3.28) описывают дираковские фермионные поля в присутствии фонового тетрадного поля h. Действительно, пусть A_h – связность на расслоении S^h и

$$D_{A_h} : J^1S^h \to T^*X \underset{S^h}{\otimes} S^h,$$
$$D_{A_h} = (y^A_\lambda - A^{ab}{}_\lambda L_{ab}{}^A{}_B y^B)dx^\lambda \otimes \partial_A,$$

– соответствующий ковариантный дифференциал, где

$$VS^h \cong S^h \underset{X}{\times} S^h.$$

Тогда на S^h определен оператор Дирака

$$\mathcal{D}_h = \gamma_h \circ D_{A_h} : J^1S^h \to T^*X \otimes S^h \to S^h, \tag{3.31}$$
$$y^A \circ \mathcal{D}_h = h^\lambda_a(\gamma^a)^A{}_B(y^B_\lambda - \frac{1}{2}A^{ab}{}_\lambda L_{ab}{}^A{}_B y^B).$$

Расслоение S^h наделено также послойной метрикой

$$a_h : S^h \underset{X}{\times} S^h \to \mathbf{R},$$
$$a_h(v, v') = \frac{1}{2}(v^+\gamma^0 v' + v'^+\gamma^0 v), \qquad v, v' \in S^h.$$

С помощью этой метрики и оператора Дирака (3.31), можно построить дираковский лагранжиан на конфигурационном пространстве J^1S^h в присутствии фонового тетрадного поля h и фоновой связности A_h на S^h:

$$L_h : J^1S^h \to \overset{4}{\wedge} T^*X,$$
$$L_h = [a_h(i\mathcal{D}_h(w), w) - m a_h(w, w)]h^0 \wedge \cdots \wedge h^3, \qquad w \in J^1S^h.$$

Он имеет координатную форму

$$\mathcal{L}_h = \{\frac{i}{2}h^\lambda_q[y^+_A(\gamma^0\gamma^q)^A{}_B(y^B_\lambda - \frac{1}{2}A_\lambda{}^{ab}L_{ab}{}^B{}_C y^C) - \tag{3.32}$$
$$(y^+_{\lambda A} - \frac{1}{2}A_\lambda{}^{ab}y^+_C L^+_{ab})(\gamma^0\gamma^q)^A{}_B y^B] - m y^+_A(\gamma^0)^A{}_B y^B\}\det(h^a_\mu).$$

4 Спинорные связности

В этом параграфе мы покажем, что всякая мировая связность на многообразии X определяет спинорную связность на спинорном расслоении S^h. Это означает, что КТГ – это аффинно-метрическая теория гравитации в присутствии фермионных полей.

Напомним следующую теорему [65].

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $P' \to X$ и $P \to X$ – главные расслоения со структурными группами G' и G, соответственно. Пусть $\Phi : P' \to P$ – послойный морфизм над X при соответствующем гомоморфизме $G' \to G$. Для всякой связности A' на P', существует единственная связность A на P, такая что касательный морфизм $T\Phi$ отображает горизонтальные пространства связности A' в горизонтальные пространства связности A. □

Отсюда нетрудно показать, что существует взаимно однозначное соответствие между (спинорными) связностями на главном h-ассоциированном спинорном расслоении P^h и (лоренцевскими) связностями на главном лоренцевском расслоении L^hX [13,107,114]. В частности, связность Леви–Чивита тетрадного поля h определяет спинорную связность

$$A_\lambda{}^{ab} = \eta^{kb} h^a_\mu (\partial_\lambda h^\mu_k - h^\nu_k \{_\lambda{}^\mu{}_\nu\}) \tag{3.33}$$

на h-ассоциированном спинорном расслоении S^h.

Согласно Теореме 3.9 всякая лоренцевская связность A_h на лоренцевском подрасслоении L^hX реперного расслоения LX порождает мировую связность K

$$K_\lambda{}^\mu{}_\nu = h^k_\nu \partial_\lambda h^\mu_k + \eta_{ka} h^\mu_b h^k_\nu A_\lambda{}^{ab}$$

на LX. Обратно, всякая связность K на реперном расслоении LX следующим образом определяет лоренцевскую связность K_h на L-подрасслоении L^hX. Легко видеть, что алгебра Ли общей линейной группы GL_4 представляет собой прямую сумму

$$\mathcal{G}(GL_4) = \mathcal{G}(\mathrm{L}) \oplus \mathbf{m}$$

алгебры Ли $\mathcal{G}(\mathrm{L})$ группы Лоренца и подпространства $\mathbf{m}$, такого что

$$ad(l)(\mathbf{m}) \subset \mathbf{m}, \qquad \forall l \in \mathrm{L}.$$

Пусть ω_K – форма связности для связности K на главном расслоении LX. Тогда согласно известной теореме [65] индукция на L^hX $\mathcal{G}_l(\mathrm{L})$-значной компоненты ω_L формы ω_K является формой связности для связности K_h на лоренцевском подрасслоении L^hX. Эта форма имеет вид

$$z_\zeta^{h*}\omega_K = K_\lambda{}^b{}_k dx^\lambda \otimes e_b{}^k,$$
$$K_\lambda{}^b{}_k = -h^b_\mu \partial_\lambda h^\mu_k + K_\lambda{}^\mu{}_\nu h^b_\mu h^\nu_k,$$

где $\{e_b{}^k\}$ – базис алгебры Ли группы GL_4. Ее лоренцевская часть

$$z_\zeta^{h*}\omega_L = \frac{1}{2} A_\lambda{}^{ab} dx^\lambda \otimes e_{ab}, \tag{3.34}$$
$$A_\lambda{}^{ab} = \frac{1}{2}(\eta^{kb}h^a_\mu - \eta^{ka}h^b_\mu)(\partial_\lambda h^\mu_k - h^\nu_k K_\lambda{}^\mu{}_\nu),$$

– в точности локальная 1-форма связности для связности K_h на L^hX. Если K – лоренцевская связность A_h, то очевидно $K_h = A_h$.

Связность K_h на L^hX, задаваемая локальной 1-формой связности (3.34), определяет спинорную связность на S^h

$$K_h = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + \frac{1}{4}(\eta^{kb}h^a_\mu - \eta^{ka}h^b_\mu)(\partial_\lambda h^\mu_k - h^\nu_k K_\lambda{}^\mu{}_\nu) L_{ab}{}^A{}_B y^B \partial_A], \tag{3.35}$$

где L_{ab} – генераторы (3.6) [13,107,114]. Такая связность рассматривалась в работах [106,159,160]. Подставляя спинорную связность

(3.35) в оператор Дирака (3.31) и дираковский лагранжиан (3.32), мы получаем описание дираковских фермионных полей в присутствии произвольной мировой связности, т.е. в рамках аффинно-метрической теории.

Связность (3.35) можно использовать, чтобы получить горизонтальный лифт на S^h векторных полей τ на X. Он дается выражением

$$\tau_{K_h} = \tau^\lambda\partial_\lambda + \frac{1}{4}\tau^\lambda(\eta^{kb}h^a_\mu - \eta^{ka}h^b_\mu)(\partial_\lambda h^\mu_k - h^\nu_k K_\lambda{}^\mu{}_\nu)L_{ab}{}^A{}_B y^B\partial_A. \qquad (3.36)$$

Более того, мы имеем канонический горизонтальный лифт

$$\tilde\tau = \tau^\lambda\partial_\lambda + \frac{1}{4}(\eta^{kb}h^a_\mu - \eta^{ka}h^b_\mu)(\tau^\lambda\partial_\lambda h^\mu_k - h^\nu_k\partial_\nu\tau^\mu)L_{ab}{}^A{}_B y^B\partial_A \qquad (3.37)$$

векторных полей τ на X на h-ассоциированное спинорное расслоение S^h [13,107].

Лифт (3.37) может быть переписан в форме

$$\tilde\tau = \tau_{\{\}} - \frac{1}{4}(\eta^{kb}h^a_\mu - \eta^{ka}h^b_\mu)h^\nu_k\nabla_\nu\tau^\mu L_{ab}{}^A{}_B y^B\partial_A,$$

где $\tau_{\{\}}$ – горизонтальный лифт (3.36) векторного поля τ посредством спинорной связности Леви–Чивита (3.33) тетрадного поля h и $\nabla_\nu\tau^\mu$ – соответствующая ковариантная производная. Это в точности производная Ли спинорных полей, полученная в [161,162].

Канонический лифт (3.37) однако не является генератором общих ковариантных преобразований, поскольку он не действует на тетрадные поля. Чтобы определить общие ковариантные преобразования спинорных расслоений, нужно рассмотреть спинорные расслоения, ассоциированные с различными тетрадными полями. Трудность состоит в том, что, хотя лоренцевские подрасслоения L^hX и $L^{h'}X$ изоморфны, соответствующие лоренцевские структуры M^hX и $M^{h'}X$ (3.29) на кокасательном расслоении T^*X неэквивалентны. Как следствие этого представления γ_h и $\gamma_{h'}$ (3.30) для разных тетрадных полей h и h' тоже неэквивалентны [33,78]. Поэтому всякое дираковское фермионное поле должно описываться только в паре с определенным тетрадным полем. В этом проявляется хиггсовская природа геометрического гравитационного поля [33].

5 Универсальная спиновая структура

Все спиновые структуры на многообразии X, связанные с двулистными накрытиями, имеют следующие общие свойства [163].

Пусть $P \to X$ – главное расслоение со структурной группой G, имеющей фундаментальную группу $\pi_1(G) = \mathbf{Z}_2$. Обозначим $\widetilde{G}$ ее универсальную накрывающую группу. Топологическим препятствием существованию главного $\widetilde{G}$-расслоения $\widetilde{P} \to X$, накрывающего P, является группа когомологий Чеха $H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$. Коротко говоря, главное расслоение P определяет элемент из $H^2(X; \mathbf{Z}_2)$, который должен равняться нулю, чтобы $P \to X$ могло быть продолжено до $\widetilde{P} \to X$. При этом неэквивалентные продолжения P до $\widetilde{G}$ параметризуются элементами группы $H^1(X; \mathbf{Z}_2)$.

В частности, препятствием существованию спиновой структуры на X является ненулевой класс Штифеля–Уитни многообразия X, и в случае 4-мерных некомпактных многообразий все псевдоримановы спиновые структуры изоморфны, но не канонически изоморфны.

Рассмотрим эти структуры, основываясь на следующих двух фактах [13].

ТЕОРЕМА 3.10. Главное L-расслоение

$$P_L := GL_4 \to GL_4/L \tag{3.38}$$

тривиально. □

ТЕОРЕМА 3.11. Так как первая гомотопическая группа группы GL_4 – это $\mathbf{Z}_2$, GL_4 допускает универсальную накрывающую группу $\widetilde{GL}_4$, такую что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{GL}_4 & \longrightarrow & GL_4 \\ \uparrow & & \uparrow \\ L_s & \xrightarrow{z_L} & L \end{array} \tag{3.39}$$

□

Универсальная спиновая структура на X задается парой главного $\widetilde{GL}_4$-расслоения $\widetilde{LX} \to X$ и послойного морфизма

$$\tilde{z} : \widetilde{LX} \to LX \tag{3.40}$$

[72,108,110]. Она единственна, так как X параллелизуемо. Согласно Теореме 3.11, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{LX} & \xrightarrow{\tilde{z}} & LX \\ \uparrow & & \uparrow \\ P^h & \xrightarrow{z_h} & L^hX \end{array} \tag{3.41}$$

коммутативна для всякого тетрадного поля h [13,111]. Отсюда следует, что фактор-пространство $\widetilde{LX}/L_s$ совпадает с фактор-пространством $\Sigma_{\rm T}$ (3.23) так, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{LX} & \xrightarrow{\tilde{z}} & LX \\ & \searrow\swarrow & \\ & \Sigma_{\rm T} & \end{array} \tag{3.42}$$

Рассмотрим композицию расслоений

$$\widetilde{LX} \to \Sigma_{\rm T} \to X, \tag{3.43}$$

где $\widetilde{LX} \to \Sigma_T$ – главное $L_{\rm s}$-расслоение. Для всякого тетрадного поля $h : X \to \Sigma_{\rm T}$, ограничение $L_{\rm s}$-расслоения $\widetilde{LX} \to \Sigma_T$ на $h(X) \subset \Sigma_T$

изоморфно h-ассоциированному главному спинорному расслоению P^h. Поэтому можно сказать, что диаграмма (3.42) определяет универсальную спиновую структуру.

Универсальная спиновая структура (3.42) может рассматриваться как L_s-спиновая структура на расслоении на пространства Минковского

$$E_M = (LX \times M)/L \to \Sigma_T,$$

ассоциированного с главным L-расслоением $LX \to \Sigma_T$. Поскольку расслоения LX и P_L (3.38) тривиальны, расслоение $E_M \to \Sigma_T$ тоже тривиально. Оно изоморфно индуцированному расслоению

$$\Sigma_T \underset{X}{\times} T^*X. \tag{3.44}$$

Можно показать, что спиновая структура на этом расслоении единственна [13].

Рассмотрим теперь композиционное спинорное расслоение

$$S \xrightarrow{\pi_{S\Sigma}} \Sigma_T \xrightarrow{\pi_{\Sigma X}} X, \tag{3.45}$$

где $S = (\widetilde{LX} \times V)/L_s$ – спинорное расслоение $S \to \Sigma_T$, ассоциированное с главным L_s-расслоением $\widetilde{LX} \to \Sigma_T$. Для всякого тетрадного поля h, существует канонический изоморфизм

$$i_h : S^h = (P^h \times V)/L_s \to (h^*\widetilde{LX} \times V)/L_s$$

h-ассоциированного спинорного расслоения S^h (3.28) на ограничение h^*S спинорного расслоения $S \to \Sigma_T$ на $h(X) \subset \Sigma_T$. Отсюда следует, что всякое сечение s_h спинорного расслоения S^h соответствует глобальному сечению $i_h \circ s_h$ композиционного спинорного расслоения (3.45). Обратно, всякое глобальное сечение s композиционного спинорного расслоения (3.45), проектируемое на тетрадное поле h, принимает значения в подрасслоении $i_h(S^h) \subset S$.

Пусть заданы голономный атлас реперного расслоения $LX \to X$ и ассоциированные атласы $\{U_\epsilon, z^s_\epsilon\}$ и $\{U_\epsilon, z_\epsilon = \tilde{z} \circ z^s_\epsilon\}$ расслоений $\widetilde{LX} \to \Sigma_{\mathrm{T}}$ и $LX \to \Sigma_{\mathrm{T}}$. Относительно этих атласов композиционное спинорное расслоение S наделяется послойными координатами $(x^\lambda, \sigma^\mu_a, y^A)$, где $(x^\lambda, \sigma^\mu_a)$ – координаты на Σ_{T}, такие что σ^μ_a – компоненты матрицы группового элемента $(T\phi_\zeta \circ z_\epsilon)(\sigma)$, $\sigma \in U_\epsilon$, $\pi_{\Sigma X}(\sigma) \in U_\zeta$. Для всякого сечения h расслоения Σ_{T} мы получаем $(\sigma^\lambda_a \circ h)(x) = h^\lambda_a(x)$.

Композиционное спинорное расслоение S наделено послойной метрикой

$$a_S(v, v') = \frac{1}{2}(v^+\gamma^0 v' + v'^+\gamma^0 v), \qquad \pi_{S\Sigma}(v) = \pi_{S\Sigma}(v').$$

Так как расслоение на пространство Минковского $E_M \to \Sigma_{\mathrm{T}}$ изоморфно индуцированному расслоению (3.44), существует представление

$$\gamma_\Sigma : T^*X \underset{\Sigma_{\mathrm{T}}}{\otimes} S = (\widetilde{LX} \times (M \otimes V))/L_{\mathrm{s}} \to (\widetilde{LX} \times \gamma(M \otimes V))/L_{\mathrm{s}} = S, \quad (3.46)$$

имеющее координатное выражение

$$\widehat{d}x^\lambda = \gamma_\Sigma(dx^\lambda) = \sigma^\lambda_a \gamma^a.$$

Будучи ограниченным на $h(X) \subset \Sigma_T$, это представление воспроизводит морфизм γ_h (3.30).

Используя это представление, можно построить оператор Дирака на композиционном спинорном расслоении S [11,13,107]. Поскольку расслоения, составляющие композиционное расслоение (3.43), тривиальны, рассмотрим связность A_Σ (3.11) на главном L_{s}-расслоении $\widetilde{LX} \to \Sigma_{\mathrm{T}}$, задаваемую следующей локальной формой связности:

$$A_\Sigma = (A_\lambda{}^{ab} dx^\lambda + A^{kab}_\mu d\sigma^\mu_k) \otimes L_{ab}, \quad (3.47)$$

где

$$A_\lambda{}^{ab} = -\frac{1}{2}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)\sigma^\nu_k K_\lambda{}^\mu{}_\nu,$$
$$A^{kab}_\mu = \frac{1}{2}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu) \qquad (3.48)$$

и K – некоторая мировая связность на X. Связность (3.47) определяет соответствующую спинорную связность

$$A_S = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \frac{1}{2}A_\lambda{}^{ab}L_{ab}{}^A{}_B y^B\partial_A) + d\sigma^\mu_k \otimes (\partial^k_\mu + \frac{1}{2}A^{kab}_\mu L_{ab}{}^A{}_B y^B\partial_A) \quad (3.49)$$

на спинорном расслоении $S \to \Sigma_\mathrm{T}$. Пусть h – глобальное сечение расслоения $\Sigma_\mathrm{T} \to X$ и S^h – сужение спинорного расслоения $S \to \Sigma_\mathrm{T}$ на $h(X)$. Тогда ограничение спинорной связности (3.49) на S^h совпадает со спинорной связностью (3.35).

Связность (3.49) определяет вертикальный ковариантный дифференциал $\widetilde{D}$ (3.15) на композиционном расслоении $S \to X$:

$$\widetilde{D} : J^1S \to T^*X \underset{\Sigma_T}{\otimes} S,$$
$$\widetilde{D} = dx^\lambda \otimes [y^A_\lambda - \frac{1}{2}(A_\lambda{}^{ab} + A^{kab}_\mu\sigma^\mu_{\lambda k})L_{ab}{}^A{}_B y^B]\partial_A = \qquad (3.50)$$
$$dx^\lambda \otimes [y^A_\lambda - \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)(\sigma^\mu_{\lambda k} - \sigma^\nu_k K_\lambda{}^\mu{}_\nu)L_{ab}{}^A{}_B y^B]\partial_A.$$

При этом сужение оператора $\widetilde{D}$ (3.50) на $J^1S^h \subset J^1S$ сводится к обычному ковариантному дифференциалу на спинорном расслоении $S^h \to X$, отвечающему спинорной связности (3.37).

Объединяя (3.46) и (3.50), мы получаем дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathcal{D} = \gamma_\Sigma \circ \widetilde{D} : J^1S \to T^*X \underset{\Sigma_T}{\otimes} S \to S, \qquad (3.51)$$
$$y^B \circ \mathcal{D} = \sigma^\lambda_a \gamma^{aB}{}_A[y^A_\lambda - \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)(\sigma^\mu_{\lambda k} - \sigma^\nu_k K_\lambda{}^\mu{}_\nu)L_{ab}{}^A{}_B y^B],$$

на композиционном расслоении $S \to X$. Это полный оператор Дирака в том смысле, что для всякого тетрадного поля h ограничение

$\mathcal{D}$ на $J^1S^h \subset J^1S$ воспроизводит оператор Дирака $\mathcal{D}_h$ (3.31) на h-ассоциированном спинорном расслоении S^h в присутствии фонового тетрадного поля h и спинорной связности (3.35).

Таким образом, КТГ сводится к модели афинно-метрической гравитации и дираковских фермионных полей. Полным конфигурационным пространством этой модели является многообразие струй произведения расслоений

$$Y = C_K \underset{\Sigma_{\rm T}}{\times} S, \tag{3.52}$$

где C_K – расслоение мировых связностей (2.85). Оно параметризуется координатами $(x^\mu, \sigma^\mu_a, k_\mu{}^\alpha{}_\beta, y^A)$.

Обозначим $J^1_\Sigma Y$ многообразие струй расслоения $Y \to \Sigma_{\rm T}$. Оно наделяется спинорной связностью

$$A_Y : Y \longrightarrow J^1_\Sigma Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} J^1_\Sigma S, \tag{3.53}$$
$$A_Y = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \widetilde{A}_\lambda{}^{ab} L_{ab}{}^A{}_B y^B \partial_A) + d\sigma^\mu_k \otimes (\partial^k_\mu + A^{kab}_\mu L_{ab}{}^A{}_B y^B \partial_A),$$

где A^{kab}_μ дается выражением (3.48) и

$$\widetilde{A}_\lambda{}^{ab} = -\frac{1}{2}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)\sigma^\nu_k k_\lambda{}^\mu{}_\nu.$$

Используя связность (3.53), мы получаем дифференциальный оператор первого порядка

$$\widetilde{D}_Y : J^1Y \to T^*X \underset{\Sigma_{\rm T}}{\otimes} S, \tag{3.54}$$
$$\widetilde{D}_Y = dx^\lambda \otimes [y^A_\lambda - \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)(\sigma^\mu_{\lambda k} - \sigma^\nu_k k_\lambda{}^\mu{}_\nu) L_{ab}{}^A{}_B y^B]\partial_A,$$

и полный оператор Дирака

$$\mathcal{D}_Y = \gamma_\Sigma \circ \widetilde{D} : J^1Y \to T^*X \underset{\Sigma_{\rm T}}{\otimes} S \to S, \tag{3.55}$$
$$y^B \circ \mathcal{D}_Y = \sigma^\lambda_a \gamma^{aB}{}_A [y^A_\lambda - \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)(\sigma^\mu_{\lambda k} - \sigma^\nu_k k_\lambda{}^\mu{}_\nu) L_{ab}{}^A{}_B y^B],$$

на расслоении $Y \to X$.

Для всякого сечения $K : X \to C_K$ ограничения спинорной связности A_Y (3.53), оператора $\widetilde{D}_Y$ (3.54) и оператора Дирака $\mathcal{D}_Y$ (3.55) на K^*Y совпадает со спинорной связностью (3.49) и операторами (3.50) и (3.51) соответственно.

Полный лагранжиан на конфигурационном пространстве J^1Y аффинно-метрической гравитации и фермионных полей представляет собой сумму

$$L = L_{\mathrm{AM}} + L_{\mathrm{D}} \tag{3.56}$$

аффинно-метрического лагранжиана

$$L_{\mathrm{AM}}(R_{\mu\lambda}{}^{\alpha}{}_{\beta}, \sigma^{\mu\nu}), \qquad \sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\mu}_{a}\sigma^{\nu}_{b}\eta^{ab},$$

и дираковского лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \{ & \frac{i}{2}\sigma^{\lambda}_{q}[y^{+}_{A}(\gamma^{0}\gamma^{q})^{A}{}_{B}(y^{B}_{\lambda} - \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^{a}_{\mu} - \eta^{ka}\sigma^{b}_{\mu})(\sigma^{\mu}_{\lambda k} - \sigma^{\nu}_{k}k_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu})L_{ab}{}^{B}{}_{C}y^{C}) - \\ & (y^{+}_{\lambda A} - \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^{a}_{\mu} - \eta^{ka}\sigma^{b}_{\mu})(\sigma^{\mu}_{\lambda k} - \sigma^{\nu}_{k}k_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu})y^{+}_{C}L^{+}_{ab}{}^{C}{}_{A}(\gamma^{0}\gamma^{q})^{A}{}_{B}y^{B}] - \\ & m y^{+}_{A}(\gamma^{0})^{A}{}_{B}y^{B}\}\sqrt{|\,\sigma\,|}, \qquad \sigma = \det(\sigma_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Легко заметить, что

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\psi}}{\partial k_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_{\psi}}{\partial k_{\nu}{}^{\mu}{}_{\lambda}} = 0,$$

т.е. дираковский лагранжиан (3.57) зависит только от кручения мировой связности.

6 Закон сохранения энергии-импульса в КТГ

Чтобы получить закон сохранения энергии-импульса, рассмотрим общие ковариантные преобразования в КТГ. Так как мировое многообразие X параллелизуемо и универсальная спиновая структура единственна, главное $\widetilde{GL}_4$-расслоение $\widetilde{LX} \to X$ так же как реперное расслоение LX допускает канонический лифт всякого диффеоморфизма f базы X. Этот лифт задается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{LX} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "\tilde{z}"'] & \widetilde{LX} \arrow[d, "\tilde{z}"] \\
LX \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & LX \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

где Φ – голономный автоморфизм LX (2.59), индуцируемый f [108].

Соответствующий морфизм спинорного расслоения S (3.45) дается соотношением

$$\widetilde{\Phi}_S : (p, v)/L_{\rm s} \to (\widetilde{\Phi}(p), v)/L_{\rm s}, \qquad p \in \widetilde{LX}, \qquad v \in V.$$

Поскольку морфизм $\widetilde{\Phi}$ эквивариантен, он является послойным автоморфизмом расслоения $S \to \Sigma_{\rm T}$ над каноническим автоморфизмом Φ_Σ LX-ассоциированного тетрадного расслоения $\Sigma_{\rm T} \to X$ (3.23), индуцированного диффеоморфизмом f базы X. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма общих ковариантных преобразований спинорного расслоения S.

Соответственно существует канонический лифт $\tilde{\tau}_S$ на S всякого векторного поля τ на X. Найдем его явное координатное выражение. Трудность состоит в том, что тетрадные координаты σ^μ_a расслоения $\Sigma_{\rm T}$ зависят от выбора атласа расслоения $LX \to \Sigma_{\rm T}$. Поэтому неканонические вертикальные компоненты появляются в выражении для $\tilde{\tau}$.

Сравнение с каноническим лифтом (2.71) векторного поля τ на расслоение метрик $\Sigma_{\rm PR}$ показывает, что подобный лифт на расслоение тетрад $\Sigma_{\rm T}$ должен принимать форму

$$\widetilde{\tau}_\Sigma = \tau^\lambda\partial_\lambda + \partial_\nu\tau^\mu\sigma^\nu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c} + Q^\mu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c}, \tag{3.58}$$

где компоненты Q^μ_c удовлетворяют условию

$$(Q^\mu_a\sigma^\nu_b + Q^\nu_a\sigma^\mu_b)\eta^{ab} = 0$$

и составляют вышеупомянутую неканоническую часть лифта (3.58).

Рассмотрим горизонтальный лифт векторного поля $\widetilde{\tau}_\Sigma$ на спинорное расслоение $S \to \Sigma_{\rm T}$ посредством спинорной связности (3.49). Он имеет вид

$$\begin{aligned}
A_S\widetilde{\tau}_\Sigma = {} & \tau^\lambda\partial_\lambda + \partial_\nu\tau^\mu\sigma^\nu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c} + \\
& \frac{1}{4}(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)\sigma^\nu_k(\partial_\nu\tau^\mu - K_\lambda{}^\mu{}_\nu\tau^\nu)(L_{ab}{}^A{}_By^B\partial_A + L^+_{ab}{}^A{}_By^+_A\partial^B) + \\
& Q^\mu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c} + \frac{1}{4}Q^\mu_k(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)(L_{ab}{}^A{}_By^B\partial_A + L^+_{ab}{}^A{}_By^+_A\partial^B).
\end{aligned}$$

Более того, как и выше, мы получаем канонический лифт поля τ на расслоение S [13]:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_S = {} & \tau^\lambda\partial_\lambda + \partial_\nu\tau^\mu\sigma^\nu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c} + \\
& Q^\mu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c} + \frac{1}{4}Q^\mu_k(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)(L_{ab}{}^A{}_By^B\partial_A + L^+_{ab}{}^A{}_By^+_A\partial^B),
\end{aligned} \tag{3.59}$$

который может быть записан в форме

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_S = {} & \tau^\lambda\partial_\lambda + \partial_\nu\tau^\mu\sigma^\nu_c\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu_c} + \\
& \frac{1}{4}Q^\mu_k(\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)[-L_{ab}{}^d{}_c\sigma^\nu_d\frac{\partial}{\partial\sigma^\nu_c} + L_{ab}{}^A{}_By^B\partial_A + L^+_{ab}{}^A{}_By^+_A\partial^B].
\end{aligned}$$

Соответствующее векторное поле на произведении Y (3.52) имеет вид

$$\widetilde{\tau}_Y = \widetilde{\tau} + \vartheta,$$

$$\tilde{\tau} = \tau^\lambda \partial_\lambda + \partial_\nu \tau^\mu \sigma^\nu_c \frac{\partial}{\partial \sigma^\mu_c} + \tag{3.60}$$
$$[\partial_\nu \tau^\alpha k_\mu{}^\nu{}_\beta - \partial_\beta \tau^\nu k_\mu{}^\alpha{}_\nu - \partial_\mu \tau^\nu k_\nu{}^\alpha{}_\beta + \partial_{\mu\beta}\tau^\alpha]\frac{\partial}{\partial k_\mu{}^\alpha{}_\beta},$$
$$\vartheta = \frac{1}{4} Q^\mu_k (\eta^{kb}\sigma^a_\mu - \eta^{ka}\sigma^b_\mu)[-L_{ab}{}^d{}_c \sigma^\nu_d \frac{\partial}{\partial \sigma^\nu_c} + L_{ab}{}^A{}_B y^B \partial_A + L^+_{ab}{}^A{}_B y^+_A \partial^B].$$

Его каноническая часть $\tilde{\tau}$ (3.60) представляет собой генератор локальной 1-параметрической группы общих ковариантных преобразований расслоения Y, тогда как вертикальное векторное поле ϑ – это генератор локальной 1-параметрической группы лоренцевских автоморфизмов расслоения $S \to \Sigma_T$.

По построению лагранжиан (3.56) удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{L}_{J^1\vartheta} L_{\rm D} = 0, \tag{3.61}$$
$$\mathbf{L}_{J^1\tilde{\tau}} L_{\rm AM} = 0, \qquad \mathbf{L}_{J^1\tilde{\tau}} L_{\rm D} = 0. \tag{3.62}$$

Равенство (3.61) приводит к нетеровским законам сохранения. Рассмотрим уравнение (3.62) для того, чтобы получить закон сохранения энергии-импульса аффинно-метрической гравитации и фермионных полей.

Используя компактные обозначения, запишем векторное поле $\tilde{\tau}$ (3.60) в виде

$$\tilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu + \partial_\nu \tau^\mu \sigma^\nu_a \frac{\partial}{\partial \sigma^\mu_a} + (u^{A\beta}{}_\alpha \partial_\beta \tau^\alpha + u^{A\varepsilon\beta}{}_\alpha \partial_{\varepsilon\beta}\tau^\alpha)\partial_A.$$

В силу произвольности функций τ^α, равенства (3.62) приводят к системе сильных равенств

$$\delta^\beta_\alpha \mathcal{L}_{\rm AM} + 2\sigma^{\beta\mu}\delta_{\alpha\mu}\mathcal{L}_{\rm AM} + u^{A\beta}{}_\alpha \delta_A \mathcal{L}_{\rm AM} + d_\mu(\pi^\mu_A u^{A\beta}{}_\alpha) = y^A_\alpha \partial^\beta_A \mathcal{L}_{\rm AM} \tag{3.63}$$

и

$$\delta^\beta_\alpha \mathcal{L}_{\rm D} + \sqrt{\sigma} t^\beta_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm D}}{\partial \sigma^\alpha_{\lambda c}} \sigma^\beta_{\lambda c} + \partial_A \mathcal{L}_{\rm D} u^{A\beta}_\alpha = \tag{3.64}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm D}}{\partial \sigma^\mu_{\beta c}} \sigma^\mu_{\alpha c} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm D}}{\partial y^A_\beta} y^A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm D}}{\partial y^+_{\beta A}} y^+_{\alpha A},$$

где

$$\sqrt{\sigma}t^\beta_\alpha = \sigma^\beta_a \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial\sigma^\alpha_a}.$$

Мы имеем также соотношения (2.91), (2.92) и

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial k_\lambda{}^\mu{}_\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial\sigma^\mu_{\lambda c}}\sigma^\nu_c. \tag{3.65}$$

Соответствующий закон сохранения энергии-импульса имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \approx -d_\lambda[\partial^\lambda_A\mathcal{L}_\mathrm{AM}(y^A_\alpha\tau^\alpha - u^{A\beta}{}_\alpha\partial_\beta\tau^\alpha - u^{A\varepsilon\beta}{}_\alpha\partial_{\varepsilon\beta}\tau^\alpha) - \\ \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial\sigma^\alpha_{\lambda c}}(\partial_\beta\tau^\alpha\sigma^\beta_c - \sigma^\alpha_{\mu c}\tau^\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial y^A_\lambda}y^A_\alpha\tau^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial y^+_{\lambda A}}y^+_{\alpha A}\tau^\alpha - \tau^\lambda\mathcal{L}]. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Подставляя члены $y^A_\alpha\partial^\beta_A\mathcal{L}_\mathrm{AM}$ из (3.63) и

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial\sigma^\mu_{\beta c}}\sigma^\mu_{\alpha c} + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial y^A_\beta}y^A_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial y^+_{\beta A}}y^+_{\alpha A}$$

из (3.64) в (3.66), мы приводим закон сохранения к суперпотенциальной форме

$$\begin{aligned} 0 \approx -d_\lambda[2\sigma^{\lambda\mu}\tau^\alpha\delta_{\alpha\mu}\mathcal{L} + (k_\mu{}^\lambda{}_\gamma\delta^\mu{}_\alpha{}^\gamma\mathcal{L} - k_\mu{}^\sigma{}_\alpha\delta^\mu{}_\sigma{}^\lambda\mathcal{L} - k_\alpha{}^\sigma{}_\gamma\delta^\lambda{}_\sigma{}^\gamma\mathcal{L})\tau^\alpha + \\ \delta^\lambda{}_\alpha{}^\mu\mathcal{L}\partial_\mu\tau^\alpha - d_\mu(\delta^\mu{}_\alpha{}^\lambda\mathcal{L})\tau^\alpha + d_\mu(\pi^{\mu\lambda}{}_\alpha{}^\nu(\partial_\nu\tau^\alpha - k_\sigma{}^\alpha{}_\nu\tau^\sigma))] - \\ d_\lambda[(\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial\sigma^\alpha_{\mu a}}\sigma^\lambda_a + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{D}}{\partial\sigma^\alpha_{\lambda a}}\sigma^\mu_a)\partial_\mu\tau^\alpha]. \end{aligned} \tag{3.67}$$

В силу соотношения (3.65) последний член в выражении (3.67) исчезает, т.е. фермионные поля не дают вклад в суперпотенциал. Таким образом, закон сохранения энергии-импульса (3.66) принимает суперпотенциальный вид, где U – обобщенный суперпотенциал Комара (2.100).

7 РТГ. Калибровочный подход

Вернемся к случаю фермионных полей в присутствии фонового тетрадного поля h.

Всякое общее ковариантное преобразование $\widetilde{f}$ реперного расслоения LX можно представить как суперпозицию его автоморфизма $\widetilde{f}_h$ над f, сохраняющего подрасслоение L^hX, и некоторого вертикального автоморфизма

$$\Phi : p \mapsto p\phi(p), \qquad p \in LX, \tag{3.68}$$

где ϕ – GL_4-значная функция на LX, такая что

$$\phi(pg) = g^{-1}\phi(p)g, \qquad g \in GL_4.$$

Автоморфизм $\widetilde{f}_h$ продолжается до автоморфизма главного спинорного расслоения P^h и до соответствующего автоморфизма $\widetilde{f}_s$ спинорного расслоения S^h. Он с очевидностью сохраняет представление (3.30). Обратимся поэтому к вертикальному автоморфизму Φ.

Рассмотрим ассоциированное с LX групповое расслоение $Q \to X$, типичным слоем которого является группа GL_4, действующая на себя по присоединенному представлению [33,115]. Имеет место каноническое действие

$$\begin{aligned} &\rho : Q \underset{X}{\times} Y \to Y, \\ &\rho : ((p,g)/GL_4, (p,v)/GL_4) \mapsto (p, gv)/GL_4, \end{aligned} \tag{3.69}$$

Q на всякое LX-ассоциированное расслоение Y. При этом для любого вертикального автоморфизма Φ (3.68) задано отображение

$$\overline{\Phi} : (p,q)/GL_4 \mapsto (p, f(p)q)/GL_4 \tag{3.70}$$

расслоения Q на себя, такое что

$$\rho(\overline{\Phi}(Q) \times \Phi_Y(Y)) = \rho(Q \times Y), \tag{3.71}$$

где Φ_Y – ассоциированный с Φ автоморфизм Y. Пусть $Y = T^*X$ с координатами (x^λ, t_λ) и $(x^\lambda, q^\lambda{}_\mu)$ – координаты на Q. Тогда выражения

(3.69) – (3.71) принимают простой координатный вид

$$\rho : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu, t_\mu) \mapsto (x^\lambda, t_\lambda q^\lambda{}_\mu),$$
$$\overline{\Phi} : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu) \mapsto (x^\lambda, S^\lambda{}_\nu q^\nu{}_\mu),$$
$$\rho(x^\lambda, S^\lambda{}_\nu q^\nu{}_\mu, t_\alpha (S^{-1})^\alpha{}_\lambda) = (x^\lambda, t_\lambda q^\lambda{}_\mu).$$

В результате определено представление

$$\gamma_Q : (Q \times T^*X) \otimes_Q (Q \times S^h) \to (Q \times S^h),$$
$$\gamma_Q = \gamma_h \circ \rho : Q \underset{X}{\times} T^*X \ni (q, t^*) \mapsto t_\lambda q^\lambda{}_\mu \widehat{d}x^\mu = t_\lambda q^\lambda{}_\mu h^\mu_a \gamma^a, \quad (3.72)$$

на элементах спинорного расслоения S^h. Используя это представление, можно построить оператор Дирака на расслоении $Q \times S^h$:

$$\mathcal{D}_Q = q^\lambda{}_\mu h^\mu_a \gamma^a D_\lambda, \quad (3.73)$$

где D_λ – ковариантные производные относительно связности (3.35) на расслоении S^h, порождаемой некоторой общей линейной связностью K на X. Пусть q_0 – каноническое глобальное сечение расслоения $Q \to X$, которое принимает значения в единичных элементах слоев расслоения Q. При ограничении на q_0 представление γ_Q (3.72) сводится к представлению γ_h (3.30), а оператор Дирака (3.73) к оператору Дирака на S^h для фермионных полей в присутствии фонового тетрадного поля h.

Для всякого общего ковариантного преобразования $\widetilde{f} = \Phi \circ \widetilde{f}_h$ над f реперного расслоения LX рассмотрим преобразование

$$\widetilde{f}_Q : Q \to \overline{\Phi}_Q \circ \widetilde{f}_h(Q), \qquad S^h \to \widetilde{f}_s(S^h), \qquad T^*X \to T^*f(T^*X). \quad (3.74)$$

Оно сохраняет представление (3.72), т.е.

$$\gamma_Q \circ \widetilde{f}_Q = \widetilde{f}_Q \circ \gamma_Q.$$

Сечение $q(x)$ ассоциированного с LX группового расслоения Q является динамической переменной в данной моделе и может интерпретироваться как гравитационное поле РТГ [116]. Действительно, имеет место каноническое отображение

$$\begin{aligned}
&\rho : Q \underset{X}{\times} \Sigma \to \Sigma, \\
&\rho : ((p,g)/GL_4, (p,\sigma)/GL_4) \to (p, g\sigma)/GL_4, \qquad p \in LX, \\
&\rho : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu, \sigma^\mu_a) \mapsto (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu \sigma^\mu_a).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

При ограничении на $h(X) \subset \Sigma$ оно принимает вид

$$\begin{aligned}
&\rho_h : Q \to \Sigma, \\
&\rho_h : ((p,g)/L, (p,\sigma_0)/L) \to (p, g\sigma_0)/L, \qquad p \in L^h X, \\
&\rho_h : (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu) \mapsto (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu h^\mu_a),
\end{aligned} \tag{3.76}$$

где σ_0 – центр фактор-пространства GL_4/L и расслоение $\Sigma \to X$ наделено лоренцевской структурой ассоциированного с $L^h X$ расслоения. Обозначим его Σ_h с координатами $\tilde\sigma^\mu_a$. Оно изоморфно фактору расслоения Q по ядру $\mathrm{Ker}\,_h\rho_h$ морфизма (3.76) относительно сечения h. Поэтому представление (3.72), которое постоянно на $\mathrm{Ker}\,_h\rho_h$, сводится к представлению

$$\begin{aligned}
&(\Sigma_h \times T^*X) \otimes_{\Sigma_h} (\Sigma_h \times S^h) \to (\Sigma_h \times S^h), \\
&(\tilde\sigma, t^*) \mapsto t_\lambda \tilde\sigma^\lambda_a \gamma^a.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Легко проверить, что преобразование $\tilde f_Q$ расслоения (3.74) индуцирует общее ковариантное преобразование расслоения Σ_h. Его сечение $\tilde h \neq h$, можно трактовать как эффективное тетрадное поле, а

$$\tilde g^{\mu\nu} = \tilde h^\mu_a \tilde h^\nu_b \eta_{ab}, \tag{3.78}$$

где η – метрика Минковского, как эффективную метрику. Однако такое сечение $\tilde h$ не является вторым тетрадным полем, а $\tilde g$ –

второй метрикой, поскольку ковекторы $\widetilde{h}^a = \widetilde{h}^a_\mu dx^\mu$ реализуются γ-матрицами в том же представлении, что и ковекторы $h^a = h^a_\mu dx^\mu$, а греческие индексы поднимаются и опускаются фоновой метрикой $g^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_b \eta_{ab}$.

Таким образом мы приходим к РТГ в случае фонового тетрадного поля h, динамического гравитационного поля q и мировой связности K. Полным конфигурационным пространством РТГ в присутствии фермионных полей является многообразие струй J^1Y расслоения

$$Y = Q \underset{X}{\times} C_K \underset{X}{\times} S^h, \tag{3.79}$$

параметризуемое координатами $(x^\mu, q^\mu{}_\nu, k_\alpha{}^\mu{}_\nu, y^A)$.

Рассмотрим 1-параметрическую группу калибровочных преобразований (3.74) расслоения (3.79). Ее генератором является векторное поле

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau} = {} & \tau^\mu\partial_\mu + (\partial_\nu\tau^\alpha k_\mu{}^\nu{}_\beta - \partial_\beta\tau^\nu k_\mu{}^\alpha{}_\nu - \partial_\mu\tau^\nu k_\nu{}^\alpha{}_\beta + \partial_{\mu\beta}\tau^\alpha)\frac{\partial}{\partial k_\mu{}^\alpha{}_\beta} + \\
& (\partial_\nu\tau^\mu q^\nu{}_\alpha - \tau^\lambda\{_\lambda{}^\nu{}_\alpha\}q^\mu{}_\nu)\frac{\partial}{\partial q^\mu_\alpha} + \\
& \frac{1}{4}Q^\beta_p(\eta^{ap}h^b_\beta - \eta^{bp}h^a_\beta)[L_{ab}{}^A{}_B\psi^B\partial_A + L^+_{ab}{}^A{}_B\psi^+_A\partial^B].
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Генератор этих преобразований действует на фоновую метрику и фоновое тетрадное поле по закону

$$\begin{aligned}
& g^{\mu\nu} \to \tau^\lambda(\partial_\lambda g^{\mu\nu} + \{_\lambda{}^\mu{}_\alpha\}g^{\alpha\nu} + \{_\lambda{}^\nu{}_\alpha\}g^{\mu\alpha}), \\
& h^\mu_a \to \tau^\lambda(\partial_\lambda h^\mu_a + \{_\lambda{}^\mu{}_\alpha\}h^\alpha_a) + Q^\mu_a,
\end{aligned}$$

а на эффективную метрику и эффективное тетрадное поле как генератор общих ковариантных преобразований

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\tau} = \tau^\lambda\partial_\lambda + (\partial_\alpha\tau^\mu\widetilde{g}^{\alpha\nu} + \partial_\alpha\tau^\nu\widetilde{g}^{\mu\alpha})\frac{\partial}{\partial\widetilde{g}^{\mu\nu}}, \\
& \widetilde{\tau} = \tau^\lambda\partial_\lambda + (\partial_\nu\tau^\mu\widetilde{\sigma}^\nu_a + Q^\mu_c)\frac{\partial}{\partial\widetilde{\sigma}^\mu_c}.
\end{aligned}$$

Полный лагранжиан аффинно-метрической РТГ представляет собой сумму

$$L = L_{\rm AM}(q,\Gamma) + L_{\rm D} + L_q(q,g) \tag{3.81}$$

лагранжиана $L_{\rm AM} + L_{\rm D}$ (3.56) КТГ, в котором тетрадные и метрические поля заменены на эффективные поля $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$, и лагранжиана L_q гравитационного поля q, в котором свертка осуществляется посредством фоновой метрики g. Поэтому L_q не инвариантен относительно общих ковариантных преобразований.

В частности, положив

$$L_{\rm AM} = (-\lambda_1 R + \lambda_2)\sqrt{|\,\widetilde{g}\,|}, \quad L_\psi = 0, \quad L_q = \lambda_3 \eta_{\mu\nu}\widetilde{g}^{\mu\nu}\sqrt{|\,\widetilde{g}\,|} \tag{3.82}$$

где $R = \widetilde{g}^{\mu\nu}R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ – скаляр кривизны мировой связности K, мы получаем обычный лагранжиан РТГ [8].

Исследуем закон сохранения энергии-импульса в РТГ. Исходя из первой вариационной формулы (2.19), мы получаем

$$\partial_\lambda(\tau^\lambda \mathcal{L}_q) + (\partial_\alpha \tau^\mu \widetilde{g}^{\alpha\nu} + \partial_\alpha \tau^\nu \widetilde{g}^{\alpha\mu})\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \widetilde{g}^{\mu\nu}} \approx \tag{3.83}$$
$$d_\lambda\left(2\tau^\mu \widetilde{g}^{\lambda\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \widetilde{g}^{\alpha\mu}} + \tau^\lambda \mathcal{L}_q - d_\mu U^{\mu\lambda}\right),$$

где U – обобщенный суперпотенциал Комара (2.100) аффинно-метрической теории. Из выражения (3.83) следует, что, если лагранжиан L (3.81) содержит хиггсовский член L_q, поток энергии-импульса не сводится к суперпотенциалу, а имеет место обычный ковариантный закон сохранения

$$\nabla_\alpha t^\alpha_\lambda \approx 0, \qquad t^\alpha_\lambda = 2\widetilde{g}^{\alpha\mu}\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \widetilde{g}^{\mu\nu}}, \tag{3.84}$$

В случае стандартного лагранжиана РТГ L_q (3.82), равенство (3.84) сводится к условию

$$\nabla_\alpha(\widetilde{g}^{\alpha\mu}\sqrt{|\,\widetilde{g}\,|}) \approx 0,$$

где ∇_α – ковариантные производные относительно связности Леви-Чивита фоновой метрики g. Тогда на решениях, удовлетворяющих этому условию, закон сохранения энергии-импульса в РТГ вновь сводится к суперпотенциальной форме для обобщенного суперпотенциала Комара.

Глава 4.
Калибровочная теория группы трансляций

Как уже отмечалось, попытки описания тетрадного поля как калибровочных потенциалов группы трансляций не привели к желаемому результату. В то же время калибровочная теория пространственных трансляций нашла успешное применение в теории дислокаций [164]. Мы обобщаем этот результат на случай пространственно-временных трансляций и показываем, что соответствующие калибровочные потенциалы описывают своего рода деформации мирового многообразия. С физической точки зрения они могут моделировать флуктуации гравитационного поля (а также гравитационное поле РТГ), которые удовлетворяют принципу суперпозиции [45-47,118,119]. Лагранжианы, полученные для этих флуктуаций в рамках калибровочной теории группы трансляций, отличаются от лагранжианов метрического гравитационного поля и допускают массовые члены. Рассмотрена совместная система слабого гравитационного поля и поля деформаций. Показано, что последнее может вносить поправки в гравитационные эффекты, которые аналогичны поправкам типа так называемой пятой силы [119,120].

Замечание 4.1. Проблема состоит в том, что обычные девиации δh геометрического гравитационного поля h, когда $h+\delta h$ – тоже гравитационное поле, не удовлетворяют принципу суперпозиции [33].

Пусть G – группа симметрий калибровочной модели и H – ее подгруппа точных симметрий, которая является картановской подгруппой группы G, т. е. генераторы J_a группы H и остальные генераторы F_m группы G могут быть выбраны так, что удовлетворяют соотношениям

$$[J_a, J_b] = c^d_{ab} J_d, \quad [F_m, F_n] = c^d_{mn} J_d, \quad [J_a, F_m] = c^n_{am} F_n.$$

В этом случае всякий элемент максимальной связной подгруппы группы G представляется в виде

$$\exp(\epsilon^m F_m) \exp(k^a J_a).$$

Он принадлежит классу смежности $\sigma \in G/H$, представителем которого выбирается элемент $\exp(\epsilon^m F_m)$.

Таким образом, в случае картановской подгруппы H отклонение хиггсовского поля от H-инвариантного центра можно представить в виде $\exp(\epsilon(x))\sigma_0$, где $\epsilon(x) = \epsilon(x)^m F_m$ – локальные функции на X со значениями в дополнении к алгебре Ли подгруппы H в алгебре Ли группы G. Они являются голдстоновскими полями и реализуют нелинейное представление группы G, определяемое левыми сдвигами

$$g \exp(\epsilon^m F_m) = \exp(\epsilon'^m F_m) \exp(k^a J_a), \quad g \in G.$$

Генераторы этого представления имеют вид

$$F_n : \epsilon^m F_m \mapsto \epsilon'^m F_m = F_n + \sum_{i=1} c_{2i} [\underset{2i}{\cdots} [F_n, \epsilon^m F_m], \cdots, \epsilon^m F_m] \tag{4.1}$$
$$- \sum_{j=1} c_j [\underset{j}{\cdots} [\epsilon^m F_m, k^a J_a], \cdots, k^a J_a],$$
$$k^a J_a = \sum_{i=1} c_{2i-1} [\underset{2i-1}{\cdots} [F_n, \epsilon^m F_m], \cdots, \epsilon^m F_m],$$
$$J_b : \epsilon^m F_m \mapsto \epsilon'^m F_m = 2 \sum_{i=1} c_{2i-1} [\underset{2i-1}{\cdots} [J_b, \epsilon^m F_m], \cdots, \epsilon^m F_m], \tag{4.2}$$

где коэффициенты c_i задаются рекурентной формулой

$$\frac{i}{(i+1)!} = \sum_{j=1}^{i} \frac{c_j}{(i+1-j)!}$$

[27]. Это случай нарушения симметрий в теории гравитации, поскольку группа Лоренца является картановской подгруппой группы GL_4.

Принцип суперпозиции для полей, представляемых сечениями расслоения $Y \to X$, предполагает, что всякой паре сечений (s_1, s_2) этого расслоения можно сопоставить его сечение $s_1 * s_2$ по некоторому правилу, удовлетворяющему условию коммутативности $s_1 * s_2 = s_2 * s_1$.

Пусть h_0 – некоторое хиггсовское поле, которое мы зададим в качестве фона для определения суперпозиции других хиггсовских полей. Выбирем ассоциированный с h_0 атлас Ψ^h, где это поле представляется постоянной функцией $h_0 = \sigma_0$. Пусть h и h' – два хиггсовских поля, гомотопных данному хиггсовскому полю h_0. В атласе Ψ^h они представляются функциями

$$h = \exp(\epsilon(x)^m F_m)\sigma_0, \qquad h' = \exp(\epsilon'(x)^m F_m)\sigma_0$$

с H-значными функциями перехода

$$S(h) = S\exp(\epsilon)S^{-1}\eta = \exp(S(\epsilon)), \quad S(g') = S\exp(\epsilon')S^{-1}\eta = \exp(S(\epsilon')),$$

где $S(\epsilon)$ – представление (4.2). Тогда суперпозицию $h * h'$, удовлетворяющую условию коммутативности, можно определить единственно в виде

$$h * h' = \exp((\epsilon^m + \epsilon'^m)F_m)\sigma_0. \tag{4.3}$$

Однако при переходе к другой карте мы находим, что для такой суперпозиции не выполняются правила перехода

$$S(h) * S(h') = \exp(S(\epsilon) + S(\epsilon'))\sigma_0 \neq \exp(S(\epsilon + \epsilon'))\sigma_0 = S\exp(\epsilon + \epsilon')S^{-1}\sigma_0,$$

поскольку закон преобразований $\epsilon \mapsto S(\epsilon)$ (4.2) не линеен по ϵ. Таким образом суперпозиции (4.3) не является глобально определенной операцией. Она зависит не только от фонового поля h_0, но и от выбора ассоциированного с ним атласа Ψ^h, если только не ограничиться рассмотрением линейных девиаций фонового поля h_0.

Однако и в этом случае проблема возникает при наличии материальных полей, допускающих преобразования только подгруппы точных симметрий H и описываемых только в паре с определенным хиггсовским полем. Можно определить суперпозицию двух материальных полей (s_h, h) и (s'_h, h) в присутствии одного и того же хиггсовского поля h:

$$(s_h, h) * (s'_h, h) = (s_h + s'_h, h).$$

Однако не удается задать суперпозицию пар материальных полей (s_h, h) и $(s_{h'}, h')$ в присутствии разных хиггсовских полей h и h', поскольку s_h и $s_{h'}$ – сечения неизоморфных или не канонически изоморфных расслоений. •

1 Калибровочная теория аффинной группы

Обозначим T^4 группу трансляций в пространстве Минковского M. Она является подгруппой группы Пуанкаре и аффинной группы $A(4, \mathbf{R})$.

Рассмотрим расслоение AX аффинных реперов в касательных пространствах к мировому многообразию X. Это главное расслоение со структурной группой $A(4, \mathbf{R})$, которое ассоциированно с касательным расслоением TX, наделенным естественной структурой аффинного расслоения ATX [65]. Поскольку фактор-пространство $A(4, \mathbf{R})/GL_4$ гомеоморфно $\mathbf{R}^4$, структурная группа расслоения AX всегда редуцирована к группе GL_4. Отсюда следует взаимно однозначное соответствие между GL_4-подрасслоениями AX и глобальными сечениями аффинного касательного расслоения ATX. В частности, каноническое включение

$$\alpha\colon\ LX \to AX \tag{4.4}$$

отвечает глобальному нулевому сечению $o(x)$ расслоения ATX. С другой стороны, гомоморфизм

$$A(4, \mathbf{R}) \to GL_4$$

порождает послойный морфизм

$$\beta\colon\ AX \to LX,$$

такой что композиция $\beta\circ\alpha$ является тождественным морфизмом LX. В дальнейшем мы ограничимся выбором атласа $\{z_\kappa(x)\}$ расслоения AX, ассоциированного с каноническим подрасслоением (4.4), т.е.

$$z_\kappa(x) \in \alpha(LX).$$

Соответствующие аффинные координаты на ATX совпадают с обычными голономными координатами на TX, т.е.

$$(x^\mu, u^\alpha = \dot{x}^\alpha).$$

Поэтому мы в дальнейшем будем отождествлять ATX с TX.

Всякая аффинная связность A на TX представляет собой сумму

$$A = K + \sigma \tag{4.5}$$

линейной связности K на TX и припаивающей формы

$$\sigma\colon\ X \to T^*X \otimes TX,$$
$$\sigma = \sigma^\epsilon{}_\mu(x)\partial_\epsilon \otimes dx^\mu = \partial_\epsilon \otimes \sigma^\epsilon. \tag{4.6}$$

Связность A называется связностью Картана, если $\sigma = \theta_X$. В указанной выше калибровке припаивающие формы (4.6) отождествляются с калибровочными потенциалами группы трансляций.

Встает проблема физической интерпретации этих потенциалов, а также сечений $u(x)$ аффинного касательного расслоения TX. Мы не наблюдаем физических полей с аффинным законом преобразований

$$u(x) \to u(x) + a.$$

Такие поля однако появляются в калибровочной теории дислокаций упругой среды [164]. Дело в том, что при наличии дислокаций вектор смещения u^m, $m = 1, 2, 3$, малых деформаций определен с точностью до калибровочных преобразований

$$u^m \to u^m + a^m(x).$$

В такой модели калибровочные потенциалы трансляций $\sigma^m{}_i$ описывают пластическую дисторсию, ковариантные производные

$$D_i u^m = \partial_i u^m - \sigma^m{}_i$$

соответствуют упругой дисторсии, а напряженность

$$\mathcal{F}^m{}_{ij} = \partial_i \sigma^m{}_j - \partial_j \sigma^m{}_i$$

характеризует плотность дислокаций упругой среды.

Уравнения калибровочной теории дислокаций

$$\partial^i(\mu D_i u^k + \frac{\lambda}{2}\delta^k_i D_j u^j) = 0, \tag{4.7}$$

$$\partial^i \mathcal{F}^k{}_{ij} = -\frac{1}{\epsilon}(\mu D_j u^k + \frac{\lambda \delta^k_j}{2} D_m u^m) \tag{4.8}$$

получаются из калибровочно инвариантного лагранжеана

$$\mathcal{L} = \mu D_i u^k D^i u_k + \frac{\lambda}{2} D_i u^i D_m u^m - \epsilon \mathcal{F}^k{}_{ij} \mathcal{F}_k{}^{ij}, \tag{4.9}$$

где μ и λ – коэффициенты Ламе изотропной среды. Эти уравнения не независимы. Уравнение (4.7) является дивергенцией уравнения (4.8). Это отражает тот факт, что поле смещения $u^m(x)$ всегда может быть обращено в нуль калибровочными преобразованиями группы трансляций и поэтому не является динамической переменной.

В духе калибровочной теории неупругих деформаций, естественно предположить, что калибровочные потенциалы релятивистских трансляций могут описывать некую геометрическую структуру, своего рода деформации мирового многообразия [33].

2 Деформации многообразий

Пусть касательное расслоение TX наделено некоторой аффинной связностью (4.5). Рассмотрим следующие морфизмы:

- морфизм

$$\hat{o}\colon\ TX \to HTX \subset TTX,$$

  который представляет собой горизонтальный имбеддинг $TX \to TTX$, ограниченный на глобальное сечение $o(x)$ of TX, т.е.

$$\hat{o} = A \circ o\colon\ o(X) \underset{X}{\times} TX \to HTX;$$

- геодезическое отображение TX на X:

$$\zeta\colon\ TX \ni u \to \zeta(x, u, 1) \in X, \qquad x = \pi_X(u),$$

  где $\zeta(x, u, s)$ – геодезическая, определяемая линейной составляющей Γ аффинной связности (4.5) через точку x в направлении u.

Назовем деформацией мирового многообразия X следующий послойный морфизм касательного расслоения:

$$\rho = T\zeta \circ \hat{o}\colon\ TX \to TX.$$

В аффинных координатах (x^μ, u^α) на TX он имеет вид

$$\begin{aligned}
&\rho_X\colon\ x \to x, \\
&\rho\colon\ \tau^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x^\mu} - (K_\mu{}^\alpha{}_\beta u^\beta + \sigma^\alpha{}_\mu)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\
&\qquad\qquad \to \tau^\mu(\delta^\alpha_\mu + \sigma^\alpha{}_\mu)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \tau^\mu H^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь использовано соотношение

$$\begin{aligned}
&\zeta^\mu(x, \lambda u, 1) = \zeta^\mu(x, u, \lambda), \qquad \lambda \in \mathbf{R}, \\
&\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\zeta^\mu(x, u, 1)|_{u=0} = \delta^\mu_\alpha,
\end{aligned}$$

и выражение

$$D_\mu u^\alpha|_{u=0} = (\partial_\mu u^\alpha - K_\mu{}^\alpha{}_\beta u^\beta + \sigma^\alpha{}_\mu)|_{u=0} = \sigma^\alpha{}_\mu$$

для ковариантной производной поля смещения u.

Пусть $E \to X$ – расслоение и J^1E – его многообразие струй. Деформация (4.10) имеет струйное продолжение

$$J^1\rho\colon\ (x^\lambda, y^i, y^i_\lambda) \to (x^\lambda, y^i, H^\alpha{}_\lambda(x) y^i_\alpha)$$

над X и E. Например, $J^1\rho(J^1E)$ – это аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$\rho^*(T^*X) \otimes VE,$$

где

$$\rho^*\colon\ dx^\lambda \to H^\lambda{}_\alpha(x) dx^\alpha$$

– морфизм кокасательного расслоения, дуальный ρ.

Чтобы определить поля на деформированном многообразии, мы должны заменить сечения $w(x)$ и $w(y)$ расслоений $J^1E \to X$ и $J^1E \to E$ на сечения

$$\widetilde{w}(x) = (J^1\rho \circ w)(x), \qquad \widetilde{w}(y) = (J^1\rho \circ w)(y).$$

Если e – сечение расслоения E, мы получаем

$$\widetilde{J^1}e = J^1\rho \circ J^1 e,$$
$$(\widetilde{J^1}e)^i_\lambda = (Te \circ \rho)^i_\lambda = H^\alpha{}_\lambda(x)\partial_\alpha e^i(x).$$

Пусть Γ – связность на E и D – соответствующий ковариантный дифференциал. На деформируемом многообразии мы получаем

$$\widetilde{\Gamma}^i_\lambda(y) = H^\alpha{}_\lambda \Gamma^i_\alpha(y)$$
$$\widetilde{D} = dx^\lambda \otimes \widetilde{D}_\lambda = dx^\lambda \otimes H^\alpha{}_\lambda(x)(\partial_\alpha - \Gamma^i_\alpha(y)\partial_i)$$
$$= H^\alpha{}_\lambda(x) \otimes dx^\lambda D_\alpha = (\tilde{\rho} dx^\alpha) \otimes D_\alpha.$$

Например, оператор Дирака на деформированном многообразии запишется

$$\mathcal{D} = \gamma_h \circ \widetilde{D} = \gamma_h(dx^\lambda) \otimes \widetilde{D}_\lambda = H^\alpha{}_\lambda(x)\gamma_h(dx^\lambda) \otimes D_\alpha$$
$$= H^\alpha{}_\lambda(x) h^\lambda_a(x)\gamma^a D_\alpha.$$

Этот оператор выглядит как оператор Дирака $\mathcal{D}_Q$ (3.73) в РТГ, если положить $H^\lambda{}_\mu = q^\lambda{}_\mu$. Поэтому мы можем применить лагранжианы теории поля на деформированных многообразиях как для описания флуктуаций геометрического гравитационного поля, так и в РТГ.

Например, лагранжиан скалярного поля ϕ на деформированном многообразии имеет вид

$$\mathcal{L}_{(m)} = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}H^\alpha{}_\mu H^\beta{}_\nu D_\alpha\phi D_\beta\phi - m^2\phi^2)\sqrt{-g}.$$

Лагранжианы $\mathcal{L}_{(g)}$ метрической гравитации и $\mathcal{L}_{(A)}$ калибровочного поля факторизуются через модифицированные кривизну

$$\widetilde{R}^{ab}_{\mu\nu} = H^\epsilon{}_\mu H^\beta{}_\nu R^{ab}{}_{\epsilon\beta}$$

и напряженность

$$\widetilde{\mathcal{F}}^m_{\mu\nu} = H^\alpha{}_\mu H^\beta{}_\nu \mathcal{F}^m_{\alpha\beta}.$$

Функционал действия и уравнения движения точечной массы m_0 на деформированном многообразии даются выражениями

$$S = -m_0 \int (g_{\alpha\beta} H^\alpha{}_\mu H^\beta{}_\nu v^\mu v^\nu)^{1/2} ds,$$
$$\frac{dv^\mu}{ds} + \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0, \tag{4.11}$$

где v^μ – 4-скорость и $\tilde{\Gamma}$ – символы Кристоффеля эффективной метрики

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = H^\alpha{}_\mu H^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta}.$$

Однако интервал ds и элемент объема определяются фоновой метрикой g на мировом многообразии (в отличие от лагранжиана L_q (3.82) РТГ).

3 Калибровочная теория пятой силы

Лагранжиан $\mathcal{L}_{(\sigma)}$ калибровочных потенциалов $\sigma^\epsilon{}_\mu$ группы трансляций нельзя построить подобно янг-миллсовскому лагранжиану, поскольку алгебра Ли аффинной группы не допускает невырожденной инвариантной билинейной формы. Чтобы получить $\mathcal{L}_{(\sigma)}$, рассмотрим величины $\sigma^\nu{}_\mu$ и $D_\alpha \sigma^\nu{}_\mu$, где D – ковариантный дифференциал, отвечающий линейной части K аффинной связности (4.5). Она действует только на верхние индексы полей $\sigma^\nu{}_\mu$. Тогда возможны только комбинации

$$\mathcal{F}^\alpha{}_{\nu\mu} = D_\nu \sigma^\alpha{}_\mu - D_\mu \sigma^\alpha{}_\nu,$$

которые представляют собой кручение связности K относительно припаивающей формы σ.

Лагранжиан $\mathcal{L}_{(\sigma)}$ полей деформации тогда имеет общий вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\sigma)} &= \frac{1}{2}[a_1\mathcal{F}^{\mu}{}_{\nu\mu}\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\nu\alpha} + a_2\mathcal{F}_{\mu\nu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma} + a_3\mathcal{F}_{\mu\nu\sigma}\mathcal{F}^{\nu\mu\sigma} \\ &+ a_4\epsilon^{\mu\nu\sigma\gamma}\mathcal{F}^{\epsilon}{}_{\mu\epsilon}\mathcal{F}_{\gamma\nu\sigma} - \mu\sigma^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{\mu} + \lambda\sigma^{\mu}{}_{\mu}\sigma^{\nu}{}_{\nu}]\sqrt{-g},\end{aligned}$$

где $\epsilon^{\mu\nu\sigma\gamma}$ – тензор Леви-Чивита.

Естественно предположить, что компонента $t^{00}_{(\sigma)}$ метрического тензора энергии-импульса поля деформации σ на пространстве Минковского должна быть положительна. Это накладывает следующие ограничения на параметры лагранжиана $\mathcal{L}_{(\sigma)}$:

$$a_4 = 0, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_3 + 2a_2 = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \lambda \leq \frac{1}{4}\mu,$$

который принимает вид

$$\mathcal{L}_{(\sigma)} = \frac{1}{2}[a_1\mathcal{F}^{\mu}{}_{\nu\mu}\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\nu\alpha} + a_2\mathcal{F}_{\mu\nu\sigma}(\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma} - 2\mathcal{F}^{\nu\mu\sigma}) - \mu\sigma^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{\mu} + \lambda\sigma^{\mu}{}_{\mu}\sigma^{\nu}{}_{\nu}]\sqrt{-g}.$$

Полный лагранжиан на деформированном многообразии включает также лагранжианы полей материи $\mathcal{L}_{(m)}$ и гравитационного поля $\mathcal{L}_{(g)}$. Ограничимся случаем слабого поля σ. Для этого мы пренебрежем гравитационным полем в левой части уравнений для σ и сохраним только компоненты, свободные от σ, в материальном источнике. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа для поля деформаций σ примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_{(\sigma)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} &= a_1(\eta_{\mu\nu}\partial^{\epsilon}\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\alpha\epsilon} - \partial_{\mu}\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\alpha\nu}) + 2a_2\partial^{\epsilon}(\mathcal{F}_{\mu\nu\epsilon} - \mathcal{F}_{\nu\mu\epsilon} + \mathcal{F}_{\epsilon\mu\nu}) \\ &- \mu\sigma_{\mu\nu} + \lambda\eta_{\mu\nu}\sigma^{\alpha}{}_{\alpha} = S_{\mu\nu}, \qquad (4.12) \\ S_{\mu\nu} &= -(\mathbf{T}_{(m)\nu\mu} + g_{\nu\mu}\mathcal{L}_{(m)}) - \frac{1}{\epsilon^2}a^{G}_{mn}g^{\beta\gamma}\mathcal{F}^{m}_{\mu\beta}\mathcal{F}^{n}_{\nu\gamma}\sqrt{-g} \\ &+ \kappa^{-1}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}.\end{aligned}$$

Заменив гравитационный член в уравнении (4.12) материальным источником, мы получим

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{(\sigma)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} = (t_{(m)\nu\mu} - \mathcal{T}_{(m)\nu\mu}) - g_{\mu\nu}(\mathcal{L}_{(m)} + \frac{1}{2}t_{(m)}),$$

где $\mathcal{T}_{(m)}$ – канонический тензор энергии-импульса материи.

По аналогии с уравнением (4.7), мы можем тоже получить уравнение равновесия

$$\partial^\nu \frac{\delta \mathcal{L}_{(\sigma)}}{\delta \sigma^{\mu\nu}} = -\mu \partial^\nu \sigma_{\mu\nu} + \lambda \partial_\mu \sigma^\alpha{}_\alpha = \partial^\nu S_{\mu\nu}. \tag{4.13}$$

Заметим, что правая часть этого уравнения в общем случае не сводится к нулю или к градиенту. Однако это в точности градиентная величина, если источником поля деформаций σ служат калибровочные поля или скалярное поле. Следствием этих фактов являются важные условия

$$\mu \neq 0, \qquad \mu \neq 4\lambda. \tag{4.14}$$

Поскольку уравнения (4.12) линейны, их решения отличаются друг от друга решениями уравнений для свободного поля σ. В случае свободного поля деформаций уравнение (4.13) принимает вид

$$-\mu \partial^\nu \sigma_{\mu\nu} + \lambda \partial_\mu \sigma^\alpha{}_\alpha = 0,$$

с учетом которого уравнения (4.12) переписываются в виде

$$\begin{aligned} &4a_2 \partial^\epsilon (w_{\mu\epsilon,\nu} + w_{\nu\mu,\epsilon} - w_{\nu\epsilon,\mu}) + \\ &\quad 2a_1 (w^\alpha{}_{\nu,\mu\alpha} - w^\alpha{}_{\mu,\nu\alpha}) - \mu w_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} &a_1 \left[\frac{\lambda}{\mu} - 1\right] [\eta_{\mu\nu} \Box e - e_{,\mu\nu}] + 2a_1 (w^\alpha{}_{\nu,\mu\alpha} + w^\alpha{}_{\mu,\nu\alpha}) \\ &\quad - \mu e_{\mu\nu} + \lambda \eta_{\mu\nu} \sigma = 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где

$$\begin{aligned} &\Box = \partial^\alpha \partial_\alpha, \\ &e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\nu\mu}), \quad w_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\nu\mu}), \quad e = \sigma^\alpha{}_\alpha. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Если выбрать естественное решение $w = 0$ уравнения (4.15), уравнения (4.16) могут быть представлены в форме

$$e_{\mu\nu} = \frac{\mu - \lambda}{3\mu}(\eta_{\mu\nu} e - \frac{3a_1}{\mu} e_{,\mu\nu}),$$
$$\Box e + m^2 e = 0, \qquad m^2 = \frac{\mu(\mu - 4\lambda)}{3a_1(\mu - \lambda)}, \tag{4.18}$$

где величина m играет роль массы поля деформации σ. В силу условия (4.14), эта масса отлична от нуля.

Уравнения (4.18) имеют следующее волновое решение

$$e_{\mu\nu} = \frac{\mu - \lambda}{3\mu}\left[\eta_{\mu\nu} + \frac{\mu - 4\lambda}{\mu - \lambda}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right] a(p) e^{ipx}, \qquad p^2 = m^2,$$

которое делает возможным квантование поля деформаций.

Чтобы оценить экспериментальные следствия деформации мирового многообразия, рассмотрим модель слабого поля деформаций σ и слабого метрического гравитационного поля $g = \eta + 2\epsilon$, когда материальным источником является точечная масса M. В этом случае правая часть уравнений (4.12) принимает вид

$$-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{T}_{(m)} = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} M \delta(r),$$

где (r, ϕ, θ) – пространственные сферические координаты.

Используя обозначения (4.17), перепишем уравнения (4.12):

$$\frac{-a_1}{2}(e^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu} - e^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu}) + (4a_2 + \frac{a_1}{2})(w^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu} - w^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu}) -$$
$$4a_2 \Box w_{\mu\nu} - \mu w_{\mu\nu} = 0,$$
$$a_1[\eta_{\mu\nu}(e^{\alpha\epsilon}{}_{,\alpha\epsilon} - \Box e) - \frac{1}{2}(e^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu} + e^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu} + w^\alpha{}_{\nu,\alpha\mu} + w^\alpha{}_{\mu,\alpha\nu}) + e_{,\mu\nu}]$$
$$- \mu e_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\lambda e = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} M \delta(r).$$

Эти уравнения имеют статическое сферически симметричное решение, ненулевыми компонентами которого являются

$$e_{rr} = -\frac{1}{\mu - \lambda}(3\lambda e_{00} + \frac{1}{2} M \delta(r)),$$

$$e_{\theta\theta} = -e_{00}r^2, \quad e_{\phi\phi} = -e_{00}r^2\sin^2\theta,$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}e_{00} - m^2 e_{00} = -\frac{1}{6}\frac{\mu}{a_1(\mu-\lambda)}M\delta(r),$$
$$e_{00} = \frac{\mu M}{24\pi a_1(\mu-\lambda)}\frac{e^{-mr}}{r},$$

где m – масса (4.18). Подставляя это решение в уравнение (4.11), мы получаем модификацию нютоновского гравитационного потенциала

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + e_{00} = -\frac{\kappa M}{8\pi r}\left(1 - \frac{\kappa^{-1}\mu}{3a_1(\mu-\lambda)}e^{-mr}\right).$$

Такой модифицированный потенциал обычно связывают с эффектом гипотетической пятой силы [165].

Глава 5. Супергравитация как суперметрика

В большинстве супергравитационных моделей, супергравитация вводится алгебраически как компонента некоторого супермультиплета [98,166]. В этой Главе, по аналогии с гравитацией, дано геометрическое описание супергравитации как суперметрики, определяемой из условия редукции структурной супергруппы касательного суперрасслоения над супермногообразием [100,101].

1 Супермногообразия

Ведение суперсимметрий основывается на том, что классические поля образуют $\mathbf{Z}_2$-градуированную суперкоммутативную алгебру E, т. е.

$$\phi \otimes \phi' = -\phi' \otimes \phi,$$

когда ϕ и ϕ' – только фермионные (нечетные) элементы E, и

$$\phi \otimes \phi' = \phi' \otimes \phi$$

в остальных случаях. На этой алгебре, кроме обычных симметрий, могут быть заданы преобразования суперсимметрий, переводящие бозонные и фермионные поля друг в друга.

Рассмотрим линейные операторы, действующие на алгебре E. На множестве этих операторов также можно задать $\mathbf{Z}_2$-градуировку, полагая четными (соотв. нечетными) операторы, не меняющие (соотв. меняющие на противоположную) четность элементов из E.

Введение нечетных операторов на $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебре полей E приводит к обобщению понятия алгебры Ли. Элементами алгебры Ли являются генераторы I четных преобразований, которые действуют на тензорные произведения полей по закону

$$I(\phi \otimes \phi') = I(\phi) \otimes \phi' + \phi \otimes I(\phi'). \tag{5.1}$$

Определим действие на тензорное произведение полей генераторов нечетного преобразования Q. Пусть ϕ и ϕ' – нечетные элементы E. Тогда, чтобы удовлетворить условию

$$Q(\phi \otimes \phi') = -Q(\phi' \otimes \phi),$$

надо по аналогии с (5.1) положить

$$Q(\phi \otimes \phi') = Q(\phi) \otimes \phi' - \phi \otimes Q(\phi').$$

Таким образом при перестановке нечетного генератора с нечетным элементом из E появляется множитель -1.

Рассмотрим теперь действие четных операторов QQ' и $Q'Q$:

$$\begin{aligned} QQ'(\phi \otimes \phi') = (QQ')(\phi) \otimes \phi' + (-1)^{|\phi|+1} Q(\phi) \otimes Q'(\phi') + \\ (-1)^{|\phi|} Q'(\phi) \otimes Q(\phi') + \phi \otimes (QQ')(\phi'), \\ Q'Q(\phi \otimes \phi') = (Q'Q)(\phi) \otimes \phi' + (-1)^{|\phi|+1} Q'(\phi) \otimes Q(\phi') + \\ (-1)^{|\phi|} Q(\phi) \otimes Q'(\phi') + \phi \otimes (Q'Q)(\phi'), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $|\phi|$ обозначает четность элемента ϕ. Действие (5.2) отличается от действия (5.1) четного генератора I алгебры Ли. Как видно из выражения (5.2), нужным образом будет действовать антикоммутатор

$$[Q, Q'] = QQ' + Q'Q,$$

который и представляет собой генератор некоторого четного преобразования.

Таким образом, рассмотрение нечетных операторов на $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебре полей E приводит к обобщению конструкции алгебры Ли до супералгебры Ли.

Супералгеброй Ли называется $\mathbf{Z}_2$-градуированное векторное пространство

$$L = L^0 \oplus L^1$$

с заданной на нем билинейной операцией $[,]$, удовлетворяющей следующим условиям

$$[I, I'] = (-1)^{|I||I'|+1}[I', I],$$
$$[I, [I', I'']] = [[I, I'], I''] + (-1)^{|I||I'|}[I', [I, I'']].$$

Четная часть L^0 супералгебры Ли L является алгеброй Ли, а коммутатор

$$[L^0, L^1] \subset L^1$$

задает представление алгебры Ли

$$L^0 : L^1 \to L^1$$

на пространстве нечетной части L^1 супералгебры Ли. Это позволяет классифицировать полупростые супералгебры Ли, используя классификацию Картана алгебр Ли.

Линейные представления супералгебр Ли реализуются в $\mathbf{Z}_2$-градуированных векторных пространствах

$$V^{n,m} = V^0 \oplus V^1 = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m.$$

При этом четные генераторы не меняют четность элемента пространства представления, т. е. имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A – $(n \times n)$-матрицы и B – $(m \times m)$-матрицы.

Подчеркнем, что супералгебра Ли является алгеброй над полем $\mathbf{R}$, т. е. ее коэффициенты – вещественные числа, Однако переход к групповым нечетным преобразованиям требует расширения числового поля до алгебры Грассмана Λ. Это вызвано следующим обстоятельством.

Пусть g – оператор линейного нечетного преобразования в алгебре E. Естественно потребовать, чтобы действие g на тензорное произведение полей имело обычный вид

$$g(\phi \otimes \phi') = g(\phi) \otimes g(\phi'). \tag{5.3}$$

Пусть ϕ и ϕ' – нечетные элементы алгебры E. Тогда

$$g(\phi \otimes \phi') = -g(\phi' \otimes \phi) = -g(\phi') \otimes g(\phi). \tag{5.4}$$

Сравнивая (5.3)и (5.4), видим, что элементы $g(\phi)$ и $g(\phi')$ также нечетны, что противоречит предположению, что g меняет четность.

Это противоречие можно устранить, расширяя поле $\mathbf{R}$ до алгебры Грассмана Λ и заменяя супералгебру Ли на алгебру Ли, являющуюся ее Λ-оболочкой.

Алгеброй Грассмана Λ называется ассоциативная алгебра над полем $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$) с единицей, обладающая канонической системой из l образующих

$$\chi^{i_1}, \ldots, \chi^{i_k}, \qquad \chi^i \chi^j + \chi^j \chi^i = 0.$$

Алгебра Грассмана является суперкоммутативной алгеброй. Ее четная (соотв. нечетная) часть Λ^0 (соотв. Λ^1) образована всевозможными линейными комбинациями произведений четного (соотв. нечетного) числа образующих. Имеется вложение поля $\mathbf{R}$ в Λ на

$\mathbf{R} \circ \hat{1}$, где $\hat{1}$ – единица алгебры Λ. Базис алгебры Λ как вещественного векторного пространства образуют элементы вида

$$\chi^{i_1} \dots \chi^{i_k}, \qquad i_1 < \dots < i_k, \qquad k = 0, 1, \dots, l,$$

где $[i_1, \dots, i_k]$ – всевозможные упорядоченные наборы чисел от 0 до l и $\chi^0 = \hat{1}$. Размерность этого пространства равна 2^l.

Расширение поля $\mathbf{R}$ до алгебры Грассмана означает переход от векторных пространств над $\mathbf{R}$ к Λ-модулям, т.е. к тем же линейным пространствам, но с коэффициентами из Λ. При этом $\mathbf{Z}_2$-градуированное векторное пространство $V^{n,m}$ над $\mathbf{R}$ превращается в $\mathbf{Z}_2$-градуированный Λ-модуль, в котором четность элемента λv ($\lambda \in \Lambda$, $v \in V^{n,m}$) дается суммой

$$|\lambda v| = (|\lambda| + |v|)/\mathrm{mod}2$$

четностей элементов λ и v. Например, четная часть Λ-модуля имеет вид

$$(\Lambda^0 \otimes V^0) \oplus (\Lambda^1 \otimes V^1). \tag{5.5}$$

Она называется Λ-оболочкой $\mathbf{Z}_2$-градуированного векторного пространства $V^{n,m}$ и представляет собой, с одной стороны, Λ^0-модуль, а с другой стороны, $2^{l-1}(n+m)$-мерное вещественное векторное пространство

$$(\mathbf{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbf{R}^n) \oplus (\mathbf{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbf{R}^m). \tag{5.6}$$

В частности, взятие Λ-оболочки от супералгебры Ли делает все ее элементы четными и превращает ее в алгебру Ли. Генерируемые элементами этой алгебры, например посредством экспоненциального отображения

$$\lambda I \mapsto \exp(\lambda I), \qquad |\lambda| = |I|,$$

групповые преобразования также являются четными. Это элементы супергруппы Ли.

Среди супералгебр Ли, действующих на $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебре классических полей, особое место занимает супералгебра Пуанкаре, которая (не выписывая лоренцевские генераторы) задается соотношениями

$$\begin{aligned}
&[Q_A, Q_{B'}] = 2\sigma^{\mu}{}_{AB'}P_{\mu}, \qquad [P_{\mu}, P_{\nu}] = 0,\\
&[Q_A, Q_B] = [Q_{A'}, Q_{B'}] = 0,\\
&[P_{\mu}, Q_A] = [P_{\mu}, Q_{B'}] = 0,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

где A и B' – индексы 2-компонентных (непунктирных и пунктирных) вейлевских спиноров, $\sigma^{1,2,3}$ – матрицы Паули и $\sigma^0 = -1$. Дело в том, что эта супералгебра оставляет инвариантным совместный функционал действия бозонного и фермионного полей, хотя и путем введения вспомогательного поля.

Например, пусть ϕ – скалярное поле, а ψ_A – вейлевское спинорное поле и $F_{AB} = -F_{BA}$ – вспомогательное псевдоскалярное поле. Представление супералгебры (5.7) на мультиплете

$$(\phi, \psi_A, F_{AB})$$

выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&Q_A\phi = \sqrt{2}\psi_A, &&Q_{B'}\phi = 0\\
&Q_A\psi_B = \sqrt{2}F_{AB}, &&Q_{B'}\psi_C = i\sqrt{2}\sigma^{\mu}{}_{CB'}\partial_{\mu}\phi,\\
&Q_A F_{BC} = 0, &&Q_{B'}F_{AC} = i\sqrt{2}\sigma^{\mu}{}_{CB'}\partial_{\mu}\psi_A,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Введение вспомогательного поля необходимо, чтобы антикоммутатор $[Q_A, Q_{B'}]$ сводился к генераторам трансляций P_{μ}. Легко проверит, что супералгебра (5.7) в представлении (5.8) оставляет инвариантным функционал действия

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(i\partial_{\mu}\overline{\psi}\sigma^{\mu}\psi + \phi^*\Box\phi + F^*F).$$

Инвариантность этого функционала в общем случае, однако, нарушается при переходе к неинфинитезимальным калибровочным суперпреобразованиям Пуанкаре.

Чтобы функционал действия оставался инвариантным относительно конечных трансляций, надо предположить, что последние сопровождаются также преобразованиями координатного пространства

$$x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu(x).$$

Однако в рамках супергруппы Пуанкаре преобразования трансляций могут возникать в результате суперпозиции преобразований с нечетными генераторами Q:

$$\begin{aligned}\exp(\lambda^A Q_A)\exp(\lambda^{B'} Q_{B'}) &= \exp(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'} Q_{B'} + \frac{1}{2}[\lambda^A Q_A, \lambda^{B'} Q_{B'}] + \ldots) \\ &= \exp(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'} Q_{B'} + \lambda^A \lambda^{B'} \sigma^\mu{}_{AB} P_\mu + \ldots).\end{aligned}$$

Это означает, что координатное пространство X, реализующее представление группы трансляций, необходимо расширить до пространства, допускающего представление супергруппы Пуанкаре.

Таковым могло бы быть суперпространство, параметризуемое как обычными координатами x, так и "спинорными" координатами θ, на котором суперaлгебра Пуанкаре реализовывалась бы операторами вида

$$\begin{aligned}Q_A &= \frac{\partial}{\partial\theta^A} - i\sigma^\mu AB'\theta^{B'}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ Q_{B'} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{B'}} - i\sigma^\mu AB'\theta^A\frac{\partial}{\partial x^\mu}.\end{aligned}$$

Однако строгое математическое описание такого суперпространства оказалось серьезной проблемой. Наиболее удовлетворительно она разрешается в рамках формализма супермногообразий и суперрасслоений [99,167,168]. Этот формализм является непосредственным градуированным обобщением (путем замены поля действительных чисел $\mathbf{R}$ на алгебру Грассмана Λ) обычной теории дифференцируемых многообразий и расслоений. Такое обобщение может быть построено, если на алгебре Λ ввести банахову структуру, превращая ее в нормированное евклидово топологическое пространство.

Напомним, что банаховой алгеброй называется алгебра с нормой, удовлетворяющей следуюшим условиям:

$$\| \hat{1} \| = 1,$$
$$\| ab \| \leq \| a \| \| b \| .$$

Банахова структура может быть задана на алгебре Грассмана с помощью нормы

$$\lambda = \sum_{k=0}^{l} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} a_{i_1 \ldots i_k} \chi^{i_1 \ldots i_k}, \qquad a_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbf{R}, \tag{5.9}$$

$$\| \lambda \| = \sum_{k=0}^{l} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} |a_{i_1 \ldots i_k}|.$$

Такая норма индуцирует на Λ топологию 2^l-мерного вещественного евклидова пространства.

Алгебраическая структура Λ может быть реализована также вещественными матрицами, а именно, алгебра Грассмана Λ изоморфна подалгебре алгебры $(2^l \times 2^l)$-мерных вещественных треугольных матриц, строящихся по следующему правилу.

Обозначим I упорядоченный набор $(i_1 \ldots i_k)$. Пусть $J \subset I$, т. е. I содержит в себе все элементы из J. Обозначим $I - J$ набор из тех элементов I, которые не входят в J. Аналогично, если $I \cap J = \emptyset$, обозначим $I + J$ набор, состоящий из элементов как I, так и J. Пусть $(I|J)$ – четность перестановки при упорядочивании множества $i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_n$. Поставим в соответствие элементу

$$\lambda = \sum_I a_I \chi^I, \qquad \chi^I = \chi^{i_1} \ldots \chi^{i_k},$$

алгебры Λ матрицу с компонентами

$$\begin{aligned} &A_{IJ} = (-1)^{(I|J-I)} a_{J-I}, \qquad I \subset J, \\ &A_{IJ} = 0,\ I \cap J \neq I. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Например, если $l = 2$, произвольный элемент из Λ имеет вид

$$\lambda = a_0 + a_1\chi^1 + a_2\chi^2 + a_{12}\chi^1\chi^2,$$

и ему отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_{12} \\ 0 & a_0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, что умножение элементов λ из алгебры Грассмана Λ соответствует произведению сопоставляемых этим элементам вещественных матриц (5.10). Это важно, поскольку позволяет представить алгебры и группы Ли с параметрами из алгебры Грассмана как вещественные алгебры и группы Ли.

Суперпространством размерности (n, m) называется прямое произведение

$$B^{n,m} = (\Lambda^0)^n \times (\Lambda^1)^m$$

с нормой, индуцируемой нормой (5.9) по правилу

$$\| b \| = \sum_{i=1}^{n+m} \| b^i \|,$$

$$b = (b^1, \ldots, b^n, b^{n+1}, \ldots, b^{n+m}), \quad b^{k \le n} \in \Lambda^0, \quad b^{n+k} \in \Lambda^1.$$

Такая норма определяет на $B^{n,m}$ топологию $2^{l-1}(n+m)$-мерного евклидова пространства. Суперпространство $B^{n,m}$ можно представить как Λ-оболочку (5.5) $\mathbf{Z}_2$-градуированного векторного пространства V с базисом $\{v_k\}$, $k = 1, \ldots, n+m$, а с другой стороны, как $2^{l-1}(n+m)$-мерного вещественное векторное пространство (5.6) с базисом $\{e_{I_k}\}$.

Рассматриваются отображения

$$F : B^{n,m} \to \Lambda,$$

называемые суперфункциями. Их супердифференцируемость определяется по аналогии с дифференцируемостью обычных функций на банаховых пространствах. Суперфункция F может считаться r раз супердифференцируемой в точке $b \in B^{n,m}$, если для всякого элемента $(b+h)$ из некоторой окрестности $U \in b$ суперфункцию $F(b+h)$ можно представить в виде

$$F(b+h) = F(b) + \sum_{p=1}^{r} (G^p F)(b,h) + \eta(b,h) \parallel h \parallel^p,$$

где $(G^p F)(b,h)$ – полилинейные, кратности p, непрерывные отображения

$$B^{n,m} \mapsto (G^p F)(b,h) \in \Lambda$$

суперпространства $B^{n,m}$ как Λ^0-модуля в алгебру Λ, а суперфункция $\eta(b,h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\| \to 0} \parallel \eta(b,h) \parallel \to 0.$$

Суперфункция F считается r раз супердифференцируемой (класса G^r) в открытой области $U \subset B^{n,m}$, если она r раз супердифференцируема во всех точках $b \in U$. Суперфункция F считается класса G^∞, если она класса G^r при любом r.

Обозначим $G^\infty(U)$ множество суперфункций класса G^∞ на $U \subset B^{n,m}$. Тогда сопоставление

$$G_h : F(b) \to (GF)(b,h), \qquad b \in U,$$

задает отображение $G^\infty(U)$ в себя, удовлетворяющее условиям

$$G_h(FF") = G_h(F)F' + FG_h(F'),$$
$$G_{h'}G_h = G_hG_{h'}.$$

Оно представляет собой производную F по направлению h. На полиномиальных и аналитических суперфункциях производной по направлению можно придать вид

$$G_h = h^k \frac{\partial}{\partial b^k}, \qquad |h^k| = |b^k|,$$

при выполнении условий

$$\frac{\partial}{\partial b^k}(FF') = \frac{\partial}{\partial b^k}(F)F' + (-1)^{|b^k||F|}F\frac{\partial}{\partial b^k}(F'),$$
$$\frac{\partial}{\partial b^k}\frac{\partial}{\partial b^q} = (-1)^{|b^k||b^q|}\frac{\partial}{\partial b^q}\frac{\partial}{\partial b^k}.$$

Поскольку и суперпространство $B^{n,m}$, и алгебра Грассмана Λ представляют собой также вещественные пространства, суперфункция F может быть задана набором 2^l вещественных функций f_I от $2^{l-1}(n+m)$ действительных переменных y^{I_k} так, что суперанализ во многом аналогичен комплексному анализу. В частности, функции f_I с необходимостью должны удовлетворять некоторым условиям типа Коши-Римана. Одно из них

$$\frac{\partial}{\partial y^{I_k}} f_I = \frac{\partial}{\partial y^{J_k}} f_J.$$

Супермногообразие $M^{n,m}$ размерности (n,m) определяется как банахово многообразие, допускающее атлас

$$\Psi_M = \{U_i, \phi_i : U_i \to B^{n,m}\},$$

функции перехода которого супердифференцируемы.

По аналогии с обычной дифференциальной геометрией строятся касательные пространства к супермногообразию. Касательный вектор к супермногообразию $M^{n,m}$ в точке $b \in M^{n,m}$ определяется как класс эквивалентных пар

$$(h \in B^{n,m}, \phi_i(b)), \qquad b \in U_i,$$

при преобразованиях атласа Ψ_M. В карте $(\phi_i, U_i \ni b)$ он может быть представлен оператором производной по направлению h в точке b на множестве суперфункций $G^\infty(U_i)$, поскольку $G_h = G_{h'}$, если пары (h, ϕ_i) и (h', ϕ'_i) эквивалентны. Множество G_h, когда h пробегает $B^{n,m}$, образует касательное пространство к $M^{n,m}$ в точке b. Оно изоморфно $B^{n,m}$.

Множество касательных пространств к $M^{n,m}$ составляет касательное суперрасслоение. Это супердифференцируемое расслоение $TM^{n,m}$ над $M^{n,m}$, получаемое склеиванием тривиальных расслоений $U_i \times B^{n,m}$ посредством функций перехода

$$\rho_{ij} : (U_j \times B^{n,m}) \ni (b, h) \mapsto (b, G(\phi_i \phi_j^{-1}))(b, h) \in (U_i \times B^{n,m}),$$

где $G(\phi_i \phi_j^{-1})$ – аналог матрицы Якоби.

Глобальное сечение τ касательного суперрасслоения $TM^{n,m}$ составляет суперполе на супермногообразии $M^{n,m}$. Подобно векторному полю на многообразии, суперполе τ на супермногообразии определяет отображение G_τ пространства суперфункций $G^\infty(M^{n,m})$ в себя такое, что для любых $\lambda \in \Lambda^0$, $F, F' \in G^\infty(M^{n,m})$, выполняются условия

$$G_\tau(FF') = G_\tau(F)F' + FG_\tau(F'),$$
$$G_\tau(\lambda F) = \lambda G_\tau(F).$$

Коммутатор двух суперполей

$$[G_\tau, G_{\tau'}] = G_\tau G_{\tau'} - G_{\tau'}, G_\tau$$

тоже суперполе, и множество суперполей на супермногообразии образует Λ^0-модуль, являющийся алгеброй Ли.

Примером супермногообразий и суперполей на них служат супергруппы Ли и супералгебры Ли. Супергруппой Ли SG называется группа, допускающая параметризацию грассмановыми величинами, которая превращает групповое пространство в аналитическое супермногообразие. Как и в теории групп Ли, алгебра Ли $\mathcal{SG}$ супергруппы Ли SG определяется как алгебра Ли левоинвариантных суперполей на групповом супермногообразии, т. е. полей, инвариантных относительно преобразований, порождаемых левыми сдвигами $g \mapsto g'g$ на групповом многообразии.

Пусть SG – супергруппа Ли размерности (n, m) и $\mathcal{G}$ – алгебра Ли группы SG, рассматриваемой в качестве вещественной группы Ли G размерности $2^{l-1}(n+m)$. Тогда алгебра $\mathcal{SG}$, рассматриваемая как $2^{l-1}(n+m)$-мерная алгебра Ли, изоморфна $\mathcal{G}$. Обратно, пусть A – алгебра Ли, образующая суперпространство размерности (n, m) и G – $2^{l-1}(n+m)$-мерная вещественная группа Ли с A в качестве $2^{l-1}(n+m)$-мерной вещественной алгебры Ли. Тогда на G можно задать структуру супергруппы Ли с алгеброй Ли A.

В физических приложениях обычно рассматриваются супергруппы Ли, чьи алгебры Ли представляют собой Λ-оболочки супералгебр Ли.

2 Суперметрика

Как и в случае касательного суперрасслоения, определение главного суперрасслоения дословно повторяет определение главного расслоения. Причем, поскольку супермногообразия, супергруппы Ли и суперрасслоения представляют собой также обычные многообразия, группы Ли и расслоения, ряд теорем для расслоений остается справедливым и для суперрасслоений. Например, если SH – замкнутая суперподгруппа Ли супергруппы Ли SG, то для редукции структурной супергруппы SG главного суперрасслоения к SH необходимо и достаточно существование глобального сечения ассоциированного расслоения на фактор-пространства SG/SH.

Перейдем теперь к супергравитации. Рассмотрим супермногообразие $M^{4,4}$. Структурной группой его касательного суперрасслоения $TM^{4,4}$ является супергруппа $L(4,4)$ всех изоморфизмов суперпространства $B^{4,4}$ – типичного слоя суперрасслоения $TM^{4,4}$. Одной из подгрупп $L(4,4)$ является супергруппа Ли $OSp(4,2;1)$, алгебра Ли которой представляет собой Λ-оболочку супералгебры $osp(4,2;1)$. Четной частью супералгебры $osp(4,2;1)$ является алгебра Ли

$$so(3,1) \oplus sp(4),$$

а нечетная часть состоит из 16 генераторов Q^A_μ, ($\mu = 0,1,2,3$; $A = 1,\dots,4$). Генераторы Q^A_μ по индексам μ реализуют векторное представление алгебры Лоренца $so(3,1)$, а по индексам A – фундаментальное представление алгебры Ли $sp(4)$.

Представление алгебры $osp(4,2;1)$ на $\mathbf{Z}_2$-градуированном пространстве $V^{4,4}$ (Λ-оболочкой которого является суперпространство $B^{4,4}$) осуществляется матрицами A, удовлетворяющими условию

$$A^t\Gamma + \Gamma A = 0, \tag{5.11}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \hat\eta & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{\eta}$ – (4×4)-матрица метрики Минковского, $(-\sigma^0)$ – единичная (2×2)-матрица, а операция "t" задается по правилу

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ -C^T & E^T \end{pmatrix},$$

где B, C, D, E – (4×4)-матрицы, а "T" – обычное транспонирование. В представлении (5.11) четный сектор пространства $V^{4,4}$ реализует 4-векторное представление алгебры Лоренца $so(3,1)$, а нечетный сектор – действительное (майорановское) спинорное представление алгебры $so(3,1) \subset sp(4)$ матрицами

$$L_{12} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad L_{31} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{02} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{03} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix},$$

$$L_{23} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ^i – матрицы Паули.

Грассманова оболочка $B^{4,4}$ пространства $L^{4,4}$ реализует представление супергруппы $OSp(4,2;1)$, порождаемое представлением супералгебры $osp(4,2;1)$. При этом операторы супергруппы $OSp(4,2;1)$ сохраняют инвариантной билинейную форму

$$\eta_s(b,b') = x^\mu \Gamma_{\mu\nu} x'^\nu + \theta^A \Gamma_{AB} \theta'^B =$$
$$x^0 x'^0 - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 + \theta^1\theta'^3 - \theta^3\theta'^1 + \theta^2\theta'^4 - \theta^4\theta'^2, \quad (5.12)$$

где Γ – матрица (5.11) на элементах

$$b = x^\mu b_\mu + \theta^A b_A$$

суперпространства $B^{4,4}$. Координаты x^μ и θ^A элементов $b \in B^{4,4}$ являются соответственно четными и нечетными элементами алгебры Грассмана, и форма η_s принимает значения в Λ^0.

Как и в теории гравитации, потребуем редукцию структурной супергруппы $L(4,4)$ суперрасслоения $TM^{4,4}$ к $OSp(4,2,;1)$. Необходимым и достаточным условием такой редукции является существование глобального сечения g_s ассоциированного с $TM^{4,4}$ расслоения на фактор-пространства

$$L(4,4)/OSp(4,2,;1)$$

[99,100,101]. Это фактор-пространство изоморфно пространству всех билинейных форм на суперпространстве $B^{4,4}$, приводимых к каноническому виду (5.12) преобразованиями из $L(4,4)$. Таким образом, глобальное сечение g_s может рассматриваться как суперметрика на супермногообразии $M^{4,4}$.

Для физических приложений естественно требовать, чтобы супермногообразие включало в себя многообразие. Такое включение индуцируется вложением поля $\mathbf{R}$ в Λ и гомоморфизмом σ алгебры Λ на $\mathbf{R}$, при котором

$$\sigma\lambda = \sigma\left(\sum_{k=0}^{l}\sum_{(i_1\dots i_k)} a_{i_1\dots i_k}\chi^{i_1}\cdots\chi^{i_k}\right) = a_0.$$

На суперпространстве $B^{n,m}$ отображение имеет вид

$$\sigma : (x^1,\dots,x^n;\theta^1,\dots,\theta^m) \mapsto (\sigma x^1,\dots,\sigma x^n),$$

т. е. суперпространство проектируется на свой четный сектор. При этом у четных координат x сохраняется только вещественная часть.

Однако определение морфизма σ на супермногообразии $M^{n,m}$ сталкивается с трудностью. Действительно, пусть (U,ϕ) и (U',ϕ') – две карты на супермногообразии $M^{n,m}$, пересечение которых несвязно, т. е.

$$U\cap U' = V_1\cup V_2, \qquad V_1\cap V_2 = \emptyset.$$

Обозначим

$$\phi_{1,2} = \phi|_{V_{1,2}}, \qquad \phi'_{1,2} = \phi|_{V'_{1,2}}.$$

Пусть $b_1 \in V_1$, $b_2 \in V_2$ – два σ-эквивалентных элемента в карте (U, ϕ), т. е.

$$\sigma\phi_1 b_1 = \sigma\phi_2 b_2.$$

Но эти элементы не обязательно эквивалентны (т.е.$\sigma\phi'_1$б$_1 \neq \sigma\phi'_2$б$_2$) в карте (U', ϕ'), поскольку в общем случае

$$\sigma\phi'_1\phi_1^{-1}\sigma \neq \sigma\phi'_2\phi_2^{-1}\sigma.$$

Супермногообразие $M^{n,m}$ имеет атлас, в котором отношение σ-эквивалентности хорошо определено. Однако фактор-пространство супермногообразия $M^{n,m}$ по этому отношению в общем случае не является даже топологическим многообразием [99].

Глава 6. Сингулярности пространственных слоений

Нарушение симметрий в теории гравитации обуславливает существование не только геометрического гравитационного поля, но и пространственно-временной структуры на мировом многообразии, описываемой 3-мерным пространственноподобным распределением. Исходя из известного соотношения между псевдоримановой метрикой и такими распределениями [64,90], нами разработан критерий гравитационных сингулярностей как особенностей этих распределений [91-96]. Дана классификация таких особенностей. Локально в терминах ростков, они представляются как сингулярности слоения поверхностей уровня некоторой вещественной функции f на X. Они включают в себя топологические переходы в критических точках функции f, если она однозначна, и каустики слоений в точках ветвления f. Преимущество такого критерия состоит в том, что он не только фиксирует существование гравитационной сингулярности, но по поведению слоения позволяет представить себе топологию пространства-времени в окрестности сингулярной точки.

В этой Главе мировое многообразие X не предполагается обязательно параллелизуемым.

1 Пространственно-временные слоения

Если структурная группа реперного расслоения LX редуцируема в силу геометрического принципа эквивалентности к группе Лоренца, последняя в свою очередь редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $SO(3)$.

Это означает, что всякое лоренцевское подрасслоение L^hX содержит подрасслоение со структурной группой SO(3), а LX и ассоциированные расслоения допускает атлас с $SO(3)$-значными функциями перехода. Соответствующее глобальное сечение фактор-расслоения $L^hX/\mathrm{SO}(3) \to X$ с типичным слоем $\mathbf{R}^3$ представляет собой 3-мерное распределение $FX \subset TX$ на X, производящей 1-формой которого является тетрадная форма $h^0 = h^0_\mu dx^\mu$. Следствием этого является пространственно-временное (3Ѣ1) разложение

$$TX = FX \oplus NF, \tag{6.1}$$

где NF – 1-мерное подрасслоение, определяемое времениподобным векторным полем $h_0 = h^\mu_0 dx^\mu$.

Замечание 6.1. Напомним, что существует взаимно однозначное соответствие между неособыми 1-формами ω на многообразии X и гладкими ориентируемыми распределениями FX коразмерности 1 на X [168,169], которое задается уравнением

$$\Phi \rfloor \omega = 0.$$

Форма ω называется производящей формой распределения F. •

Более того имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} GL_4 & \longrightarrow & SO(4) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ L & \longrightarrow & SO(3) \end{array} \tag{6.2}$$

редукции структурных групп LX. Таким образом, в теории гравитации существует следующая система нарушенных симметрий:

- $GL_4 \Rightarrow L$, где соответствующим хиггсовским полем является геометрическое гравитационное поле;
- $L \Rightarrow SO(3)$, где хиггсовским полем оказывается пространственноподобное распределение, производящей формой которого служит тетрадная 1-форма $h^0 = h^0_\mu dx^\mu$;
- $GL_4 \Rightarrow SO(4)$, где хиггсовским полем является риманова метрика на X.

Коммутативность диаграммы (6.2) ведет к следующей известной теореме [64,90], переформулируемой в терминах пространственно-временных распределений [91-93].

ТЕОРЕМА 6.1. Для всякой псевдоримановой метрики g на мировом многообразии X существует пара (FX, g^R) пространственно-временного распределения FX с производящей формой h^0 и римановой метрики g^R, таких что

$$g^R = 2h^0 \otimes h^0 - g = h^0 \otimes h^0 + k, \tag{6.3}$$

где k – риманова метрика в подрасслоении FX. Обратно, для данной римановой метрики g^R на X, всякое ориентируемое гладкое 3-мерное распределение F с производящей формой ω является пространственно-временным распределением, ассоциированным с псевдоримановой метрикой g, задаваемой выражением (6.3), где

$$h^0 = \omega / \mid \omega \mid, \qquad \mid \omega \mid^2 = g^R(\omega, \omega) = g(\omega, \omega).$$

□

Риманова метрика g^R из выражения (6.3) определяет совместимую с g функцию расстояния на мировом многообразии X^4, которая обращает X в метрическое пространство с локально евклидовой топологией, эквивалентной топологии многообразия на X. Для данного гравитационного поля g, разным пространственно-временным распределениям FX отвечают разные g-совместимые римановы метрики. Из этого, в частности, следует что разные физические наблюдатели, ассоциированные с разными пространственными распределениями, воспринимают одно и то же мировое многообразие как разные римановы пространства. Примером тому является известный эффект изменения длины движущихся объектов.

Часто упускают из виду, что определенная риманова метрика и следовательно метрическая топология могут быть ассоциированы со всяким метрическим гравитационным полем. Поэтому предпринимаются попытки вывести топологию мирового многообразия непосредственно из его псевдоримановой структуры [90]. Это так называемая топология путей. Если пространство-время удовлетворяет условию сильной причинности, она совпадает с обычной топологией многообразия. В противном случае, она оказывается весьма неординарной.

2 Критерий гравитационных сингулярностей

Распределение FX коразмерности 1 на многообразии X называется интегрируемым, если его производящая форма ω удовлетворяет уравнению

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

[168,169]. В этом случае слои распределения FX касательны к слоям некоторого пространственноподобного 1-комерного слоения на

X, которое мы будем обозначать тем же символом FX. Такое пространственное слоение называется причинным, если его производящая форма является точной, т.е.

$$\omega = df,$$

где f – некоторая вещественная функция X, которая не имеет критических точек, где $df = 0$. Такое определение причинности совпадает с условием стабильной причинности по Хокингу [90], когда ни одна кривая, трансверсальная слоению FX, не пересекает какой-либо его слой дважды.

Нарушение этого условия причинности характеризуется ненулевыми когомологическими классами формы ω, классами Рейнхарта и Годбийона–Вея [168].

Гравитационное поле g на мировом многообразии X можно считать свободным от сингулярностей, если существует ассоциированная с ним пара полной псевдоримановой метрики g^R и причинного пространственно-временного слоения FX с производящей формой h^0, такой что $g^R(\nabla h^0, \nabla h^0)$ ограничена на X. Последнее условие, эквивалентное условию глобальной гиперболичности по Хокингу, гарантирует, что будучи полным относительно g^R, пространство-время удовлетворяет также известному свойству b-полноты [97,94].

Исходя из этого критерия, можно выделить следующие типы гравитационных сингулярностей:

- уже упоминавшиеся нарушения причинности;
- неполнота римановой метрики, которая, как можно показать, приводит к конформным сингулярностям [94];
- особенности пространственно-временных слоений.

Особенности слоений могут быть представлены локально (в терминах ростков) как особенности причинного слоения поверхностей уровня производящей функции f. Имеется два типа таких сингулярностей.

(i) Однозначная производящая функция f имеет критические точки $df = 0$. Она порождает так называемую хефлегеровскую структуру (сингулярное слоение) своих поверхностей уровня [168]. Слои такого слоения меняют свою топологию при прохождении через критические точки и эти топологические переходы могут быть проклассифицированы [94,169]. Гравитационные сингулярности такого типа относятся к сингулярностям кривизны по Эллису.

(ii) Производящая функция f является многозначной на X. Слои определяемого ею слоения FX в области, где f однозначна, начинают пересекать друг друга в точках ветвления этой функции и образуют каустики. Чтобы описать сингулярности такого типа, нужно поднять пространственно-временное слоение FX в кокасательное расслоение T^*X, продолжить его над сингулярной точкой и спроектировать это продолжение на базу X, описывая сингулярности такой проекции [94-96].

Остановимся на последних более подробно.

3 Каустики пространственно-временных слоений

В теории гравитации каустикой называют геометрическое место фокальных и сопряженных точек по аналогии с геометрической оптикой [171,172]. Мы следуем общему математическому определению каустик как особенностей лагранжевых отображений [173,174]. Всякая каустика может быть приведена локально (в терминах ростков) к следующей стандартной форме.

Пусть пространство $\mathbf{R}^{2n}$ параметризуется координатами $\{x^\mu, P_\mu\}$. Рассмотрим форму Лиувилля

$$\alpha = P_\mu dx^\mu \tag{6.4}$$

на $\mathbf{R}^{2n}$ и его подмногообразие N, такое что

$$d\alpha(N) = 0,$$

т.е., будучи ограниченной на N, форма α становится точной:

$$\alpha(N) = dz(N).$$

Такое подмногообразие максимальной размерности n называется лагранжевым подмногообразием.

Лагранжево подмногообразие может быть определено посредством производящей функции $S(x^i, P_j)$ от n переменных $(x^i, P_j, i \in I, j \in J)$ (где (I, J) – некоторое разбиение множества $(1, ..., n)$). Оно задается уравнениями

$$x^j = -\frac{\partial S}{\partial P_j}, \qquad P_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}.$$

Рассмотрим проекцию

$$\pi : (x^\mu, P_\mu) \to (x^\mu)$$

пространства $\mathbf{R}^{2n}$ на $\mathbf{R}^n$. Будучи ограниченной на лагранжево подмногообразие

$$\pi_N : (x^i, P_j) \to (x^i, x^j = -\frac{\partial S}{\partial P_j}),$$

эта проекция называется лагранжевым отображением.

Каустика определяется как множество критических точек лагранжева отображения, т.е. точек, где матрица

$$\partial^2 S / \partial P_i \partial P_j$$

имеет особенности.

Например, каустика на многообразиях определяется следующим образом. Пусть кокасательное расслоение T^*X наделено индуцированными координатами $(x^\mu, P_\mu = \dot{x}_\mu)$. Форма Лиувилля (6.4) задает n-мерное лагранжево подмногообразие T^*X. Особые точки проекции такого лагранжева подмногообразия T^*X на базу X образуют каустику.

Заметим, что геометрическое место фокальных и сопряженных точек римановых и времениподобных псевдоримановых геодезических также образуют каустики согласно приведенному определению [94,95].

Наше определение каустики слоения основывается на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 6.2. Для всякого слоения поверхностей уровня FX на многообразии X, существует слоение F' некоторого лагранжева подмногообразия кокасательного расслоения T^*X, такое что FX является образом Φ' при лагранжевом отображении. □

Действительно, пусть f – производящая функция слоения FX. Определим имбеддинг

$$\gamma : (x^\mu) \to (x^\mu, P_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu})$$

базы X в T^*X. Его образ является лагранжевым подмногообразием касательного расслоения $T^*(X)$. Пусть F' – индуцированное слоение $\pi^*_{\gamma(X)}\Phi$ на $\gamma(X)$, где $\pi_{\gamma(X)}$ – лагранжево отображение

$$\pi_{\gamma(X)} : \gamma(X) \to X.$$

Так как γ и $\pi_{\gamma(X)}$ – диффеоморфизмы между X и $\gamma(X)$ ($\pi_{\gamma(X)} \circ \gamma = \mathrm{Id}\, X$), слоение FX на X может быть представлено как образ слоения F' на $\gamma(X)$ относительно лагранжева отображения $\pi_{\gamma(X)}$.

Например, пусть $N \subset T^*X$ – лагранжево подмногообразие, порождаемое локально функцией $S(x^i, P_j)$ и F' – слоение поверхностей уровня функции

$$f'(x^i, P_j) = S - P_j \frac{\partial S}{\partial P_j}$$

на лагранжевом подмногообразии N. Образ $\pi_N(F')$ слоения F' при лагранжевом отображении π_N является слоением на образе $\pi_N(U)$ области $U \subset N$, где это лагранжево отображение не имеет критических точек. Это слоение разрушается в точках каустики лагранжева отображения π_N.

Существуют следующие классы $A_2, A_3, A_4, D_4, A_5, D_5$ устойчивых каустик на 4-мерном многообразии. Например, каноническая производящая функция каустики A_3 имеет вид

$$S = -P_0^4 + x^1 P_0^2,$$

и соответствующее лагранжево подмногообразие N задается уравнением

$$x^0 = 4P_0^3 - 2x^1 P_0, \qquad P_1 = P_0^2.$$

Лагранжево отображение тогда имеет вид

$$x^0 = 4P_0^3 - 2x^1 P_0. \tag{6.5}$$

Его каустика, где

$$\partial^2 S / \partial P_0^2 = 0,$$

состоит из точек

$$x^1 = 6P_0^2,$$

и ее лагранжев образ на X образован точками

$$(x^0)^2 = \frac{8}{27}(x^1)^5.$$

Производящая функция слоения F' на лагранжевом многообразии запишется

$$f' = 3P_0^4 - x^1 P_0^2.$$

Тогда на X производящая функция лагранжева образа слоения F' имеет вид

$$f(x^0, x^1) = f'(x^1, P_0(x^0, x^1)),$$

где функция $P_0(x^0, x^1)$ задается уравнением (6.5). Функция P_0 и производящая функция f становятся 3-значными в точках каустики. Следовательно росток A_3 каустики слоения характеризуется поведением компоненты ω_0 производящей формы слоения, которая становится 3-значной в точках каустики.

Таким образом, можно сказать, что особенности слоений типа каустик имеют следующую природу. Существуют области пространства-времени, где неближайшие слои слоения начинают пересекаться. Поэтому пространственно-временное слоение может быть локально продолжено через точки каустики, тогда как глобальное продолжение невозможно.

Например, пусть $f(u,v)$ – действительная функция на $\mathbf{R}^2$, которая удовлетворяет уравнению

$$f^3(u,v) - 3uf(u,v) - 2v = 0,$$

где u, v – координаты на $\mathbf{R}^2$. Эта функция является однозначной

$$f_+ = [v + (v^2 - u^3)^{1/2}]^{1/3} + [v - (v^2 - u^3)^{1/2}]^{1/3}$$

на области $U = (u, v : v^2 > u^3)$, и она 3-значна

$$f_{0,1,2} = 2u^{1/2}\cos(\frac{1}{3}(\phi + 2\pi n)),$$
$$\phi = \arccos(vu^{-3/2}), \qquad n = 0, 1, 2,$$

в точках $v^2 < u^3$. Пусть F – слоение

$$\Phi_c = \{u, v : f_+(u, v) = c = \mathrm{const}\}$$

на $U \subset \mathbf{R}^2$. Его слоями F_c являются линии

$$2v = c^3 - 3uc, \qquad -\infty < c < +\infty.$$

Это слоение имеет каустику в точках ветвления $v^2 = u^3$ функции f. Более того, $u = v = 0$ является точкой каустики A_3, тогда как другие точки $v^2 = u^3 \neq 0$ образуют каустику типа A_2. Слои $\Phi_c, c > \alpha > 0$ могут быть продолжены через кривую каустики $v = u^{3/2}$ на область $0 < v < u^{3/2}$, где они образуют слоение

$$f_0(u, v) = \mathrm{const}.$$

Эти слои однако начинают пересекаться, когда $v < 0$, хотя ближайшие слои пересекают друг друга только на кривой каустики $v = -u^{3/2}$. Отметим, что слои $\Phi_{c>0}$ начинают пересекать слои $\Phi_{c<0}$ на кривой каустики $v = u^{3/2}$.

Гравитационные сингулярности типа каустик не сводятся однако к локально продолжаемым сингулярностям по Эллису. Например, сингулярность A_2-каустики $u^2 = v^3 \neq 0$ упомянутого выше слоения локально продолжаема, тогда как сингулярность A_3-каустики $u = v = 0$ не является таковой.

Отметим, что гравитационные сингулярности типа каустик, в частности, могут описывать столкновения гравитационных волн [96].

Заключение

В заключение перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Разработан геометрический аппарат классической теории поля в формализме расслоений, когда классические поля представляются сечениями расслоений, а их динамика формулируется на многообразиях струй этих расслоений. Это является обобщением известной геометрической формулировки калибровочной теории на главных расслоениях. В терминах редуцированных структур на расслоениях дано описание полевых моделей со спонтанно нарушенными симметриями.

2. Развита дифференциальная геометрия композиционных расслоений. В терминах композиционных расслоений дано описание теории поля с нарушеннными симметриями в случае, когда материальные поля допускают только подгруппу точных симметрий. Построены их конфигурационное пространство и модифицированный оператор ковариантного дифференцирования.

3. Основываясь на первой вариационной формуле, разработана общая процедура построения дифференциальных законов сохранения в классической лагранжевой теории поля. Показано, что всякий закон сохранения является суперпозицией нетеровского закона сохранения и закона сохранения энергии-импульса, где разные потоки энергии-импульса отвечают разным горизонтальным поднятиям векторных полей на мировом

многообразии. Получено выражение для законов сохранения в присутствии фонового поля. Исследован случай, когда сохраняющийся ток сводится к суперпотенциалу. Показано, что нетеровский ток в калибровочной теории внутренних симметрий сводится к суперпотенциалу.

4. Установлены законы сохранения энергии-импульса в теории поля на геометрических расслоениях, исходя из канонического горизонтального поднятия векторных полей на мировом многообразии и инвариантности лагранжианов относительно общих ковариантных преобразований, генераторами которых эти горизонтальные поднятия являются. Показано, что поток энергии-импульса в такой теории сводится к суперпотенциалу. Получен закон сохранения энергии-импульса в аффинно-метрической модели гравитации с произвольным лагранжианом. Показано, что поток энергии-импульса в этой модели сводится к суперпотенциалу, обобщающему суперпотенциал Комара в теории относительности.

5. В рамках геометрической формулировки классической теории поля развита калибровочная модель классической гравитации, в которой гравитационное поле описывается как хиггсовское поле, отвечающее спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий. В терминах редуцированных структур на расслоениях дана геометрическая формулировка принципа эквивалентности. Показано, что нарушение симметрий в теории гравитации следует из геометрического принципа эквивалентности и, с физичекой точки зрения, обусловлено существованием дираковских фермионных полей с группой Лоренца точных симметрий. Хиггсовский характер гравитационного

поля устанавливается тем фактом, что разные гравитационные поля определяют неэквивалентные спиновые структуры, в частности, неэквивалентные представления кокасательных векторов к мировому многообразию матрицами Дирака.

6. Построено композиционное спинорное расслоение (универсальная спиновая структура), такое что для всякого гравитационного поля ассоциированная с ним спиновая структура является его подрасслоением. Многообразие струй композиционного спионорного расслоения представляет собой конфигурационное пространство полной системы фермионных и гравитационных полей. Построены обобщенный оператор Дирака и полный лагранжиан этой системы. Последний сводится к лагранжиану аффинно-метрической гравитации и спинорных полей в геометрии с общей линейной связностью.

7. Построен канонический лифт на вышеупомянутое композиционное спинорное расслоение векторных полей на мировом многообразии, который является генератором общих ковариантных преобразований полной системы фермионных и гравитационных полей. Исходя из этого, установлен закон сохранения энергии-импульса в калибровочной теории гравитации, где поток энергии-импульса сводится к обобщенному суперпотенциалу Комара аффинно-метрической гравитации.

8. Как один из вариантов калибровочной теории гравитации, получено аффинно-метрическое расширение релятивитской теории гравитации А.А.Логунова в присутствии спинорных полей. Построены калибровочные преобразования этой модели, которые сохраняют фоновую геометрию и являются общими ковариантными преобразованиями эффективной метрики. Ис-

ходя из этого, построен закон сохранения энергии-импульса в релятивисткой теории гравитации и в ее аффинно-метрическом обобщении.

9. Поскольку в силу хиггсовского характера гравитационного поля его обычные флуктуации не удовлетворяют принципу суперпозиции, найден новый тип негравитационных флуктуаций гравитационного поля. Они описываются в рамках калибровочной теории группы трансляций и, с геометрической точки зрения, представляют собой деформации мирового многообразия. Построен их лагранжиан, который отличен от гравитационных лагранжианов и допускает массовый член. Показано, что вклад таких флуктуаций приводит к эффектам типа пятой силы.

10. По аналогии с хиггсовской моделью гравитации, дано геометрическое описание супергравитации как суперметрики, определяемой из условия редукции структурной супергруппы касательного суперрасслоения над супермногообразием.

11. Показано, что редуцированная лоренцевская структура, обуславливающая спонтанное нарушение симметрий в теории гравитации, сужается до группы пространственных вращений, что определяет пространственно-временное разбиение. Исходя из этого, предложен критерий гравитационных сингулярностей как особенностей пространственно-временных слоений. Дана их классификация как топологических переходов и каустик слоений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mielke E. Geometrodynamics of gauge fields. – Berlin: Akademie-Verlag, 1987.

2. Šijački Dj., Neéman Y. QCD as an effective strong gravity. – Physics Letters, 1990, v.B247, p.571.

3. Coqueraux R., Jadczyk A. Riemannian geometry, fiber bundles, Kaluza–Klein theories and all that. – Singapore: World Scientific, 1988.

4. Thorn C. String field theory. – Physics Reports, 1989, v.175, p.1-101.

5. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961.

6. Тредер Г.Ю. Теория гравитации и принцип эквивалентности. – М.: Атомиздат, 1975.

7. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. – М.: Изд. МГУ, 1985.

8. Логунов А.А. Релятивиская теория гравитации и принцип Маха. – Протвино: Изд. ИФВЭ, 1996.

9. Нарликар Дж. Инерция и космология в теории относительности. – В сб.: Астрофизика, кванты и теория относительности. /Под ред. Ф.И.Федорова – М.: Мир, 1982, с.498.

10. Sardanashvily G. Gauge theory in jet manifolds. – Palm Harbor: Hadronic Press, 1993.

11. Sardanashvily G. Generalized Hamiltonian formalism for field theory. – Singapore: World Scientific, 1995.

12. Сарданашвили Г.А. Математические методы теории поля. I. Геометрия и классические поля. – М.: Изд. УРСС, 1996.

13. Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G. New Lagrangian and Hamiltonian methods in field theory. – Singapore: World Scientific, 1997.

14. Krupka D. Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds. – Folia Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, 1973, v.14, p.1.

15. Dedecker P. On the generalization of symplectic geometry to multiple integrals in the calculus of variations. – In vol.: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics, Lect. Notes in Mathematics, v.570. – Berlin: Springer-Verlag, 1977, p.395.

16. Takens F. A global version of the inverse problem of the calculus of variations. – Journal of Differential Geometry, 1979, v.14, p.543.

17. Bauderon M. Le problème inverse du calcul des variations.– Ann. l'Inst. Henri Poincaré, 1982, v.36, p.159.

18. Gotay M. A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. I. Covariant Hamiltonian formalism. – In vol.: Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange. / Ed. M.Francaviglia. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1991, p.203.

19. Pommaret J. Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups. – Glasgow: Gordon and Breach, 1978.

20. Виноградов А.М., Красильщиков И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.

21. Bryant R., Chern S., Gardner R., Goldschmidt H., Griffiths P. Exterior differential systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1991.

22. Mangiarotti L, Modugno M. Fibered spaces, jet spaces and connections for field theories. – In vol.: Proceedings of the International Meeting on Geometry and Physics (Florence, 1982). / Ed. M. Modugno – Bologna: Pitagora Editrice, 1983, p.135.

23. Saunders D. The geometry of jet bundles. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

24. Kolář I., Michor P., Slovák J. Natural operations in differential geometry. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.

25. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. – М.: Атомиздат, 1980.

26. Даниэль М., Виалле С. Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга–Миллса. – Успехи физических наук, 1982, т.136, с.377.

27. Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. Калибровочная теория гравитациию – М.: изд. МГУ, 1985.

28. Marathe K., Martucci G. The mathematical foundations of gauge theories. – Amsterdam: North Holland, 1992.

29. Basombrio F. A comparitive review of certain gauge theories of the gravitation field. – General Relativity and Gravitation, 1980, v.12, p.109.

30. Tseytlin A. Poincaré and de Sitter gauge theories of gravity with propagating torsion. – Physical Review D, 1981, v.26, p.3327.

31. Ivanenko D., Sardanashvily G. The gauge treatment of gravity. – Physics Reports, 1983, v.94, p.1.

32. Пономарев В.Р., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитациию – М.: Энергоатомиздат, 1984.

33. Sardanashvily G., Zakharov O. Gauge gravitation theory. – Singapore: World Scientific, 1992.

34. Hehl W., McCrea J., Mielke E., Ne'eman Y. Metric-affine gauge theory of gravity. – Physics Reports, 1995, v.258, p.1.

35. Сб.: Элементарные частицы и компенсирующие поля / Под ред. Д.Д.Иваненко. – М.: Мир, 1964.

36. Kibble T.W.B. Lorentz invariance and the gravitational field. – Journal of Mathematical Physics, 1961, v.2, p.212.

37. Sciama D. The physical structure of general relativity. – Review of Modern Physics, 1964, v.36, p.463.

38. Hehl F., von der Heyde P., Kerlick G., Nester J. General relativity with spin and torsion: foundations and prospects. – Review of Modern Physics, 1976, v.48, p.394.

39. Lord E. The metric-affine gravitational theory as the gauge theory of the affine group. – Physics Letters, 1978, v.65A, p.1.

40. Norris L., Fulp R., Davies W. Underlying fibre bundle structure of $A(4)$ gauge theories. – Physics Letters, 1980, v.79A, p.278.

41. Катанаев М.О. О калибровочной теории для группы Пуанкаре. – ТМФ, 1983, т.54, с.381.

42. Kawai T. A Poincaré gauge theory of gravity. – General Relativity and Gravitation, 1986, v.18, p.995-1018; 1987, v.19, p.1285.

43. Sardanashvily G. What are the Poincaré gauge fields? – Czechoslovac Journal of Physics, 1983, v.B33, p.610.

44. Dass T. Gauge fields, space-time geometry and gravity. – Pramana-Journal of Physics, 1984, v.23, p.433.

45. Sardanashvily G., Gogberashvily M. The dislocation treatment of gauge fields of space-time translations. – Modern Physics Letters A, 1987, v.2, p.609.

46. Sardanashvily G., Gogberashvily M. Translation gauge fields and space-time dislocations. – Annalen der Physik, 1988, v.45, p.297.

47. Sardanashvily G. The gauge theory of the fifth force. – Acta Physica Polonica, 1990, v.B21, p.583.

48. Bender C., Cooper F., Guralnik G. Path integral formulation of mean-field perturbation theory. – Annals of Physics, 1977, v.109, p.165.

49. Первушин В.Н., Райнхардт X., Эберт Д. Континуальный интеграл в коллективных переменных и его применение к ядерной и адронной физике. – ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.1115.

50. Banks T., Zaks A. Composite gauge bosons in 4-Fermi theories. – Nuclear Physics, 1981, v.B148, p.303.

51. Kawati S., Miyata H. Phase transitions in four-dimensional fermion model. – Physical Review D, 1981, v.23, p.3010.

52. Saller H. Dinamical implementation of the gravitons as Nambu-Goldstone bosons. – Il Nuovo Cimento A, 1983, v.76, p.663.

53. Сарданашвили Г.А., Ихлов Б.Л. Хиггсовский вакуум в теории гравитации. – Вестник Московского ун-та, Физика, Астрономия, 1986, No 2, с.17.

54. Sardanashvily G., Ikhlov B. Higgs gravitation vacuum in the gauge gravitation theory. – Acta Physica Hungarica, 1989, v.65, p.79.

55. Сб.: Квантовая теория калибровочных полей / Под ред. Н.П.Коноплевой. – М.: Мир, 1977.

56. Гриб А.А. Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. – М.: Атомиздат, 1978.

57. Sardanashvily G., Zakharov O. On functional integrals in quantum field theory. – Reports on Mathematical Physics, 1991, v.29, p.101.

58. Sardanashvily G. Higgs vacuum from the axiomatic viewpoint. – Il Nuovo Cimento A, 1991, v.104, p.105.

59. Nikolova L., Rizov V. Geometrical approach to the reduction of gauge theories with spontaneously broken symmetry. - Reports on Mathematical Physics, 1984, v.20, p.287.

60. Sardanashvily G. On the geometry of spontaneous symmetry breaking. – Journal of Mathematical Physics, 1992, v.33, p.1546.

61. Менский М.В. Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. – М.: Наука, 1976.

62. Coleman S., Wess J., Zumino B. Structure of phenomenological Lagrangians, I, II. – Physical Review, 1969, v.177, p.2239,2246.

63. Joseph A., Solomon A. Global and infinitesimal nonlinear chiral transformations. – Journal of Mathematical Physics, 1970, v.11, p.748

64. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. – М.: Мир, 1975.

65. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.I. – М.: Наука, 1981.

66. Kobayashi S. Transformation groups in differential geometry. – Berlin: Springer-Verlag, 1972.

67. Gordejuela F., Masqué J. Gauge group and G-structures. – Journal of Physics A, 1995, v.28, p.497.

68. Sardanashvily G. Spontaneous symmetry breaking and multidimensional coordinate space. – Il Nuovo Cimento, 1991, v.106B, p.575.

69. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. – ЖЭТФ, 1965, т.21, с.1093.

70. Isham C., Salam A., Strathdee J. Nonlinear realization of space-time symmetries. – Annals of Physics, 1970, v.62, p.98.

71. Ne'eman Y., Šijački Dj. Unified affine gauge theory of gravity and strong interactions with finite and infinite $\overline{GL(4,\mathbf{R})}$ spinor fields. – Annals of Physics, 1979, v.120, p.292.

72. Percacci R. Geometry of nonlinear field theories. - Singapore: World Scientific, 1986.

73. Trautman A. Elementary introduction to fibre bundles and gauge fields. – Czechoslovac Journal of Physics, 1979, v.B29, p.107.

74. Сарданашвили Г.А. К проблеме гравитационного вакуума. – Известия вузов СССР, Физика, 1978, No 7, с.137.

75. Sardanashvily G. Gravity as a Goldstone field in the Lorentz gauge theory. – Physics Letters, 1980, v.75A, p.257.

76. Ivanenko D., Sardanashvily G. On the Goldstone gravitation theory. – Pramana-Journal of Physics, 1987, v.29, p.21.

77. Sardanashvily G. Gauge theory of gravity. – In vol.: Problems of Modern Physics. / Ed. Yu.Obukhov and P.Pronin – Singapore: World Scientific, 1991, p.75.

78. Sardanashvily G. Gauge gravitation theory. – International Journal of Theoretical Physics, 1991, v.30, p.721.

79. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. – М.: Наука, 1987.

80. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивисткая теория гравитации. – М.: Наука, 1989.

81. Вейнберг С. Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.

82. Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории гравитации. – Минск: Наука и Техника, 1979.

83. Реками Э. Теория относительности и ее обобщения. - В сб.: Астрофизика, кванты и теория относительности. / Под ред. Ф.И.Федорова – М.: Мир, 1982, с.53.

84. Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: Иностранная литература, 1963.

85. Родичев В.И. Теория гравитации в ортонормальном репере. – М.: Наука, 1974.

86. Ivanenko D., Sardanashvily G. Relativity principle and equivalence principle in the gauge gravitational theory. – Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 1981, v.34, p.1237.

87. Ivanenko D., Sardanashvily G. On the relativity and equivalence principles in the gauge theory of gravitation. – Lettere il Nuovo Cimento, 1981, v.30, p.220.

88. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Принципы относительности и эквивалентности в калибровочной теории гравитации. – Известия вузов СССР, Физика, 1981, N 6, с.79.

89. Mangiarotti L., Marathi K., Sardanashvily G. Equivalence principle, Lorentz structures and theories of gravitation. – Il Nuovo Cimento, 1990, v.105B, p.757.

90. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. – М.: Мир, 1977.

91. Ivanenko D., Sardanashvily G. Foliation analysis of gravitational singularities. – Physics Letters, 1982, v.A91, p.341.

92. Сарданашвили Г.А., Янчевский В.П. Пространственно-временные слоения в теории гравитации. – Известия вузов СССР, Физика, 1982, N 9, с.20.

93. Sardanashvily G. Space-time foliations. – Acta Physica Hungarica, 1985, v.57, p.31.

94. Sardanashvily G., Yanchevsky V. Caustics of space-time foliations in General Relativity. – Acta Physica Polonica, 1986, v.B17, p.1017.

95. Сарданашвили Г.А. Каустики пространственно-временных слоений. – Известия вузов СССР, Физика, 1988, N 9, с.32.

96. Сарданашвили Г.А., Тимошенко Э.Г. Гравитационные сингулярности типа каустик. – Вестник Московского ун-та, Физика, Астрономия, 1989, N 1, с.75.

97. Canarutto M. An introduction to the geometry of singularities in general relativity. – Rivista il Nuovo Cimento, 1988, v.11, p.1.

98. Nieuwenhuizen P. Supergravity. – Physics Reports, 1981, v.68, p.1.

99. Cianci R. Introduction to supermanifolds. – Napoli: Bibliopolis, 1990.

100. Ivanenko D., Sardanashvily G. Goldstone type supergravity. – Progress of Theoretical Physics, 1986, v.75, p.969.

101. Sardanashvily G., Zakharov O. Fiber bundle formalism for supergravity, – Pramana-Journal of Physics, 1986, v.26, P.L295.

102. Sardanashvily G., Zakharov O. On the Higgs feature of gravity. – Pramana-Journal of Physics, 1989, v.33, p.547.

103. Sardanashvily G. Spontaneous symmetry breaking in the gauge gravitation theory. – Preprint IC/90/73 ICTP, Triest, 1990, p.1.

104. Geroch R. Spinor structure of space-time in general relativity. – Journal of Mathematical Physics, 1968, v.9, p.1739.

105. Wiston G. Topics on space-time topology. – International Journal of Theoretical Physics, 1974, v.11, p.341; 1975, v.12, p.225.

106. Aringazin A., Mikhailov A. Matter fields in spacetime with vector non-metricity. – Classical and Quantum Gravity, 1991, v.8, p.1685.

107. Sardanashvily G. Stress-energy-momentum conservation law in gauge gravitation theory. – Classical and Quantum Gravity, 1997, v.14, p.1357.

108. Dabrowski L., Percacci R. Spinors and diffeomorphisms. – Communication in Mathematical Physics, 1986, v.106, p.691.

109. Lawson H., Michelson M-L. Spin geometry. – Prinseton: Princeton Univ. Press, 1989.

110. Switt S. Natural bundles. II. Spin and the diffeomorphism group. – Journal of Mathematical Physics, 1993, v.34, p.3825.

111. Fulp R., Lawson J., Norris L. Geometric prequantization on the spin bundle based on n-symplectic geometry: the Dirac equation. – International Journal of Theoretical Physics, 1994, v.33, p.1011.

112. Ne'eman Y., Šijački Dj. $\overline{\mathrm{SL}}(4,\mathbf{R})$ world spinors and gravity. – Physics Letters, 1985, v.157B, p.275; v. 160B, p.431.

113. Sardanashvily G. Gravity as a Higgs field. – In vol.: New Frontiers in Gravitation. / Ed. G.Sardanashvily – Palm Harbor: Hadronic Press, 1996, p.299.

114. Giachetta G., Sardanashvily G. Energy-momentum superpotentials in gravitation theory. – In vol.: Gravity, Particles and Space-Time. / Ed. P.Pronin and G.Sardanashvily – Singapore: World Scientific, 1996, p.471.

115. Guillemin V, Sternberg S. Symplectic techniques in physics. – Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1990.

116. Sardanashvily G. Relativistic theory of gravity: Gauge approach. – In vol.: Proceedings of the XIX Workshop on High Energy Physics and Field Theory, Protvino, 1996. – Protvino: Institute for High Energy Physics, 1997, p.184.

117. Percacci R. The Higgs phenomenon in quantum gravity. – Nuclear Physics, 1991, v.B353, p.271.

118. Сарданашвили Г.А., Гогберашвили М.Я. Гравитация и калибровочная теория дислокаций. – Известия вузов СССР, Физика, 1988, N 3, с.71.

119. Сарданашвили Г.А., Тимошенко Э.Г. Калибровочная модель пятой силы. – Вестник Московского ун-та, Физика, Астрономия, 1990, N 4, с.70.

120. Сарданашвили Г.А., Гогберашвили М.Я. Калибровочная теория трансляций и поправки к ньютоновскому потенциалу. – В сб.: Экспериментальные тесты теории гравитации. / Под ред. В.И.Брагинского и В.И.Денисова – М.: Изд. МГУ, 1989, с.51.

121. Brown J, York J. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. – Physical Review D, 1993, v.47, p.1407.

122. Lau S. Quasilocal energy conditions. – Classical and Quantum Gravity, 1995, v.12, p.1063.

123. Hawking S., Horowitz G. The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. – Classical and Quantum Gravity, 1996, v.13, p.1487.

124. Bak D., Cangemi D., Jackiw R. Energy-momentum conservation in gravity theories. – Physical Review D, 1994, v.49, p.5173.

125. Borowiec A., Ferraris M., Francaviglia M., Volovich I. Energy-momentum complex for nonlinear gravitational Lagrangians in the first-order formalism. – General Relativity and Gravitation, 1994, v.26, p.637.

126. Van der Heuvel B. Energy-momentum conservation in gauge theories. – Journal of Mathematical Physics, 1994, v.35, c.1668.

127. Giachetta G., Mangiarotti L. Dirac equation in metric-affine gravitation theories and superpotentials. – International Journal of Theoretical Physics, 1997, v.36, p.125.

128. Gotay M., Marsden J. Stress-energy-momentum tensors and the Belinfante–Rosenfeld formula. – Contemporary Mathematics, 1992, v.132, p.367.

129. Szabados L. On canonical pseudotensors, Sparling's form and Noether currents. – Classical and Quantum Gravity, 1992, v.9, p.2521.

130. Hannibal L. Conserved energy-momentum as a class of tensor densities. – Journal of Physics A, 1996, v.29, p.7669.

131. Giachetta G., Sardanashvily G. Stress-energy-momentum of affine-metric gravity. Generalized Komar Superpotential. – Classical and Quantum Gravity, 1996, v.13, p.L67.

132. Sardanashvily G. Stress-energy-momentum tensors in constraint field theories. – Journal of Mathematical Physics, 1997, v.38, p.847.

133. Fatibene F., Ferraris M., Francaviglia M. Nöther formalism for conserved quantities in classical gauge field theories. – Journal of Mathematical Physics, 1994, v.35, p.1644.

134. Novotný J. On the conservation laws in General Relativity. – In vol.: Geometrical Methods in Physics, Proceeding of the Conference on Differential Geometry and its Applications (Czechoslovakia 1983). / Ed. D.Krupka – Brno: University of J.E.Purkyně, 1984, p.207.

135. Takens F. Symmetries, conservation laws and variational principles. – In vol.: Geometry and Topology, Lect. Notes in Mathematics, vol.597. – Berlin: Springer-Verlag, 1977, p.581.

136. Dedecker P., Tulczyjew W. Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations. – In vol: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics, Lect. Notes in Mathematics, vol.836. – Berlin: Springer-Verlag, 1980, p.4.

137. Bauderon M. Differential geometry and Lagrangian formalism in the calculus of variations. – In vol.: Differential Geometry, Calculus of Variations, and their Applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, v.100. – N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 1985, p.67.

138. Sardanashvily G. On the definition of gauge transformation group in gauge theory. – Annalen der Physik, 1984, v.41, p. 23.

139. Sardanashvily G., Zakharov O. Gauge transformations in gravitation theory. – Acta Physica Polonica, 1989, v.B20, p.651.

140. Socolovsky M. Gauge transformations and fiber bundle theory. – Journal of Mathematical Physics, 1991, v.32, p.2522.

141. Ferraris M., Francaviglia M. Energy-momentum tensors and stress tensors in geometric field theories. – Journal of Mathematical Physics, 1985, v.26, p.1243.

142. Keyl M. About the geometric structure of symmetry breaking. – Journal of Mathematical Physics, 1991, v.32, p.1065.

143. Trautman A. Noether equations and conservation laws. – Communication in Mathematical Physics, 1967, v.6, p.248.

144. Giachetta G., Mangiarotti L. Gauge-invariant and covariant operators in gauge theories. – International Journal of Theoretical Physics, 1990, v.29, p.789.

145. Sardanashvily G. Constraint field systems in multimomentum canonical variables. – Journal of Mathematical Physics, 1994, v.35, p.6584.

146. Dodson C. Categories, bundles and spacetime topology. – Orpington: Shiva Publishing Limited, 1980.

147. Avis S., Isham C. Generalized spin structure on four dimensional space-times. – Communication in Mathematical Physics, 1980, v.72, p.103.

148. Novotný J. Energy-momentum complex of gravitational field in the Palatini formalism. – International Journal of Theoretical Physics, 1993, v.32, p.1033.

149. Murphy G. Energy and momentum from the Palatini formalism. – International Journal of Theoretical Physics, 1990, v.29, p.1003.

150. Dick R. Covariant conservation laws from the Palatini formalism. – International Journal of Theoretical Physics, 1993, v.32, p.109.

151. Crawford J. Clifford algebra: Notes on the spinor metric and Lorentz, Poincaré and conformal groups. – Journal of Mathematical Physics, 1991, v.32, p.576.

152. Rodrigues W., De Souza Q. The Clifford bundle and the nature of the gravitational field. – Foundations of Physics, 1993, v.23, p.1465.

153. Obukhov Yu., Solodukhin S. Dirac equation and the Ivanenko–Landau–Kähler equation. – International Journal of Theoretical Physics, 1994, v.33, p.225.

154. Greenberg M. Lectures on Algebraic Topology. – Menlo Park: W.A.Benjamin, Inc., 1971.

155. Benn I., Tucker R. An introduction to spinors and geometry with applications in physics. – Bristol: Adam Hilger, 1987.

156. Rodrigues W., Vaz J. Spinors as differential forms, and applications to electromagnetism and quantum mechanics. – In vol.: Gravity, Particles and Space-Time. / Ed. P.Pronin and G.Sardanashvily – Singapore: World Scientific, 1996, p.307.

157. Benn I., Tucker R. Representing spinors with differential forms. – In vol.: Spinors in Physics and Geometry. / Ed. A.Trautman and G.Furlan – Singapore: World Scientific, 1988.

158. Steenrod N. The topology of fibre bundles. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1972.

159. Ponomarev V., Obukhov Yu. Generalized Einstein-Maxwell theory. – General Relativity and Gravitation, 1982, v.14, p.309.

160. Tucker R., Wang C. Black holes with Weyl charge and non-Riemannian waves. – Classical and Quantum Gravity, 1995, v.12, p.2587.

161. Kosmann Y. Dérivées de Lie des spineurs. – Ann. di Matem. Pura ed Appl., 1972, v.91, p.317.

162. Fatibene F., Ferraris M., Francaviglia M., Godina M. A geometric definition of Lie derivative for spinor fields. – In vol.: Differential Geometry and its Applications (Proceedings of th 6th International Conference, Brno, August 28 – September 1, 1995). / Ed. J.Janyška, I.Kolář and J. Slovăk – Brno: Masaryk Univ. Press, 1996, p.549.

163. Greub W., Petry H.-R. On the lifting of structure groups. – In vol.: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics II, Lect. Notes in Mathematics, vol.676. – Berlin: Springer-Verlag, 1978, p.217.

164. Кадич А., Еделен Д. Калибровочная теория дислокаци и дисклинаций. – М.: Мир, 1987.

165. De Sabbata V., Melnikov V., Pronin P. Theoretical approach to treatment of non-Newtonian forces. – Progress in Theoretical Physics, 1992, v.88, p.623.

166. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. – М.: Мир, 1986.

167. Jadczyk A., Pilch K. Superspaces and supersymmetries. – Communication in Mathematical Physics, 1981, v.78, p.372.

168. De Witt B. Supermanifolds. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.

169. Фукс Д.Б. В сб.: Итоги науки и техники. Современнные проблемы математики, т.10. – М.: ВИНИТИ, 1978, с.179.

170. Тамура И. Топология слоений. - М.: Мир, 1979.

171. Джунушалиев В.Д., Сарданашвили Г.А. Суперпространство Уилера–ДеВитта и топологические переходы в теории гравитации. – Известия вузов СССР, Физика, 1986, N 12, с.73.

172. Warner F. The conjugate locus of a Riemannian manifold. - American Journal of Mathematics, 1965, v.87, p.575.

173. Rosquist K. On the structure of space-time caustics. - Communication in Mathematical Physics, 1983, v.88, p.339.

174. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982.

175. Friedrich H., Stewart J. Characteristic initial date and wave front singularities in General Relativity. – Proceedings of Royal Society, 1983, v.A385, p.345.