МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Атамась Евгений Иванович

Алгоритмы обращения динамических систем с запаздыванием

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Ильин Александр Владимирович,** доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета Вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова»
Официальные оппоненты:	**Асеев Сергей Миронович,** доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом Дифференциальных уравнений ФГБУН Математического института им. В.А. Стеклова РАН
	Бекларян Лева Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Динамических моделей экономики и оптимизации ФГБУН Центрального экономико-математического института РАН
	Крищенко Александр Петрович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой Математического моделирования факультета Фундаментальных наук ФГБОУ ВО «МГТУ имени Н.Э. Баумана (НИУ)»

Защита диссертации состоится «28» ноября 2018 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета *МГУ.01.09* при *МГУ имени М.В. Ломоносова* по адресу: *119991, Москва, Ленинские горы, д.1, строение 52.*

E-mail: ilgova@cs.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27.) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:
http://istina.msu.ru/dissertations/145135641/

Автореферат разослан «_____» _______________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор *Захаров Е. В.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

В окружающем нас мире существует множество систем, чья динамика зависит не только от состояния системы в текущий момент, но и от состояния в предшествующие моменты времени — предыстории. Эта зависимость может быть обусловлена как переносом (вещества, информации, энергии) между различными взаимосвязанными частями системы, так и отложенным эффектом от происходящих в системе изменений. Многие системы, обладающие подобными свойствами, описываются с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Различные термины, употребляемые для обозначения таких уравнений (функционально-дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, уравнения с запаздыванием, уравнения с гистерезисом и т. д.), отражают эволюцию в посвященных им исследованиях, имеющих давнюю историю. Интерес к этим исследованиям, начавшимся в XVIII веке и получившим мощное развитие в середине XX века, не утихает до сих пор. Обусловлен он многочисленными приложениями в технике [12], биологии [13][14], химии [15][16], экономике [17][18] и других прикладных областях.

Данная работа посвящена задаче обращения для систем с последействием. Дадим для задачи обращения краткое концептуальное описание. Пусть некоторая система описывается оператором W, переводящим входной сигнал ξ в выходной сигнал y. Требуется по известным значениям выходного сигнала и априорной информации о системе (виде оператора, форме и свойствах входного сигнала и т. д.) восстановить неизвестный входной сигнал. Описываемая оператором W_{inv} система, осуществляющая обращение системы W, называется *инвертором.* При этом различают две близкие разновидности задачи обращения: *обращение слева* и *обращение справа.* Отражающие их суть схемы приведены на рисунке 1.

(a) Обращение слева (b) Обращение справа

Рис. 1: Обращение систем

В задаче *обращения слева* требуется по реально измеряемым значениям выходного сигнала y получить оценку $\hat{\xi}$ входного сигнала ξ. Данная задача имеет множество приложений. Она возникает, например, при управлении с обнаружением неисправностей (fault detection control), когда возникающая неисправность может рассматриваться в качестве специального входного сигнала [19], который необходимо обнаружить. В некоторых алгоритмах обеспечения защищенной передачи данных неизвестным входом может служить исходное сообщение, что сводит задачу его дешифровки к задаче обращения [20]. Еще одна область приложении относится к автоматизации производства. Зачастую требуется определение усилий, производимых автоматическими инструментами (например, режущих сил, сил сопротивления), непосредственное измерение которых затруднено или вовсе невозможно. Рассмотрение этих усилий в качестве неизвестных входов системы позволяет свести их измерение к задаче обращения системы. Поскольку входными данными инвертора являются результаты реальных измерений, негативное влияние на качество которых оказывают многочисленные факторы внешней среды, важно, чтобы используемые алгоритмы обращения были робастны по отношению к погрешностям входного сигнала.

Задача *обращения справа* состоит в определении входного воздействия ξ по желаемому выходу системы $\hat{y}$ и ее математической модели. Можно ожидать, что подача полученного при обращении модели системы входного сигнала на вход реального объекта приведет к тому, что на выходе мы получим желаемый сигнал $y = \hat{y}$. Этот подход активно применяется при решении задаче слежения [21]. Из описания ясно, что эффективность данного метода существенно зависит от качества модели объекта, что приводит к необходимости построения инверторов, устойчивых как к внешним возмущениям, так и к неточностям моделирования. При этом можно ожидать, что качество входного сигнала инвертора — желаемого выхода $\hat{y}$ — будет достаточно высоким.

По интервалу времени, на котором нам доступен измеряемый сигнал, задачи обращения можно разделить на *ретроспективные* и *реального времени*. В ретроспективных задачах измеряемый сигнал доступен за все время функционирования системы. В задачах реального времени мы знаем значения входного сигнала лишь на промежутке времени от начала эксперимента и до текущего момента. При этом и результат работы алгоритма обращения обычно необходимо получать в реальном времени. Ясно, что задачи реального времени предъявляют более высокие требования к быстродействию инверторов. В данной работе рассматриваются именно такие задачи.

Построение точного инвертора, обеспечивающего равенство $W \circ W_{inv} = Id$ ($W_{inv} \circ W = Id$) и, следовательно, $\hat{\xi}(t) = \xi(t)$ ($\hat{y}(t) = y(t)$) для всех моментов времени t, является чрезвычайно сложной задачей, налагающей весьма жесткие требования как на систему, так и на алгоритм обращения. В реальных условиях, характеризующихся неопределенностями, погрешностями моделирования и измерения, она и вовсе представляется неразрешимой. В то же время, для практических целей зачастую достаточно получить лишь *оценку* неизвестного сигнала $\hat{\xi}(t)$ с устраивающей нас точностью. Именно таковы оценки, получаемые с помощью рассматриваемых в данной работе алгоритмов.

Задача обращения относится к числу *обратных* задач динамики управляемых систем. Как и многие обратные задачи, она не является корректной по Адамару: не всегда по заданному выходному сигналу входной сигнал может быть восстановлен единственным образом, даже если мы не будем различать сигналы, разность которых укладывается в пределы интересующей нас погрешность. По этой причине немаловажно выделить условия, обеспечивающие разрешимость задачи обращения. Классическое условие устойчивости нулевой динамики системы, рассматриваемое в большинстве работ, посвященных задаче обращения, в работе удается заменить гораздо менее ограничительным условием ограниченности входных и выходных сигналов.

Основным объектом исследования в данной работе являются управляемые системы, описываемые линейными системами дифференциальных уравнений с конечным числом сосредоточенных запаздываний вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t-\tau_i), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t-\tau_i), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход системы, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вход, A_i, B_i, C_i и D_i – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей, τ_i – постоянные запаздывания.

Как и для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, изучение инверторов для которых началось еще в 60-е годы XX века, для систем с запаздыванием задача обращения по-прежнему остается актуальной, о чем свидетельствуют посвященные ей многочисленные работы (см., например, [22–25]). При этом существенный теоретический и практический интерес представляет получение робастных алгоритмов обращения и расширение области их применимости на новые классы систем.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка новых алгоритмов обращения для различных классов управляемых динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями.

Для достижения намеченной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Задача нахождения новых достаточных условий обратимости динамических систем.

2. Задача построения канонической формы с выделением нулевой динамики для систем с запаздыванием.

3. Задача восстановления ограниченного решения для систем ОДУ, ФДУ, разностных уравнений, неустойчивых ОДУ.

4. Задача получения алгоритмов обращения для различных классов систем с запаздыванием.

Научная новизна. В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

1. Для различных классов динамических систем (как с запаздыванием, так и без) были получены новые достаточные условия обратимости, являющиеся менее ограничительными, нежели известные ранее.

2. Понятие канонической формы с выделением нулевой динамики, играющее важную роль в задаче обращения динамических систем, было обобщено на системы с соизмеримыми запаздываниями. Была установлена связь между условиями приводимости к этой форме и понятием чистого относительного порядка, специфичного для систем с над кольцами.

3. Для различных классов линейных уравнений были получены методы восстановления ограниченных решений, что позволило во многих случаях отказаться от весьма обременительного условия унимодулярности матриц преобразований.

4. Полученные результаты позволили обобщить разработанные ранее алгоритмы обращения для систем без запаздывания на системы с соизмеримыми запаздываниями. Были получены новые условия обратимости и алгоритмы обращения.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для построения алгоритмов обращения динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа. Эти алгоритмы играют важную роль при решении задач слежения, управления в условиях неопределенности, управления с обнаружением ошибок. На практике алгоритмы обращения находят применение в робототехнике, обработке сигналов, разработке измерительных приборов и других прикладных областях.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы математической теории управления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений с разрывной правой частью, линейной алгебры, коммутативной алгебры, теории разносных уравнений, функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Получены новые достаточные условия обратимости динамических систем (описываемых как ОДУ, так и ФДУ).

2. Построена каноническая форма с выделением нулевой динамики для систем с соизмеримыми запаздываниями, получены условия приводимости к такой форме и алгоритм приведения к ней управляемой системы.

3. Получены методы восстановления ограниченного решения для систем ОДУ, ФДУ, разностных уравнений, в том числе и в случае, когда системы не являются устойчивыми. Описаны условия, при которых восстановить ограниченное решение возможно.

4. Получены алгоритмы обращения для различных классов систем с соизмеримыми запаздываниями (скалярных, векторных систем, систем с неустойчивой нулевой динамикой, систем с различным относительным порядком).

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов данной работы обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Основные результаты диссертации и отдельные ее части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. (Москва, 2013, 2017);

2. конференции "Ломоносовские чтения" в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. (Москва, 2016, 2017);

3. российско-китайском научном семинаре "Нелинейная динамика и управления" (Москва, ВМК МГУ, 2014);

4. Всероссийском совещании по проблемам управления "ВСПУ-2014" (Москва, 2014);

5. Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO-2015 (Москва, ИПУ РАН, 2015);

6. II Балтийском международном симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Светлогорск, 2016);

7. всероссийском научном семинаре "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление" под руководством академика РАН С.В. Емельянова (Москва, МГУ, 2015-2017);

8. научных семинарах кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, МГУ, 2013-2017).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [1–5], 2 статьи в сборниках трудов конференций [6, 7] и 4 тезиса докладов [8–11].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 119 страниц. Библиография включает 74 наименований на 7 страницах.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируются цели работы и основные положения, выносимые на защиту; обосновываются научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость представляемой работы.

Обзор литературы содержит реферативное описание имеющихся результатов по тематике диссертации, приводятся ссылки на ключевые работы и монографии, позволяющие составить представление о текущем состоянии исследуемой области.

В **главе 1** рассматриваются условия обратимости для различных классов систем.

Параграф 1 содержит в себе неформальное описание рассматриваемой задачи. Приведенные в нем рассуждения призваны мотивировать используемые в дальнейшем методы и понятия.

В **параграфе 2** вводятся некоторые понятия, которые будут использованы в дальнейшем, а также приводятся классические необходимые условия обратимости линейных систем, в том числе с запаздыванием.

Параграф 3 содержит новое достаточное условие обратимости для линейных стационарных многосвязных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\xi,\ x(0) = x_0, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{0.1}$$

опирающееся на предположение об ограниченности входных и выходных сигналов, являющееся естественным для приложений. Известны условия, при которых система (0.1) приводима к форме с выделением нулевой динамики

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{cases} . \tag{0.2}$$

Теорема 1. Пусть система (0.1) наблюдаема и приводима к форме с выделением нулевой динамики (0.2), а спектр матрицы A_{11}, определяющей нулевую динамику системы, не содержит точек на мнимой оси. Тогда, если сигнал $\xi(t)$ ограничен и $y(t) \equiv 0$ начиная с некоторого момента времени t_0, то $x(t) \to 0$ и $\xi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 система (0.1) обратима.

Параграф 4 содержит вспомогательную лемму, используемую в дальнейшем для осуществления замен координат в системах над кольцами.

Лемма 1. Полиномиальная матрица $T'(d) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times n}[d]$, дополняющая заданную полиномиальную матрицу $C(d) \in \mathbb{R}^{l\times n}[d]$ до квадратной унимодулярной, существует тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель миноров максимального порядка l ($l < n$) матрицы $C(d)$ есть вещественное число.

С ее помощью в **параграфе 5** производится построение канонической формы с выделением нулевой динамики для систем с соизмеримыми запаздываниями. Рассматривается система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau), \end{cases} \tag{0.3}$$

и ее алгебраическое представление

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)\xi, \\ y = C(\Delta)x. \end{cases} \tag{0.4}$$

Определение 3. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:

1. $c_i B = 0$, $c_i AB = 0$, $\ldots$, $c_i A^{r_i-2} B = 0$, $c_i A^{r_i-1} B \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.
2. $\det \begin{pmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0.$

В случае, когда $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (такие матрицы называются *унимодулярными*), т. е. матрица $H_r(\Delta)$ обратима, относительный порядок называется *чистым.*

Основной результат параграфа содержится в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть система (0.4) обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к виду

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{array}\right. \\ \vdots \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{array}\right. \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi. \end{array}\right. \tag{0.5}$$

На основе полученной канонической формы в **параграфе 6** полученное ранее в параграфе 3 достаточное условие обратимости обобщается на случай систем функционально-дифференциальных уравнений.

Теорема 5. Пусть система (0.3) квадратная, спектрально наблюдаема и приводима к виду (0.5), а спектр матрицы $A_{11}(\Delta)$ не содержит точек на мнимой оси. Тогда, если управление $\xi(t)$ ограниченно и таково, что $y(t) \equiv 0$ при $t \geqslant t_0$, то $x(t) \to 0$.

Следствие 2. В условиях теоремы 5 система (0.3) обратима.

Результаты **главы 1** были опубликованы в работах [2, 4], [9, 10].

Глава 2 посвящена непосредственному описанию алгоритмов обращений для динамических систем.

Параграф 1 содержит уже известные результаты об алгоритме обращения с разрывным управлением для систем без запаздывания.

Параграф 2 содержит основные результаты по обращению векторных квадратных систем с запаздыванием. Приводятся алгоритмы построения инверторов и указывается точность инвертирования. Рассматривается класс функций

$$\Omega^1 = \{\xi(t) : \xi \in C^1[0,\infty), \ |\xi(t)| \leqslant \xi_0, \ |\dot{\xi}(t)| \leqslant \xi_1\}.$$

Предполагается, что система (0.4) приводима к форме с выделением нулевой динамики (0.5). Тогда можно рассмотреть её управляемую модель (0.8), где $u(t)$ — доступное нам управление, и разности между компонентами фазового вектора реальной системы и модели $e_x = \bar{x}_m - \bar{x}$, $e_y = y_m - y$.

$$u = -\alpha e_y - F \operatorname{Sgn} e_y. \tag{0.6}$$

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} u(\tau) d\tau. \tag{0.7}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_m = A_{11}\bar{x}_m + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}}_m = A_{21}\bar{x}_m + A_{22}\bar{y} + Gu, \end{cases} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r|\times m}. \tag{0.8}$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 9. Пусть система (0.4) является квадратной, приводима к виду (0.5) и обладает чистым векторным относительным порядком, а ее нулевая динамика асимптотически устойчива, неизвестный сигнал $\xi(t) \in \Omega^1$. Тогда в предположении о возможности точного вычисления производных выходного сигнала y инвертор (0.6), (0.7), (0.8), дает оценку $\hat{\xi}(t) = H_r^{-1}\hat{\eta}(t)$ для неизвестного сигнала $\xi(t)$, которая с некоторого момента времени t^* удовлетворяет оценке

$$|\hat{\xi}(t) - \xi(t)| \leqslant K\xi^1 T,$$

где T — параметр фильтра (0.7), ξ^1 — оценка для $\dot{\xi}(t)$ из класса Ω^1, $K > 0$ — положительная константа, определяемая матрицей инвертора.

В **параграфе 3** полученный результат обобщается на случай гипервыходных систем вида

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x} + \bar{A}_{22}\bar{y}' + \bar{B}\xi, \\ z = C_{21}\bar{x} + C_{22}\bar{y}. \end{cases} \tag{0.9}$$

Оказывается, что в этом случае для обратимости системы достаточно спектральной обнаруживаемости пары $\{C_{12};\, A_{11}\}$.

Параграф 4 посвящен обращению нестрого физически реализуемых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t - i\tau), \end{cases} \tag{0.10}$$

Теорема 10. Пусть система (0.10) является квадратной, матрица D унимодулярна, а инвариантные нули системы лежат в левой полуплоскости. Тогда система (0.11), (0.12) решает задачу обращения системы (0.10).

$$\dot{x}_m = \bar{A} x_m + B D^{-1} y \tag{0.11}$$

$$\tilde{\xi} = D^{-1}(y - C x_m),\ |\tilde{\xi} - \xi| \to 0. \tag{0.12}$$

Описаны условия, при которых случаи невырожденной и произвольной матриц D сводятся к рассмотренному ранее случаю унимодулярной матрицы D.

В параграфе 5 рассматривается случай неустойчивой нулевой динамики системы. Основной результат содержится в в следующей теореме.

Теорема 12. Пусть система (0.4) спектрально наблюдаема и приводима к виду (0.5), входной сигнал $\xi(t) \in \Omega^1$, а спектр матрицы $A_{11}(\Delta)$ устойчив. Тогда существует инвертор, позволяющий оценить искомый сигнал ξ с любой наперед заданной точностью, начиная с некоторого момента времени t^*.

Если же спектр матрицы A_{11} не содержит точек на мнимой оси, инвертор для системы существует в дополнительном предположении о возможности восстановления ограниченного решения уравнения (0.13), причем его точность определяется точностью, с которой может быть найдено ограниченное решение.

$$\dot{\bar{x}} = A_{11} \bar{x} + A_{12} y. \tag{0.13}$$

Результаты **главы 2** были опубликованы в работах [3, 4, 6, 7], [10].

Глава 3 посвящена задаче восстановления ограниченного решения для различных классов линейных уравнений, возникающей при решении задачи обращения. Оказывается, что априорной информации об ограниченности решения уравнения зачастую достаточно для того, чтобы это решение восстановить (возможно, асимптотически). Все рассмотренные задачи обладают определенным сходством, но в то же самое время сложность их решения существенно зависит от типа представленного уравнения.

Параграф 1 посвящен следующей задаче. Пусть для линейной системы вида

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad t \geqslant 0. \tag{0.14}$$

спектр матрицы A лежит в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (т. е. спектр матрицы A целиком неустойчивый; такие матрицы в дальнейшем будем называть *антиустойчивыми*). Пусть при $t \geqslant 0$ задана непрерывная функция $\xi(t)$, $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$. Тогда известно, что существует единственное ограниченная на полупрямой функция $\phi(t)$, удовлетворяющая уравнению (0.14). Задача состоит в поиске этой функции. При этом могут рассматриваться два варианта постановки задачи:

1. Решение в режиме реального времени, т. е. $\phi(t)$ строится на основании информации о $\xi(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$;

2. Поиск $\phi(t)$ после измерения $\xi(t)$ при $t \in [0, +\infty)$.

В параграфе обсуждаются вопросы существования и единственности такого решения и его свойства. В частности, показано, что это решение $\phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$||\phi(t)|| \leqslant C_4\xi_0, \tag{0.15}$$

где C_4 — некоторая положительная константа. Важное значение имеет следующий результат. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = ax(t) + \xi(t) \tag{0.16}$$

Теорема 15. Пусть функция $\hat{\xi}(t)$ задана на сегменте $[t_0, t_1]$, $t_0 \leqslant t_1$, непрерывна и удовлетворяет условиям $|\hat{\xi}(t)| \leqslant \xi_0$, $\xi_0 > 0$. Далее, пусть значение $\hat{x}_0$ таково, что на сегменте $[t_0, t_1]$ решение $x(t)$ системы (0.16) с начальным условием $\hat{x}_0$ удовлетворяет оценке (0.15). Тогда $\hat{\xi}(t)$ можно продолжить до функции $\xi(t)$, определенной и непрерывной на $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяющей тем же ограничениям, так, что соответствующее решение задачи (0.16) с начальным условием $\hat{x}_0$ ограничено.

Из этой теоремы следует, что в общем случае решение рассматриваемой задачи в реальном времени невозможно без привлечения дополнительной информации. Завершается параграф обсуждением возможных подходов к решению данной задачи на практике. При этом в качестве дополнительной информации может использоваться знание будущих значений правой части либо информация о ее периодичности.

В **параграфе 2** аналогичная задача рассматривается для линейного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа вида

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x_t + f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{0.17}$$

где $\mathcal{A}$ — соответствующий линейный разностный оператор, x_t — состояние системы к моменту времени t, т. е. элемент $C([t-\tau_{max}, t], \mathbb{R}^n)$. Начальные условия задаются соотношением $x_0 = \phi(t)$, $\phi \in C([-\tau_{max}, 0], \mathbb{R}^n)$.

В начале параграфа кратко приводятся некоторые определения и факты из функционального анализа и теории функционально-дифференциальных уравнений, используемые в дальнейшем. Затем обсуждается вопрос существования и единственности искомого ограниченного решения, показывается тесная связь задачи его поиска с рассмотренной ранее задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 22. Пусть в системе (0.17) функция $f(t) \in \mathcal{L}_1^{loc}([t_0, +\infty))$ и ограничена константой f_0, т. е. $||f(t)|| \leqslant f_0$, а собственные значения системы (0.17) не лежат на мнимой оси. Тогда у системы существует асимптотически единственное ограниченное решение.

В **параграфе 3** вновь рассматривается задача восстановления ограниченного решения, но теперь уже для линейного разностного уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(t-k\tau)=\xi(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{0.18}$$

в непрерывном времени. Показывается связь с аналогичной задачей для разностного уравнения с дискретным временем, исследуются вопросы существования и единственности решения, обсуждаются его свойства. В частности, доказывается следующая теорема.

Теорема 23. Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$, а матрица A антиустойчива, т. е. ее спектр лежит вне единичного круга. Тогда система (0.18) имеет единственное ограниченное решение.

Приводятся некоторые подходы к решению задачи на практике. Завершается параграф сравнительным анализом всех трех рассмотренных задач.

Результаты **главы 3** были опубликованы в работах [1, 5],[8, 11].

В **Заключении 3** приводятся основные полученные результаты, подводятся итоги проведенной работы и описываются возможные направления для дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность коллективу кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы.

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю профессору Александру Владимировичу Ильину за постановку задачи и внимательное руководство процессом ее исследования.

Список публикаций в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В. О задаче поиска ограниченного решения неустойчивого дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 111–116. Trans. Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, no. 1. — P. 109–114.
2. Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В. Достаточные условия обратимости линейных стационарных систем // Доклады Академии наук. 2016. Т. 466, № 5. С. 533–535. Trans. Doklady Mathematics. — 2016. — Vol. 93, no. 1. — P. 124–126.
3. Атамась Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В. Обращение векторных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1363–1369. Trans. Differential Equations. — 2013. — Vol. 49, no. 11. — P. 1329-1335.
4. Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В. Обращение векторных систем с неустойчивой нулевой динамикой // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473, № 4. С. 407–410. Trans. Doklady Mathematics. — 2017. — Vol. 95, no. 2. — P. 190–193.
5. Атамась Е. И. О восстановлении ограниченного решения линейного функционального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1543–1545. Trans. Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, no. 11. — P. 1512–1514.
6. Атамась Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В. Задачи обращения и наблюдения для векторных систем с запаздыванием // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16–19 июня 2014 г. Труды. [Электронный ресурс]. ИПУ РАН Москва, 2014. С. 1252–1259.

7. Атамась Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В. Обращение векторных линейных систем с запаздыванием нулевого относительного порядка // Труды X Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'15. Москва, 26-29 января 2015 г. М.: 2015. С. 594–601.

Список иных публикаций

8. Ильин А. В., Атамась Е. И. О решении задачи обращения динамических систем с запаздыванием и возникающих при этом функциональных уравнений // Ломоносовские чтения: научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 18-27 апреля 2016г.: Тезисы докладов. Издателький отдел факультета ВМК МГУ, Макс Пресс Москва, 2016. С. 63.
9. Атамась Е. И. Об условиях приводимости систем с запаздыванием к канонической форме // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.). МАКС Пресс Москва, 2017. С. 50.
10. Атамась Е. И. Об обращении векторных систем с запаздыванием произвольного относительного порядка // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 17-26 апреля 2017 г. Тезисы докладов. МАКС Пресс Москва, 2017. С. 93.
11. Атамась Е. И. Восстановление ограниченных решений линейных разностных уравнений // Ломоносов-2017: XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. Секция "Вычислительная математика и кибернетика". Макс-Пресс Москва, 2017. С. 29.

Цитированная литература

12. Колмановский В., Носов В. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М. : Наука, 1981.

13. Kuang Y. Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics. — Boston : Academic Press, 1993.

14. Villasana M., Radunskaya A. A delay differential equation model for tumor growth // Journal of Mathematical Biology. — 2003. — Vol. 47, no. 3. — P. 270 – 294.

15. Roussel M. R. The use of delay differential equations in chemical kinetics // The Journal of Physical Chemistry. — 1996. — Vol. 100, no. 20. — P. 8323–8330.

16. Bodnar M., Forys U., Poleszczuk J. Analysis of biochemical reactions models with delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 376, no. 1. — P. 74 – 83.

17. Krawiec A., Szydlowski M. The kaldor-kalecki business cycle model // Annals of Operations Research. — 1999. — Vol. 89, no. 0. — P. 89–100.

18. Matsumoto A., Szidarovszky F. Delay Differential Nonlinear Economic Models // Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences: Essays in Honour of John Barkley Rosser Jr / Ed. by Gian Italo Bischi, Carl Chiarella, Laura Gardini. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 195–214.

19. Tanwani A., Dominguez-Garcia A. D., Liberzon D. An inversion-based approach to fault detection and isolation in switching electrical networks // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2011. — Vol. 19, no. 5. — P. 1059–1074.

20. Kim E., Yang I., Lee D. Time-delay robust nonlinear dynamic inversion for chaos synchronization with application to secure communications // Mathematical Problems in Engineering. — 2015. — Vol. 2015. — P. 9.

21. Sun Z., Tsao T.-C. Adaptive tracking control by system inversion // Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251). — Vol. 1. — 1999. — P. 29–33 vol.1.

22. Conte G., Perdon A. M., Moog C. H. Inversion and Tracking Problems for

Time Delay Linear Systems // Applications of Time Delay Systems / Ed. by J. Chiasson, J.J. Loiseau. — Springer Berlin Heidelberg, 2007. — P. 267–284.

23. Kader Z., Zheng G., Barbot J.-P. Left inversion of nonlinear time delay system // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. — Los Angeles, California, USA, 2014. — December 15-17. — P. 469–474.
24. Zhu F. State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers // Journal of Process Control. — 2012. — no. 22. — P. 296–302.
25. Xiong Y., Saif M. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design // Automatica. — 2003. — Vol. 39. — P. 1389–1398.

Научное издание

Атамась Евгений Иванович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Алгоритмы обращения динамических систем с запаздыванием