Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

УДК 517.977.1

Атамась Евгений Иванович

Алгоритмы обращения динамических систем с запаздыванием

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф.
Ильин Александр Владимирович

Москва – 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования.

В окружающем нас мире существует множество систем, чья динамика зависит не только от состояния системы в текущий момент, но и от состояния в предшествующие моменты времени — предыстории. Эта зависимость может быть обусловлена как переносом (вещества, информации, энергии) между различными взаимосвязанными частями системы, так и отложенным эффектом от происходящих в системе изменений. Многие системы, обладающие подобными свойствами, описываются с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Различные термины, употребляемые для обозначения таких уравнений (функционально-дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, уравнения с запаздыванием, уравнения с гистерезисом и т. д.), отражают эволюцию в посвященных им исследованиях, имеющих давнюю историю. Интерес к этим исследованиям, начавшимся в XVIII веке и получившим мощное развитие в середине XX века, не утихает до сих пор. Обусловлен он многочисленными приложениями в технике [1], биологии [2][3], химии [4][5], экономике [6][7] и других прикладных областях.

Данная работа посвящена задаче обращения для систем с последействием. Дадим для задачи обращения краткое концептуальное описание. Пусть некоторая система описывается оператором W, переводящим входной сигнал ξ в выходной сигнал y. Требуется по известным значениям выходного сигнала и априорной информации о системе (виде оператора, форме и свойствах входного сигнала и т. д.) восстановить неизвестный входной сигнал. Описываемая оператором W_{inv} система, осуществляющая обращение системы W, называется *инвертором.* При этом различают две близкие разновидности задачи обращения: *обращение слева* и *обращение справа.* Отражающие их суть схемы приведены на рисунке 1.

(a) Обращение слева ($б$) Обращение справа

Рис. 1. Обращение систем

В задаче *обращения слева* требуется по реально измеряемым значениям выходного сигнала y получить оценку $\hat{\xi}$ входного сигнала ξ. Данная задача имеет множество приложений. Она возникает, например, при управлении с обнаружением неисправностей (fault detection control), когда возникающая неисправность может рассматриваться в качестве специального входного сигнала [8], который необходимо обнаружить. В некоторых алгоритмах обеспечения защищенной передачи данных неизвестным входом может служить исходное сообщение, что сводит задачу его дешифровки к задаче обращения [9]. Еще одна область приложении относится к автоматизации производства. Зачастую требуется определение усилий, производимых автоматическими инструментами (например, режущих сил, сил сопротивления), непосредственное измерение которых затруднено или вовсе невозможно. Рассмотрение этих усилий в качестве неизвестных входов системы позволяет свести их измерение к задаче обращения системы. Поскольку входными данными инвертора являются результаты реальных измерений, негативное влияние на качество которых оказывают многочисленные факторы внешней среды, важно, чтобы используемые алгоритмы обращения были робастны по отношению к погрешностям входного сигнала.

Задача *обращения справа* состоит в определении входного воздействия ξ по желаемому выходу системы $\hat{y}$ и ее математической модели. Можно ожидать, что подача полученного при обращении модели системы входного сигнала на вход реального объекта приведет к тому, что на выходе мы получим желаемый сигнал $y = \hat{y}$. Этот подход активно применяется при решении задаче слежения [10]. Из описания ясно, что эффективность данного метода существенно зависит от качества модели объекта, что приводит к необходимости построения инверторов, устойчивых как к внешним возмущениям, так и к неточностям моделирования. При этом можно ожидать, что качество входного сигнала инвертора — желаемого выхода $\hat{y}$ — будет достаточно высоким.

По интервалу времени, на котором нам доступен измеряемый сигнал, задачи обращения можно разделить на *ретроспективные* и *реального времени*. В ретроспективных задачах измеряемый сигнал доступен за все время функционирования системы. В задачах реального времени мы знаем значения входного сигнала лишь на промежутке времени от начала эксперимента и до текущего момента. При этом и результат работы алгоритма обращения обычно необходимо получать в реальном времени. Ясно, что задачи реального времени предъявляют более высокие требования к быстродействию инверторов. В данной работе рассматриваются именно такие задачи.

Построение точного инвертора, обеспечивающего равенство $W \circ W_{inv} = Id$ ($W_{inv} \circ W = Id$) и, следовательно, $\hat{\xi}(t) = \xi(t)$ ($\hat{y}(t) = y(t)$) для всех моментов времени t, является чрезвычайно сложной задачей, налагающей весьма жесткие требования как на систему, так и на алгоритм обращения. В реальных условиях, характеризующихся неопределенностями, погрешностями моделирования и измерения, она и вовсе представляется неразрешимой. В то же время, для практических целей зачастую достаточно получить лишь *оценку* неизвестного сигнала $\hat{\xi}(t)$ с устраивающей нас точностью. Именно таковы оценки, получаемые с помощью рассматриваемых в данной работе алгоритмов.

Задача обращения относится к числу *обратных* задач динамики управляемых систем. Как и многие обратные задачи, она не является корректной по Адамару: не всегда по заданному выходному сигналу входной сигнал может быть восстановлен единственным образом, даже если мы не будем различать сигналы, разность которых укладывается в пределы интересующей нас погрешность. По этой причине немаловажно выделить условия, обеспечивающие разрешимость задачи обращения. Классическое условие устойчивости нулевой динамики системы, рассматриваемое в большинстве работ, посвященных задаче обращения, в работе удается заменить гораздо менее ограничительным условием ограниченности входных и выходных сигналов.

Основным объектом исследования в данной работе являются управляемые системы, описываемые линейными системами дифференциальных уравнений с конечным числом сосредоточенных запаздываний вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t-\tau_i), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t-\tau_i), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход системы, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вход, A_i, B_i, C_i и D_i – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей, τ_i – постоянные запаздывания.

Как и для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, изучение инверторов для которых началось еще в 60-е годы XX века, для систем с запаздыванием задача обращения по-прежнему остается актуальной, о чем свидетельствуют посвященные ей многочисленные работы (см., например, [11–14]). При этом существенный теоретический и практический интерес представляет получение робастных алгоритмов обращения и расширение области их применимости на новые классы систем.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка новых алгоритмов обращения для различных классов управляемых динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями.

Для достижения намеченной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Задача нахождения новых достаточных условий обратимости динамических систем.

2. Задача построения канонической формы с выделением нулевой динамики для систем с запаздыванием.

3. Задача восстановления ограниченного решения для систем ОДУ, ФДУ, разностных уравнений, неустойчивых ОДУ.

4. Задача получения алгоритмов обращения для различных классов систем с запаздыванием.

Научная новизна. В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

1. Для различных классов динамических систем (как с запаздыванием, так и без) были получены новые достаточные условия обратимости, являющиеся менее ограничительными, нежели известные ранее.

2. Понятие канонической формы с выделением нулевой динамики, играющее важную роль в задаче обращения динамических систем, было обобщено на системы с соизмеримыми запаздываниями. Была установлена связь между условиями приводимости к этой форме и понятием чистого относительного порядка, специфичного для систем с над кольцами.

3. Для различных классов линейных уравнений были получены методы восстановления ограниченных решений, что позволило во многих случаях отказаться от весьма обременительного условия унимодулярности матриц преобразований.

4. Полученные результаты позволили обобщить разработанные ранее алгоритмы обращения для систем без запаздывания на системы с соизмеримыми запаздываниями. Были получены новые условия обратимости и алгоритмы обращения.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для построения алгоритмов обращения динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа. Эти алгоритмы играют важную роль при решении задач слежения, управления в условиях неопределенности, управления с обнаружением ошибок. На практике алгоритмы обращения находят применение в робототехнике, обработке сигналов, разработке измерительных приборов и других прикладных областях.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы математической теории управления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений с разрывной правой частью, линейной алгебры, коммутативной алгебры, теории разносных уравнений, функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Получены новые достаточные условия обратимости динамических систем (описываемых как ОДУ, так и ФДУ).

2. Построена каноническая форма с выделением нулевой динамики для систем с соизмеримыми запаздываниями, получены условия приводимости к такой форме и алгоритм приведения к ней управляемой системы.

3. Получены методы восстановления ограниченного решения для систем ОДУ, ФДУ, разностных уравнений, в том числе и в случае, когда системы не являются устойчивыми. Описаны условия, при которых восстановить ограниченное решение возможно.

4. Получены алгоритмы обращения для различных классов систем с соизмеримыми запаздываниями (скалярных, векторных систем, систем с неустойчивой нулевой динамикой, систем с различным относительным порядком).

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов данной работы обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Основные результаты диссертации и отдельные ее части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. (Москва, 2013, 2017);

2. конференции "Ломоносовские чтения" в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. (Москва, 2016, 2017);

3. российско-китайском научном семинаре "Нелинейная динамика и управления" (Москва, ВМК МГУ, 2014);

4. Всероссийском совещании по проблемам управления "ВСПУ-2014" (Москва, 2014);

5. Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO-2015 (Москва, ИПУ РАН, 2015);

6. II Балтийском международном симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Светлогорск, 2016);

7. всероссийском научном семинаре "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление" под руководством академика РАН С.В. Емельянова (Москва, МГУ, 2015-2017);

8. научных семинарах кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, МГУ, 2013-2017).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [15–19], 2 статьи в сборниках трудов конференций [20, 21] и 4 тезиса докладов [22–25].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 119 страниц. Библиография включает 74 наименований на 7 страницах.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируются цели работы и основные положения, выносимые на защиту; обосновываются научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость представляемой работы.

Обзор литературы содержит реферативное описание имеющихся результатов по тематике диссертации, приводятся ссылки на ключевые работы и монографии, позволяющие составить представление о текущем состоянии исследуемой области.

В **главе 1** рассматриваются условия обратимости для различных классов систем.

Параграф 1 содержит в себе неформальное описание рассматриваемой задачи. Приведенные в нем рассуждения призваны мотивировать используемые в дальнейшем методы и понятия.

В **параграфе 2** вводятся некоторые понятия, которые будут использованы в дальнейшем, а также приводятся классические необходимые условия обратимости линейных систем, в том числе с запаздыванием.

Параграф 3 содержит новое достаточное условие обратимости для линейных стационарных многосвязных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\xi,\ x(0) = x_0, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{0.1}$$

опирающееся на предположение об ограниченности входных и выходных сигналов, являющееся естественным для приложений. Известны условия, при которых система (0.1) приводима к форме с выделением нулевой динамики

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{cases} \quad . \tag{0.2}$$

Теорема 1. Пусть система (0.1) наблюдаема и приводима к форме с выделением нулевой динамики (0.2), а спектр матрицы A_{11}, определяющей нулевую динамику системы, не содержит точек на мнимой оси. Тогда, если сигнал $\xi(t)$ ограничен и $y(t) \equiv 0$ начиная с некоторого момента времени t_0, то $x(t) \to 0$ и $\xi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 система (0.1) обратима.

Параграф 4 содержит вспомогательную лемму, используемую в дальнейшем для осуществления замен координат в системах над кольцами.

Лемма 1. Полиномиальная матрица $T'(d) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times n}[d]$, дополняющая заданную полиномиальную матрицу $C(d) \in \mathbb{R}^{l\times n}[d]$ до квадратной унимодулярной, существует тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель миноров максимального порядка l $(l < n)$ матрицы $C(d)$ есть вещественное число.

С ее помощью в **параграфе 5** производится построение канонической формы с выделением нулевой динамики для систем с соизмеримыми запаздываниями. Рассматривается система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau), \end{cases} \tag{0.3}$$

и ее алгебраическое представление

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)\xi, \\ y = C(\Delta)x. \end{cases} \tag{0.4}$$

Определение 3. Вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:

1. $c_i B = 0$, $c_i AB = 0$, $\dots$, $c_i A^{r_i - 2} B = 0$, $c_i A^{r_i - 1} B \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.
2. $\det \begin{pmatrix} c_1 A^{r_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m - 1} B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0.$

В случае, когда $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (такие матрицы называются *унимодулярными*), т. е. матрица $H_r(\Delta)$ обратима, относительный порядок называется *чистым*.

Основной результат параграфа содержится в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть система (0.4) обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{cases} \tag{0.5}$$

На основе полученной канонической формы в **параграфе 6** полученное ранее в параграфе 3 достаточное условие обратимости обобщается на случай систем функционально-дифференциальных уравнений.

Теорема 5. Пусть система (0.3) квадратная, спектрально наблюдаема и приводима к виду (0.5), а спектр матрицы $A_{11}(\Delta)$ не содержит точек на мнимой оси. Тогда, если управление $\xi(t)$ ограниченно и таково, что $y(t) \equiv 0$ при $t \geqslant t_0$, то $x(t) \to 0$.

Следствие 2. В условиях теоремы 5 система (0.3) обратима.

Результаты **главы 1** были опубликованы в работах [16, 18, 23, 24].

Глава 2 посвящена непосредственному описанию алгоритмов обращений для динамических систем.

Параграф 1 содержит уже известные результаты об алгоритме обращения с разрывным управлением для систем без запаздывания.

Параграф 2 содержит основные результаты по обращению векторных квадратных систем с запаздыванием. Приводятся алгоритмы построения инверторов и указывается точность инвертирования. Рассматривается класс функций

$$\Omega^1 = \{\xi(t) : \xi \in C^1[0,\infty),\ |\xi(t)| \leqslant \xi_0,\ |\dot{\xi}(t)| \leqslant \xi_1\}.$$

Предполагается, что система (0.4) приводима к форме с выделением нулевой динамики (0.5). Тогда можно рассмотреть её управляемую модель (0.8), где $u(t)$ — доступное нам управление, и разности между компонентами фазового вектора реальной системы и модели $e_x = \bar{x}_m - \bar{x}$, $e_y = y_m - y$.

$$u = -\alpha e_y - F \operatorname{Sgn} e_y. \tag{0.6}$$

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T}^{t} u(\tau)d\tau. \tag{0.7}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_m = A_{11}\bar{x}_m + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}}_m = A_{21}\bar{x}_m + A_{22}\bar{y} + Gu, \end{cases} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r|\times m}. \tag{0.8}$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 9. Пусть система (0.4) является квадратной, приводима к виду (0.5) и обладает чистым векторным относительным порядком, а ее нулевая динамика асимптотически устойчива, неизвестный сигнал $\xi(t) \in \Omega^1$. Тогда в предположении о возможности точного вычисления производных выходного сигнала y инвертор (0.6), (0.7), (0.8), дает оценку $\hat{\xi}(t) = H_r^{-1}\hat{\eta}(t)$ для неизвестного сигнала $\xi(t)$, которая с некоторого момента времени t^* удовлетворяет оценке

$$|\hat{\xi}(t) - \xi(t)| \leqslant K\xi^1 T,$$

где T — параметр фильтра (0.7), ξ^1 — оценка для $\dot{\xi}(t)$ из класса Ω^1, $K > 0$ — положительная константа, определяемая матрицей инвертора.

В **параграфе 3** полученный результат обобщается на случай гипервыходных систем вида

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y}' + \bar{B}\xi, \\ z = C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}. \end{cases} \tag{0.9}$$

Оказывается, что в этом случае для обратимости системы достаточно спектральной обнаруживаемости пары $\{C_{12};\, A_{11}\}$.

Параграф 4 посвящен обращению нестрого физически реализуемых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t - i\tau), \end{cases} \tag{0.10}$$

Теорема 10. Пусть система (0.10) является квадратной, матрица D унимодулярна, а инвариантные нули системы лежат в левой полуплоскости. Тогда система (0.11), (0.12) решает задачу обращения системы (0.10).

$$\dot{x}_m = \bar{A} x_m + B D^{-1} y \tag{0.11}$$

$$\tilde{\xi} = D^{-1}(y - C x_m),\ |\tilde{\xi} - \xi| \to 0. \tag{0.12}$$

Описаны условия, при которых случаи невырожденной и произвольной матриц D сводятся к рассмотренному ранее случаю унимодулярной матрицы D.

В параграфе 5 рассматривается случай неустойчивой нулевой динамики системы. Основной результат содержится в в следующей теореме.

Теорема 12. Пусть система (0.4) спектрально наблюдаема и приводима к виду (0.5), входной сигнал $\xi(t) \in \Omega^1$, а спектр матрицы $A_{11}(\Delta)$ устойчив. Тогда существует инвертор, позволяющий оценить искомый сигнал ξ с любой наперед заданной точностью, начиная с некоторого момента времени t^*.

Если же спектр матрицы A_{11} не содержит точек на мнимой оси, инвертор для системы существует в дополнительном предположении о возможности восстановления ограниченного решения уравнения (0.13), причем его точность определяется точностью, с которой может быть найдено ограниченное решение.

$$\dot{\bar{x}} = A_{11} \bar{x} + A_{12} y. \tag{0.13}$$

Результаты **главы 2** были опубликованы в работах [17, 18, 20, 21, 24].

Глава 3 посвящена задаче восстановления ограниченного решения для различных классов линейных уравнений, возникающей при решении задачи обращения. Оказывается, что априорной информации об ограниченности решения уравнения зачастую достаточно для того, чтобы это решение восстановить (возможно, асимптотически). Все рассмотренные задачи обладают определенным сходством, но в то же самое время сложность их решения существенно зависит от типа представленного уравнения.

Параграф 1 посвящен следующей задаче. Пусть для линейной системы вида

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad t \geqslant 0. \tag{0.14}$$

спектр матрицы A лежит в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (т. е. спектр матрицы A целиком неустойчивый; такие матрицы в дальнейшем будем называть *антиустойчивыми*). Пусть при $t \geqslant 0$ задана непрерывная функция $\xi(t)$, $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$. Тогда известно, что существует единственное ограниченная на полупрямой функция $\phi(t)$, удовлетворяющая уравнению (0.14). Задача состоит в поиске этой функции. При этом могут рассматриваться два варианта постановки задачи:

1. Решение в режиме реального времени, т. е. $\phi(t)$ строится на основании информации о $\xi(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$;

2. Поиск $\phi(t)$ после измерения $\xi(t)$ при $t \in [0, +\infty)$.

В параграфе обсуждаются вопросы существования и единственности такого решения и его свойства. В частности, показано, что это решение $\phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$||\phi(t)|| \leqslant C_4 \xi_0, \tag{0.15}$$

где C_4 — некоторая положительная константа. Важное значение имеет следующий результат. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = ax(t) + \xi(t) \tag{0.16}$$

Теорема 15. Пусть функция $\hat{\xi}(t)$ задана на сегменте $[t_0, t_1]$, $t_0 \leqslant t_1$, непрерывна и удовлетворяет условиям $|\hat{\xi}(t)| \leqslant \xi_0$, $\xi_0 > 0$. Далее, пусть значение $\hat{x}_0$ таково, что на сегменте $[t_0, t_1]$ решение $x(t)$ системы (0.16) с начальным условием $\hat{x}_0$ удовлетворяет оценке (0.15). Тогда $\hat{\xi}(t)$ можно продолжить до функции $\xi(t)$, определенной и непрерывной на $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяющей тем же ограничениям, так, что соответствующее решение задачи (0.16) с начальным условием $\hat{x}_0$ ограничено.

Из этой теоремы следует, что в общем случае решение рассматриваемой задачи в реальном времени невозможно без привлечения дополнительной информации. Завершается параграф обсуждением возможных подходов к решению данной задачи на практике. При этом в качестве дополнительной информации может использоваться знание будущих значений правой части либо информация о ее периодичности.

В **параграфе 2** аналогичная задача рассматривается для линейного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа вида

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x_t + f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{0.17}$$

где $\mathcal{A}$ — соответствующий линейный разностный оператор, x_t — состояние системы к моменту времени t, т. е. элемент $C([t - \tau_{max}, t], \mathbb{R}^n)$. Начальные условия задаются соотношением $x_0 = \phi(t)$, $\phi \in C([-\tau_{max}, 0], \mathbb{R}^n)$.

В начале параграфа кратко приводятся некоторые определения и факты из функционального анализа и теории функционально-дифференциальных уравнений, используемые в дальнейшем. Затем обсуждается вопрос существования и единственности искомого ограниченного решения, показывается тесная связь задачи его поиска с рассмотренной ранее задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 22. Пусть в системе (0.17) функция $f(t) \in \mathcal{L}_1^{loc}([t_0, +\infty))$ и ограничена константой f_0, т. е. $||f(t)|| \leqslant f_0$, а собственные значения системы (0.17) не лежат на мнимой оси. Тогда у системы существует асимптотически единственное ограниченное решение.

В **параграфе 3** вновь рассматривается задача восстановления ограниченного решения, но теперь уже для линейного разностного уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(t - k\tau) = \xi(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{0.18}$$

в непрерывном времени. Показывается связь с аналогичной задачей для разностного уравнения с дискретным временем, исследуются вопросы существования и единственности решения, обсуждаются его свойства. В частности, доказывается следующая теорема.

Теорема 23. Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$, а матрица A антиустойчива, т. е. ее спектр лежит вне единичного круга. Тогда система (0.18) имеет единственное ограниченное решение.

Приводятся некоторые подходы к решению задачи на практике. Завершается параграф сравнительным анализом всех трех рассмотренных задач.

Результаты **главы 3** были опубликованы в работах [15, 19, 22, 25].

В **Заключении 3** приводятся основные полученные результаты, подводятся итоги проведенной работы и описываются возможные направления для дальнейших исследований.

Обзор литературы

1. Уравнения с отклоняющимся аргументом

Начало систематическому изучению дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом было положено в середине XX века в работах советских и американских математиков. За прошедшие годы были опубликованы десятки монографий и сотни статей как обзорного характера, так и посвященных частным вопросам. Познакомиться с теорией таких уравнений можно по ставшим классическими работам [26],[27],[28],[29] и более современным [30],[31]. Вопросам устойчивости и управления посвящены многочисленные монографии, среди которых можно отметить [32],[33],[34],[35]. Обзор некоторых последних достижений и дальнейшие ссылки можно найти в статье [36].

Основным объектом исследования в данной работе является управляемая система линейных стационарных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t-\tau_i), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t-\tau_i), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход системы, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вход, A_i, B_i, C_i и D_i – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей, τ_i – постоянные запаздывания. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что для функции $\xi(t)$ существует преобразование Лапласа. Вкратце отметим основные свойства таких систем, которые понадобятся нам в дальнейшем. С более детальным их изложением можно ознакомиться, например, по книге [34].

1. Система (1) является бесконечномерной (а именно, бесконечномерным является пространство ее состояний), а начальным значением дня нее является определенная на отрезке $[-T_{max}, 0]$ функция $x_0(t)$, где $T_{max} = \max\limits_i \tau_i$.

При этом для существования решения достаточно полагать, что $x_0(t)$ кусочно-непрерывна. Таким образом, система (1) может быть записана в виде абстрактного дифференциального уравнения над функциональным пространством

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}\xi(t), \\ y(t) = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}\xi(t), \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — линейные операторы.

2. Система (1) *линейная стационарная*, поэтому, по аналогии с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями без запаздываний, свойства ее решений определяются ее *характеристическим уравнением*

   $$\beta(\lambda) = \det\left(\lambda I - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\tau_i \lambda}\right) = 0. \tag{3}$$

   Решения этого уравнения называются *собственными значениями* системы. Отметим, что в общем случае $\beta(\lambda)$ представляет собой *квазимногочлен*, т. е. многочлен от переменных $\lambda, e^{-\tau_1\lambda}, \ldots, e^{-\tau_k\lambda}$.

3. Характеристическое уравнение (3) имеет, вообще говоря, *счетное число решений*. Поскольку система (1) относится к системам *запаздывающего типа*, справа от любой вертикальной прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ содержится не более конечного числа ее собственных значений. Из этого, в частности, следует, что не более чем конечное число собственных значений расположено в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

4. Система (1) обладает счетной *фундаментальной системой решений* $\left\{e^{\lambda_1 t}, p_{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}, \ldots, p_{1,\mu_1}(t)e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots\right\}$, где $p_{i,l}(t)$ — многочлены степени l, а $\mu_j + 1$ — кратность собственного значения λ_j.

5. Устойчивость решений системы (1) определяется ее собственными значениями. Для того, чтобы линейная система запаздывающего типа была

асимптотически устойчива (т. е. были глобально асимптотически устойчивы все ее решения) необходимо и достаточно, чтобы у нее отсутствовали собственные значения с неотрицательной вещественной частью.

2. Алгебраическое представление

Вновь обратимся к системе (1) и рассмотрим частный случай *соизмеримых запаздываний*, когда все ненулевые запаздывания τ_i пропорциональны некоторому числу τ, т. е. $\tau_i = h_i\tau$, $h_i \in \mathbb{N}$. Тогда, не умаляя общности, можно полагать, что система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t - i\tau). \end{cases} \tag{4}$$

Введем *оператор запаздывания* $\delta : f(t) \mapsto f(t - \tau)$. Тогда система (4) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i \delta^i x + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \delta^i \xi, \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i \delta^i x + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \delta^i \xi. \end{cases}$$

Далее, формально сопоставив оператору δ алгебраическую переменную Δ, мы можем записать полученную систему в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x(t) + B(\Delta)\xi(t), \\ y = C(\Delta)x(t) + D(\Delta)\xi(t), \end{cases} \tag{5}$$

где $A(\Delta)$, $B(\Delta)$, $C(\Delta)$, $D(\Delta)$ — матрицы, элементами которых являются многочлены от переменной Δ. Таким образом, исходной системе (4) сопоставляется система над коммутативным кольцом многочленов одной переменной $\mathbb{R}[\Delta]$.

Аналогичным образом можно поступить и в случае несоизмеримых запаздываний. Все запаздывания τ_i разбиваются на классы соизмеримых между собой, после чего для каждого такого класса вводится собственный оператор запаздывания $\delta_j, \quad j = 1, \ldots, \hat{k}$, после чего формальная алгебраическая подстановка приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\hat{k}})x(t) + B(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\hat{k}})\xi(t), \\ y = C(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\hat{k}})x(t) + D(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\hat{k}})\xi(t), \end{cases} \tag{6}$$

где A, B, C, D — матрицы, элементами которых являются многочлены нескольких переменных $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\hat{k}}$. В результате, системе (1) сопоставляется система над коммутативным кольцом многочленов нескольких переменных $\mathbb{R}[\Delta_1, \ldots, \Delta_{\hat{k}}]$.

Теория систем над кольцами возникла как естественное развитие теории систем над произвольными полями, которая, в свою очередь, явилась продолжением привычной теории систем над вещественными числами. Следствием произошедшей в конце 50-х, начале 60-х годов двадцатого века революции в теории управления, ознаменовавшейся переходом от передаточных функции к методам пространства состояний [37], явилось осознание, что многие фундаментальные свойства линейных систем, такие как управляемость и наблюдаемость, зависят лишь от описывающих систему матриц. Этот новый алгебраический взгляд на линейную теорию управления позволил с общих позиций подойти к таким, казалось бы, различным объектам как стационарные системы непрерывного времени, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздываниями и без них, нестационарные системы, дискретные системы, конечные автоматы, кодирующие алгоритмы и т. д. [38].

Обзор исследований в области систем над коммутативными кольцами можно найти в работах [39],[40]. Обзор теории систем над некоммутативными кольцами содержится в [41]. Систематическое изложение можно найти в [42] и [43], а современный алгебраический взгляд изложен в [44].

Дальнейшее развитие алгебраических методов в теории управления показало их эффективность при исследовании классических задач для линейных стационарных [45],[46],[47], линейных нестационарных [48] и даже нелинейных [12],[49] систем.

3. Обращение динамических систем

Задача обращения динамических систем относится к числу классических и имеет давнюю историю. С позиций современной теории управления она, по всей видимости, впервые была рассмотрена в работах [50],[51],[52]. В них для скалярных систем были получены необходимые и достаточные условия существования инверторов, а также построен алгоритм обращения. Следующим важным шагом стало рассмотрение задачи обращения для векторных линейных (в том числе нестационарных) систем в работах [53],[54]. Предложенный в последней работе алгоритм, называемый *структурным алгоритмом Сильвермана*, является классическим и лежит в основе многих последующих работ, посвященных задаче обращения. Приведем краткое описание алгоритмов для скалярного и векторного случаев, опуская технические детали и акцентируя внимание на характерных особенностях рассматриваемой задачи. С подробным изложением данных алгоритмов можно ознакомиться по оригинальным работам [51],[54].

Начнем со скалярного случая. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{7}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A,\ B,\ C$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей, а D – скаляр. Если $D \neq 0$, то мы можем алгебраически выразить искомое управление u из второго уравнения системы $u = \frac{1}{D}(Cx - y)$ (отметим, что состояние системы x предполагается известным).

Если же $D = 0$, дифференцируя выход y, получаем $\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$. Аналогично, если $CB \neq 0$, мы можем получить выражение для u, в противном случае повторяем дифференцирование. Возникающие перед u на $k-$ом шаге коэффициенты будут иметь вид $CA^{k-1}B$. Если для любого k соответствующий коэффициент равен нулю, то, очевидно, выход системы не зависит от входа, и, следовательно, восстановить неизвестный вход по измерениям выхода невозможно. Отметим, что этот случай реализуется либо при при $B = 0$ (т. е. вход отсутствует), либо когда система ненаблюдаема. Если же среди коэффициентов найдется отличный от нуля (выберем первый такой коэффициент и обозначим его номер k_0), то мы получим выражение u через y:

$$u = (CA^{k_0-1}B)^{-1}(CA^{k_0}x - y^{(k_0)}).$$

Полученное значение k_0 называется *относительным порядком* системы.

Забегая вперед, отметим следующее: если мы будем рассматривать системы над кольцами (естественно возникающие при рассмотрении систем с запазыванием), то из того, что $CA^{k_0-1}B \neq 0$, еще не следует существование $(CA^{k_0-1}B)^{-1}$. В случае, когда $CA^{k_0-1}B$ обратим, относительный порядок k_0 называется *чистым*.

Теперь перейдем к векторному случаю и рассмотрим линейную стационарную векторную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{8}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, A, B, C и D – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей. Предположим, что $q_0 = \operatorname{rank} D < p$. Тогда найдется такая невырожденная матрица S_0, что $D_0 = S_0 D = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, где $\bar{D}_0$ — матрица из q_0 строк ранга q_0. Теперь можно определить систему $\mathcal{S}_0$ как

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y_0 = C_0 x + D_0 u, \end{cases} \tag{9}$$

где $y_0 = S_0 y$, $C_0 = S_0 C$. Представим вектор y_0 в виде $y_0 = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_0'' \end{bmatrix}$, где y_0' состоит из первых q_0 строк y_0, а y_0'' из оставшихся $p - q_0$ строк y_0. Первая компонента y_0' соответствует тем элементам выхода, в уравнении для которых управление u уже присутствует в правой части. Для элементов второй компоненты y_0'' мы попробуем добиться этого на последующих шагах алгоритма. Аналогично представим в блочном виде с компонентами соответствующих размерностей матрицу $C_0 = \begin{bmatrix} C_0' \\ C_0'' \end{bmatrix}$.

Далее, на k-ом шаге алгоритма мы будем применять к вектору y_k дифференциальный оператор $M_k = \left[\begin{array}{c|c} I_{q_k} & 0 \\ \hline 0 & I_{p-q_k}(\frac{d}{dt}) \end{array}\right]$, где q_k – натуральное число, причем $q_k \geqslant q_{k-1}$, после чего повторять описанную выше процедуру. Алгоритм останавливается, как только $q_k = p$. Идея описанного алгоритма заключается в том, чтобы, последовательно дифференцируя часть выходов системы, получить систему с обратимой матрицей перед управлением u в уравнении, связывающем его и выход y, что согласуется с идеей алгоритма, применяемого в скалярном случае. К сожалению, в MIMO-случае ситуация усложняется, и гарантировать, что алгоритм остановится, невозможно. Теорема Сильвермана утверждает, что алгоритм сходится тогда и только тогда, когда для системы существует инвертор.

Укажем некоторые особенности приведенного алгоритма, ограничивающего область его применимости.

1. Полученный инвертор может быть неустойчивой системой, что существенно осложняет его практическую реализацию.

2. Подразумевается знание фазового вектора системы.

3. Необходимо дифференцирование выходов системы. Как известно, задача дифференцирования сигнала является некорректной, и высокочастотные помехи могут приводить к существенным погрешностям.

Отметим, что, как и в скалярном случае, при рассмотрении систем над кольцами возможно, что полученная матрица полного ранга не будет обратимой над кольцом.

Первая из указанных проблем была частично преодолена в работе [55], где был получен алгоритм, близкий к алгоритму Сильвермана, позволяющий строить устойчивый инвертор, если только нули исходной системы устойчивы. Это предположение характерно для подавляющего большинства исследований, посвященных задаче обращения. В данной работе будут предложены некоторые подходы, позволяющие ослабить его.

Очевидным подходом к решению второй проблемы является построение наблюдателей состояния для исходной системы. Именно он используется в тех работах по обращению систем, где знание фазового вектора не предполагается.

Последняя из указанных проблем в большинстве работ либо остается за скобками, что вполне оправдано при рассмотрении исключительно обращения справа, либо преодолевается путем наложения ограничений на допустимые сигналы и использованием робастных дифференциаторов (например, основанных на скользящих режимах).

Дальнейшие исследования задачи обращения были посвящены, в основном, обобщению классических методов на различные новые классы систем. В работах [14],[56],[57] с использованием аппарата функций Ляпунова предложены алгоритмы обращения для специальных систем, динамика которых представлена в виде суммы линейной и нелинейной компонент. В работе [13] техника скользящих режимов применяется для построения инверторов для линейных стационарных систем. В работе [58] для скалярной системы предложен распределенный финитный регулятор, пригодный, в том числе, и для систем с неустойчивой нулевой динамикой.

При исследовании систем с запаздыванием чаще всего рассматриваются системы с соизмеримыми запаздываниями, а основным инструментом являются алгебраические методы. В работе [59] рассматривается векторная линейная система и для ее передаточной матрицы строится "почти" обратная так, что их произведение есть композиция интеграторов и элементов запаздывания. В работе [12] с использованием алгебраических и дифференциально-геометрических методов, а также функций Ляпунова, получен метод обращения для существенно нелинейных систем. В работах [11],[47] исследуется задача обращения в общем контексте систем над кольцами, после чего полученные результаты, являющиеся непосредственным обобщением классических алгоритмов, применяются в частном случае систем с соизмеримыми запаздываниями.

Среди отечественных авторов необходимо отметить монографию [60], где задача обращения рассматривается с геометрической точки зрения и в приложении к задачам механики. В работах [61],[62] был предложен алгоритм обращения, использующий идею построения кусочно-постоянного приближения искомого сигнала для дискретизации исходной системы.

Другой подход, основанный на методе управляемой модели, был предложен в работе [63]. В ней предлагается наряду с исходной системой рассмотреть ее "копию", описываемую теми же уравнениями, после чего, используя методы управления в условиях неопределенности, добиться близости динамик исходной и модельной систем. Этот подход показал свою плодотворность, позволив получить устойчивые как к возмущениям и погрешностям измерения, так и к погрешностям моделирования алгоритмы обращения для векторных линейных систем при достаточно слабых ограничениях, а также для некоторых классов нелинейных систем. Были также получены алгоритмы построения инверторов пониженного порядка. В работе [64] были сделаны первые шаги к обобщению описанного подхода на системы с запаздыванием, а именно рассмотрен случай линейных скалярных систем с устойчивой нулевой динамикой, для которого получены условия обращения и алгоритм построения инвертора.

Таким образом, несмотря на большое количество исследований, посвященных как системам с запаздыванием, так и задачам обращения динамических систем, рассмотрение задачи обращения для систем ФДУ сохраняет свою актуальность.

Глава 1

Разрешимость задачи обращения

Начиная с первых работ, посвященных задаче обращения динамических систем, большое внимание уделялось условиям, при которых эта задача разрешима. При этом такие условия, называемые *условиями обратимости*, могли как являться самостоятельными критериями [52], так и быть составной частью алгоритма построения *инвертора* [54], т. е. динамической системы, решающей задачу обращения в режиме реального времени. Некоторые условия обратимости для дискретных систем были получены в [65].

В данной главе рассматриваются условия обратимости для различных классов систем.

Параграф 1 содержит в себе неформальное описание рассматриваемой задачи. Приведенные в нем рассуждения призваны мотивировать используемые в дальнейшем методы и понятия.

В параграфе 2 приводятся классические необходимые условия обратимости линейных систем, в том числе с запаздыванием.

Параграф 3 содержит новое достаточное условие обратимости для линейных стационарных многосвязных систем, опирающееся на предположение об ограниченности входных и выходных сигналов, являющееся естественным для приложений.

Параграф 4 содержит вспомогательную лемму, используемую в дальнейшем для осуществления замен координат в системах над кольцами.

С ее помощью в параграфе 5 производится построение канонической формы с выделением нулевой динамики для систем с соизмеримыми запаздываниями.

На основе полученной канонической формы в параграфе 6 полученное ранее в параграфе 3 достаточное условие обратимости обобщается на случай систем функционально-дифференциальных уравнений.

1.1. Неформальное описание задачи обращения

Вначале рассмотрим вопрос о разрешимости задачи обращения неформально. Пусть рассматриваемой системе (в каком-то смысле) соответствует оператор $\mathcal{W}$, переводящий входной сигнал $\xi(t)$ в выходной сигнал $y(t)$. Для решения задачи обращения, по сути, необходимо построить обратный оператор $\mathcal{W}_{inv}$, сопоставляющий измеряемому выходному сигналу оценку $\hat{\xi}(t)$ входного сигнала $\xi(t)$.

Однако уже для скалярных линейных стационарных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, задача построения обратного оператора оказывается неразрешимой на практике.

Пусть нам задана такая система, обладающая передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)},$$

где $\beta(s), \alpha(s)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, $\deg \beta(s) \leqslant \deg \alpha(s)$. В случае, когда система является *строго физически реализуемой* (а именно этот случай чаще всего встречается на практике), $\deg \beta(s) < \deg \alpha(s)$.

Ясно, что если мы хотим добиться выполнения тождества $\mathcal{W} \circ \mathcal{W}_{inv} = \mathrm{id}$, нужно потребовать выполнения тождества $W(s)W_{inv}(s) = 1$, где $W_{inv}(s)$ — передаточная функция обратного оператора. Отсюда $W_{inv}(s) = W^{-1}(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}$. Но тогда степень числителя передаточной функции превосходит степень ее знаменателя и, следовательно, передаточная функция является *физически нереализуемой*. На практике это означает, что попытка ее реализации потребует численного дифференцирования сигналов, что, как известно, является некорректной по Адамару задачей. Это же свойство некорректности по Адамару относится в общем случае и ко всей задаче обращения динамических систем.

Более того, при таком подходе возникает требование устойчивости полинома $\beta(s)$, необходимое для корректного функционирования динамической системы-инвертора. Но даже в случае, когда данное условие оказывается выполнено, при несогласованности начальных условий исходной системы и системы инвертора получить точное значение входного сигнала на всем промежутке времени оказывается невозможно.

Итак, задача точного обращения является практически неразрешимой. В связи с этим рассматриваются другие, менее ограничительные постановки задачи обращения: асимптотическое обращение, финитное обращение и т. д.

Обратимся к задаче асимптотического обращения. В этом случае нам требуется получить такую оценку $\hat{\xi}(t)$ входного сигнала $\xi(t)$, что $|\hat{\xi}(t) - \xi(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, мы не различаем оценки, отличающиеся друг от друга на бесконечно малые функции, что приводит в линейном случае к следующему необходимому условию:

$$\forall \xi(t) \in \ker \mathcal{W} \quad \lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 0.$$

Из вышесказанного следует, что при решении задачи обращения чрезвычайно важно изучение ядра оператора $\mathcal{W}$, характеризующегося тождественно равным нулю выходом системы. Возникающая при этом условии динамика системы называется *нулевой динамикой*.

В случае скалярных линейных стационарных систем без запаздываний описание нулевой динамики легко получить из передаточной функции системы. Действительно, рассмотрим систему, имеющую реализацию

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi, \\ y = cx. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для нее определена передаточная функция $W(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$. Из условия $y \equiv 0$, определяющего нулевую динамику, следует $\beta(s)\Xi(s) = 0$, где $\Xi(s)$ — преобразование Лапласа входного сигнала $\xi(t)$. Таким образом, нулевая динамика системы (1.1) описывается числителем ее передаточной функции.

Другой подход основан на использовании *матрицы Розенброка* системы (1.1), имеющей вид

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A & -b \\ \hline c & 0 \end{array}\right]. \tag{1.2}$$

Значения s, при которых ранг $R(s)$ уменьшается, называются *инвариантными нулями* системы. Нетрудно показать [66], что в скалярном случае они совпадают с нулями передаточной функции системы.

Третий подход основан на приведении системы к канонической форме с выделению нулевой динамики. Напомним, что *относительным порядком* для системы (1.1) называется такое число r, что $cb = 0$, $cAb = 0$, $\ldots$, $cA^{r-2}b = 0, cA^{r-1}b \neq 0$. Вновь обратимся к системе (1.1) и предположим, что она имеет относительный порядок $r > 0$ (в этом случае степень числителя ее передаточной функции на r ниже степени знаменателя). Тогда [63] существует замена координат, приводящая систему к форме

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y, \\ \dot{y}_1 = y_2, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r-1} = y_r, \\ \dot{y}_r = A_{21}x' + A_{22}\bar{y} + b'\xi, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $y = y_1$, $\bar{y} = (y_1, \ldots y_r)^T$, $b' \neq 0$. Если входной сигнал ξ таков, что $y \equiv 0$, то и все производные $y_k = y^{(k-1)}$ равны нулю, а система (1.3) вырождается в уравнение

$$\dot{x}' = A_{11}x'.$$

Можно показать [66], что спектр матрицы A_{11} совпадает с инвариантными нулями системы (1.1) и $\det(sI - A_{11}) = \beta(s) = \det R(s)$.

Описанные выше понятия понадобятся нам в дальнейшем, но уже в контексте систем с запаздываниями. Еще раз подчеркнем, что до сих пор наши рассуждения были нестрогими.

1.2. Необходимые условия обратимости системы

Обратимся теперь к основной рассматриваемой нами системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t - i\tau), \end{cases} \tag{1.4}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор систем; $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход системы; $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ (где $l \geqslant m$) — неизвестный вход; A_i, B_i и C_i — постоянные известные матрицы соответствующих размерностей; $\tau, 2\tau, \ldots, k\tau$ – постоянные (соизмеримые) запаздывания, $k\tau$ — максимальная величина запаздывания по фазовому вектору, входу и выходу. Начальные функции $x(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$ определены при $\Theta \in [-k\tau; 0]$ и таковы, что решение системы (1.4) существует и единственно при $t \in [0, +\infty)$, однако сами эти начальные функции считаются неизвестными. Перепишем ее в виде системы над кольцом полиномов $\mathbb{R}[\Delta]$

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)\xi, \\ y = C(\Delta)x + D(\Delta)\xi, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $A(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} \Delta^i A_i$, $B(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} \Delta^i B_i$, $C(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} \Delta^i C_i$, $D(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} \Delta^i D_i$, — полиномиальные матрицы соответствующих размерностей.

Интересующая нас динамика системы (1.5) при нулевом выходе $y \equiv 0$ называется *нулевой динамикой*.

В дальнейшем под обращением динамической системы мы будем понимать ее асимптотическое обращение, т. е. получение для неизвестного сигнала $\xi(t)$ такой оценки $\hat{\xi}(t)$, что

$$|\xi(t) - \hat{\xi}(t)| \to 0,\, t \to +\infty,$$

либо обращение с заданной точностью ε, когда для оценки $\hat{\xi}(t)$ с некоторого момента t^* выполнено соотношение

$$|\xi(t) - \hat{\xi}(t)| \leqslant \varepsilon,\, t \geqslant t^*,$$

не различая этих понятий в тех случаях, когда это не приводит к неоднозначности.

Будем называть систему *обратимой*, если такая оценка $\hat{\xi}$ может быть получена, и *необратимой* в противном случае.

Для дальнейшего изложения нам потребуется обобщение одного из ключевых понятий математической теории управления — понятия наблюдаемости системы — на случай систем, описываемых уравнениями с отклоняющимся аргументом. Однако бесконечномерный характер функционально-дифференциальных уравнений приводит к невозможности непосредственного перенесения на них определения наблюдаемости для систем ОДУ. В результате имеется целый спектр различных неэквивалентных обобщений понятия наблюдаемости для ФДУ, ознакомиться с обзором которых можно, например, по работе [67].

При рассмотрении различных подходов к понятию наблюдаемости для ФДУ имеет место стандартная картина: чем более жесткие требования мы предъявляем к системе, тем эффективнее мы можем решать задачу наблюдения. При этом некоторые подходы могут быть применимы лишь к определенным классам систем (например, с соизмеримыми запаздываниями, без запаздываний в выходе, без запаздываний в состояниях и т. д.), позволять получать различную информацию о системе (восстанавливать состояние полностью, либо асимптотически, либо с точностью до множества меры нуль и т. д.) а также допускать использование различных типов динамических систем в качестве наблюдателя (линейные системы над кольцом $\mathbb{R}[\Delta]$, над полем $\mathbb{R}(\Delta)$, распределенные наблюдатели и т. д.).

Учитывая, что нами рассматривается задача асимптотического обращения, а рассматриваемые системы являются линейными с соизмеримыми запаздываниями, мы остановим свой выбор на понятии *спектральной наблюдаемости.*

Определение 1. *[67] Система* (1.5) *спектрально наблюдаема, если она наблю-*

даема на бесконечности, т. е. при нулевом управлении для любой начальной функции, порождающей нулевой выход на $[0, +\infty)$, *найдется момент времени* t_1 *такой, что* $x(t) = 0$ *при* $t \geqslant t_1$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *[67] Система* (1.5) *спектрально наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} sI - A(e^{-\tau s}) \\ C(e^{-\tau s}) \end{pmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что спектральная наблюдаемость системы позволяет построить для нее асимптотический (вообще говоря, распределенный) наблюдатель.

Теперь вернемся к рассматриваемой задаче и получим условия разрешимости задачи обращения системы (1.5) [64]. Для этого рассмотрим матрицу Розенброка системы, имеющую вид

$$R(s, d^*) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A(d^*) & -B(d^*) \\ \hline C(d^*) & D(d^*) \end{array} \right]. \tag{1.6}$$

Здесь $d^* = e^{-s\tau}$ — преобразование Лапласа оператора запаздывания и, таким образом, $R(s, d^*) = R(s, e^{-s\tau}) = R(s)$ зависит лишь от одного параметра s. Предположим, что нашлось такое значение $s = s_0$, что ранг матрицы Розенброка (1.6) понизился, т. е.

$$\operatorname{rank} R(s_0, e^{s_0\tau}) < m + n.$$

Такие значения s_0 называются *инвариантными нулями* системы. Ясно, что если найдутся два различных входа $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ такие, что соответствующие им выходы системы совпадают, а $|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \not\to 0$, то задача обращения системы будет неразрешима. В частности, в случае линейных систем для доказательства необратимости системы необходимо и достаточно предъявить не стремящийся к нулю входной сигнал, порождающий тот же выход, что и тождественно равный нулю входной сигнал.

Ясно, что тождественно нулевой входной сигнал будет (при нулевых начальных условиях) порождать тождественно нулевой выход. Попробуем найти ненулевой входной сигнал и соответствующее ему решение, обеспечивающие тождественно равный нулю выход системы. Искать их будем в виде

$$\xi(t) = \xi_0 e^{s_0 t},\ x(t) = x_0 e^{s_0 t} \tag{1.7}$$

соответственно, где s_0 — инвариантный нуль системы, а векторы x_0 и ξ_0 не обращаются в ноль одновременно.

Подставим эти выражения в уравнение (1.5). Полагая выход системы равным нулю, получим:

$$\begin{cases} s_0 x_0 e^{s_0 t} - A(e^{s_0\tau}) x_0 e^{s_0 t} - B(e^{s_0\tau})\xi_0 e^{s_0 t} = 0 \\ C(e^{s_0\tau}) x_0 e^{s_0 t} + D(e^{s_0\tau})\xi_0 e^{s_0 t} = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (s_0 I - A(e^{s_0\tau}) x_0 - B(e^{s_0\tau})\xi_0 = 0 \\ C(e^{s_0\tau}) x_0 + D(e^{s_0\tau})\xi_0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, x_0, ξ_0 должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\left[\begin{array}{c|c} sI - A(e^{s_0\tau}) & -B(e^{s_0\tau}) \\ \hline C(e^{s_0\tau}) & D(e^{s_0\tau}) \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x_0 \\ \hline \xi_0 \end{array}\right) = 0. \tag{1.8}$$

В силу того, что s_0 является инвариантным нулем, полученная система обязательно имеет нетривиальное решение.

Если при этом $\mathrm{Re}(s_0) > 0$, то (при $\xi_0 \neq 0$) $|\xi_0 e^{s_0 t}| \to \infty$, а, значит, существует и нетривиальный входной сигнал $\xi = \xi_0 e^{s_0 t}$, обеспечивающий при подходящих начальных условиях неразрешимость задачи обращения. Если же $\xi_0 = 0$, то собственное значение системы s_0 оказывается ненаблюдаемым, откуда вытекает отсутствие спектральной наблюдаемости системы (1.4).

Тем самым доказана

Теорема 2. *[64] Пусть система* (1.4) *спектрально наблюдаема. Тогда необходимым условием обратимости системы* (1.4) *является отсутствие у нее неустойчивых инвариантных нулей.*

Замечание. Аналогичный результат можно получить и в более общем случае, когда рассматривается система с постоянными, но несоизмеримыми запаздываниями.

1.3. Достаточное условие обратимости для систем ОДУ

Рассмотрим векторную линейную стационарную динамическую система с доступным для измерения выходом $y(t)$ и неизвестным входом $\xi(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\xi,\ x(0) = x_0, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, размерности измеряемого выхода $y(t) \in \mathbb{R}^m$ и неизвестного входа $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ совпадают; A, B и C — матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что неизвестный входной сигнал ограничен и каждая его компонента $\xi^i(t)$ удовлетворяет оценке $|\xi^i(t)| \leqslant \xi_0$, где ξ_0 — известная константа, $x(0) = x_0$ — неизвестное начальное состояние системы.

Пусть наряду с ней имеется другая реализация той же системы, но со входом $\xi_1(t) \neq \xi(t)$ и, возможно, другими начальными условиями x_1. Предположим, что выходы обеих систем совпадают.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\xi_1,\ x(0) = x_1, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1.10}$$

Рассмотрим разность систем (1.9) и (1.10). Она будет удовлетворять уравнению

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\delta\xi,\ x(0) = \delta x, \\ y \equiv 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\delta\xi(t) = \xi(t) - \xi_1(t)$, $\delta x = x_0 - x_1$. Для того, чтобы система была асимптотически обратима, нам необходимо, чтобы разность $\delta\xi$ стремилась к нулю при $t \to +\infty$ при любых начальных условиях δx. В противном случае мы не сможем различить сигналы, порождающие один и тот же выход системы. При этом нас интересует динамика системы с тождественно равным нулю выходом, которая, как было отмечено ранее, называется нулевой.

Важную роль в дальнейшем будет играть понятие относительного порядка системы.

Обозначим через c_i i-ую строку матрицы C.

Определение 2. *[63]Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок (по Исидори) для системы (1.9), если выполнены следующие условия:*

1. $c_iB = 0, c_iAB = 0, \ldots, c_iA^{r_i-2}B = 0, c_iA^{r_i-1}B \neq 0$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant m$.
2. $\det \begin{pmatrix} c_1A^{r_1-1}B \\ \vdots \\ c_mA^{r_m-1}B \end{pmatrix} = \det H_r \neq 0.$

Мы будем использовать обозначение $|r| = r_1 + \ldots r_m$.

Замечание. Для систем, не являющихся скалярными, относительный порядок по Исидори определен не всегда. Однако, иногда систему можно невырожденным преобразованием выходов привести к форме, для которой относительный порядок уже будет определен [68].

Пусть для системы определен вектор относительного порядка r. Тогда подходящей заменой координат ее можно привести к следующей форме, называемой формой с выделением нулевой динамики:

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\begin{cases}
\dot{y}_1^1 = y_2^1, \\
\vdots \\
\dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1,
\end{cases} \\
\vdots \\
\begin{cases}
\dot{y}_1^m = y_2^m, \\
\vdots \\
\dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m,
\end{cases} \\
\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi,
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

где $y_p^q = c_q A^{p-1} x = y_q^{(p-1)}$ — производная порядка $(p-1)$ $q-$ой компоненты выхода, $\bar{y}_s = (y_1^s, \ldots, y_{r_s}^s)^T$ — вектор-столбец координат, соответствующих производным s-ой компоненты выхода y, $\bar{y} = ((\bar{y}_1)^T, \ldots, (\bar{y}_m)^T)^T$ — вектор-столбец всех координат, соответствующих компонентам $y_i = y_1^i$ выхода и их производным; $\bar{x}$ — оставшиеся координаты фазового вектора; $A_{11} \in R^{(n-|r|)\times(n-|r|)}$, $A_{12} \in R^{(n-|r|)\times m}$, $A_{21} \in R^{m\times(n-|r|)}$, $A_{22} \in R^{m\times|r|}$ — известные матрицы соответствующих размерностей, H_r —матрица из определения относительного порядка. При этом матрица A_{11} описывает нулевую динамику системы [66]. Это означает, что $\det(sI - A_{11}) = \det R(s)$, где $R(s)$ — матрица Розенброка. Таким образом, спектр A_{11} не зависит от выбранной системы координат.

В дальнейшем нам будет удобно записывать эту систему в сокращенном виде

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi.
\end{cases}
\tag{1.13}
$$

Если предположить, что $y \equiv 0$ (т. е. рассмотреть нулевую динамику), то и

$\bar{y} \equiv 0$, а система (1.12) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x}, \\ 0 = A_{21}\bar{x} + H_r\xi. \end{cases} \tag{1.14}$$

Здесь нами были исключены из рассмотрения $|r| - m$ уравнений вида $\dot{0} = 0$.

Предположим, что нулевая динамика системы, описываемая уравнением $\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x}$, асимптотически устойчива. Тогда $\bar{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и из второго уравнения системы (1.14) и невырожденности матрицы H_r следует, что $\xi(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, задача обращения в указанных предположениях разрешима.

Предположение об устойчивости нулевой динамики является стандартным для современной теории управления и в том или ином виде встречается в большинстве работ, посвященных задаче обращения динамических систем (например, [63],[56]). Мы заменим его другим, менее ограничительным условием. Предположим, что мы обладаем априорной информацией о том, что вход системы $\xi(t)$ ограничен. Это предположение является вполне естественным для реальных систем. Тогда имеет место следующий результат [18].

Теорема 3. *Пусть система* (1.9) *наблюдаема и приводима к форме с выделением нулевой динамики* (1.12)*, а спектр матрицы A_{11}, определяющей нулевую динамику системы, не содержит точек на мнимой оси. Тогда, если сигнал $\xi(t)$ ограничен и $y(t) \equiv 0$, начиная с некоторого момента времени t_0, то $x(t) \to 0$ и $\xi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем полагать $t_0 = 0$. Поскольку $y \equiv 0$ при $t \geqslant t_0$, все координаты y_p^q, отвечающие производным компонент выхода, также обращаются в ноль, а система (1.13) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x}, \\ 0 = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{B}\xi. \end{cases} \tag{1.15}$$

Пусть спектр матрицы A_{11} содержит простое собственное значение λ_0 с положительной вещественной частью. Тогда система (1.15) имеет решение

$\hat{x}(t) = ((\bar{x}_0)^T e^{\lambda_0 t}, 0)^T$, где $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-|r|}$ — соответствующий начальный вектор. Из второго уравнения системы (1.15) получим $\bar{A}_{21}\bar{x}_0 e^{\lambda_0 t} = -\bar{B}\xi(t)$. Правая часть полученного равенства ограничена по условию теоремы, значит, должна быть ограничена и левая часть, откуда следует, что $\bar{A}_{21}\bar{x}_0 = 0$.

Предположим, что существует ненулевой вектор $\bar{x}_0$, удовлетворяющий данному соотношению. Тогда $\hat{x}(t)$ является ненулевым решением однородной системы

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y}, \end{cases} \tag{1.16}$$

порождающим тождественно нулевой выход, что противоречит условию наблюдаемости системы (1.9). Значит, $\bar{x}_0 = 0$ и, таким образом, отвечающая λ_0 компонента отсутствует в решении системы (1.15).

Пусть теперь собственное значение λ_0 имеет положительную вещественную часть и кратность k. Тогда система (1.15) имеет решение

$$\hat{x}(t) = \left([(\bar{x}_0)^T + (\bar{x}_1)^T t + \ldots + (\bar{x}_k)^T t^k] e^{\lambda_0 t}, 0\right)^T,$$

где $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{n-|r|}$, $1 \leqslant i \leqslant k$ — векторы, определяемые начальными условиями. По аналогии с рассмотренным ранее случаем, из уравнения $\bar{A}_{21}\hat{x} = -\bar{B}\xi$ и ограниченности $\xi(t)$ вытекает, что $A_{21}[(\bar{x}_0)^T + (\bar{x}_1)^T t + \ldots + (\bar{x}_k)^T t^k] \equiv 0$. Если хотя бы один из векторов $\bar{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ отличен от нуля, то $\hat{x}(t)$ вновь является ненулевым решением системы (1.16) с тождественно нулевым выходом y, что противоречит наблюдаемости системы. Таким образом, и в случае кратного собственного значения соответствующая ему компонента в решении отсутствует.

Далее, для любого собственного значения λ с отрицательной вещественной частью соответствующая компонента решения будет стремиться к нулю. При этом в случае наличия у системы относительного порядка и, как следствие, невырожденности матрицы H_r,

$$H_r\xi(t) = -A_{21}\bar{x} \to 0 \implies \xi(t) \to 0.$$

Теорема доказана. □

Замечание. В работе [16] сходное утверждение было доказано для случая скалярных систем.

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 система* (1.9) *обратима.*

Доказательство. Действительно, из доказанной теоремы следует, что при указанных условиях любые два решения системы, порождающие одинаковый выход, асимптотически стремятся друг к другу, а, значит, и задача асимптотического обращения системы (1.9) разрешима. □

1.4. Дополнение полиномиальной матрицы до унимодулярной

В последующем нам понадобится вспомогательный результат, изложению которого посвящен данный параграф.

Задача. Пусть дана полиномиальная матрица $C(d) \in \mathbb{R}^{l\times n}[d]$, $l < n$. Требуется найти матрицу $T'(d) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times n}[d]$ такую, что матрица

$$T(d) = \begin{bmatrix} T'(d) \\ C(d) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}[d]$$

унимодулярна (т. е. ее определитель $\det T(d) = \mathrm{const} \neq 0$).

В этом случае матрица $T(d)$ может быть использована в качестве матрицы замены координат, что и потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Полиномиальная матрица $T'(d) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times n}[d]$, дополняющая заданную полиномиальную матрицу $C(d) \in \mathbb{R}^{l\times n}[d]$ до квадратной унимодулярной, существует тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель миноров максимального порядка l ($l < n$) матрицы $C(d)$ есть вещественное число.*

Доказательство. Любая полиномиальная матрица $C(d)$ может быть приведена к форме Смита [69], т. е. для $C(d)$ существуют такие унимодулярные матрицы $L(d) \in \mathbb{R}^{l\times l}[d]$ и $R(d) \in \mathbb{R}^{n\times n}[d]$, что

$$L(d)C(d)R(d) = \hat{C}(d), \quad \hat{C}(d) = (0, \bar{C}(d)),$$

$\bar{C}(d) = \mathrm{diag}[\bar{C}_1(d), \ldots, \bar{C}_l(d)] \in \mathbb{R}^{l\times l}[d]$ ($\bar{C}(d)$ — диагональная $l \times l$-матрица).

$$\hat{C}(d) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \bar{C}(d) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cccc} & \bar{C}_1(d) & & & \\ & & \bar{C}_2(d) & & \\ \Large 0 & & & \ddots & \\ & & & & \bar{C}_l(d) \end{array}\right]$$

Полиномы $\bar{C}_i(d)$, стоящие на диагонали, — инвариантные многочлены матрицы $C(d)$; $\bar{C}_i(d)$ является делителем $\bar{C}_{i+1}(d)$ ($i = \overline{1, l-1}$). Поскольку они определены с точностью до обратимого множителя, можно выбрать их все моническими, т. е. с единичным старшим коэффициентом.

Пусть $D_i(d)$ – наибольший общий делитель всех миноров i-го порядка матрицы $C(d)$. Тогда имеет место представление

$$\bar{C}_i(d) = \frac{D_i(d)}{D_{i-1}(d)}, \quad D_0(d) = 1.$$

Дополним матрицу $L(d)$ до $n \times n$ матрицы $L_1(d)$:

$$L_1(d) = \left[\begin{array}{c|c} I_{(n-l)\times(n-l)} & 0 \\ \hline 0 & L(d) \end{array}\right].$$

Ясно, что матрицы $L_1(d)$ и $L(d)$ являются унимодулярными одновременно. Пусть искомая матрица $T'(d)$ существует. Тогда

$$\bar{T}(d) = L_1(d)T(d)R(d) = \left[\begin{array}{c|c} I_{(n-l)\times(n-l)} & 0 \\ \hline 0 & L(d) \end{array}\right] \begin{bmatrix} T'(d) \\ C(d) \end{bmatrix} R(d) =$$
$$= \begin{bmatrix} T'(d)R(d) \\ L(d)C(d)R(d) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{T}'_1(d) & \bar{T}'_2(d) \\ \hline 0 & \bar{C}(d) \end{array}\right],$$

где $\bar{T}'_1(d) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times(n-l)}[d]$, $\quad \bar{T}'_2(d)\mathbb{R}^{(n-l)\times l}[d]$ — матрицы, образованные соответственно первыми $n-l$ и последними l столбцами матрицы $T'(d)R(d)$. В силу унимодулярности матриц $L_1(d)$ и $R(d)$ определители матриц $T(d)$ и $\bar{T}(d) = L_1(d)T(d)R(d)$ совпадают с точностью до ненулевого вещественного множителя.

Для существования матрицы $T'(d)$, требуется, чтобы в форме Смита матрицы $C(d)$ диагональная матрица $\bar{C}(d)$ состояла из ненулевых вещественных чисел, т.е. $\bar{C}_i(d) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ при всех $i = \overline{1, l}$. Действительно, пусть это не так. Тогда $\det \bar{T}(d) = (\det \bar{T}'_1(d)) \det \bar{C}(d) = \det \bar{T}'_1(d)\bar{C}_1(d) \ldots \bar{C}_l(d)$ не может быть обратим ни при какой матрице $\bar{T}'_1(d)$. Обратно, если все $\bar{C}_i(d) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то, выбирая матрицу $\bar{T}'_1(d)$ единичной, мы добьемся обратимости матрицы $\bar{T}(d)$, а значит и обратимости $T(d)$. Таким образом, рассматриваемая задача разрешима тогда и только тогда, когда все $\bar{C}_i(d)$ суть ненулевые вещественные числа.

В силу предположения о моничности многочленов $\bar{C}_i(d)$ все эти вещественные числа равны единице. Так как матрица $\bar{C}_l(d)$ делится на все элементы $\bar{C}_i(d)$, то для того, чтобы матрица $\bar{C}(d)$ была единичной, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{C}_l(d) = 1$. Так как $\bar{C}_l(d) = D_l(d)/D_{l-1}(d)$, то для этого достаточно, чтобы $D_l = 1$, т.е. наибольший общий делитель всех миноров максимального порядка l матрицы $C(d)$ был полиномом, равным единице.

Это условие является и необходимым. Действительно, если $\bar{C}_l(d) = 1$, то $\bar{C}_i(d) = 1$, $i = \overline{1, l}$, а значит, $D_l(d) = D_{l-1}(d)$, $D_{l-1}(d) = D_{l-2}(d)$, $\ldots$, $D_1(d) = D_0(d) = 1$, т.е. $D_l(d) = 1$. Доказательство окончено. $\square$

Замечание. Выбирая $\bar{T}'_1(d) = I$, а $\bar{T}'_2(d)$ произвольно, мы однозначно находим и матрицу

$$T'(d) = \left[I \mid \bar{T}'_2(d) \right] R^{-1}(d).$$

1.5. Каноническая форма с выделением нулевой динамики для систем ФДУ

Перейдем теперь к рассмотрению систем, описываемых линейными стационарными функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа с постоянными соизмеримыми запаздываниями вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau), \end{cases} \tag{1.17}$$

где $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Перейдем к соответствующему алгебраическому представлению для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)\xi, \\ y = C(\Delta)x, \end{cases} \tag{1.18}$$

где $A(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i \Delta^i$, $B(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \Delta^i$, $C(\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i \Delta^i$, — матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ соответственно, элементами которых являются многочлены от переменной Δ. Строки матрицы $C(\Delta)$ будем, как и прежде, обозначать через $c_i(\Delta)$. Таким образом, исходной системе (1.17) сопоставляется система над коммутативным кольцом многочленов одной переменной $\mathbb{R}[\Delta]$. Для простоты записи всюду в дальнейшем, где это не приводит к разночтениям, зависимость матриц от переменной Δ мы будем опускать.

Вначале рассмотрим случай квадратных систем, для которых размерности входа и выхода совпадают, т. е. $l = m$. Нам будет необходим аналог канонической формы (1.12) для систем над кольцом $\mathbb{R}[\Delta]$ и понятие относительного порядка.

Определение 3. *[11]Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:*

1. $c_i B = 0$, $c_i AB = 0$, $\ldots$, $c_i A^{r_i-2} B = 0$, $c_i A^{r_i-1} B \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

2. $\det \begin{pmatrix} c_1 A^{r_1-1}B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1}B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0.$

В случае, когда $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (такие матрицы называются *унимодулярными*), т. е. матрица $H_r(\Delta)$ обратима, относительный порядок называется *чистым.* В дальнейшем мы будем предполагать, что система обладает чистым относительным порядком.

Замечание. Как и в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений, векторный относительный порядок, а тем более чистый векторный относительный порядок, определены не для всякой системы.

Замечание. Еще раз подчеркнем, что здесь и всюду далее в данном параграфе речь идет о полиномиальных матрицах, даже если зависимость от аргумента Δ не указывается явно.

Лемма 2. *Пусть система* (1.18) *обладает векторным относительным порядком* $r = (r_1, \ldots, r_m)$*. Тогда строки* c_1, c_1A, ..., $c_1A^{r_1-1}$, c_2, c_2A, ..., $c_2A^{r_2-1}$, c_m, c_mA, ..., $c_mA^{r_m-1}$ *линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что строки c_1, c_1A_1, ..., $c_mA^{r_m-1}$ линейно зависимы. Тогда существует их нетривиальная линейная комбинация с коэффициентами (являющимися, вообще говоря, полиномами от Δ) α_1^1, α_1^2, ...,$\alpha_1^{r_1}$, α_2^1,...,$\alpha_2^{r_2}$, ..., $\alpha_m^{r_m}$, обращающаяся в ноль:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} \alpha_i^j c_i A^{j-1} = 0. \tag{1.19}$$

Заметим, что матрица B отлична от нуля. Действительно, в противном случае для системы (1.18) не могли бы быть выполнены условия определения относительного порядка. Значит, можно домножить тождество (1.19) на нее справа. Из определения относительного порядка вытекает, что все компоненты, кроме отвечающих $j = r_i$, обратятся в ноль, а наше соотношение примет вид

$$\alpha_1^{r_1} c_1 A^{r_1-1}B + \alpha_2^{r_2} c_2 A^{r_2-1}B + \ldots + \alpha_m^{r_m} c_m A^{r_m-1}B = 0.$$

Из условия невырожденности матрицы $H_r(\Delta)$следует линейная независимость строк $c_iA^{r_i-1}B$, откуда $\alpha_i^{r_i} = 0$ для $i = 1, \ldots, m$.

С учетом вышесказанного, соотношение (1.19) примет вид

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r_i-1} \gamma_i^j c_i A^{j-1} = 0,$$

в котором число слагаемых в каждой из внутренних сумм уменьшилось на единицу.

Если все компоненты $r_i = 1$, то доказательство окончено. В противном случае соображения, аналогичные приведенным выше, показывают, что и матрица AB отлична от нуля. Действительно, пусть нашлась компонента $r_i > 1$. Тогда, если $AB = 0$, то i-ая строка матрицы H_r обратится в ноль, что противоречит условию невырожденности H_r. Значит, полученное соотношение можно домножить на AB справа и, повторив рассуждения, показать, что $\alpha_i^{r_i-1} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. В том случае, когда $r_i = 1$ для некоторого i, соответствующие компоненты в линейной комбинации уже будут отсутствовать, что не нарушает наших рассуждений.

Продолжая описанный процесс, получим, что все коэффициенты $\alpha_i^j = 0$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Для того, чтобы совершить приводящую к форме с выделением нулевой динамики замену координат, построим матрицу $T_1(\Delta) \in \mathbb{R}^{|r| \times n}[\Delta]$

$$
T_1(\Delta) = \left[\begin{array}{c}
c_1 \\
c_1 A \\
\vdots \\
c_1 A^{r_1-2} \\
\hline
\vdots \\
\hline
c_m \\
c_m A \\
\vdots \\
c_m A^{r_m-2} \\
\hline
c_1 A^{r_1-1} \\
\vdots \\
c_m A^{r_m-1}
\end{array}\right].
$$

Как было показано ранее, для того, чтобы матрицу $T_1(\Delta)$ можно было дополнить до квадратной унимодулярной матрицы $T(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы ее форма Смита была вещественна. Предположение о наличии у системы относительного порядка и лемма 2 гарантируют, что в ее форме Смита не будет содержаться нулевых компонент на диагонали.

Действительно, если это не так, то строки матрицы $T_1(\Delta)$ будут линейно зависимы, что противоречит лемме 2.

Оказывается, что условие наличия у системы чистого относительного порядка является достаточным для того, чтобы матрица $T_1(\Delta)$ имела вещественную форму Смита.

Лемма 3. *Пусть система* (1.18) *обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда форма Смита матрицы* $T_1(\Delta)$ *вещественна.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда в форме Смита матрицы $T_1(\Delta)$ будет содержаться некоторый полином $p(\Delta)$ ненулевой степени. Значит, найдется некоторое значение Δ_0, при подстановке которого в матрицу $T_1(\Delta)$ она теряет ранг. Но тогда получается, что строки числовой матрицы $T_1(\Delta_0)$ линейно зависимы. Рассматривая их и повторяя рассуждения, проведенные в лемме 2, но с числовыми матрицами $A(\Delta_0), B(\Delta_0), C(\Delta_0)$, мы приходим к противоречию. Значит, форма Смита матрицы $T_1(\Delta)$ вещественна. $\square$

Замена переменных, осуществляемая матрицей T, приведет систему к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}' = A'_{11}\bar{x}' + A'_{12}\bar{y} + B_1\xi, \\ \begin{cases} \dot{y}^1_1 = y^1_2, \\ \vdots \\ \dot{y}^1_{r_1-1} = y^1_{r_1}, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}^m_1 = y^m_2, \\ \vdots \\ \dot{y}^m_{r_m-1} = y^m_{r_m}, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}^1_{r_1} \\ \vdots \\ \dot{y}^m_{r_m} \end{pmatrix} = A'_{21}\bar{x}' + A'_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{cases}$$

Далее, предположим, что нашлась матрица $Q(\Delta)$ такая, что

$$Q(\Delta)H_r(\Delta) = B_1(\Delta).$$

В рассматриваемом нами случае существования чистого относительного порядка для системы (1.18) такую матрицу можно найти всегда. Для этого достаточно выбрать $Q = B_1H_r^{-1}$, что возможно, поскольку из чистоты относительного порядка системы вытекает обратимость матрицы H_r.

Тогда, вычитая из первой группы строк, отвечающей переменным $\bar{x}'$, последнюю группу, отвечающую переменным $\tilde{y} = (y^1_{r_1}, \dots, y^m_{r_m})^T$, умноженную на Q, мы исключим сигнал ξ из первого уравнения, тем самым перейдя к следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}'' = A''_{11}\bar{x}'' + A''_{12}\bar{y}, \\ \begin{cases} \dot{y}^1_1 = y^1_2, \\ \vdots \\ \dot{y}^1_{r_1-1} = y^1_{r_1}, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}^m_1 = y^m_2, \\ \vdots \\ \dot{y}^m_{r_m-1} = y^m_{r_m}, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}^1_{r_1} \\ \vdots \\ \dot{y}^m_{r_m} \end{pmatrix} = A''_{21}\bar{x} + A''_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{cases}$$

Здесь $\bar{x}'' = \bar{x}' - Q\tilde{y}$ — новые переменные. Легко видеть, что данная замена является обратимой.

Можно заметить, что в первую группу уравнений полученной системы входят как сами выходы системы y_i, так и их производные. Исключим их, вычитая соответствующие строки из групп уравнений, отвечающих производным выходов системы. Т. к. в правых частях этих подсистем стоят $y^i_2, \ldots y^i_{r_i}$, $i = 1, \ldots m$, то именно от этих переменных логично избавиться в первом уравнении. При этом от набора переменных $\bar{x}''$ мы перейдем к переменным $\bar{x}$, переменные $\bar{y}$ не изменятся, а сама система окажется приведена к форме с выделением нулевой динамики

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\begin{cases}
\dot{y}_1^1 = y_2^1, \\
\vdots \\
\dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1,
\end{cases} \\
\vdots \\
\begin{cases}
\dot{y}_1^m = y_2^m, \\
\vdots \\
\dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m,
\end{cases} \\
\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi.
\end{cases}
\tag{1.20}
$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Пусть система* (1.18) *обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к виду* (1.20).

Как и ранее, нам будет удобно записывать систему (1.20) в сокращенном виде

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi,
\end{cases}
\tag{1.21}
$$

где

$$
\bar{A}_{21} = \left[\begin{array}{c} O_{(|r|-m)\times(n-|r|)} \\ \hline A_{21} \end{array}\right], \quad \bar{B} = \left[\begin{array}{c} O_{(|r|-m)\times(m)} \\ \hline H_r \end{array}\right],
$$

$$
\bar{A}_{22} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
F_{r_1-1} & O & \cdots & O & G_1 \\ \hline
O & F_{r_2-1} & \cdots & O & G_2 \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
O & O & \cdots & F_{r_m-1} & G_m \\ \hline
\multicolumn{5}{c}{A_{22}}
\end{array}\right],
$$

матрицы $F_p \in \mathbb{R}^{p\times p}$ имеют вид

$$F_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = [0],$$

а матрицы $G_p \in \mathbb{R}^{(r_p-1)\times m}$ состоят из нулей за исключением одной единицы в позиции $(r_p - 1, p)$.

Замечание. Ранее в работе [64] для скалярного случая была получена аналогичная форма, причем в ней был определен явный вид матриц A_{ij}. Этот результат был достигнут за счет наложения на систему весьма жесткого требования: сильной управляемости. Оно заключается в том, что для системы над кольцом предполагается унимодулярность ее матрицы управляемости Калмана, т. е.

$$\det \mathcal{K}_{A,B} = \det[B, AB, A^2B, \ \ldots \ A^nB] = const \neq 0.$$

Такое предположение позволяет, по сути, работать с системами над кольцом так же, как с обычными системами над числовым полем $\mathbb{R}$. Налагаемые нами ограничения на систему, хотя и не позволяют уточнить явный вид матриц канонической формы, являются гораздо менее обременительным.

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда число l выходов системы строго больше числа m ее входов. В этом случае мы будем предполагать, что найдутся m выходов y_i таких, что относительно них для системы определен чистый относительный порядок. Не умаляя общности, можно полагать, что это первые m выходов $y_1, \ \ldots \ y_m$.

Для удобства дальнейших рассуждений произведем замену обозначений. Обозначим через $y = (y_1, \ \ldots \ , y_m)^T$ — вектор из первых m выходов, а через $z = (y_{m+1}, \ \ldots \ , y_l)^T \equiv (z_{m+1}, \ \ldots \ , z_l)^T$ — вектор из оставшихся $(l - m)$ выходов. В соответствии с новыми переменными разобьем матрицу C на блоки

$C_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}[\Delta]$ и $C_2 \in \mathbb{R}^{(l-m)\times n}[\Delta] : C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. В результате, система (1.18) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\xi, \\ y = C_1 x, \\ z = C_2 x. \end{cases} \tag{1.22}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, можно добиться приведения системы (1.22) к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi, \\ z = C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}, \end{cases} \tag{1.23}$$

где C_{21}, C_{22} — однозначно определяемые матрицы соответствующих размеров.

Система (1.23) может быть представлена в сокращенной форме

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi, \\ z = C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}. \end{cases} \tag{1.24}$$

Оказывается, что при выполнении некоторых условий данная форма может быть усилена. Рассмотрим компоненту выхода z_k и обозначим через c_k

соответствующую матрицу-строку $c_k = [C_{21}^k\, C_{22}^k]$, составленную из $k-$ых строк матриц C_{21} и C_{22}. Предположим, что выполнены соотношения $c_k B = 0$, $c_k AB = 0, \ldots, c_k A^{r_k-2}B = 0$, $c_k A^{r_k-1}B \neq 0$, а $r_k \geqslant r_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. По сути, речь идет об определении компоненты вектора относительного порядка для выхода z_k. При этом число r_k не зависит от выбора системы координат, и показывает, сколько раз необходимо продифференцировать выход z_k, чтобы в выражении для его производной появилось управление ξ. А именно, все производные порядка q, $0 \leqslant q \leqslant r_k - 1$ не зависят от управления, а производная порядка $q = r_k$ зависит.

Покажем, что в сделанных предположениях z_k зависит лишь от вектора y, а не всего $\bar{y}$. Допустим, что это не так и z_k зависит от некоторых компонент y_j^i с $j > 1$. Обозначим через $j_{max}(i)$ максимальный индекс j, для которого компонента y_j^i входит в выражение для z_k. Отметим, что в случае $\max\limits_i \{j_{max}(i)\} = 1$ векторы y и $\bar{y}$ совпадают, а значит и утверждение выполняется. Рассмотрим вектор $\bar{r} : \bar{r}(i) = r_i - j_{max}(i)$. Ясно, что для всех i компоненты $\bar{r}(i) \geqslant 0$. Обозначим $r^* = \min\limits_i r_i$.

Представим z_k в виде $z_k = p + \sum\limits_{i \in I^*} \gamma_i y^i_{j_{max}(i)}$, где $I^* = \{i \,|\, \bar{r}(i) = r^*\}$, а все остальные слагаемые обозначены через p. Продифференцируем это выражение $(r^* + 1)$ раз. Для индексов $i \in I*$ по определению $r^* + 1 = r_i + 1 - j_{max}(i)$, откуда $\left(y^i_{j_{max}(i)}\right)^{(r^*+1)} = \left(y^i\right)^{(r_i)}$ — выражения, зависящие от входа ξ в силу определения относительного порядка. Таким образом, $z_k^{(r^*+1)} = q + \sum\limits_{i \in I^*} \gamma_i c_i A^{r_i-1} B\xi$, где q — оставшиеся слагаемые. Поскольку в силу предположения z_k от входа ξ не зависит, получаем $\sum\limits_{i \in I^*} \gamma_i c_i A^{r_i-1}B = 0$. В случае, если среди коэффициентов γ_i присутствуют ненулевые, это означает линейную зависимость строк $c_i A^{r_i-1}B$, что противоречит определению относительного порядка. Значит, все $\gamma_i = 0$, что и завершает доказательство.

Полученный результат может быть сформулирован в виде следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть гипервыходная система* (1.22) *обладает вектором компонент относительного порядка* $r = (r_1, \dots r_m, r_{m+1}, \dots r_l)$*, причем* $r_i \leqslant r_j$ *при* $1 \leqslant i \leqslant r_m$, $r_{m+1} \leqslant j \leqslant r_l$*, а первые* m *компонент образуют вектор относительного порядка по Исидори. Тогда система* (1.22) *может быть приведена невырожденным преобразованием к форме*

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\
\vdots \\
\begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\
\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi, \\
z = C_{21}\bar{x} + C_{22}y.
\end{cases}
\tag{1.25}
$$

1.6. Достаточное условие обратимости для систем ФДУ

Следующей нашей целью является обобщение теоремы 3 на случай систем с запаздыванием. Сформулируем, воспользовавшись введенным ранее понятием спектральной наблюдаемости, следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть система* (1.18) *квадратная, спектрально наблюдаема и приводима к виду* (1.20)*, а спектр матрицы* $A_{11}[\Delta]$ *не содержит точек на мнимой оси. Тогда, если управление* $\xi(t)$ *ограниченно и таково, что* $y(t) \equiv 0$ *при* $t \geqslant t_0$*, то* $x(t) \to 0$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $t_0 = 0$. Из того, что сигнал $y \equiv 0$ при $t \geqslant t_0$, вытекает равенство нулю всех компонент y_p^q, соответствующих производным выходного сигнала. Тогда система (1.18), приведенная к канонической форме (1.21), примет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x}, \\ 0 = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{B}\xi. \end{cases} \tag{1.26}$$

Допустим, что в спектре матрицы A_{11} содержится собственное число λ_0 кратности k такое, что его вещественная часть положительна. Тогда система (1.26) имеет решение $\hat{x}(t) = \big([(\bar{x}_0)^T + (\bar{x}_1)^T t + \ldots + (\bar{x}_k)^T t^k]e^{\lambda_0 t}, 0\big)^T$, где $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{n-|r|}$, $1 \leqslant i \leqslant k$ — векторы, определяемые начальными условиями. Из уравнения $\bar{A}_{21}\hat{x} = -\bar{B}\xi$ и ограниченности $\xi(t)$ вытекает, что $A_{21}(e^{-\lambda_0\tau})[(\bar{x}_0)^T + (\bar{x}_1)^T t + \ldots + (\bar{x}_k)^T t^k] \equiv 0$. Если хотя бы один из векторов $\bar{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ отличен от нуля, то $\hat{x}(t)$ является ненулевым решением однородной системы

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} \end{cases}$$

с тождественно нулевым выходом y, что противоречит спектральной наблюдаемости системы. Таким образом, соответствующая собственному значению λ_0 компонента в решении отсутствует.

Для всех собственных чисел λ, лежащих в левой полуплоскости, соответствующая компонента решения будет стремиться к нулю, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 2. *В условиях теоремы 5 система (1.18) обратима.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для случая обыкновенных дифференциальных уравнений. $\square$

Глава 2

Методы обращения систем с запаздыванием

Данная глава посвящена непосредственному описанию алгоритмов обращений для динамических систем.

Первый параграф следует [70] и содержит ранее полученные результаты об алгоритме обращения с разрывным управлением для систем без запаздывания. Второй параграф содержит основные результаты по обращению векторных квадратных систем с запаздыванием. Приводятся алгоритмы построения инверторов и указывается точность инвертирования. В параграфах 3-5 полученные результаты обобщаются на случаи гипервыходных систем, нестрого физически реализуемых систем и систем с неустойчивой нулевой динамикой соответственно.

2.1. Алгоритм обращения скалярной системы

В основе предлагаемого подхода к обращению систем с запаздыванием, лежит метод, разработанный ранее в [70] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и основанный на использовании управляемой модели. Приведем его краткое описание.

Рассматривается линейная стационарная управляемая система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi, \\ y = cx, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $y, \xi \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Предполагается, что система находится в общем положении, т. е. является управляемой и наблюдаемой, обладает первым относительным порядком, причем $cb = 1$, а нулевая динамика системы устойчива, причем ее спектр удовлетворяет условию $\operatorname{Re}\lambda_i < -\gamma < 0$, входной сигнал ξ лежит в классе Ω^1 :

$$\xi \in \Omega^1 = \{\xi(t) : \xi \in C^1[0,\infty),\ |\xi(t)| \leqslant \xi_0,\ |\dot{\xi}(t)| \leqslant \xi_1\}.$$

Тогда систему можно представить в канонической форме с выделением нулевой динамики

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y, \\ \dot{y} = A_{21}x' + A_{22}y + \xi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Наряду с системой (2.2) рассмотрим модельную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{z}' = A_{11}z' + A_{12}y, \\ \dot{w} = A_{21}z' + A_{22}w + u, \end{cases} \tag{2.3}$$

с нулевыми начальными условиями и рассмотрим их разность

$$\begin{cases} \dot{e}' = A_{11}e', \\ \dot{e} = A_{21}e' + A_{22}e + (u - \xi), \end{cases} \tag{2.4}$$

где $e' = z' - x',\ e = w - y$. Ошибка e' наблюдения координат состояния x' удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}' = A_{11}e'$$

и, в силу предположения об устойчивости нулевой динамики системы, стремится к нулю экспоненциально при стремлении времени к бесконечности:

$$|e'(t)| \leqslant |x'(0)|C_1e^{-\gamma t}$$

для некоторой положительной константы C_1.

В качестве управления выберем

$$u = -(A_{22} + \alpha)e - F\operatorname{sgn} e. \tag{2.5}$$

Здесь $\alpha > 0$, а константу F выберем равной $F = \xi_0 + h$, $h > 0$. Тогда ошибка e удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = -\alpha e - (F\operatorname{sgn}(e) - A_{21}e' + \xi).$$

В рассматриваемой замкнутой системе за конечное время возникает скользящий режим [71] на многообразии $e = 0$. В силу устойчивости нулевой динамики это движение будет асимптотически устойчивым.

Для получения искомой непрерывной оценки нам потребуется фильтр типа «скользящее среднее»:

$$u_T(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} u(\tau) d\tau, \tag{2.6}$$

где T — интервал усреднения.

В качестве оценки $\tilde{\xi}(t)$ искомого входного сигнала $\xi(t)$ используем скользящее среднее:

$$\tilde{\xi}(t) = u_T(t).$$

Справедлива

Теорема 6. *[70] Пусть выполнены все условия, наложенные на систему (2.1): она общего положения, первого относительного порядка, ее нулевая динамика асимптотически устойчива, $\xi(t) \in \Omega^1$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $T > 0$, что для $\tilde{\xi} = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} u(\tau) d\tau$, где $u(\tau)$ задается формулой (2.5), начиная с некоторого момента времени $t^* \geqslant T$, справедлива оценка*

$$|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Следствие 3. *[70] Пусть выполнены условия Теоремы 6. Представим $u(t)$ из (2.5) в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где*

$$\begin{cases} u_1 = -A_{21} z' - A_{22} e, \\ u_2 = -\alpha e - F \operatorname{sgn}(e)\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Тогда для $\tilde{\xi}_2 = (u_2)_T$, начиная с некоторого момента времени, будет выполнено неравенство: $|\tilde{\xi}_2 - \xi| \leqslant \varepsilon$, причем величина ε определяется параметром фильтра T.

Замечание. При этом с некоторого момента времени справедлива оценка $|\tilde{\xi}_2 - \xi| \leqslant \frac{\xi_1 T}{2} + K_1 e^{-\gamma t}$ для некоторой положительной константы K_1.

Описанный алгоритм позволяет при выполнении указанных предположений получить оценку неизвестного входного сигнала ξ с наперед заданной точностью.

Прежде, чем сформулировать аналогичное утверждение для систем с запаздыванием дадим следующее определение.

Определение 4. *Система*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)\xi, \\ y = C(\Delta)x, \end{cases}$$

называется сильно управляемой, если форма Смита ее матрицы управляемости

$$\langle A|B\rangle = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

вещественная и полного ранга.

В случае скалярных систем это условие превращается в условие унимодулярности матрицы $\langle A|B\rangle$.

В работе [64] тот же метод обращения без существенных изменений был успешно применен в случае скалярных систем с соизмеримыми запаздываниями. А именно, была доказана теорема, которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема 7. *Пусть скалярная система*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau), \end{cases}$$

где $y(t)$, $\xi(t)$ — скалярные сигналы, A_i, B_i, C_i — матрицы соответствующих размерностей, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, сильно управляема и спектрально наблюдаема, ее инвариантные нули s^* удовлетворяют условию

$$\mathrm{Re}(s^*) < -\gamma < 0,$$

$C(\Delta)B(\Delta) = \mathrm{const} \neq 0$, *сигнал* $\xi(t) \in \Omega^1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $T > 0$ *такое, что начиная с некоторого момента времени для* $\tilde{\xi} = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T}^{t} u_2(\tau)d\tau = (u_2)_T(t)$ *— скользящего среднего (с параметром* T*) управления из* (2.7) *(где все матрицы теперь полиномиальные) имеет место оценка*

$$|\tilde{\xi} - \xi_T| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, в дальнейшем мы сосредоточимся на обобщении приведенного алгоритма на более широкие классы систем с запаздыванием.

2.2. Обращение квадратных векторных систем с запаздыванием

Перейдем теперь к рассмотрению случая многосвязных систем. Пусть, как и прежде, задана динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau), \end{cases} \tag{2.8}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор систем; $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход системы; $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестный вход; A_i, B_i и C_i — постоянные известные матрицы соответствующих размерностей; $\tau > 0$ – постоянное запаздывание. Будем предполагать, что размерности входа и выхода системы совпадают, т. е. $l = m$. Начальные функции $x(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$ определены при $\Theta \in [-k\tau; 0]$ и таковы, что решение системы (1) существует и единственно при $t \in (0, +\infty)$, однако сами эти начальные функции считаются неизвестными. Например, можно полагать начальные условия непрерывными функциями на указанном отрезке.

Перейдем к алгебраическому представлению для данной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x(t) + B(\Delta)\xi(t), \\ y = C(\Delta)x(t), \end{cases} \tag{2.9}$$

и предположим, что для нее выполнены условия теоремы 4, т. е. она обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда система (2.9) может быть подходящей заменой координат приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{cases} \tag{2.10}$$

или в сокращенной записи

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi. \end{cases} \tag{2.11}$$

Введем новый сигнал $\eta(t) = H_r(\delta)\xi(t)$ (здесь $H_r(\delta)$ — матрица с элементами, являющимися многочленами от оператора запаздывания). Отметим, что в силу нашего предположения о наличии у системы чистого относительного порядка матрица $H_r(\Delta)$ обратима, а потому

$$\xi = H_r^{-1}(\delta)\eta. \tag{2.12}$$

Ясно, что сигнал $\eta(t)$ также будет ограничен некоторой положительной константой η_0, зависящей от ξ_0 и матрицы H_r. Более того, если сигнал $\eta(t)$ задан с некоторой известной погрешностью ε, то и сигнал $\xi(t)$ будет определен с погрешность $C\varepsilon$ для некоторой положительной константы C.

Вначале рассмотрим случай, когда вектор относительного порядка r состоит из одних единиц, т. е. $r_i = 1$. Тогда $\bar{y} \equiv y$ и система (2.10) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{y} = A_{21}\bar{x} + A_{22}y + \eta. \end{cases} \tag{2.13}$$

Далее наряду с основной системой (2.13) рассмотрим ее управляемую модель

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_m = A_{11}\bar{x}_m + A_{12}y, \\ \dot{y}_m = A_{21}\bar{x}_m + A_{22}y + u, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $u(t)$ — доступное нам управление. Введем обозначения $e_x = \bar{x}_m - \bar{x}$, $e_y = y_m - y$ и рассмотрим разность этих двух систем

$$\begin{cases} \dot{e}_x = A_{11}e_x, \\ \dot{e}_y = A_{21}e_x + (u - \eta). \end{cases} \tag{2.15}$$

Предположим также, что нулевая динамика системы, определяемая матрицей A_{11}, устойчива. Тогда из первого уравнения системы (2.15) следует, что ошибка e_x сходится к нулю экспоненциально при стремлении $t \to \infty$.

В качестве стабилизирующего управления можно взять разрывное управление

$$u = -\alpha e_y - F \operatorname{Sgn} e_y. \tag{2.16}$$

Здесь $\alpha > 0$, а константу F выберем равной $F = \eta_0 + h$, $h > 0$, где $\operatorname{Sgn} e_y = \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(e_y^1(t)), \ldots, \operatorname{sgn}(e_y^m(t))$ — вектор знаков координат вектора e_y. Тогда ошибка e_y удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}_y = -\alpha e_y + A_{21}e_x - \eta - F \operatorname{Sgn}(e_y),$$

распадающемуся на m скалярных систем

$$\dot{e}_y^i(t) = -\alpha e_y^i(t) - F \operatorname{sgn}(e_y^i(t)) - \eta_i(t) + A_{21}^i e_x,$$

где A_{21}^i — i-ая строка матрицы A_{21}. По аналогии со скалярным случаем при указанном выборе управления в системе (2.13), начиная с некоторого времени t^*, возникает скользящий режим по поверхности $e_y \equiv 0$. В качестве непрерывной оценки $\hat{\eta}(t)$ для $\eta(t)$ используем, как и ранее, скользящее среднее соответствующих (вообще говоря разрывных) компонент управления:

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} u(\tau) d\tau. \tag{2.17}$$

Таким образом векторная задача в случае квадратных систем распадается на m скалярных задач, для которых уже получены оценки погрешности обращения, и имеет место

Теорема 8. *Пусть система* (2.8) *является квадратной, приводима к виду* (2.10) *и обладает единичным чистым векторным относительным порядком, а ее нулевая динамика асимптотически устойчива, неизвестный сигнал* $\xi(t) \in \Omega^1$.

Тогда инвертор (2.14), (2.16), (2.17), *дает оценку* $\hat{\xi}(t) = H_r^{-1}\hat{\eta}(t)$ *для неизвестного сигнала* $\xi(t)$, *которая с некоторого момента времени* t^* *удовлетворяет оценке*

$$|\hat{\xi}(t) - \xi(t)| \leqslant K\xi^1 T,$$

где T *— параметр фильтра* (2.17), ξ^1 *— оценка для* $\dot{\xi}(t)$ *из класса* Ω^1, $K = \mathrm{const} > 0$ *— положительная константа, определяемая параметрами системы. Таким образом, подходящим выбором параметра* T *можно добиться любой наперед заданной точности оценивания.*

Далее рассмотрим случай произвольного вектора чистого относительного порядка. Итак, пусть система (2.8) обладает чистым векторным относительным порядком с вектором r, не обязательно состоящим из одних единиц. В этом случае для построения инвертора предположим, что мы можем построить наблюдатель для систем максимального относительного порядка, т. е. получить оценку на производные известного выходного сигнала $y_i(t)$ до порядка $r_i - 1$. Это предположение выполняется, например, когда мы решаем задачу обращения динамической системы справа.

Тогда наряду с системой, приведенной к форме (2.11), рассмотрим ее управляемую модель вида

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_m = A_{11}\bar{x}_m + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}}_m = A_{21}\bar{x}_m + A_{22}\bar{y} + Gu, \end{cases} \tag{2.18}$$

где $G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r| \times m}$. Отличие данной модели от модели (2.14) заключается в том, что ее второе уравнение содержит в себе весь вектор $\bar{y}$, состоящий как из компонент выхода y, так и из их производных.

Дальнейшие построения, полностью аналогичные рассмотренному ранее случаю, позволяют переформулировать теорему 8 следующим образом.

Теорема 9. *Пусть система (2.8) является квадратной, приводима к виду (2.10) и обладает чистым векторным относительным порядком, а ее нулевая динамика асимптотически устойчива, неизвестный сигнал* $\xi(t) \in \Omega^1$.

Тогда в предположении о возможности точного вычисления производных выходного сигнала y *инвертор (2.18), (2.16), (2.17), дает оценку* $\hat{\xi}(t) = H_r^{-1}\hat{\eta}(t)$ *для неизвестного сигнала* $\xi(t)$*, которая с некоторого момента времени* t^* *удовлетворяет оценке*

$$|\hat{\xi}(t) - \xi(t)| \leqslant K\xi^1 T,$$

где T *— параметр фильтра (2.17),* ξ^1 *— оценка для* $\dot{\xi}(t)$ *из класса* Ω^1, $K = \mathrm{const} > 0$ *— положительная константа, определяемая параметрами инвертора.*

Таким образом, подходящим выбором параметра T можно добиться любой наперед заданной точности оценивания.

2.3. Обращение гипервыходных систем

Рассмотрим теперь случай, гипервыходных систем, т. е. систем вида (2.8) с $l > m$. Как и ранее, перейдем к алгебраическому представлению такой системы и будем предполагать, что для нее выполнены условия теоремы 4, т. е. она обладает чистым относительным порядком по некоторому набору выходов. Тогда, как было показано в главе 2, система (2.8) невырожденным преобразованием координат приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi, \\ z = C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}, \end{cases} \tag{2.19}$$

или в сокращенной записи

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y}' + \bar{B}\xi, \\ z = C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Инвариантные нули такой системы определяются ее матрицей Розенброка:

$$R(s,\,\Delta) = \left[\begin{array}{c|c|c} sI - A_{11}(\Delta) & -A_{12}(\Delta) & 0 \\ \hline -\bar{A}_{21}(\Delta) & sI - \bar{A}_{22}(\Delta) & -\bar{B}(\Delta) \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline C_{21}(\Delta) & C_{22}(\Delta) & 0 \end{array}\right]. \tag{2.21}$$

Напомним, что инвариантными нулями системы называются такие значения s, при которых матрица $R(s, e^{-\tau s})$ теряет ранг. Ясно, что что второй столбец и третья строка матрицы (2.21) на инвариантные нули влияния не оказывают, а, значит, их можно исключить из рассмотрения, что приводит нас к матрице

$$\left[\begin{array}{c|c} sI - A_{11}(\Delta) & 0 \\ \hline -\bar{A}_{21}(\Delta) & -\bar{B}(\Delta) \\ \hline C_{21}(\Delta) & 0 \end{array}\right].$$

Учитывая, что $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_r \end{bmatrix}$, матрица H_r унимодулярна и невырождена, а ненулевые элементы матрицы A_{21} расположены в тех же строках, что и ненулевые компоненты матрицы $\bar{B}$, легко видеть, что инвариантные нули $R(s,\, e^{-\tau s})$ совпадают с инвариантными нулями матрицы

$$R'(s,\, \Delta) = \left[\begin{array}{c} sI - A_{11}(\Delta) \\ \hline C_{12}(\Delta) \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{[(n-|r|)+(l-m)]\times[n-|r|]}. \tag{2.22}$$

В общем случае у матрицы R' инвариантные нули отсутствуют, т. е.

$$\operatorname{rank} R'(s,\, e^{-s\tau}) = n - |r| \text{ при любом } s \in \mathbb{C}. \tag{2.23}$$

что характерно для неквадратных матриц. Отсюда вытекает, что пара $\{C_{21};\, A_{11}\}$ является спектрально наблюдаемой [67]. Если же у $R'(s,\, d)$ есть инвариантные нули, но они устойчивы, то пара $\{C_{21};\, A_{11}\}$ спектрально обнаруживаема.

В этом случае для восстановления неизвестной части $\bar{x}$ фазового вектора можно использовать (вообще говоря, распределенный) наблюдатель следующего вида [72]. Обозначим через $w = z - C_{22}\bar{y}$, через w_i $i-$ую компоненту этого вектора, а через C_i $i-$ую строку матрицы C_{21}. Тогда найдется такое i, что система

$$\dot{v}(t) = A_{11}(\Delta)v(t) + A_{12}(\Delta)y(t) + K_0(\Delta)(C_{21}(\Delta)v(t) - w(t)) + v_0(t), \tag{2.24}$$

где

$$v_0(t) = K_x(\Delta)(C_i(\Delta)v(t) - w_i(t)) + \int\limits_{-N_4\tau}^{0} \Psi(\theta)v_0(t+\theta)d\theta$$
$$+ \int\limits_{-N_3\tau}^{0} \phi(\theta)[C_i(\Delta)v(t+\theta) - w_i(t+\theta)]d\theta,$$

где $K_0(\Delta) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\Delta]$, $K_x(\Delta) \in \mathbb{R}^n[\Delta]$ — некоторые матрицы, $\phi(\cdot) \in L_2([-N_3\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $\Psi(\cdot) \in L_2([-N_4\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, — некоторые функции, N_3, N_4 — некоторые положительные целые числа, а начальные условия нулевые, будет являться асимптотическим наблюдателем вектора $\bar{x}$, причем скорость сходимости оценки может быть назначена произвольно.

После того, как оценка $v(t)$ для компоненты $\bar{x}$ получена, мы можем, действуя аналогично рассмотренному выше случаю квадратных систем, получить и оценку для неизвестного сигнала $\xi(t)$. Основное отличие случая гипервыходных систем заключается в следующем. В этом случае мы можем отказаться от требования асимптотической устойчивости нулевой динамики системы, заменив его условием (2.23), чье выполнение на практике представляется более вероятным.

2.4. Обращение нестрого физически реализуемых систем

Обратимся теперь к системам вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t-i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t-i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t-i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t-i\tau), \end{cases} \tag{2.25}$$

где D_i — постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей, а все остальные обозначения аналогичны рассмотренным ранее для системы (2.8). Отличительной особенностью систем такого вида является то, что управление в них может оказывать непосредственное влияние на выход системы.

Вновь перейдем к алгебраическому представлению для данной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)\xi, \\ y = C(\Delta)x + D(\Delta)\xi. \end{cases} \tag{2.26}$$

2.4.1. Случай унимодулярной матрицы D

Предположим вначале, что система является квадратной, а матрица $D(\Delta)$ является унимодулярной. В этом случае из последнего уравнения системы (2.26) легко выразить искомый сигнал:

$$\xi = D^{-1}(y - Cx). \tag{2.27}$$

Подставив полученное выражение в первое уравнение системы (2.26), получим

$$\dot{x} = \bar{A}x + BD^{-1}y, \tag{2.28}$$

где $\bar{A} = A - BD^{-1}C$.

Таким образом, если нам удастся получить оценку вектора состояния x, то задача обращения будет решена. Предположим, что матрица $\bar{A}(\Delta)$ является устойчивой. Тогда система

$$\dot{x}_m = \bar{A}x_m + BD^{-1}y \tag{2.29}$$

будет асимптотическим наблюдателем системы (2.28). Действительно, рассмотрим ошибку наблюдения $e(t) = x_m(t) - x(t)$. Она удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = \bar{A}e,$$

и, следовательно, $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отметим, что скорость сходимости к нулю ошибки наблюдения определяется величиной

$$\gamma(\bar{A}) = \max\{\operatorname{Re} s | \det(sI - \bar{A}(e^{-\tau s})) = 0\}.$$

При этом спектр матрицы $\bar{A}$ совпадает со спектром матрицы Розенброка системы (2.26), а, значит, ее характеристические числа суть инвариантные нули этой системы. Действительно,

$$\det R(s,\Delta) = \det \left[\begin{array}{c|c} sI - A(\Delta) & -B(\Delta) \\ \hline C(\Delta) & D(\Delta) \end{array}\right] =$$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} sI - (A(\Delta) - B(\Delta)D^{-1}(\Delta)C(\Delta)) & 0 \\ \hline C(\Delta) & D(\Delta) \end{array}\right] =$$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} sI - \bar{A}(\Delta) & 0 \\ \hline C(\Delta) & D(\Delta) \end{array}\right] = \det(sI - \bar{A}(\Delta)) \det D(\Delta) \implies$$

$$\det R(s,\Delta) = 0 \Leftrightarrow \det(sI - \bar{A}(\Delta)) = 0.$$

Теперь нетрудно получить оценку $\tilde{\xi}$ неизвестного входа ξ:

$$\tilde{\xi} = D^{-1}(y - Cx_m), \ |\tilde{\xi} - \xi| \to 0. \tag{2.30}$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 10. *Пусть система* (2.25) *является квадратной, матрица D унимодулярна, а инвариантные нули системы лежат в левой полуплоскости. Тогда система* (2.29), (2.30) *решает задачу обращения системы* (2.25).

2.4.2. Случай невырожденной матрицы D

Пусть теперь система по-прежнему квадратная, а $\det D(\Delta) = p(\Delta) \not\equiv 0$, $p(\Delta) \in \mathbb{R}[\Delta]$ — полином ненулевой степени. Допустим, что найдется матрица $Q(\Delta)$ такая, что $B(\Delta) = Q(\Delta)D(\Delta)$ (в случае унимодулярной матрицы D можно было выбрать $Q = BD^{-1}$). Тогда, введя обозначение $\eta = D\xi$, представим систему (2.25) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Q\eta \\ y = Cx + \eta. \end{cases} \tag{2.31}$$

Используя алгоритм, полученный ранее для случая унимодулярной матрицы D, можно получить оценку $\tilde{\eta}$ неизвестного сигнала η. Теперь нам необходимо получить оценку $\tilde{\xi}$ для исходного сигнала ξ из уравнения

$$\tilde{\eta} = D\tilde{\xi}.$$

Условия, при которых такие оценки могут быть получены, и методы их построения описаны в параграфе 3 главы 3.

Далее, пусть такую матрицу Q найти не удается. Обозначим через $\hat{D}$ матрицу, присоединенную к матрице D (этом случае $D\hat{D} = p(\Delta)I$). Тогда обозначим

$$\eta = \hat{D}D\xi = p(\Delta)\xi.$$

Домножая первое уравнение системы (2.26) на $p(\Delta)$, а второе на $\hat{D}$, получим

$$\begin{cases} p(\Delta)\dot{x} = Ap(\Delta)x + B\eta \\ \eta = \hat{D}(y - Cx). \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p(\Delta)\dot{x} = (Ap(\Delta) - B\hat{D}C)x + B\hat{D}y \\ \eta = \hat{D}(y - Cx). \end{cases} \tag{2.32}$$

Первое уравнение полученной системы является дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом нейтрального типа [29], чье поведение во многих аспектах сходно с более привычными дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа, которые и рассматривались нами ранее. Предположим, что это уравнение является устойчивым. Отметим, что в этом случае обязан быть устойчивым и квазиполином $p(e^{-\tau s})$ [34], откуда вытекает, что все корни многочлена $p(\Delta)$ лежат вне единичного круга. Тогда можно построить наблюдатель состояния

$$p(\Delta)\dot{x}_m = (Ap(\Delta) - B\hat{D}C)x_m + B\hat{D}y, \tag{2.33}$$

для которого ошибка наблюдения $|x_m - x| \to 0$. Далее, используя второе уравнение системы (2.32), можно получить оценку $\tilde{\eta} = \hat{D}(y - Cx_m)$ сигнала η. Для получения отсюда оценки сигнала $\xi(t)$ следует вновь обратиться к методам, описанным в параграфе 3 главы 3.

2.4.3. Случай произвольной матрицы D

Теперь перейдем к рассмотрению случая произвольной матрицы $D(\Delta)$. Для начала преобразуем систему, произведя невырожденную замену входов $\xi = P_1(\Delta)\xi_1$ и выходов $y = P_2(\Delta)y_2$, где $P_1(\Delta), P_2(\Delta)$ — унимодулярные матрицы соответствующих размерностей. При такой замене матрица D заменится на матрицу $\widetilde{D} = P_2^{-1}DP_1$. Выберем матрицы P_1 и P_2 так, чтобы матрица $\widetilde{D}$ оказалась диагональной, а все её нулевые диагональные элементы располагались в последних строках, т. е.

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Это всегда можно сделать, приведя её к нормальной форме Смита. В дальнейшем мы будем предполагать, что система заранее приведена к указанной форме.

Пусть в системе (2.26) в матрице B столбец, соответствующий входу ξ_i, является нулевым, а в матрице D — нет. Это означает, что вход ξ_i не оказывает влияния на внутреннюю динамику системы. Влияние же его на выход системы определяется единственным уравнением

$$y_i = C_i x + D_{ii}\xi_i, \tag{2.34}$$

где C_i — i-ая строка матрицы C, D_{ii} — элемент матрицы D, стоящий на пересечении i-ой и i-ого столбца, то есть полином от Δ. Пусть нам удастся построить наблюдатель, дающий оценку $\widetilde{x}$ для вектора состояния x. Тогда, если $D_{ii} = \mathrm{const}$, то

$$\tilde{\xi}_i = D_{ii}^{-1}(C_i\tilde{x} - y_i).$$

Если же D_{ii} является полиномом ненулевой степени от Δ, то для восстановления ξ_i из уравнения (2.34) можно воспользоваться методами, описанными в параграфе 3 главы 3. Таким образом, не влияющие на динамику системы входы могут быть исключены из рассмотрения. Отметим, что при этом размерности векторов входа и выхода изменятся на одну и ту же величину, а значит соотношение между ними не будет нарушено. В частности, квадратная система останется квадратной, а гипервыходная — гипервыходной.

Итак, пусть D — вырожденная матрица ранга r. Тогда система (2.26) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax + [B_1|B_2]\left(\begin{array}{c}\xi'\\ \hline \xi''\end{array}\right) \tag{2.35}$$

$$\left(\begin{array}{c}y'\\ \hline y''\end{array}\right) = \left[\begin{array}{c}C_1\\ \hline C_2\end{array}\right]x + \left[\begin{array}{c|c}D_1 & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]\left(\begin{array}{c}\xi'\\ \hline \xi''\end{array}\right), \tag{2.36}$$

где $y' \in \mathbb{R}^r$, $y'' \in \mathbb{R}^{(l-r)}$, $\xi' \in \mathbb{R}^r$, $\xi'' \in \mathbb{R}^{(m-r)}$ — компоненты выхода и входа системы (2.26) соответственно; A_{ij}, B_{ij}, C_i, D_1, $i, j = 1, 2$, – компоненты матриц системы (2.26) соответствующих размерностей, причем матрица D_1 квадратная и невырожденная.

Пусть теперь матрица D_1 является унимодулярной. Тогда из первого уравнения (2.36)

$$\xi' = D_1^{-1}\left(-C_1x + y'\right), \tag{2.37}$$

и система (2.35), (2.36) сводится к системе

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}_1y' + B_2\xi'' \tag{2.38}$$

$$y'' = C_2x, \tag{2.39}$$

где $\bar{A} = A - B_1D_1^{-1}C_1x$, $\bar{B}_1 = B_1D_1^{-1}$.

Эта система является строго физически реализуемой. Для ее обращения можно применить алгоритмы, изложенные ранее, после чего восстановить оставшиеся компоненты неизвестного входа с помощью уравнения (2.37).

Аналогично изложенному выше рассматривается и случай, когда матрица D_1 не является унимодулярной.

2.5. Обращение систем с неустойчивой нулевой динамикой

Основной целью данного параграфа является ослабление сделанного ранее предположения об устойчивости нулевой динамики. Рассмотрим вначале задачу обращения для систем без запаздывания. Пусть выполнены условия теоремы 3 и рассматриваемая система приведена к канонической форме с выделением нулевой динамики (2.11):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}\xi. \end{cases}$$

Для начала предположим, что вектор относительного порядка состоит из одних единиц. Тогда второе уравнение этой системы примет вид

$$\dot{y} = A_{21}\bar{x} + A_{22}y + H_r\xi.$$

Рассмотрим внимательнее ее первое уравнение

$$\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y. \tag{2.40}$$

Из наблюдаемости рассматриваемой системы и предположения об ограниченности выхода y следует ограниченность вектора $\bar{x}$. Тогда перед нами встает задача определения ограниченного решения уравнения (2.40). Как показано в параграфе 1 главы 3, если спектр матрицы A_{11} не содержит точек на мнимой оси, у этого уравнения существует единственное ограниченное решение $\bar{x}_b(t)$ (с точностью до асимптотически стремящихся к нулю слагаемых). Там же описаны некоторые возможные подходы к отысканию этого решения. Отметим, что в общем случае задача отыскания такого решения оказывается неразрешимой в режиме реального времени, а потому для отыскания ограниченного решения необходима дополнительная информация о системе.

Пусть нам удалось получить оценку $\bar{x}_e$ для $\bar{x}_b$ такую, что $||\bar{x}_b - \bar{x}_e|| \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 — известная константа. Тогда построим модельную управляемую систему

$$\dot{y}_m = A_{21}\bar{x}_e + A_{22}y + u. \tag{2.41}$$

Уравнение для ошибки $e = y - y_m$ будет иметь вид

$$\dot{e} = A_{21}(\bar{x} - \bar{x}_e) + (H_r\xi - u),$$

где каждая компонента $A_{21}(\bar{x} - \bar{x}_e)$ ограничена некоторой известной константой. Тогда, используя подход, аналогичный описанному в параграфе 1 данной главы, подходящим выбором управления u возможно стабилизировать ошибку в заданной окрестности нуля, после чего получить оценку u_e для $H_r\xi$ с точностью, зависящей от точности оценки x_b. Отсюда, в силу нашего предположения о невырожденности матрицы H_r, легко получается и искомая оценка неизвестного входного сигнала $\xi(t)$. А именно [70], справедлива оценка

$$|\widetilde{\xi}(t) - \xi(t)| \leqslant K_3\left(K_1 e^{-\gamma t} + \frac{\xi^1 T}{2} + K_2\varepsilon_0 + \frac{2\varepsilon_0}{T}\right), \tag{2.42}$$

где константа $K_3 > 0$ определяется матрицей H_r, $K_1 > 0$ зависит от параметров системы и начальных условий, $K_2 > 0$ — только от параметров системы, ε_0 —точность определения $\bar{x}_b$.

Отметим, что для практической реализации данного алгоритма требуется дополнительная информация о системе, позволяющая восстанавливать ограниченное решение уравнения (2.40) в случае ее неустойчивой нулевой динамики.

В случае, когда вектор относительного порядка не является единичным, нам, как и ранее, необходимо сделать предположения о возможности получения производных компонент выхода y.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть система* (2.1) *наблюдаема и приводима к виду* (2.2)*, входной сигнал* $\xi(t) \in \Omega^1$*, а спектр матрицы* A_{11} *устойчив. Тогда существует* *инвертор, позволяющий оценить искомый сигнал ξ с любой наперед заданной точностью начиная с некоторого момента времени t^*.*

Если же спектр матрицы A_{11} не содержит точек на мнимой оси, инвертор для системы существует при дополнительных предположениях о возможности оценки компонент выхода y и о возможности восстановления ограниченного решения уравнения (2.40), причем его точность определяется точностью, с которой может быть найдено ограниченное решение.

Полностью повторяя предыдущие рассуждения, нетрудно сформулировать и аналогичное утверждение для систем с запаздыванием. В этом случае нам потребуется восстанавливать ограниченное решение первого уравнения системы (2.10):

$$\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y. \tag{2.43}$$

Описание этой задачи и возможных подходов к ее решению изложено в параграфе 2 главы 3.

Теорема 12. *Пусть система (2.8) спектрально наблюдаема и приводима к виду (2.10), входной сигнал $\xi(t) \in \Omega^1$, а спектр матрицы $A_{11}(\Delta)$ устойчив. Тогда существует инвертор, позволяющий оценить искомый сигнал ξ с любой наперед заданной точностью начиная с некоторого момента времени t^*.*

Если же спектр матрицы A_{11} не содержит точек на мнимой оси, инвертор для системы существует в дополнительном предположении о возможности восстановления ограниченного решения уравнения (2.43), причем его точность определяется точностью, с которой может быть найдено ограниченное решение.

Глава 3

Восстановление ограниченных решений линейных уравнений

При рассмотрении задачи обращения динамических систем в различных постановках зачастую возникают вспомогательные задачи, относящиеся к вопросам теории обыкновенных дифференциальных, функционально-дифференциальных и разностных уравнений. В данную главу вынесено изложение некоторых из них, посвященных задачам восстановления ограниченного решения для различных типов линейных уравнений. Все рассмотренные задачи обладают определенным сходством, но в то же самое время сложность их решения существенно зависит от типа представленного уравнения.

Первый параграф посвящен задаче восстановления ограниченного решения для неустойчивого обыкновенного дифференциального уравнения. В нем подробно обсуждаются вопросы существования и единственности такого решения и его свойства. Проводится анализ разрешимости поставленной задачи в реальном времени. Завершается параграф обсуждением возможных подходов к решению данной задачи на практике. Результаты данного параграфа были опубликованы ранее в [15].

Во втором параграфе аналогичная задача рассматривается для линейного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа. В начале параграфа кратко приводятся некоторые определения и факты из функционального анализа и теории функционально-дифференциальных уравнений, используемые в дальнейшем. Затем обсуждается вопрос существования и единственности искомого ограниченного решения, показывается тесная связь задачи его поиска с рассмотренной ранее задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьем параграфе вновь рассматривается задача восстановления ограниченного решения, но теперь уже для линейного разностного уравнения в непрерывном времени. Показывается связь с аналогичной задачей для разностного уравнения с дискретным временем, исследуются вопросы существования и единственности решения, обсуждаются его свойства [19]. Приводятся некоторые подходы к ее решению на практике. Завершается параграф сравнительным анализом всех трех рассмотренных задач.

3.1. Восстановление ограниченного решение неустойчивого дифференциального уравнения.

Рассмотрим систему линейных стационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\xi(t)$ — ограниченная на неотрицательной полуоси функция, $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$. При этом возможны дополнительные предположения о непрерывности, дифференцируемости, постоянстве $\xi(t)$ и т. д. Константа ξ_0 в общем случае полагается неизвестной, но возможно и рассмотрение задачи при заданном значении константы ξ_0. В дальнейшем нам потребуется следующий результат.

Теорема 13. *[73] Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{3.2}$$

где $f(t)$ непрерывная функция, ограниченная на полуоси $[t_0; +\infty)$, A — линейный постоянный непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве. Предположим, что спектр оператора A не пересекается с мнимой осью и целиком расположен в правой полуплоскости. Тогда уравнение (3.2) имеет единственное ограниченное на полуоси $[t_0; +\infty)$ решение.

Для однозначного определения непрерывного решения системы (3.1) при заданной непрерывной функции $\xi(t)$ рассматривают различные постановки задачи. Чаще всего это задача Коши, когда задано начальное значение $x(0) = x_0$. Мы же рассмотрим неклассическую постановку. Дадим ее описание.

Задача 1. Пусть для линейной системы (3.1) спектр матрицы A лежит в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т.е. для любого $s^* : \beta(s^*) = \det(s^* I - A) = 0$ верно, что $\operatorname{Re} s^* > 0$ (другими словами, спектр матрицы A целиком неустойчивый; такие матрицы в дальнейшем будем называть *антиустойчивыми*). Пусть при $t \geqslant 0$ задана непрерывная функция $\xi(t)$, $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$. Тогда из теоремы 13 вытекает, что существует и единственна ограниченная на полупрямой функция $\phi(t)$, удовлетворяющая уравнению (3.1). Задача состоит в поиске этой функции. При этом могут рассматриваться два варианта постановки задачи:

1. Решение в режиме реального времени, т. е. $\phi(t)$ строится на основании информации о $\xi(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$;

2. Поиск $\phi(t)$ после измерения $\xi(t)$ при $t \in [0, +\infty)$.

Первая постановка важна при решении различных задач управления, в том числе задачи обращения динамических систем, вторая имеет скорее теоретический характер. Кроме того, можно вести речь о получении оценок и приближений $\phi(t)$.

Рассмотрим вначале простейший случай $n = 1$, так как уже в этом случае проявляются отличительные особенности рассматриваемой задачи.

В этом случае задачу можно сформулировать следующим образом: для уравнения

$$\dot{x} = ax(t) + \xi(t) \tag{3.3}$$

необходимо найти ограниченное решение.

Если $a < 0$, то уравнение устойчиво и, следовательно, при ограниченной функции $\xi(t)$ все его решения ограничены и будут стремиться друг к другу асимптотически.

В этом случае для построения оценки можно использовать наблюдатель

$$\dot{\tilde{x}} = a\tilde{x} + \xi(t),$$

где $\tilde{x}$ — переменная состояния наблюдателя, являющаяся оценкой для состояния уравнения (3.3). Покажем это. Действительно, ошибка $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}(t) = ae(t),$$

являющемуся, согласно предположению $a < 0$, устойчивым, откуда следует, что $e(t)$ стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности, а, значит, и $\tilde{x}(t)$ дает экспоненциально сходящуюся оценку для $x(t)$.

Однако в случае $a > 0$ такой подход невозможен, так как $e(t) \to \infty$ (за исключением случая $e(0) = 0$). Далее будет изложен иной подход к решению данной задачи при наличии априорной информация об ограниченности искомого решения.

3.1.1. Свойства решения

Начнем с изучения свойств ограниченного решения уравнения (3.3). Обозначим его $\phi(t)$. Как было отмечено выше, оно единственно. Тогда, согласно теореме о существовании и единственности решения ОДУ, оно определяется единственным начальным условием $\phi(0) = \phi_0$. Из формулы Коши

$$\phi(t) = e^{at}\phi_0 + e^{at}\int\limits_0^t e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau$$

непосредственно следует

$$\phi(t)e^{-at} = \phi_0 + \int\limits_0^t e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

Устремим время t к бесконечности. Поскольку $a > 0$, а $\phi(t)$ ограничена, то $\phi(t)e^{-at} \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда

$$\phi_0 = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau. \tag{3.5}$$

Подставив выражение (3.5) в формулу (3.4), получим явное выражение для искомого решения

$$\phi(t) = -\int\limits_t^{+\infty} e^{a(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau. \tag{3.6}$$

Это выражение не подходит для практических вычислений, поскольку требует знания значений $\xi(t)$ на всем промежутке времени от $t_0 = 0$ до бесконечности, однако позволяет получить оценку модуля ϕ. Пусть $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$, тогда

$$|\phi(t)| = \left|\int\limits_t^{+\infty} e^{a(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau\right| \leqslant \xi_0 \left|\int\limits_t^{+\infty} e^{a(t-\tau)}d\tau\right| = \frac{\xi_0}{a} \tag{3.7}$$

Используя уравнение (3.3), можно получить оценку производной $\phi(t)$

$$|\dot{\phi}(t)| = |a\phi(t) + \xi(t)| \leqslant a|\phi(t)| + |\xi(t)| \leqslant 2\xi_0 = \phi_1 \tag{3.8}$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1. *Пусть $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$. Тогда решение $\phi(t)$ Задачи 1 для уравнения* (3.3) *удовлетворяет оценкам $|\phi(t)| \leqslant \frac{\xi_0}{a}$, $|\dot{\phi}(t)| \leqslant 2\xi_0$.*

Отсюда и из линейности рассматриваемого уравнения получаем

Следствие 4. *Решение задачи* (3.3) *устойчиво по $\xi(t)$.*

Действительно, рассмотрим два различных входных сигнала $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, поступающих на вход рассматриваемой системы. Тогда, в силу линейности уравнения (3.3), разность $\delta x(t)$ порождаемых ими ограниченных решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно удовлетворяет тому же уравнению с входным сигналом $\xi_1(t) - \xi_2(t)$ и, следовательно, оценке

$$|\delta x(t)| \leqslant \frac{\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\{|\xi_1(t) - \xi_2(t)|\}}{a}.$$

Ясно, что если разность рассматриваемых входных сигналов мала, то будет мала и разность полученных решений. Иными словами, малые изменения функции $\xi(t)$ приводят к малым изменениям решения $\phi(t)$.

Вместе с тем, легко видеть, что малое отклонение в начальных данных x_0 приводит к экспоненциально растущему отклонению в $x(t)$. Рассмотрим решение с начальным условием $x_0 = \phi_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Соответствующее решение $x(t)$ описывается формулой

$$x(t) = e^{at}(\phi_0 + \varepsilon) + e^{at}\int\limits_0^t e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau = \phi(t) + e^{at}\varepsilon. \tag{3.9}$$

Таким образом, разность $x(t) - \phi(t) = e^{at}\varepsilon$ будет неограниченно возрастать при стремлении времени к бесконечности.

Получить результат о существовании и единственности решения задачи 1 нетрудно и непосредственно, в том числе и в векторном случае.

Теорема 14. *Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$, а спектр матрицы A антиустойчив, т. е. целиком лежит в правой комплексной полуплоскости. Тогда задача 1 имеет единственное решение.*

Доказательство. Искомое ограниченное решение системы (3.1) описывается формулой Коши

$$\phi(t) = e^{At}\phi_0 + e^{At}\int\limits_0^t e^{-A\tau}b\xi(\tau)d\tau$$

с некоторым начальным условием ϕ_0. По аналогии с одномерным случаем, рассмотрим ϕ_0 вида

$$\phi_0 = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-A\tau}b\xi(\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Обозначим через μ минимум вещественных частей собственных значений матрицы A:

$$\mu = \min\{\operatorname{Re}\lambda | \lambda \in \operatorname{spec} A\}.$$

Из предположения об антиустойчивости матрицы A вытекает, что $\mu > 0$. Тогда справедлива оценка

$$||e^{-A\tau}b\xi(\tau)|| \leqslant C_1\xi_0 e^{-(\mu-\varepsilon_2)\tau},$$

где $C_1 > 0$ — некоторая константа, а ε_2 — малое положительное число, $\mu > \varepsilon_2 > 0$, из которой следует сходимость интеграла в формуле (3.10).

Соответствующее ограниченное решение системы (3.1) имеет вид

$$\phi(t) = -\int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-\tau)}b\xi(\tau)d\tau \tag{3.11}$$

и удовлетворяет оценке

$$||\phi(t)|| = \left|\left|\int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-\tau)}b\xi(\tau)d\tau\right|\right| \leqslant \xi_0 C_2 \left|\left|\int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-\tau)}d\tau\right|\right| \leqslant$$
$$\leqslant \xi_0 C_3 \left|\int\limits_t^{+\infty} e^{-(\mu-\varepsilon_2)(\tau-t)}d\tau\right| \leqslant C_4\xi_0, \tag{3.12}$$

где C_2, C_3, C_4 — некоторые положительные константы, зависящие от матрицы A, откуда следует ограниченность $\phi(t)$. Таким образом, мы показали, что решение задачи 1 существует.

Далее, пусть существует два различных ограниченных решения $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$, порожденных различными начальными значениями ϕ_{01} и ϕ_{02} соответственно. Их разность $\phi_3(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\dot{\phi}_3(t) = A\phi_3(t)$$

и, в силу антиустойчивости матрицы, A стремится к бесконечности при $t \to +\infty$ при ненулевых начальных условиях. С другой стороны, разность двух ограниченных функций неограниченной быть не может. Из полученного противоречия вытекает единственность решения задачи 1, что и завершает доказательство теоремы.

3.1.2. Разрешимость задачи в реальном времени

Несмотря на то, что решение задачи 1 существует и единственно, оно определяется значениями функции $\xi(t)$ на всем интервале времени $[0, +\infty)$. При решении же задач обращения и наблюдения динамических систем требуется находить $\phi(t)$ в режиме реального времени, зная значения $\xi(t)$ лишь на интервале $[0, t]$. Оказывается, что в общем случае решить эту задачу невозможно. Для простоты рассмотрим скалярный случай, т. е. уравнение (3.3).

Теорема 15. *Пусть функция $\hat{\xi}(t)$ задана на сегменте $[t_0, t_1]$, $t_0 \leqslant t_1$, непрерывна и удовлетворяет условиям $|\hat{\xi}(t)| \leqslant \xi_0$, $\xi_0 > 0$. Далее, пусть значение $\hat{x}_0$ таково, что на сегменте $[t_0, t_1]$ решение $x(t)$ системы (3.3) с начальным условием $\hat{x}_0$ удовлетворяет оценке (3.12). Тогда $\hat{\xi}(t)$ можно продолжить до функции $\xi(t)$, определенной и непрерывной на $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяющей тем же ограничениям, так, что соответствующее решение задачи (3.3) с начальным условием $\hat{x}_0$ ограничено.*

(Таким образом, в общем случае информации о $\xi(t)$ на произвольном сегменте $[t_0, t_1]$ недостаточно для определения ϕ_0).

Доказательство. Не умаляя общности, будем полагать $t_0 = 0$. Пусть заданы удовлетворяющие условиям теоремы начальное значение $\hat{x}_0$ и функция $\hat{\xi}(t)$. Тогда на сегменте $[0, t_1]$ определено соответствующее решение задачи Коши $\hat{x}(t)$. Обозначим $\hat{x}_1 = \hat{x}(t_1)$ (согласно условию, $|\hat{x}_1| < \frac{\xi_0}{a}$) и воспользуемся формулой Коши

$$x(t) = e^{at}\left(e^{-at_1}\hat{x}_1 + \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau\right).$$

Зададимся моментом времени $t_2 = t_1 + \delta$, $\delta > 0$ и константой B, $|B| \leqslant \xi_0$, значения для которых определим позднее, и будем строить функцию $\xi(t)$ следующим образом.

$$\xi(t) = \begin{cases} \hat{\xi}(t), \quad t \in [0, t_1], \\ \hat{\xi}(t_1) + (t - t_1)\frac{B - \hat{\xi}(t_1)}{\delta}, \quad t \in (t_1, t_2), \\ B, \quad t \in [t_2, +\infty). \end{cases} \tag{3.13}$$

Построенное продолжение непрерывно и состоит из двух участков: линейного на интервале (t_1, t_2) длины δ и постоянного с константой B на всем оставшемся промежутке времени $[t_2, +\infty)$.

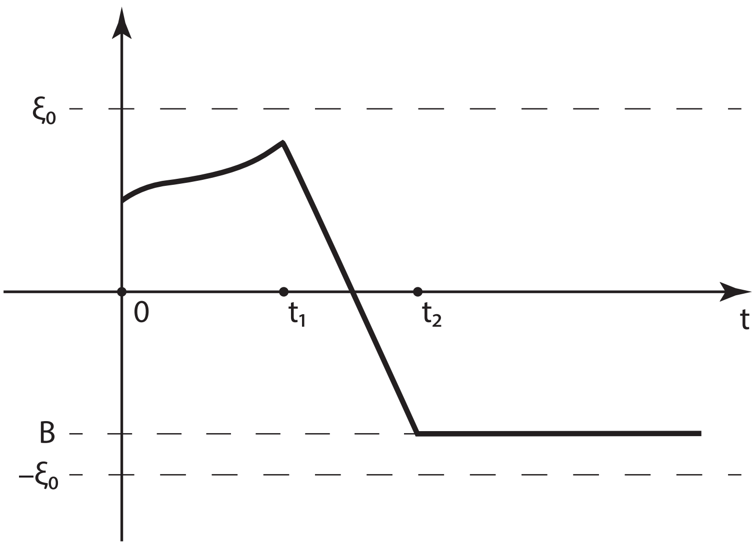

Рис. 3.1. График функции $\xi(t)$

Вновь обратимся к формуле Коши и распишем ее подробнее. При $t > t_2$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{at}\left(e^{-at_1}\hat{x}_1 + \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau\right) = \\
&= e^{at}\left(e^{-at_1}\hat{x}_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau + \int\limits_{t_2}^{t} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau\right) = \\
&= e^{at}\left(e^{-at_1}\hat{x}_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau + \int\limits_{t_2}^{t} e^{-a\tau}Bd\tau\right) = \\
&= e^{at}\left(e^{-at_1}\hat{x}_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau + \frac{B}{a}e^{-at_2}\right) - \frac{B}{a} = \\
&= e^{at}\left(e^{-at_1}\left(\hat{x}_1 + \frac{B}{a}e^{-a(t_2-t_1)}\right) + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau\right) - \frac{B}{a}
\end{aligned}
$$

Рассмотрим функцию

$$
F(B,\delta) = e^{-at_1}\left(\hat{x}_1 + \frac{B}{a}e^{-a\delta}\right) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau.
$$

Ясно, что она непрерывна по всем своим аргументам. Далее

$$
\begin{aligned}
F(B,\delta) &= e^{-at_1}\left(\hat{x}_1 + \frac{B}{a}e^{-a\delta}\right) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau = \\
&= e^{-at_1}\left(\hat{x}_1 + \frac{B}{a}\right) + e^{-at_1}\left(-\frac{B}{a} + \frac{B}{a}e^{-a\delta}\right) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим константы $B_+ = -a\hat{x}_1 + \varepsilon_1$ и $B_- = -a\hat{x}_1 - \varepsilon_1$ и выберем малое $\varepsilon_1 > 0$ так, что $|B_+| < \xi_0$ и $|B_-| < \xi_0$. Тогда

$$
F(B_\pm,\delta) = \mp\varepsilon_1\frac{e^{-at_1}}{a} + e^{-at_1}\left(-\frac{B_\pm}{a} + \frac{B_\pm}{a}e^{-a\delta}\right) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} e^{-a\tau}\xi(\tau)d\tau. \tag{3.14}
$$

Выбирая $\delta = \delta_1$ достаточно малым, можно добиться того, что сколь угодно малыми будут последние два слагаемых в (3.14). Но тогда $F(B_+,\delta_1) > 0$, а

$F(B_-, \delta_1) < 0$. В силу непрерывности функции $F(B, \delta)$ отсюда следует, что найдутся такие значения B^* и δ^*, что $F(B^*, \delta^*) = 0$.

Теперь нетрудно видеть, что при $t > t_2$

$$x(t) = e^{at} F(B^*, \delta^*) - \frac{B^*}{a} = -\frac{B^*}{a}$$

ограничено и удовлетворяет условиям теоремы (в частности, из ограниченности решения и условия $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$ вытекает, что $|x(t)| \leqslant \frac{\xi_0}{a}$), что и завершает доказательство.

Полученный результат показывает, что для решения задачи в реальном времени необходима дополнительная информация о системе.

Легко видеть, что аналогичная ситуация может иметь место и в векторном случае. Действительно, для этого достаточно рассмотреть систему (3.1) с матрицей A простой структуры. Тогда на каждом собственном ее подпространстве ситуация будет аналогична описанной выше одномерной.

3.1.3. Подходы к решению в реальном времени

Рассмотри различные дополнительные условия, позволяющие получить решение задачи в реальном времени.

А) Будущие значения $\xi(t)$. Один из подходов к решению задачи основан на результатах, полученных ранее в [63].

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка q с постоянными коэффициентами вида

$$\beta\left(\frac{d}{dt}\right) x(t) = \xi(t), \tag{3.15}$$

где $\beta(s) = \beta_1 + \beta_2 s + \beta_3 s^2 + \ldots + \beta_q s^{q-1} + s^q$ — полином, старший коэффициент которого равен единице. Будем предполагать, что это уравнение *антиустойчиво*, т. е. все корни его характеристического многочлена лежат в правой полуплоскости $\mathbb{C}_\mu = \{\lambda |\operatorname{Re}\lambda > \mu > 0\}$. В нормальной форме это уравнение примет вид

$$\dot{z} = \tilde{A}z + b_2\xi, \tag{3.16}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^q$, причем $x(t) = b_1 z(t)$,

$$b_1 = [1, 0, \ldots, 0]\,,\, b_2 = [0, 0, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^q\,,$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \ldots & -\beta_q \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

Будем полагать, что $x(t)$ лежит в классе

$$\Omega^{q+1} = \{x(t) : |x^{(i)}(t)| \leqslant x^i, \quad i = 0, \ldots q+1\}.$$

Предположим, что в момент времени t значение входного сигнала известно еще и на отрезке $[t; T]$, $\quad T = t + \Delta$, $\Delta = \mathrm{const} > 0$

Используем оценку сигнала $x(t)$ в виде функции

$$\tilde{x}(t) = -b_1 e^{-\tilde{A}\Delta} \int\limits_0^\Delta e^{\tilde{A}\tau} b_2 \tilde{\xi}(t + \Delta - \tau) d\tau\,. \tag{3.18}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 16. *[63] Пусть $x(t)$ – ограниченное решение дифференциального уравнения (3.15), а корни многочлена $\beta(s)$ лежат в $\mathbb{C}_\mu$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $\Delta \geqslant \ln\{\frac{C_x C}{\varepsilon}\}/\mu$, где $C_x = \max\limits_{i=0,\ldots,q+1} x^i$, а константа $C > 0$ зависит только от параметров уравнения (3.15), выполнено неравенство*

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leqslant \varepsilon\,. \tag{3.19}$$

Суть описанного подхода заключается в следующем. Мы предполагаем, что обладаем информацией о будущих значениях входного сигнала. Реализовать подобное предположение, можно, например, отказавшись от восстановления решения в реальном времени и допустив задержку величиной Δ. После этого замена переменной $T - t = s$ приводит нас к устойчивому (в новом, обратном времени) дифференциальному уравнению

$$\beta\left(-\frac{d}{ds}\right)x^*(s) = \xi^*(s), \tag{3.20}$$

где $x^*(s) = x(T-t)$, $\xi^*(s) = \xi(T-t)$, или в нормальной форме

$$\dot{z}^*(s) = -\tilde{A}z^*(s) - b_2\xi^*(s), \tag{3.21}$$

где $z^*(s) = z(T-t)$.

Действительно, корни многочлена $\beta(-s)$ суть корни многочлена $\beta(s)$, взятые с противоположным знаком. Отсюда и из условия антиустойчивости $\beta(s)$ вытекает устойчивость уравнения (3.20). Решая это устойчивое уравнение на промежутке $[0, \Delta]$ с нулевыми начальными условиями, мы получаем оценку сигнала $\phi(t)$. Из приведенных в теореме оценок следует, что при достаточно большой величине задержки Δ можно получить любую наперед заданную точность оценки решения $\phi(t)$ в момент времени t.

Основным недостатком изложенного подхода является то, что оценка производится с отставанием по времени на величину Δ. При этом точность оценивания ε и величина запаздывания Δ связаны неравенством $\Delta \geqslant \ln\{\frac{C_x C}{\varepsilon}\}/\mu$. Таким образом, в качестве дополнительной информации выступает значение функции $\xi(t)$ на промежутке времени $[t; t+\Delta]$.

Описанные выше рассуждения производились в предположении, что значение входного сигнала известно нам точно. На практике это условие может не выполняться. В этом случае справедлива следующая оценка [63].

Предположим, что известно лишь некоторое приближение $\tilde{\xi}(t)$ входного сигнала $\xi(t)$, причем оно удовлетворяет оценке

$$|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)| \leqslant \varepsilon_1 \,. \tag{3.22}$$

Тогда наблюдатель (3.18) принимает вид

$$\tilde{x}(t) = -b_1 e^{-\tilde{A}\Delta} \int\limits_0^{\Delta} e^{\tilde{A}\tau} b_2 \tilde{\xi}(t + \Delta - \tau) d\tau \,, \tag{3.23}$$

и для него справедлива

Теорема 17. *[63] Пусть $x(t)$ – ограниченное решение дифференциального уравнения ((3.15)). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $\Delta \geqslant \ln\{\frac{C_x C}{\varepsilon}\}/\mu$ для $\tilde{x}(t)$ из (3.23) выполнено неравенство*

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon + K\varepsilon_1 \,, \tag{3.24}$$

где $K = \mathrm{const} > 0$ и зависит только от параметров уравнения (3.15).

Таким образом, неточность измерения входа накладывает ограничения на возможную точность получения оценки искомого сигнала.

Б) Периодичность $\xi(t)$. Пусть известно, что функция $\xi(t)$ является периодической с периодом $T > 0$, т. е. $\xi(t + T) = \xi(t), \quad t \geqslant 0$. Тогда имеет место утверждение

Утверждение 2. *Пусть $\xi(t) \in C[0; \infty)$, $\xi(t + T) = \xi(t)$, $T > 0, t \geqslant 0$, $\xi(t)$ – ограничена. Тогда решение $\phi(t)$ задачи 1 также периодическое с периодом T.*

Доказательство. Как было показано выше, решение задачи 1 имеет вид

$$\phi(t) = -\int\limits_t^{+\infty} e^{-A(\tau - t)} b\xi(\tau) d\tau = -e^{At} \int\limits_t^{+\infty} e^{-A\tau} b\xi(\tau) d\tau$$

Тогда

$$\phi(t + T) = -e^{A(t+T)} \int\limits_{t+T}^{+\infty} e^{-A\tau} b\xi(\tau) d\tau = -e^{At} \int\limits_{t+T}^{+\infty} e^{-A(\tau - T)} b\xi(\tau) d\tau =$$

$$\{\eta = \tau - T\} = -e^{At} \int\limits_t^{+\infty} e^{-A\eta} b\xi(\eta) d\eta = \phi(t)$$

Утверждение доказано.

Таким образом, периодический вход $\xi(t)$ порождает периодическое (с тем же периодом) решение задачи 1.

Отметим, что верно и обратное.

Утверждение 3. *Пусть известно, что функция $\phi(t)$ является периодической с периодом T. Тогда и сигнал ξ является периодическим.*

Доказательство. Действительно, пусть $\phi(t)$ является периодической с периодом T. Тогда все ее производные также периодические с тем же периодом, а значит и любая их линейная комбинация будет T-периодической функцией. Отсюда и из вида уравнения (3.3) следует требуемое.

Для периодической функции $\phi(t)$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть известно, что функция $\phi(t)$ является периодической с периодом T. Тогда при $t > T$ задачу* (3.3) *можно решать в реальном времени, т. е. определять значение неизвестного ограниченного сигнала, основываясь лишь на имеющейся к моменту t информации.*

Доказательство. Справедливость данного утверждения непосредственно вытекает из пункта **A)**. Действительно, если мы знаем, что сигнал является периодическим, то по прошествии одного периода мы знаем его значения на всем промежутке времени $[0, +\infty)$, что, как было показано выше, позволяет получать решение в реальном времени. Тем не менее, непосредственный подход позволяет получить более удобные конструктивные алгоритмы.

Вновь обратимся к одномерному случаю и рассмотрим произвольное решение $x_1(t)$ уравнения $\dot{x} = ax(t) + \xi(t)$. Оно имеет вид $x_1(t) = C_1 e^{at} + \phi(t)$, где константа C_1 определяется начальными условиями (хотя и не обязана совпадать с ними). Для произвольного $t \geqslant T$ рассмотрим значения $x_1(t)$ и $x_1(t-T)$.

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{at} + \phi(t) \\ x_1(t-T) = C_1 e^{a(t-T)} + \phi(t) \end{cases} \Longrightarrow C_1 = -\frac{x_1(t-T) - x_1(t)}{e^{at}\left(1 - e^{-aT}\right)}$$

Отсюда получается искомая оценка

$$\phi(t) = x_1(t) - C_1 e^{at} = \frac{x_1(t-T) - e^{-aT} x_1(t)}{(1 - e^{-aT})}. \tag{3.25}$$

Утверждение доказано.

Недостатком предложенного подхода является то, что для определения значений искомого ограниченного решения $\phi(t)$ используются значения некоторого, вообще говоря, неограниченно экспоненциально возрастающего решения $x_1(t)$. Погрешности при его вычислении, неизбежно возникающие при численном решении дифференциальных уравнений, могут привести к погрешностям в оценке искомого сигнала. Действительно, пусть нам известно приближение $x_2(t)$ решения $x_1(t)$, причем $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \varepsilon$. Тогда разность между истинным значением ограниченного решения $\phi(t)$ и его оценкой $\phi_2(t)$, построенной с помощью сигнала $x_2(t)$, удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \phi_2(t)| &= \left| \frac{x_1(t-T) - e^{-aT} x_1(t)}{(1 - e^{-aT})} - \frac{x_2(t-T) - e^{-aT} x_2(t)}{(1 - e^{-aT})} \right| = \\ &= \left| \frac{(x_1(t-T) - x_2(t-T)) - e^{-aT} (x_1(t) - x_2(t))}{1 - e^{-aT}} \right| \leqslant \varepsilon \frac{1 + e^{-aT}}{|1 - e^{-aT}|}. \end{aligned}$$

На практике с ростом значений $x_1(t)$ будет расти и значение $\varepsilon(t)$, что приводит к неустойчивости описанной схемы к погрешностям вычисления.

Аналогично может быть рассмотрен и многомерный случай. Рассмотрим произвольное решение $x_1(t)$ уравнения (3.1) и запишем его значения в моменты времени t и $t - T$.

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{At} + \phi(t) \\ x_1(t-T) = C_1 e^{A(t-T)} + \phi(t) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad C_1 = -\left(x_1(t-T) - x_1(t)\right) e^{-At} \left(I - e^{-AT}\right)^{-1}.$$

Обратимость матрицы $\left(I - e^{-AT}\right)$ вытекает предположения об отсутствия у A собственных значений на мнимой оси. Тогда оценка для решения имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(t) = x_1(t) - C_1 e^{At} = x_1(t) + \left(x_1(t-T) - x_1(t)\right) \left(I - e^{-AT}\right)^{-1} = \\ = (x_1(t-T) - x_1(t) e^{-AT})(I - e^{-AT}). \end{aligned}$$

Можно предложить еще одну явную схему получения оценки $\phi(t)$. Пусть, как и ранее, $\phi(t)$ — решение задачи 1, и известно, что $\xi(t)$ периодическая с периодом T. Как было показано выше, в этом случае и $\phi(t)$ периодическая с тем же периодом. Обозначим целую часть дроби $\frac{t}{T}$ через $k = \lceil \frac{t}{T} \rceil$. Тогда моменту времени t соответствует момент $(t - kT) \in [0, T]$. Кроме того, используя явное выражение для $\phi(t)$, имеем

$$\phi(t) = \phi(t - kT) = -e^{a(t-kT)} \int\limits_{t-kT}^{+\infty} e^{-a\tau} \xi(\tau) d\tau.$$

В качеств оценки $\hat{\phi}(t)$ возьмем

$$\hat{\phi}(t) = -e^{a(t-kT)} \int\limits_{t-kT}^{t} e^{-a\tau} \xi(\tau) d\tau.$$

Тогда погрешность оценивания $e(t) = \hat{\phi}(t) - \phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$|e(t)| = \left| e^{a(t-kT)} \int\limits_{t-kT}^{t} e^{-a\tau} \xi(\tau) d\tau - e^{a(t-kT)} \int\limits_{t-kT}^{+\infty} e^{-a\tau} \xi(\tau) d\tau \right| =$$

$$= \left| e^{a(t-kT)} \int\limits_{t}^{+\infty} e^{-a\tau} \xi(\tau) d\tau \right| \leqslant \{ |\xi(t)| \leqslant \xi_0, \quad (t - kT) \leqslant T \} \leqslant$$

$$\leqslant e^{aT} \xi_0 \int\limits_{t}^{+\infty} e^{-a\tau} d\tau = \frac{e^{aT} \xi_0}{a} e^{-at},$$

т. е. погрешность оценивания убывает экспоненциально. Таким образом, предложенная схема дает лишь асимптотическую оценку для искомого решения, зато является более устойчивой к погрешностям вычисления.

3.2. Восстановление ограниченного решение неустойчивого функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа.

Обратимся теперь к системам функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с постоянными сосредоточенными запаздываниями. В данном параграфе основным инструментом, используемым для изучения ФДУ, станут методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, а не основанный на теории систем на кольцами алгебраический подход, а потому мы не будем ограничиваться рассмотрением одних лишь уравнений с соизмеримыми запаздываниями.

Итак, рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i) + f(t), \tag{3.26}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, A_i — постоянные известные квадратные матрицы размерности n, τ_i — постоянные запаздывания,
$f(t) \in \mathcal{L}_1^{loc}([t_0, +\infty))$, т. е. пространству функций, определенных на $[t_0, +\infty)$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, интегрируемых по Лебегу на любом компактном подмножестве $[t_0, +\infty)$, $f(t)$ ограничена: $|f(t)| \leqslant f_0$.

Через C обозначим пространство непрерывных функций, заданных на начальном множестве системы (3.26) и отображающих его в $\mathbb{R}^n$:

$$C \equiv C([-\tau_{max}, 0], \mathbb{R}^n).$$

Будем полагать, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = \tau_{max}$.

В дальнейшем нам будет удобно записывать данную систему в операторном виде

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x_t + f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3.27}$$

где $\mathcal{A}$ — соответствующий линейный разностный оператор, x_t — состояние системы к моменту времени t, т. е. элемент $C([t-\tau_{max}, t], \mathbb{R}^n)$. Начальные условия задаются соотношением $x_0 = \phi$, $\phi \in C$.

Наряду с уравнением (3.27) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x_t, \quad t \geqslant 0, \tag{3.28}$$

с начальными условиями $x_0 = \phi$, $\phi \in C$.

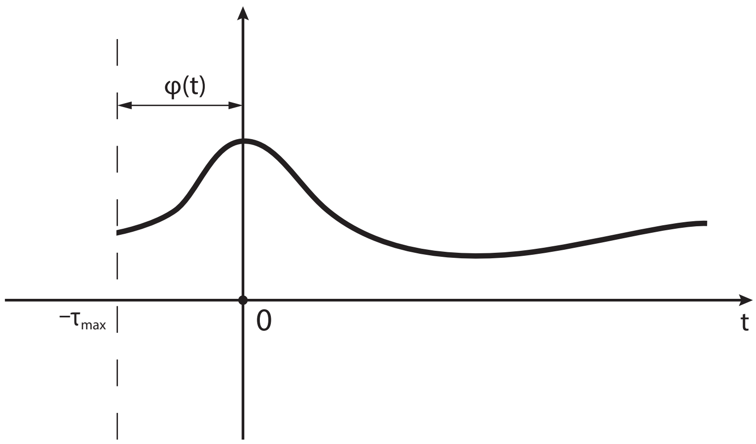

Рис. 3.2. Начальные данные для ФДУ

В силу бесконечномерного характера таких систем, ситуация здесь существенно усложняется по сравнению с конечномерным случаем обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренным ранее. Приведем несколько определений и утверждений, которые потребуются нам в дальнейшем. С их более подробным изложением и доказательством можно ознакомиться в книге [29].

Отметим, что приведенные далее рассуждения останутся справедливы и для систем более общей формы (*линейных автономных систем с распределенными запаздываниями*), в которых оператор $\mathcal{A}[\varphi]$ имеет вид

$$\mathcal{A}[\varphi] = \int\limits_{-\tau_{max}}^{0} [d\eta(\theta)]\, \varphi(\theta),$$

где $\eta(\theta)$ — $n \times n$ матрица, состоящая из элементов с ограниченной вариацией. Однако постановка задачи в такой степени общности в данной работе рассматриваться не будет, а потому мы ограничимся лишь изучением случая сосредоточенных запаздываний.

3.2.1. Некоторые факты о функционально-дифференциальных уравнениях запаздывающего типа

Утверждение 5. *([34]) Спектр линейного ФДУ запаздывающего типа содержит не более, чем конечное число точек в любой правой полуплоскости* $\{z : \operatorname{Re} z > b\}$, *и не имеет конечных точек накопления.*

Определение 5. *Если* $\phi \in C$ *— произвольная функция и* $x(\phi)$ *— единственное решение* (3.28) *с начальными значениями* $x_0 = \phi$, *то оператор сдвига* $T(t) : C \to C$ *определяется соотношением*

$$x_t(\phi) = T(t)\phi.$$

Утверждение 6. *([29])Семейство* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *есть полугруппа линейных преобразований, т. е.* $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ *для любых* $t_1, t_2 \geqslant 0$, *и* $T(0) = I$.

Оператор $T(t)$ *ограничен для каждого* $t \geqslant 0$ *и сильно непрерывен на* $[0, +\infty)$, *т. е.*

$$\lim_{\tau \to t} |T(t)\phi - T(\tau)\phi| = 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $\phi \in C$.

При $t \geqslant \tau_{max}$ *оператор* $T(t)$ *вполне непрерывен, т. е. непрерывен и отображает ограниченные множества в предкомпактные.*

Определение 6. *Если* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *является сильно непрерывной полугруппой линейных операторов на* $C[0, +\infty)$, *то инфинитезимальным производящим оператором (инфинитезимальным генератором) для* $T(t)$ *называется оператор* A, *определяемый выражением*

$$A\phi = \lim_{t \to 0+} \left\{ \frac{1}{t}[T(t)\phi - \phi] \right\},$$

если этот предел существует. При этом предел понимается в смысле сходимости по норме в C.

Утверждение 7. *([29])Для семейства* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, *определенного уравнением* (3.28), *существует инфинитезимальный производящий оператор* A, *задаваемый выражением*

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi}{dt}, & \theta \in [-\tau_{max}, 0) \\ \mathcal{A}, & \theta = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Его область определения $\mathcal{D}(A)$ плотна в C и для каждого $\phi \in \mathcal{D}(A)$

$$\frac{d}{dt}T(t)\phi = T(t)A\phi = AT(t)\phi.$$

Далее нам потребуется установить связь между свойствами, вообще говоря, неизвестного оператора $T(t)$ и известного оператора A. В случае $k = 0$, когда система (3.28) вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, $T(t) = e^{At}$. Оказывается, что в общем случае ситуация будет сходной.

Определение 7. *Обобщенным собственным подпространством линейного оператора B, действующего на пространстве W, соответствующим его собственному значению λ, называется наименьшее подпространство W, содержащее все элементы W, лежащие в ядре операторов $(\lambda I - B)^k$, $\quad k = 1, 2, \ldots$.*

Утверждение 8. *([29])Если оператор A определен формулой (3.29), то он обладает лишь точечным спектром $\sigma(A)$, причем λ принадлежит $\sigma(A)$ тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет характеристическому уравнению*

$$\det H(\lambda) = 0, \tag{3.30}$$

где

$$H(\lambda) = \lambda I - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{\lambda \tau_i}.$$

Корни уравнения (3.30) имеют ограниченные сверху вещественные части и для каждого λ из $\sigma(A)$ обобщенное собственное пространство $\mathcal{M}_\lambda(A)$ конечномерно. Наконец, имеется целое k (зависящее, вообще говоря, от λ), такое что $\mathcal{M}_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)^k$ и

$$C = \ker(A - \lambda I)^k \oplus \operatorname{Im}(A - \lambda I)^k.$$

Таким образом, как и в конечномерном случае, уравнение (3.28) обладает набором собственных значений (теперь, правда, бесконечным), каждому из которых соответствует собственное инвариантное конечномерное подпространство, причем эти подпространства образуют прямую сумму.

Далее, рассмотрим некоторое $\mathcal{M}_\lambda(A)$, предположим, что это d-мерное подпространство, выберем в нем базис $\{\varphi_1^\lambda, \dots, \varphi_d^\lambda\}$ и обозначим $\Phi_\lambda = (\varphi_1^\lambda, \dots, \varphi_d^\lambda)$. Тогда найдется единственная постоянная $d \times d$ матрица B_λ, для которой $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$.

Можно показать, что

$$[T(t)\Phi_\lambda](\theta) = \Phi_\lambda e^{B_\lambda(t+\theta)}, \quad \theta \in [-\tau_{max}, 0].$$

Таким образом, на для каждого собственного значения λ на соответствующем обобщенном собственном подпространстве уравнение (3.28) имеет ту же структуру, что и обыкновенное дифференциальное уравнение.

Теорема 18. *([29])Пусть Λ — конечное множество собственных значений $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ уравнения (3.28), $\Phi_\Lambda = \{\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_p}\}$, где Φ_{λ_i} — базис обобщенного собственного пространства для λ_i, $B_\Lambda = \mathrm{diag}(B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_p})$, где B_{λ_i} — матрица, определенная соотношением $A\Phi_{\lambda_i} = \Phi_{\lambda_i} B_{\lambda_i}$. Тогда λ_i есть единственное собственное значение B_{λ_i} и для любого вектора a той же размерности, что и Φ_Λ, решение $T(t)\Phi_\Lambda$ с начальным условием $\Phi_\Lambda a$ при $t = 0$ может быть определено на $\mathbb{R}$ соотношением*

$$T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a, \tag{3.31}$$

$$\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(\theta) e^{B_\Lambda \theta}, \quad \theta \in [-\tau_{max}, 0].$$

При этом в C существует подпространство Q_Λ, такое что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$ для всех $t \geqslant 0$ и

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

где $P_\Lambda = \{\phi \in C \mid \exists a : \quad \phi = \Phi_\Lambda a\}$.

Смысл данной теоремы заключается в том, что любое конечное подмножество собственных значений уравнения (3.28) определят некоторое инвариантное подпространство, на котором уравнение (3.28) ведет себя в сущности как система обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом возможно разложение пространства начальных значений C на два инвариантных подпространства, динамики на которых можно разделить. Сложившаяся ситуация близка к той, что возникает при приведении линейных операторов на конечномерных пространствах к жордановой нормальной форме. В том случае фазовое пространство системы также распадается в прямую сумму инвариантных подпространств, определяемых жордановыми клетками, рассматривать динамику системы на которых можно независимо.

Из утверждения 5 следует, что уравнение (3.28) может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих в правой комплексной полуплоскости. Как следует из приведенной теоремы, этим собственным значениям соответствует некоторое конечномерное подпространство P. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно предположить (и это предположение окажется верным), что разделение всего пространства на P и его дополнение позволит разграничить устойчивые и неустойчивые решения. Именно это разделение и станет нашим следующим шагом.

Теорема 19. *([29])Для всякого вещественного числа β обозначим $\Lambda = \Lambda(\beta) = \{\lambda \in \operatorname{spec}(A) : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \beta\}$ и разложим C по Λ, $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$. Тогда найдутся положительные константы K и γ, такие что*

$$||T(t)\phi^{P_\Lambda}|| \leqslant Ke^{(\beta-\gamma)t}||\phi^{P_\Lambda}||, \quad t \leqslant 0,$$

$$||T(t)\phi^{Q_\Lambda}|| \leqslant Ke^{(\beta-\gamma)t}||\phi^{Q_\Lambda}||, \quad t \geqslant 0.$$

Эта теорема позволяет выделить некоторое подмножество собственных значений, построить разбиение пространства C в соответствии с данным множеством и получить оценку скорости роста решений, относящихся к его дополнению.

Теорема 20. *([29])(Формула вариации постоянной) Решение системы (3.27) задается соотношением*

$$x_t = T(t)\phi + \int\limits_0^t T(t-s)X_0 f(s)ds, \tag{3.32}$$

где

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau_{max}, 0), \\ I, & \theta = 0. \end{cases}$$

Эта теорема дает формулу решения неоднородного уравнения (3.27). Легко видеть сходство полученной формулы с формулой Коши для линейных стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поведение системы (3.27) при согласованном с разбиением спектра разбиении фазового пространства описывается следующей теоремой.

Теорема 21. *([29])(Разложение формулы вариации постоянной) Пусть* $\Lambda = \{\lambda \in \operatorname{spec}(A) : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \beta\}$ *и* $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$. *Представим решение* x_t *в виде* $x_t = x_t^{P_\Lambda} + x_t^{Q_\Lambda}$, *где компоненты* $x_t^{P_\Lambda}$ *и* $x_t^{Q_\Lambda}$ *соответствуют подпространствам* P_Λ *и* Q_Λ. *Для них справедливы формулы*

$$x_t^{P_\Lambda} = T(t)\phi^{P_\Lambda} + \int\limits_0^t T(t-s)X_0^{P_\Lambda} f(s)ds, \tag{3.33}$$

$$x_t^{Q_\Lambda} = T(t)\phi^{Q_\Lambda} + \int\limits_0^t T(t-s)X_0^{Q_\Lambda} f(s)ds, \quad t \geqslant 0, \tag{3.34}$$

где $X_0^{P_\Lambda}$ *и* X_0^{Q} *однозначно определяются выбором* Λ.

Более того, для любого $\gamma > 0$ *найдется* $M > 0$, *такое что*

$$||T(t)\phi^{Q_\Lambda}|| \leqslant Me^{(\beta+\gamma)t}||\phi^{Q_\Lambda}||, \quad \phi^{Q_\Lambda} \in Q_\Lambda, \quad t \geqslant 0,$$

$$||T(t)x_0^{Q_\Lambda}|| \leqslant Me^{(\beta+\gamma)t}, \quad t \geqslant 0.$$

Эта теорема позволяет получить оценку решения неоднородного уравнения (3.27) на дополнительном подпространстве.

3.2.2. Существование и единственность ограниченного решения неустойчивого уравнения

Перейдем далее к основному результату данного параграфа.

Теорема 22. *Пусть в системе* (3.27) *функция* $f(t) \in \mathcal{L}_1^{loc}([t_0, +\infty))$ *и ограничена константой* f_0*, т. е.* $||f(t)|| \leqslant f_0$*, а собственные значения системы* (3.27) *не лежат на мнимой оси. Тогда у системы существует асимптотически единственное ограниченное решение.*

Доказательство. Обозначим через β максимум вещественных частей элементов спектра системы (3.27), лежащих в левой полуплоскости:

$$\beta = \max \{\operatorname{Re} \lambda | \lambda \in \operatorname{spec} A, \operatorname{Re} \lambda \leqslant 0\}.$$

В силу утверждения 5 этот максимум достигается, а из условий теоремы следует, что $\beta < 0$.

Далее обозначим $\Lambda = \Lambda(\beta + \varepsilon) = \{\lambda \in \operatorname{spec}(A) : \operatorname{Re} \lambda \geqslant \beta + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ — малое положительное число, такое что $\beta + \varepsilon < 0$. Таким образом, множество Λ будет состоять из точек спектра уравнения (3.27), лежащих в правой полуплоскости.

Из приведенных теорем непосредственно следует, что пространство C представимо в виде прямой суммы $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$. Подпространство P_Λ, соответствующее неустойчивой части спектра, конечномерно и на нем система (3.27) ведет себя так же, как и обыкновенное дифференциальное уравнение (теорема 18).

Рассмотри теперь дополнительное пространство Q_Λ. Обратимся к формуле (3.34):

$$x_t^{Q_\Lambda} = T(t)\phi^{Q_\Lambda} + \int\limits_0^t T(t-s) X_0^{Q_\Lambda} f(s) ds.$$

Отсюда, используя оценки из теоремы 21, получаем

$$||x_t^{Q_\Lambda}|| = \left\|T(t)\phi^{Q_\Lambda} + \int\limits_0^t T(t-s)X_0^{Q_\Lambda} f(s)ds\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\right\| + \left\|\int\limits_0^t T(t-s)X_0^{Q_\Lambda} f(s)ds\right\| \leqslant$$
$$\leqslant Me^{(\beta+\varepsilon)t}\left\|\phi^{Q_\Lambda}\right\| + f_0 M\int\limits_0^t e^{(\beta+\varepsilon)t} \leqslant \mathrm{const}\,.$$

При этом легко видеть, что первая компонента оценки, определяемая начальными значениями и не зависящая от правой части f, стремится к нулю экспоненциально, тогда как вторая компонента, наоборот, не зависящая от начальных значений, а определяемая исключительно f, дает ограниченную величину. Отсюда можно заключить, что все решения с начальными данными из Q_Λ ограничены.

Далее, рассмотрим два решения x_t^1 и x_t^2 с начальными данными $\phi_1, \phi_2 \in Q_\Lambda$. Согласно формуле (3.34) их разность удовлетворяет оценке

$$||x_t^1 - x_t^2|| = ||T(t)(\phi_1 - \phi_2)|| \leqslant Me^{(\beta+\varepsilon)t}\,||\phi_1 - \phi_2||$$

и, следовательно, стремится к нулю экспоненциально.

Таким образом, все решения с начальными данными из Q_Λ экспоненциально сходятся к одному и тому же ограниченному решению, определяемому лишь правой частью f.

Теперь докажем существование ограниченного решения. Вновь рассмотрим разбиение $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$. Тогда решение x_t распадется в сумму двух компонент с начальными условиями ϕ^{P_Λ} и ϕ^{P_Λ}. На подпространстве P_Λ, как было отмечено ранее в комментарии к теореме 18, система (3.27) ведет себя подобно системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а соответствующее решение описывается стандартной формулой Коши для ОДУ. Существование и единственность ограниченного решения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений были показаны нами ранее. Следовательно, существует единственная начальная функция из P_Λ, порождающая ограниченное решение. Далее, любая начальная функция из Q_Λ даст, согласно теореме 20, ограниченное решение. Отсюда непосредственно вытекает существование ограниченного решения.

Перейдем теперь к доказательству асимптотической единственности. Пусть две различные начальные функции ϕ_1 и ϕ_2 порождают ограниченные решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно. Тогда их разность $\delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\dot{\delta}(t) = \mathcal{A}\delta_t, \quad t \geqslant 0,$$

с начальными условиями $\delta_0 = \phi_2 - \phi_1$. Вновь рассмотрим разложение $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$. Если $\delta_0^P \neq 0$, то соответствующая компонента решения будет неограничена, что противоречит условию ограниченности $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Следовательно, $\delta_0^{P_\Lambda} = 0$. Компонента решения, соответствующая начальному условию $\delta_0^{Q_\Lambda}$, будет экспоненциально стремиться к нулю согласно теореме 19, что и завершает доказательство. $\square$

Отметим, что полученный результат близок к утверждению теоремы 13. Отличие заключается, во-первых, в несколько ослабленных требованиях к функции $f(t)$ и, во-вторых, в более конструктивном характере доказательства, пригодном для получения практического алгоритма. Действительно, приведенное доказательство показывает, что задача восстановления ограниченного решения неустойчивого дифференциального уравнения с запаздыванием может решаться следующим образом. Необходимо выделить инвариантное подпространство, отвечающее неустойчивой части спектра и применить к нему методы поиска, разработанные для обыкновенных дифференциальных уравнений. На оставшейся части пространства уравнение будет устойчиво, что позволяет рассмотреть произвольное решение, которое необходимо будет стремиться к искомому.

Таким образом, результаты, полученные для задачи восстановления ограниченного решения в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, остаются справедливы и в случае уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа.

Замечание. Возникает естественное желание распространить полученные результаты и на другие типы уравнений с отклоняющимся аргументом. Как было упомянуто ранее, для линейных стационарных уравнений запаздывающего типа с распределенными запаздываниями подобное обобщение не составляет труда. Вместе с тем, уже в случае уравнений нейтрального типа мы сталкиваемся с существенными трудностями. Обусловлены они тем обстоятельством, что утверждение 5 для уравнений нейтрального типа не имеет места. У них в вертикальной полосе конечной ширины на комплексной плоскости может существовать бесконечное число собственных значений [34]. Таким образом, мы не можем гарантировать ни конечномерности неустойчивого подпространства, ни экспоненциальной устойчивости на устойчивом подпространстве.

3.3. Восстановление ограниченного решение неустойчивого разностного уравнения

Обратимся теперь к следующей задаче: по известному сигналу $\xi(t)$ восстановить решение $y(t)$ линейного разностного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(t-k\tau) = \xi(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{3.35}$$

где $\tau > 0$, a_k — известные постоянные величины, $a_0 \neq 0$. При этом нас может интересовать не само решение, а лишь его асимптотическая оценка при стремлении времени к бесконечности. Основным отличием данной задачи от классических разностных уравнений с дискретным временем является то, что уравнение и участвующие в нем функции определены для всех неотрицательных значений времени, а не только в дискретные (например, целочисленные) моменты. Это обстоятельство обуславливает бесконечномерность рассматриваемой задачи: решение определяется начальными значениям функции $y(t)$ на всем интервале времени $[-n\tau, 0)$.

Из априорной информации о системе зачастую следует, что искомое решение должно быть ограничено, что приводит нас к задаче поиска ограниченного решения уравнения (3.35). Далее будут рассмотрены некоторые свойства предложенной задачи и возможные подходы к ее решению.

3.3.1. Свойства ограниченного решения

В первую очередь перепишем уравнение в нормальной форме. Не умаляя общности, будем полагать $a_0 = 1$ и $\tau = 1$. Этого всегда можно добиться нормировкой решения и нормировкой времени.

Действительно, вновь обратимся уравнению (3.35).

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(t - k\tau) = \xi(t).$$

Поскольку, согласно нашему предположению, $a_0 \neq 0$, можно поделить обе части равенства на a_0. В результате получим

$$y(t - \tau_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} y(t - k\tau) = \frac{\xi(t)}{a_0}.$$

Обозначим $a'_0 = 1$; $a'_k = \frac{a_k}{a_0}, \quad k = 1, \dots n$; и $\xi'(t) = \frac{\xi(t)}{a_0}$. Уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a'_k y(t - k\tau) = \xi'(t),$$

причем старший коэффициент, как и требовалось, равен единице. Далее займемся нормировкой времени. Прежде всего сделаем замену $t = \tau t_1$. Тогда уравнение (3.35) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a'_k y((t_1 - k)\tau) = \xi'(t_1\tau).$$

Перейдем к новым функциям $y'(s) = y(\tau s)$ и $\xi''(s) = \xi(\tau s)$. Тогда наше уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a'_k y'(t_1 - k) = \xi''(t_1),$$

где все отклонения аргумента суть целые числа. Таким образом, уравнение (3.35) действительно приводимо к нужному виду

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(t-k) = \xi(t).$$

Перейдем от скалярного сигнала $y(t)$ к векторному сигналу $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе первого порядка

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t-1) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) = x_n(t-1) \\ x_n(t) = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_{n-k+1}(t-1) + \xi(t). \end{cases}$$

В дальнейшем эту систему мы будем рассматривать в матричном виде

$$x(t) = Ax(t-1) + b\xi(t), \tag{3.36}$$

где матрица A — сопровождающая для характеристического многочлена уравнения (3.35), $b = (0, \dots, 0, 1)^T$. Отметим, что начальные данные также подвергнутся очевидным преобразованиям и теперь будут задаваться на множестве $[-1; 0)$.

Далее, легко видеть, что система (3.36) распадается в континуальную совокупность независимых разностных уравнений с дискретным временем, параметризованных точками $\theta \in [-1; 0)$, каждое из которых описывает динамику системы в моменты $\{\theta, \theta+1, \theta+2\dots\}$. А именно, рассмотрим совокупность систем

$$\begin{aligned} \Sigma_\theta : x_\theta(\theta + n) &= Ax_\theta(\theta+n-1) + b\xi(\theta+n), \quad n = 1, 2, \dots \\ x_\theta(\theta) &= x^0_\theta. \end{aligned}$$

Здесь x_θ — фазовый вектор соответствующей системы, а x_θ^0 — начальное значение. Ясно, что для различных значений θ соответствующие им системы Σ_θ не зависят друг от друга, а значит, могут рассматриваться независимо. Решение системы (3.36) получается в результате "склеивания" решений различный систем для всех значений параметра θ.

Это обстоятельство позволит нам в дальнейшем исследовать лишь уравнения с дискретным временем (т.е. $t \in \mathbb{Z}, t \geqslant 0$).

Теорема 23. *Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$, а матрица A антиустойчива, т. е. ее спектр лежит вне единичного круга. Тогда система (3.36) имеет единственное ограниченное решение.*

Доказательство. Для решения системы (3.36) справедлива формула Коши [74]

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} b\xi(k+1) \tag{3.37}$$

Поскольку спектр матрицы A лежит вне единичного круга, она обратима. Далее, пусть $\rho(A^{-1}) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \mathrm{spec}(A^{-1})\}$ — спектральный радиус матрицы A^{-1}. Выберем начальное значение $x_0 = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{-k-1} b\xi(k+1)$. В силу предположения о расположении спектра матрицы A спектральный радиус $\rho(A^{-1}) < 1$ и этот ряд сходится, а соответствующее решение

$$\phi(t) = -\sum_{k=t}^{\infty} A^{t-k-1} b\xi(k+1) \tag{3.38}$$

удовлетворяет оценке

$$|\phi(t)| \leqslant c_0 \sum_{k=1}^{\infty} r^k b_0 \xi_0 = \frac{c_0 \xi_0 b_0 r}{1-r},$$

где $b_0 = \max\{|b_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $\rho(A^{-1}) < r < 1$, а c_0 — некоторая положительная константа, и, следовательно, ограничено.

Далее, пусть нашлось два ограниченных решения $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ с различными начальными условиями x_1 и x_2 соответственно. Тогда их разность ϕ_3 удовлетворяет однородному уравнению $\phi_3(t) = A^t(x_1 - x_2)$ и, в силу антиустойчивости матрицы A неограничена при $t \to +\infty$, что приводит нас к противоречию, завершающему доказательство теоремы.

Пусть теперь спектр матрицы A лишь не содержит точек на единичной окружности. Тогда фазовое пространство системы распадается в прямую сумму двух инвариантных подпространств, соответствующих устойчивой и неустойчивой частям спектра. На неустойчивом подпространстве, как было показано, ограниченное решение единственно, тогда как на устойчивом все решения стремятся друг к другу асимптотически, что легко видеть из формулы Коши (3.37). Таким образом, система (3.36) имеет асимптотически единственное ограниченное решение.

3.3.2. Поиск ограниченного решения в реальном времени

Для определения начальных данных, порождающих ограниченное решение для неустойчивой системы (3.36), как видно из доказательства Теоремы 23, необходимо знание значений функции $\xi(t)$ на всем временном интервале $[0, +\infty)$. Рассуждения, аналогичные доказательству Теоремы 15 показывают, что преодолеть это ограничение без привлечения дополнительной информации невозможно. Вместе с тем, в реальных задачах зачастую известны значения сигнала ξ лишь до текущего момента t.

Можно предложить следующие подходы к решению задачи поиска ограниченного решения в реальном времени. При этом мы ограничимся случаем антиустойчивой матрицы A, так как для асимптотического восстановления решения на устойчивом подпространстве достаточно рассмотреть решение с произвольными начальными данными из этого подпространства.

А) Периодичность входного сигнала Предположим, что сигнал $\xi(t)$ является T-периодическим, т.е. $\xi(t+T) = \xi(t), \quad T \in \mathbb{N}$.

Утверждение 9. *Если сигнал $\xi(t)$ является T-периодическим, то и искомое решение $\phi(t)$ является T-периодическим.*

Доказательство. Пусть выполнены условия утверждения. Тогда формула (3.38) для ограниченного решения может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -\sum_{k=t}^{\infty} A^{t-k-1} b\xi(k+1) = -\sum_{l=0}^{\infty} A^{-lT}\left(\sum_{k=t}^{t+T-1} A^{t-k-1} b\xi(k+1)\right) = \\ &= -\sum_{l=0}^{\infty} A^{-lT} S(t) = -(I - A^{-T})^{-1} S(t),\end{aligned}$$

где

$$S(t) = \sum_{k=t}^{t+T-1} A^{t-k-1} b\xi(k+1).$$

Как и ранее, сходимость полученного ряда обеспечивается антиустойчивостью матрицы A. Далее,

$$\begin{aligned}S(t+T) &= \sum_{k=t+T}^{t+T-1+T} A^{t-k-1} b\xi(k+1) = \sum_{k=t}^{t+T-1} A^{t+T-k-1-T} b\xi(k+T+1) = \\ &= \sum_{k=t}^{t+T-1} A^{t-k-1} b\xi(k+1) = S(t).\end{aligned}$$

Значит, $S(t)$ является T-периодической функцией, откуда непосредственно следует и то, что $\phi(t)$ является T-периодической функцией. Утверждение доказано.

Приведенные формулы подсказывают алгоритм поиска искомого сигнала $\phi(t)$. Для этого вначале необходимо вычислить значения функции $S(t)$ на всем периоде, после чего применить к ней оператор $(I - A^{-T})^{-1}$.

Таким образом, информация о периодичности ограниченного решения позволяет восстановить его точно.

Б) Будущие значения входного сигнала Пусть к моменту времени t нам доступны значения сигнала ξ вплоть до $t+T-1$, $\quad T \in \mathbb{N}$. Тогда в качестве оценки ограниченного решения можно взять $\hat{\phi}(t) = -\sum\limits_{k=t}^{t+T-1} A^{t-k-1} b\xi(k+1)$, а погрешность $|\phi(t) - \hat{\phi}(t)|$ удовлетворяет оценке

$$|\phi(t) - \hat{\phi}(t)| = \left|\sum_{k=t+T}^{+\infty} A^{t-k-1} b\xi(k+1)\right| \leqslant r^{T-1}\frac{c_0}{1-r},$$

где c_0 — некоторая положительная константа, а $\rho(A^{-1}) < r < 1$.

Таким образом, выбирая T достаточно большим, можно добиться любой наперед заданной точности оценки для ограниченного решения ϕ в момент t.

Замечание. При этом интересно отметить следующее обстоятельство. Все три рассматриваемые задачи восстановления ограниченного решения (для обыкновенного дифференциального уравнения, разностного уравнения в непрерывном времени и функционально- дифференциального уравнения), обладая несомненным сходством, образуют иерархию по сложности рассматриваемых объектов. Так, наиболее простой в этом отношении является задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Она является полностью конечномерной, что позволяет получить наиболее сильные результаты. Далее следует рассматриваемая в данном параграфе задача для разностного уравнения в непрерывном времени. Она является формально бесконечномерной, поскольку пространство состояния системы представляет собой пространство непрерывных на сегменте функций, однако же распадается в совокупность независимых конечномерных задач. Наконец, наиболее сложной является задача для функционально-дифференциального уравнения. Она существенно бесконечномерна. Тем не менее, как было показано ранее, фазовое пространство системы удается разложить в прямую сумму конечномерного и бесконечномерного подпространств, после чего применить к ней разработанные ранее методы. Возможность подобной декомпозиции обусловливается тем, что мы ограничиваем свое рассмотрение лишь функционально-дифференциальными уравнениями с соизмеримыми запаздываниями запаздывающего типа. Уже для уравнений нейтрального типа на нашем пути встретились бы существенные сложности.

Таким образом, интерес представляет изучение рассмотренной задачи для более сложных классов систем, в том числе описываемых уравнениями с частными производными.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены новые достаточные условия обратимости для систем ОДУ и ФДУ. Эти условия являются практически мотивированными и в некоторых случая менее ограничительными, нежели классические.

2. Для систем с соизмеримыми запаздываниями получена каноническая форма с выделением нулевой динамики. Приведены условия приводимости к указанной форме и алгоритм приведения.

3. Для различных классов систем с соизмеримыми запаздываниями (квадратные, гипервыходные, нестрого физически реализуемые, систем с неустойчивой нулевой динамикой) получены алгоритмы обращения и условия обратимости.

   Предложенные алгоритмы обобщают ранее разработанные методы обращения систем, основанные на разрывной обратной связи, на случай систем с запаздыванием. По сравнению с имеющимися методами удалось значительно расширить класс обратимых систем.

4. В качестве технического инструмента для решения задачи обращения были получены методы восстановления ограниченного решения неустойчивых обыкновенных дифференциальных, функционально-дифференциальных и разностных уравнений.

Резюмируя, можно сказать, что в работе удалось обобщить существовавшие ранее алгоритмы обращения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на случай уравнений функционально-дифференциальных, преодолев возникающие при этом технические сложности, обусловленные спецификой систем с запаздыванием.

Работа носит в основном теоретический характер. Развитые в ней методы, использующие сочетание аналитических и алгебраических подходов, могут быть использованы в дальнейшем для исследования более широких классов систем. В частности, хотя основное внимание в работе уделялось системам с соизмеримыми запаздываниями, можно надеяться на дальнейшее плодотворное продолжение исследований в направлении систем с несоизмеримыми запаздываниями.

Другим возможным направлением для продолжения работы является обращение распределенных систем. Развитие в эту сторону потребует широкого применения инструментов функционального анализа и теории операторов.

Автор выражает благодарность коллективу кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы.

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю профессору Александру Владимировичу Ильину за постановку задачи и внимательное руководство процессом ее исследования.

Список литературы

1. *Колмановский В., Носов В.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
2. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics. — Boston: Academic Press, 1993.
3. *Villasana M., Radunskaya A.* A delay differential equation model for tumor growth // *Journal of Mathematical Biology.* — 2003. — Vol. 47, no. 3. — P. 270 – 294.
4. *Roussel M. R.* The Use of Delay Differential Equations in Chemical Kinetics // *The Journal of Physical Chemistry.* — 1996. — Vol. 100, no. 20. — P. 8323–8330.
5. *Bodnar M., Forys U., Poleszczuk J.* Analysis of biochemical reactions models with delays // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2011. — Vol. 376, no. 1. — P. 74 – 83.
6. *Krawiec A., Szydlowski M.* The Kaldor-Kalecki business cycle model // *Annals of Operations Research.* — 1999. — Vol. 89, no. 0. — P. 89–100.
7. *Matsumoto A., Szidarovszky F.* Delay Differential Nonlinear Economic Models // Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences: Essays in Honour of John Barkley Rosser Jr, Ed. by G. I. Bischi, C. Chiarella, L. Gardini. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 195–214.
8. *Tanwani A., Dominguez-Garcia A. D., Liberzon D.* An Inversion-Based Approach to Fault Detection and Isolation in Switching Electrical Networks // *IEEE Transactions on Control Systems Technology.* — 2011. — Vol. 19, no. 5. — P. 1059–1074.
9. *Kim E., Yang I., Lee D.* Time-Delay Robust Nonlinear Dynamic Inversion for Chaos Synchronization with Application to Secure Communications // *Mathematical Problems in Engineering.* — 2015. — Vol. 2015. — P. 9.
10. *Sun Z., Tsao T.-C.* Adaptive tracking control by system inversion // Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251). —

Vol. 1. — 1999. — P. 29–33 vol.1.

11. *Conte G., Perdon A. M., Moog C. H.* Inversion and Tracking Problems for Time Delay Linear Systems // Applications of Time Delay Systems, Ed. by J. Chiasson, J. Loiseau. — Springer Berlin Heidelberg, 2007. — P. 267–284.
12. *Kader Z., Zheng G., Barbot J.-P.* Left inversion of nonlinear time delay system // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. — Los Angeles, California, USA: 2014. — December 15-17. — P. 469–474.
13. *Zhu F.* State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers // *Journal of Process Control.* — 2012. — no. 22. — P. 296–302.
14. *Xiong Y., Saif M.* Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design // *Automatica.* — 2003. — Vol. 39. — P. 1389–1398.
15. *Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В.* О задаче поиска ограниченного решения неустойчивого дифференциального уравнения // *Дифференциальные уравнения.* — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 111–116.
16. *Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В.* Достаточные условия обратимости линейных стационарных систем // *Доклады Академии наук.* — 2016. — Т. 466, № 5. — С. 533–535.
17. *Атамась Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В.* Обращение векторных систем с запаздыванием // *Дифференциальные уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1363–1369.
18. *Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В.* Обращение векторных систем с неустойчивой нулевой динамикой // *Доклады Академии наук.* — 2017. — Т. 473, № 4. — С. 407–410.
19. *Атамась Е. И.* О восстановлении ограниченного решения линейного функционального уравнения // *Дифференциальные уравнения.* — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1543–1545.
20. *Атамась Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В.* Задачи обращения и наблюдения для векторных систем с запаздыванием // XII Всероссийское совещание

по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16–19 июня 2014 г. Труды. [Электронный ресурс]. — ИПУ РАН Москва, 2014. — С. 1252–1259.

21. *Атамасъ Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В.* Обращение векторных линейных систем с запаздыванием нулевого относительного порядка // Труды X Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'15. Москва, 26-29 января 2015 г. — М.: 2015. — С. 594–601.

22. *Ильин А. В., Атамасъ Е. И.* О решении задачи обращения динамических систем с запаздыванием и возникающих при этом функциональных уравнений // Ломоносовские чтения: научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 18-27 апреля 2016г.: Тезисы докладов. — Издателький отдел факультета ВМК МГУ, Макс Пресс Москва, 2016. — С. 63.

23. *Атамасъ Е. И.* Об условиях приводимости систем с запаздыванием к канонической форме // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.). — МАКС Пресс Москва, 2017. — С. 50.

24. *Атамасъ Е. И.* Об обращении векторных систем с запаздыванием произвольного относительного порядка // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 17-26 апреля 2017 г. Тезисы докладов. — МАКС Пресс Москва, 2017. — С. 93.

25. *Атамасъ Е. И.* Восстановление ограниченных решений линейных разностных уравнений // Ломоносов-2017: XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. Секция "Вычислительная математика и кибернетика". — Макс-Пресс Москва, 2017. — С. 29.

26. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Гостехиздат, 1951.

27. *Bellman R., Cooke K. L.* Differential difference equations. — New York: Academic Press, 1963.

28. *Эльсгольц Л., Норкин С.* Ведение в теорию дифференциальных уравнений

с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.

29. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. — New York: Springer-Vergal, 1977.
30. Delay Differential Equations and Applications / Ed. by O. Arino, M. Hbid, E. Ait Dads. — Springer Netherlands, 2006.
31. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. — Dordrecht: Kluwer Academy, 1999.
32. *Gu K., Kharitonov V., Chen J.* Stability of Time-Delay Systems. — Birkhauser Boston, 2003.
33. Topics in Time Delay Systems. Analysis, Algorithms and Control / Ed. by J. Loiseau, W. Michiels, S.-I. Niculescu, R. Siphani. — Springer-Vergal, 2009.
34. *Michiels W., Niculescu S.-I.* Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. — SIAM, 2007.
35. *Zhong Q.-C.* Robust Control of Time-delay Systems. — Springer-Vergal, 2006.
36. *Richard J.-P.* Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // *Automatica.* — 2003. — Vol. 39. — P. 1667–1694.
37. *Willems J.* In control, almost from the beginning until the day after tomorrow // *European Journal of Control.* — 2007. — Vol. 13, no. 1. — P. 71–81.
38. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: URSS, 2010.
39. *Sontag E.* Linear systems over commutative rings: a (partial) updated survey // Control science and technology for the progress of society, Vol. 1 (Kyoto, 1981). — Laxenburg: IFAC, 1982. — P. 325–330.
40. *Kamen E. W.* Linear Systems Over Rings: From R. E. Kalman to the Present // Mathematical System Theory: The Influence of R. E. Kalman, Ed. by A. C. Antoulas. — Springer Berlin Heidelberg, 1991. — P. 311–324.
41. *Sontag E.* On linear systems and noncommutative rings // *Math. Systems Theory.* — 1975. — Vol. 9, no. 4. — P. 327–344.
42. *Kamen E.* Lectures on algebraic system theory: Linear systems over rings. NASA

Contractor Report 3016. — 1978.

43. *Brewer J., Bunce J., Van Vleck F.* Linear Systems over Commutative Rings. — New York: Marcel Dekker, 1986.

44. *Hermida-Alonso J.* On linear algebra over commutative rings / Ed. by M. Hazewinkel. — North-Holland, 2003. — Vol. 3 of *Handbook of Algebra.* — P. 3 – 61.

45. *Conte G., Perdon A. M.* An algebraic notion of zeros for systems over rings // Mathematical Theory of Networks and Systems: Proceedings of the MTNS-83 International Symposium Beer Sheva, Israel, June 20–24, 1983, Ed. by P. A. Fuhrmann. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1984. — P. 166–182.

46. *Conte G., Perdon A.* Systems over rings: Geometric theory and applications // *Annual Reviews in Control.* — 2000. — Vol. 24. — P. 113 – 124.

47. *Conte G., Perdon A. M.* Invertibility and inversion for systems over rings and applications to delay differential systems // Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on. — Vol. 3. — 2000. — P. 2817–2822 vol.3.

48. *Jezek J.* Rings of skew polynomials in algebraical approach to control theory // *Kybernetika.* — 1996. — Vol. 32, no 1. — P. 63–80.

49. *Xia X., Marquez L. A., Zagalak P., Moog C. H.* Analysis of nonlinear time-delay systems using modules over non-commutative rings // *Automatica.* — 2002. — Vol. 38, no. 9. — P. 1549 – 1555.

50. *Brockett R.* The invertability of dynamic systems with application to control: Ph. D. thesis / Case Institute of Technology. — Cleveland, Ohio, 1963.

51. *Brockett R.* Poles, zeros and feedback: state-space representations // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1965. — no. 10. — P. 129–135.

52. *Brockett R., Mesarovic M.* The reproducibility of multivariable control systems // *J. Math. Anal. Appl.* — 1965. — no. 11. — P. 548–563.

53. *Sain M., Massey J.* Invertibility of linear time-invariant dynamical systems //

IEEE Trans. Automat. Contr. — 1969. — Vol. 14, no. 2. — P. 141–149.

54. *Silverman L.* Inversion of multivariable linear systems // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1969. — Vol. 14, no. 3. — P. 270–276.
55. *Moylan P.* Stable inversion of linear systems // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1977. — Vol. 22, no. 1. — P. 74–78.
56. *Corless M., Tu J.* State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems // *Automatica.* — 1998. — Vol. 34, no. 6. — P. 757–764.
57. *Ha Q., Trinh H.* State and input estimation for a class of nonlinear systems // *Automatica.* — 2004. — Vol. 40. — P. 1779–1785.
58. *Lu H., Di Loreto M.* On Stable Inversion for Linear Systems // Preprints of the 18 IFAC World Congress. — Milano, Italy: 2011. — August 29 - September 2. — P. 6651–6656.
59. *Datta K.* Invertibility of Linear Systems Described by Defferential-Difference Equations // *Linear Algebra and Its Applications.* — 1991. — no. 151. — P. 57–83.
60. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
61. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О моделировании управления в динамической системе // *Известия АН СССР, Техническая Кибернетика.* — 1983. — Т. 269, № 2. — С. 51–60.
62. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О динамическом решении операторных уравнений // *ДАН.* — 1983. — Т. 269, № 3. — С. 552–556.
63. *Ильин А. В.* Робастное обращение динамических систем: Докторская диссертация / МГУ имени М.В. Ломоносова. — Москва, 2009.
64. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Обращение линейных динамических систем с запаздыванием // *Дифференциальные уравнения.* — 2012. — Т. 48, № 99. — С. 1–9.
65. *Краев А. В.* Необходимые условия обратимости линейных дискретных динамических систем // *Дифференциальные уравнения.* — 2011. — Т. 47, № 4. —

С. 592–594.

66. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Об уравнения и свойствах нулевой динамики линейных управляемых стационарных систем // *Дифференциальные уравнения.* — 2006. — Т. 42, № 12. — С. 1626–1637.

67. *Lee E. B., Olbrot A.* Observability and related structural results for linear hereditary systems // *International Journal of Control.* — 1981. — Vol. 34, no. 6. — P. 1061–1078.

68. *Роговский А. И., Краев А. В., Фомичёв В. В.* О приведении векторной системы к виду с относительным порядком // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика.* — 2015. — № 3. — С. 20а–26.

69. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.

70. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Методы робастного обращения динамических систем. — М.: Физматлит, 2009. — С. 224.

71. *Уткин В. Н.* Скользящие режимы в задачах стабилизации и управления. — М.: Наука, 1981. — С. 142.

72. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 1986. — Jun. — Vol. 31, no. 6. — P. 543–550.

73. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — С. 536.

74. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. — Springer New York, 2005. — P. 539.