

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*



**Пиманов Владимир Олегович**

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУКТУР В ТРУБАХ**

Специальность 01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель – **Никитин Николай Васильевич**, доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты – **Гайфуллин Александр Марксович**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского», главный научный сотрудник

**Ильичёв Андрей Теймуразович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Математический институт им. В.А. Стеклова РАН», ведущий научный сотрудник

**Ермаков Михаил Константинович**, кандидат физико-математических наук, ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН», старший научный сотрудник

Защита состоится 23 ноября 2018 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.03 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Главное здание, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: pelevina.daria@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/146312517/>.

Автореферат разослан «\_\_\_» октября 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

кандидат физико-математических наук



Д.А. Пелевина

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы и степень ее разработанности.** Изучение закономерностей движения жидкостей и газов в круглых трубах имеет большое значение как с практической, так и с теоретической точек зрения. Известно, что при небольших значениях числа Рейнольдса  $Re$  течение оказывается ламинарным, а при достаточно больших — турбулентным. При переходных значениях  $Re$  ламинарный и турбулентный режимы течения могут сосуществовать, при этом участки возмущенного и спокойного движения следуют вдоль трубы друг за другом, практически не меняя своей протяженности.

Экспериментально установлено (Wygnanski I.J. & Champagne F.H. // JFM. 1973. Vol. 59, no. 2), что в разных условиях возникают локализованные турбулентные структуры заметно разных типов. Структуры первого типа появляются при сильной возмущенности потока на входе в трубу в диапазоне  $2000 < Re < 2700$ . Они сносятся вниз по потоку со скоростью, близкой к средней скорости течения, практически не меняя свою протяженность. Будем называть такие структуры *турбулентными порывами* (turbulent puffs). Для порыва характерны размытость передней границы, на которой скорость на оси трубы плавно уменьшается от ламинарного значения на 30 – 40%, и резкость задней границы, на которой происходит возвращение к ламинарному течению. Структуры другого типа — турбулентные пробки — появляются при  $Re > 3200$  только когда возмущенность потока на входе недостаточна для непосредственного возникновения турбулентности. Тогда возможен переход через турбулентные пробки — локализованные образования, расширяющиеся по мере сноса вниз по течению.

Турбулентный порыв представляет собой интересный гидродинамический объект, который в некотором отношении может рассматриваться как структурная единица турбулентности. В последние годы выполнен ряд подробных экспериментальных и численных исследований характеристик и свойств турбулентных порывов. Установлено, что турбулентный порыв является нестабильным образованием, склонным либо к исчезновению, либо к делению. С каждой из двух конкурирующих тенденций связано характерное время: среднее время жизни порыва до его исчезновения и среднее время до его деления. Первое увеличивается с ростом  $Re$ , второе уменьшается. Согласно (Avila K. et al. //

Science. 2011. Vol. 333, no. 6039), значение  $Re^* = 2040$ , при котором происходит смена доминирования тенденций, является точкой статистического фазового перехода и может быть принята в качестве минимального критического числа Рейнольдса в круглой трубе.

В последние годы акцент в изучении механизма самоподдержания турбулентности смещается от лабораторного эксперимента в сторону эксперимента вычислительного, основанного на численном решении уравнений Навье–Стокса. Турбулентные порывы впервые рассчитаны в (Priymak V.G. & Miyazaki T. // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16, no. 12). Попытка объяснения механизма самоподдержания турбулентного порыва предпринята в (Shimizu M. & Kida S. // Fluid Dyn. Res. 2009. Vol. 41, no. 4).

Изучение динамики турбулентного порыва осложнено в первую очередь стохастичностью процесса, когда отдельные его фазы следуют друг за другом случайным образом. В этих условиях определенная ясность может быть получена из анализа более простых структур, аппроксимирующих порыв, недавно найденных в (Avila M. et al. // Phys. Rev. Let. 2013. Vol. 110, no. 22). Это предельные решения, возникающие на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Такие решения, наследуя ряд качественных характеристик турбулентного порыва, оказываются периодическими по времени в подходящей подвижной системе отсчета. Будем называть такие структуры *модельными порывами*. Простота поведения позволяет провести исчерпывающее исследование свойств модельного порыва, которые, как мы полагаем, проясняют определенные детали поведения турбулентного порыва.

Методом продолжения по параметру могут быть получены другие условно периодические решения уравнений Навье–Стокса (периодические в подходящей подвижной системе отсчета), имеющие пространственно-локализованную структуру. Также, в настоящее время известно достаточно большое число решений, имеющих вид трехмерной бегущей волны (периодичных вдоль потока и стационарных в подходящей подвижной системе отсчета) (Kawahara G. et al. // An. Rev. Fluid Mech. 2012. Vol. 44). Такие решения также допускают детальное исследование и могут быть использованы для установления универсальности выявленных при исследовании модельного порыва закономерностей.

**Цель диссертационной работы** состоит в выявлении механизмов, ответственных за возникновение и поддержание турбулентных порывов. С этой целью поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Проведено численное исследование модельного порыва — условно периодического решения уравнений Навье-Стокса в геометрии течения в круглой трубе, имеющего пространственно-локализованную структуру.
2. Методом продолжения по параметру рассчитаны другие условно периодические решения уравнений Навье-Стокса в геометрии течения в круглой трубе, имеющие пространственно-локализованную структуру. Выполнен их анализ.
3. Рассчитаны и исследованы трехмерные решения уравнений Навье-Стокса в геометрии течения в круглой трубе и геометрии течения в плоском канале, имеющие вид бегущей волны.

**Научная новизна и положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

1. Определены основные элементы механизма поддержания колебаний в модельном порыве — условно периодическом решении уравнений Навье-Стокса с пространственно-локализованной структурой. Поле скорости решения может быть представлено в виде суперпозиции средней и пульсационной составляющих. Характерной особенностью среднего течения является наличие вытянутых вдоль потока полос повышенной и пониженной скорости. Пульсации возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения в областях между соседними полосами на фоне резкого изменения скорости вдоль угловой координаты. Нелинейное взаимодействие пульсаций приводит к формированию продольных вихрей, поддерживающих существование полос.
2. Обнаружен нелинейный механизм поддержания продольных вихрей, вызывающих полосчатое искажение в распределении продольной скорости. Существование продольных вихрей поддерживается нелинейным взаимодействием пульсаций продольной скорости и пульсаций продольной завихренности. Пульсации продольной завихренности образуются за счет сжатия и растяжения существующих в среднем течении вихревых трубок пульсациями продольной скорости, что обеспечивает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность фаз между этими пульсациями.
3. Определены основные элементы механизма поддержания колебаний в

условно-периодических решениях уравнений Навье-Стокса с пространственно локализованной структурой, полученных продолжением по параметру решения, соответствующего модельному порыву. Также механизм поддержания колебаний определен в нескольких семействах решений, имеющих вид бегущей волны, описывающих течения в круглой трубе и в плоском канале. Во всех исследованных решениях механизм поддержания колебаний аналогичен найденному при исследовании модельного порыва, что в некоторой степени подтверждает универсальность этого механизма.

**Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.** Неустойчивость полосчатых структур является неотъемлемым элементом всех сценариев поддержания колебаний в пристенных турбулентных течениях, что дает основания полагать, что полученные в работе представления о механизме поддержания колебаний в модельных течениях могут быть обобщены на этот класс течений. Понимание механизмов поддержания колебаний имеет первостепенное значения для предсказания характеристик пристенных турбулентных течений и разработки эффективных методов управления ими.

**Метод исследования и достоверность результатов.** В работе движение жидкости воспроизводится численно, путем решения полных трехмерных уравнений Навье-Стокса. Численный метод совмещает конечно-разностную аппроксимацию второго порядка точности по пространственным переменным и полунявный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности интегрирования по времени (Nikitin N. // J. Comp. Phys. 2006. Vol. 217, no. 2). Качество программной реализации численного метода и его адекватность целям работы подтверждаются результатами моделирования турбулентного течения в трубе при переходных значениях числа Рейнольдса, приведенные в диссертации. Решения на сепаратрисе и, в частности, модельный порыв найдены итерационным методом (Avila M. et al. 2013). Метод продолжения по параметру основан на применении метода Ньютона.

Для подтверждения корректности результатов численных расчетов, все исследованные решения найдены на нескольких расчетных сетках. Где возможно, выполнено сравнение с экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов. Все сравнения подтверждают, что найденные численные решения соответствуют решениям уравнений Навье-Стокса и отражают физику

явления. Проведенный в работе анализ нескольких семейств решений подтверждает универсальность выявленных в работе закономерностей.

**Апробация результатов.** Основные результаты работы представлены на следующих конференциях: Конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (2014, 2015, 2016, 2017 годы), Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 годы), Конференции «Ломоносовские чтения» (НИИ механики МГУ, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 годы), Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 2014, 2016, 2018 годы), Школе-семинаре «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2014, 2016 годы), XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015 год), 7th International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics (Paris, 2015), 15th European Turbulence Conference (Delft, Netherlands, 2015), 18th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (Пермь, 2016 год), Международной конференции «Турбулентность, динамика атмосферы и климата» (Москва, 2018).

Также результаты работы представлены на научных семинарах: Семинаре НИИ механики МГУ по механике сплошных сред под руководством А. Г. Куликовского, В. П. Карликова и О. Э. Мельника, Семинаре кафедры газовой и волновой динамики мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством Р. И. Нигматулина, Семинаре «Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности» на базе научно-образовательного центра «Суперкомпьютерные технологии» под руководством В. А. Садовниченко, Астрофизическом семинаре отдела теоретической физики ФИАН им. П. Н. Лебедева под руководством А. В. Гуревича.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 4 статьи в научных журналах, 3 статьи в сборниках трудов и 15 тезисов докладов. Из них 3 статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, одна — в научном журнале, входящем в перечень изданий, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки РФ.

**Личный вклад автора.** Все численные эксперименты и анализ результатов расчетов, приведенные в диссертации, выполнены автором лично. Также

автором написан пакет программ на языке Python, реализующий алгоритм поиска решения на сепаратрисе и метод Ньютона для поиска условно периодических решений уравнений Навье-Стокса. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась вместе с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим. Текст диссертации и иллюстративный материал подготовлены автором диссертации лично.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 124 страницы, включая 43 рисунка. Список литературы содержит 92 пункта.

## Содержание работы

Во **введении** определены актуальность темы исследования, степень ее разработанности, цели и задачи диссертационной работы, ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности полученных результатов, апробация результатов и личный вклад автора.

В **главе 1** описан численный метод моделирования течения в трубах. В предисловии приведен краткий историко-литературный обзор развития численных методов для решения задач гидродинамики и краткий обзор подходов к прямому численному моделированию пристенных турбулентных течений.

В **разделе 1.1** приведена постановка задачи. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе круглого сечения. Течение описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности. На стенке трубы ставится условие прилипания, в продольном направлении — условие периодичности. Жидкость приводится в движение внешним градиентом давления, определяемым из условия постоянства расходной скорости  $U_m$ . Постановка задачи традиционна для прямого расчета развитых турбулентных течений в трубах. Задача решается в безразмерных переменных. В качестве основных единиц измерения выступают радиус трубы  $R$ , удвоенная расходная скорости  $U = 2U_m$ , равная максимальной скорости в течении Пуазейля, и плотность жидкости  $\rho$ . Число Рейнольдса  $Re = RU/\nu$ , где  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

В **разделе 1.2** описан конечно-разностный метод решения поставленной задачи. Уравнения решаются в цилиндрической системе координат  $(x, r, \theta)$ . Дис-



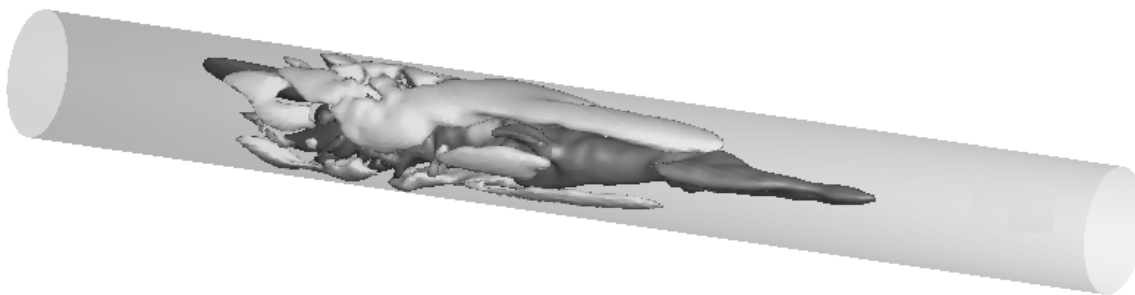


Рис. 1. Визуализация турбулентного порыва

кретизация уравнений выполнена на перемежающихся сетках. Ребра сеток совпадают с координатными линиями. Дискретизация по пространственным переменным выполнена со вторым порядком точности. Для интегрирования по времени применен полунявный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности. Наиболее полно метод описан в (Nikitin N. 2006).

**Раздел 1.3** посвящен практическим вопросам реализации вычислений. Реализованы последовательный и параллельный варианты программы. Расчеты выполнены с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

В **разделе 1.4** приведены результаты расчетов движения жидкости в круглой трубе при переходных значениях  $Re$  в достаточно протяженной расчетной области. Турбулентность в расчетах принимает форму локализованных структур, характеристики которых совпадают с характеристиками турбулентных порывов, приведенными в литературе. Это подтверждает адекватность численного метода целям работы и качество его программной реализации.

На Рисунке 1 приведена визуализация турбулентного порыва, полученного в расчете при  $Re = 2000$ . Светлым и темным тоном представлены области повышенной и пониженной на  $0.1U$  скорости относительно течения Пуазейля. Поток направлен слева направо. Протяженность порыва около 30 диаметров трубы, скорость перемещения близка к средней скорости течения. Передняя граница порыва значительно более размыта, чем задняя. Характерной особенностью порыва является наличие центрального ядра с пониженной скоростью и системы вытянутых вдоль потока полос повышенной и пониженной скорости в пристенной области. Сплошность полосчатых структур нарушают значительные по амплитуде случайные по пространственному расположению флуктуации.

**Глава 2** посвящена исследованию модельного порыва — предельного решения на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. В предисловии к главе приведен краткий обзор работ, посвященных анализу решений на сепаратрисе в круглой трубе.

В **разделе 2.1** описан метод получения модельного порыва. Предварительно найденное турбулентное решение  $\mathbf{v}_{turb}(\mathbf{x}, t)$  используется в итерационной процедуре отыскания предельного решения на сепаратрисе. Задача решается с начальным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_{Pois}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{v}_{turb}(\mathbf{x}, t = t_0) - \mathbf{v}_{Pois}(\mathbf{x})), \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}_{Pois} = (1 - r^2, 0, 0)$  — течение Пуазейля,  $t_0$  — некоторый фиксированный момент времени,  $\alpha$  — скалярный параметр. Значение  $\alpha = 0$  соответствует нулевому возмущению и решением при  $t > 0$  остается течение Пуазейля. При  $\alpha = 1$  уже в начальный момент времени реализуется турбулентный режим, который сохраняется при  $t > 0$ . При промежуточных значениях  $\alpha$  происходит стремление решения либо к одному, либо к другому режиму. Применяя метод деления отрезка пополам, мы отыскиваем то значение  $\alpha$ , при котором решение эволюционирует на сепаратрисе, разделяющей области притяжения двух режимов течения. На Рисунке 2 представлены графики  $A(t)$  — среднеквадратичного по всему объему отклонения поля скорости от течения Пуазейля для нескольких значений  $\alpha$ , демонстрирующие сходимость итерационного процесса. При уточнении значения  $\alpha$  продлевается длительность балансирования решения на сепаратрисе.

В согласии с (Avila et al. 2013), при  $Re = 2200$  и дополнительных условиях диаметральной симметричности и  $\pi$ -периодичности в угловом направлении решение на сепаратрисе постепенно выходит на условно периодический режим. Предельное решение на сепаратрисе описывает пространственно локализованную структуру длиной около  $40R$ , перемещающуюся вдоль трубы со скоростью  $c = 0.69U$ . В сопутствующей системе отсчета поле скорости в каждой точке испытывает периодические колебания с периодом  $T = 60R/U$ .

Визуализация мгновенного поля скорости модельного порыва приведена на Рисунке 3 (построена так же, как визуализация турбулентного порыва на Ри-

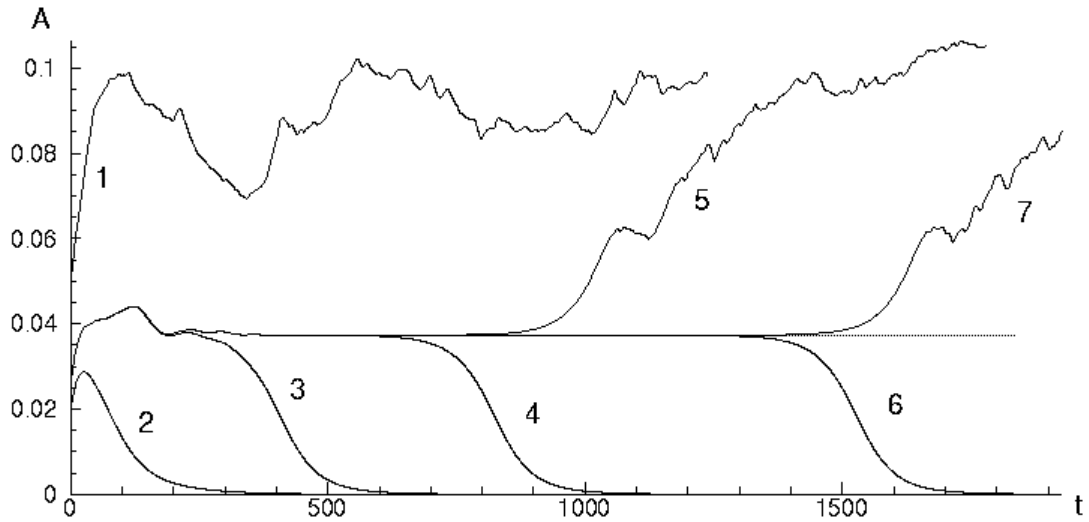


Рис. 2. Итерационный процесс построения решения на сепаратрисе

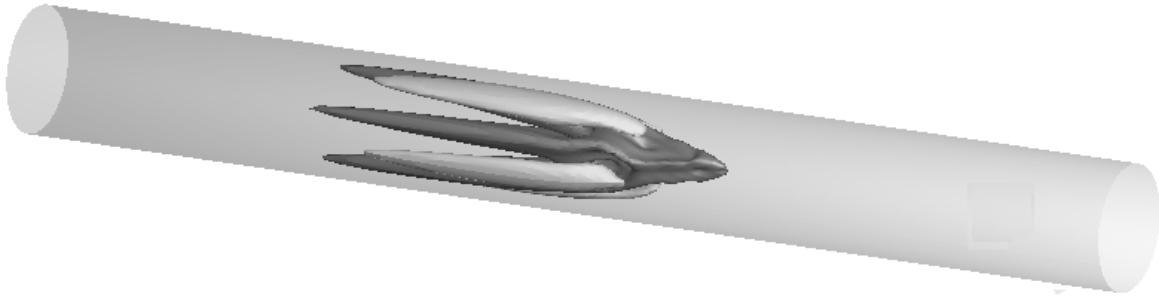


Рис. 3. Визуализация модельного порыва

сунке 1). Модельный порыв воспроизводит ряд характерных особенностей турбулентного порыва. В частности, модельный порыв имеет систему вытянутых вдоль стенки полос повышенной и пониженной скорости, но в этом случае полосы сохраняют свое положение в пространстве и испытывают лишь незначительные колебания около положения равновесия.

В разделе 2.2 описаны основные свойства модельного порыва. В подвижной системе отсчета поле скорости модельного порыва  $\mathbf{v}$  представляется в виде суперпозиции стационарной составляющей  $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{v}}^t$  и колебательной  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ . Черта над выражением обозначает осреднение по указанной переменной. Стационарная составляющая, в свою очередь, представляется в виде суперпозиции осесимметричной  $\mathbf{V}_{2D} = \overline{\mathbf{V}}^\theta$  и трехмерной  $\mathbf{V}_{3D} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{2D}$  составляющих.

В трехмерную стационарную составляющую движения  $\mathbf{V}_{3D}$  попадают полосы повышенной и пониженной скорости. Изолинии  $V_{x,3D}$  в поперечном сечении

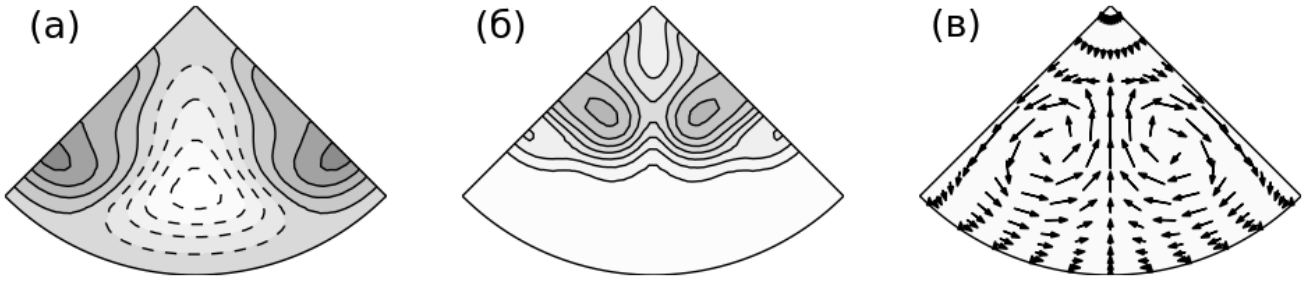


Рис. 4. Различные компоненты движения модельного порыва

трубы, в котором колебания имеют существенную амплитуду, изображены на Рисунке 4(а). В соответствии с наложенными условиями симметрии расчет проводится в одной четверти трубы. В каждом сечении трубы полосы пониженной скорости ( $V_{x,3D} < 0$ , прерывистые линии) проходят через центр расчетной области. Полосы повышенной скорости ( $V_{x,3D} > 0$ , сплошные линии) попадают на границы расчетной области в угловом направлении.

На Рисунке 4(б) приведено распределение среднеквадратичной амплитуды пульсационной составляющей движения  $\mathbf{v}_n$ . Пульсации сконцентрированы между соседними полосами повышенной и пониженной скорости, а также между полосой ускорения и осью трубы. Пульсационная составляющая движения  $\mathbf{v}_n$  напоминает бегущую вниз по порыву волну. Её фазовая скорость близка к  $0.77U$ , а длину можно оценить в  $5R$ .

В **разделе 2.3** показано, что за образование полос повышенной и пониженной скорости ответственен лифтап (lift-up) эффект, связанный с движением жидкости в перпендикулярной к основному потоку плоскости. Векторное поле поперечной компоненты среднего течения  $\mathbf{V}_{3D}$  приведено на Рисунке 4(в). Оно соответствует наличию продольных вихрей, поддерживающих существование полос. Частицы жидкости, перемещающиеся от стенки в сторону оси трубы, приносят дефект скорости и образуют полосу замедления, а частицы,двигающиеся в противоположном направлении — от оси к стенке, образуют полосу ускорения. Говорить о продольных вихрях позволяет также тот факт, что средняя продольная завихренность  $\Omega_x$  оказывается сконцентрирована в небольших областях между соседними полосами повышенной и пониженной скорости. Распределение  $\Omega_x^2$  по сечению трубы представлено на Рисунке 5(а).

В **разделе 2.4** показано, что пульсации возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения. Для этого линеаризованные относительно

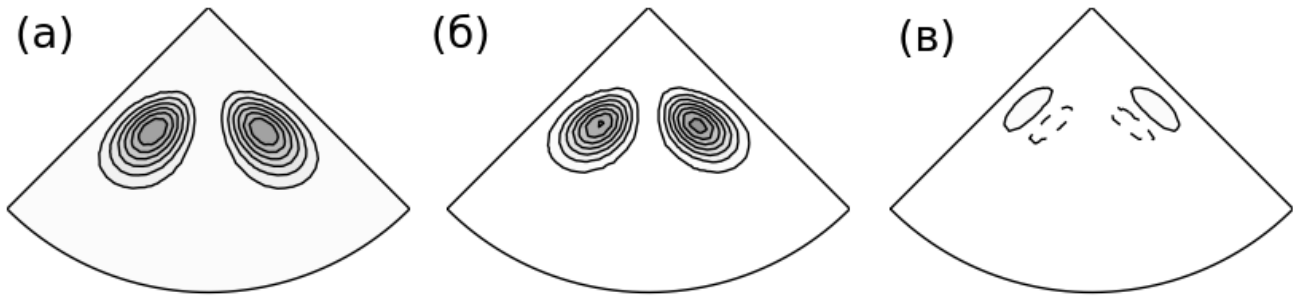


Рис. 5. Механизм генерации продольных вихрей

возмущений уравнения с некоторыми случайными начальными условиями интегрировались по времени до выхода решения на режим экспоненциального изменения. Обнаружено, что  $\mathbf{V}$  неустойчиво. Растущее возмущение  $\mathbf{v}'_1 \sim e^{(\lambda+i\omega)t}$  имеет инкремент нарастания  $\lambda = 0.012$  и частоту  $\omega = 0.116$ , близкую к частоте колебаний  $2\pi/60 = 0.105$  в модельном порыве. Поле скорости растущего решения  $\mathbf{v}'_1$  достаточно точно повторяет поле скорости пульсационной составляющей движения модельного порыва  $\mathbf{v}_n$ .

В разделе 2.5 рассматривается вопрос влияния продольной неоднородности среднего течения на форму пульсаций. Для этого на устойчивость исследованы однородные вдоль трубы поля скорости  $\mathbf{U}_i = \mathbf{V}|_{x=x_i}$ , повторяющее среднее течение в сечениях  $x = x_i$  из области, в которой пульсации имеют существенную амплитуду. Показано, что продольная неоднородность среднего течения не является необходимым условием для возникновения пульсаций.

В разделе 2.6 на основе уравнений движения анализируется вклад каждой из компонент движения в производство кинетической энергии других компонент движения. Это позволяет более строго обосновать полученные представления о взаимодействии между различными компонентами движения и показать, что все существенные взаимодействия учтены.

В разделе 2.7 приведены выводы по главе. Основные результаты, приведенные в главе, опубликованы в работах автора диссертации [3; 4; 6; 7].

Глава 3 посвящена механизму поддержания продольных вихрей, вызывающих полосчатое искажение в распределении продольной скорости. В разделах 3.1 – 3.3 механизм дается на примере решения, имеющего вид бегущей волны. Это решение периодически вдоль потока и стационарно в сопутствующей системе отсчета. Простота его поведения позволяет в более строгой форме показать ряд особенностей движения, обеспечивающих работу механизма.

В разделе 3.4 проводится обобщение механизма поддержания продольных вихрей на модельный порыв. Прояснить процесс поддержания продольных вихрей позволяет анализ уравнения эволюции средней продольной завихренности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + (V_x - c_f) \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} - \nu \nabla^2 \Omega_x = \Omega_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \Omega_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \\ + \frac{\Omega_\theta}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} - \overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^t - \overline{v'_r \frac{\partial \omega'_x}{\partial r}}^t - \overline{v'_\theta \frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta}}^t + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^t + \overline{\omega'_r \frac{\partial v'_x}{\partial r}}^t + \overline{\omega'_\theta \frac{\partial v'_x}{\partial \theta}}^t, \end{aligned} \quad (2)$$

в котором  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_r, \Omega_\theta)$  и  $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_x, \omega'_r, \omega'_\theta)$  — средняя и пульсационная составляющие вектора завихренности  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ ,  $c_f$  — скорость перемещения системы отсчета. Система находится в равновесии и средняя завихренность во времени не меняется. Источниковые слагаемые в правой части уравнения компенсируются конвективными и вязкими слагаемыми в левой. Анализ уравнения (2) показал, что два слагаемых в правой части, а именно

$$-\overline{v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x}}^t + \overline{\omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}^t, \quad (3)$$

вносят определяющий вклад в производство  $\Omega_x$ .

Для представления количественных данных обратимся к уравнения эволюции квадрата  $\Omega_x$ , полученному умножением (2) на  $2\Omega_x$ . Положительный или отрицательный знак у выражений в правой части этого уравнения показывает соответственно положительный или отрицательный вклад этого члена в изменение  $\Omega_x^2$ , а следовательно, и в интенсивность поперечного движения. Соответствующее сумме (3) распределение в уравнении для  $\Omega_x^2$  представлено на Рисунке 5(б), а вклад остальных слагаемых правой части (2) показан на Рисунке 5(в). Распределение генерации  $\Omega_x^2$  выделенными в (3) членами практически совпадает по форме с распределением  $\Omega_x^2$ , приведенным на Рисунке 5(а), тогда как вклад остальных членов более чем на порядок уступает по суммарному вкладу в генерацию  $\Omega_x^2$ . Таким образом, нет сомнения в том, что стационарные продольные вихри возникают за счет действия слагаемых (3).

Между собой слагаемые (3) практически равны. Это значит, в частности, что колебания  $\partial v'_x / \partial x$  и  $\omega'_x$  положительно коррелированы в области концентрации положительной  $\Omega_x$  и отрицательно коррелированы в области концентрации отрицательной  $\Omega_x$ . То же относится и к колебаниям  $-v'_x$  и  $\partial \omega'_x / \partial x$ . Выявить ме-

ханизм формирования такой связи позволяет анализ уравнения эволюции  $\omega'_x$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} + (V_x - c_f) \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial \omega'_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} - \nu \nabla^2 \omega'_x = & -v'_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - v'_r \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} - \\
& - \frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} + \Omega_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \Omega_r \frac{\partial v'_x}{\partial r} + \frac{\Omega_\theta}{r} \frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + \omega'_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \omega'_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\omega'_\theta}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} - \\
& - v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} - v'_r \frac{\partial \omega'_x}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} + \omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \omega'_r \frac{\partial v'_x}{\partial r} + \frac{\omega'_\theta}{r} \frac{\partial v'_x}{\partial \theta} + \\
& + v'_x \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} + v'_r \frac{\partial \omega'_x}{\partial r} + \frac{v'_\theta}{r} \frac{\partial \omega'_x}{\partial \theta} - \omega'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} - \omega'_r \frac{\partial v'_x}{\partial r} - \frac{\omega'_\theta}{r} \frac{\partial v'_x}{\partial \theta}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Среди всех источниковых слагаемых в правой части (4) также удалось выделить существенные, ответственные за возникновение пульсаций  $\omega'_x$ . Как показано в работе, в области формирования продольных вихрей за образование  $\omega'_x$  отвечает слагаемое

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = \Omega_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \dots \quad (5)$$

Выделенное в (5) слагаемое отвечает за перераспределение уже существующей стационарной продольной завихренности  $\Omega_x$  пульсационной составляющей продольной скорости  $v'_x$  (эффект сжатия/растяжения вихревых трубок). Оно стремится произвести пульсации  $\omega'_x$ , пропорциональные  $\partial v'_x / \partial x$ , причем коэффициентом пропорциональности выступает средняя продольная завихренность. Соответственно, механизм включается в областях концентрации  $\Omega_x$ . В области расположения положительного вихря производимые пульсации  $\omega'_x$  положительно пропорциональны пульсациям  $\partial v'_x / \partial x$ , а в области расположения отрицательного вихря — отрицательно пропорциональны. Таким образом обеспечивается максимально возможная эффективность производства средней продольной завихренности нужного знака посредством второго из слагаемых (3). Пульсации  $-v'_x$  и  $\partial \omega'_x / \partial x$  отказываются также согласованы нужным образом, и первое слагаемое (3) оказывается практически равно второму.

Фазовая скорость бегущей волны, соответствующей пульсационной составляющей движения, совпадает со средней скоростью жидкости в области формирования продольных вихрей. По этой причине формируемые (5) пульсации  $\omega'_x$ , перемещаясь вниз по потоку за счет конвекции, остаются в фазе с порождающими их пульсациями  $\partial v'_x / \partial x$ .

В разделе 3.5 приведены выводы по главе. Основные результаты главы

опубликованы в работах автора диссертации [2; 8; 21].

В **главе 4** поднимается вопрос об универсальности полученных при исследовании модельного порыва результатов. Для ответа на него рассчитаны и исследованы отличные от модельного порыва решения уравнений Навье-Стокса.

В **разделе 4.1** описан метод Ньютона для нахождения условно-периодических решений уравнений Навье-Стокса и решений в виде бегущей волны, как частного случая условно-периодических. Приближение к решению возникающей на каждой итерации метода Ньютона линейной системы ищется в подпространствах Крылова методом минимизации невязки. На применении метода Ньютона основан метод продолжения по параметру. Когда одно решение известно, оно используется в качестве начального приближения к решению при близком значении параметров, при котором метод сходится. Затем найденное решение используется в качестве начального приближения к новому решению, и т.д. Так строится цепочка решений, связывающая решения с существенно различными значениями параметров — решение продолжается по параметру.

В **разделе 4.2** приведены результаты продолжения модельного порыва по  $Re$ , позволившего получить новые условно периодические решения уравнений Навье-Стокса с пространственно локализованной структурой. Решения принадлежат однопараметрическому множеству. Значения амплитуды трехмерной составляющей движения  $a$  и скорости перемещения вдоль трубы  $c$  как функции  $Re$  приведены на Рисунке 6. Жирные точки на графиках соответствуют исходному решению. При  $Re \approx 1400$  находится точка бифуркации, в которой рождается две ветви решений. При каждом  $Re$ , превышающем критическое значение, существует два решения, каждое из которых принадлежит своей ветви. Ветвь, которой принадлежит исходное решение, называют нижней. Вторую ветвь называют верхней. Для верхней ветви характерна большая интенсивность пульсаций и меньшая скорость перемещения вдоль трубы. По этим и другим параметрам решения с верхней ветви оказывается ближе к турбулентному порыву, чем исходное решение. Результаты согласуются с (Avila et al. 2013).

В **разделе 4.3** выполнено исследование верхней ветви порожденного модельным порывом семейства условно-периодических решений. На Рисунке 7 приведена визуализация мгновенного поля скорости решения с верхней ветви. Несмотря на существенные количественные отличия, решения с верхней ветви



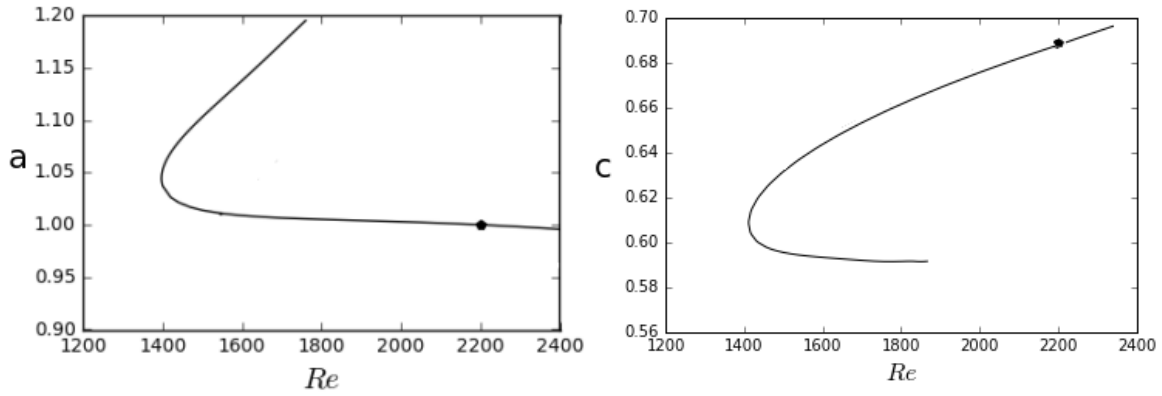


Рис. 6. Продолжение модельного порыва по числу Рейнольдса

воспроизводят тот же механизм поддержания колебаний, что и решение с нижней ветви. Поле скорости решения представляется в виде суперпозиции средней и пульсационной составляющих. Области повышенной и пониженной средней скорости представляют собой вытянутые вдоль потока полосы. На Рисунке 8(а) приведены изолинии средней продольной скорости в поперечном сечении трубы, в котором пульсации имеют существенную амплитуду. В центральной части расчетной области, где изолинии находятся на большем удалении от стенки, проходит полоса пониженной скорости. При больших и меньших значениях  $\theta$  находятся полосы повышенной скорости. Пульсации возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения между соседними полосами повышенной и пониженной скорости. Угловую неоднородность среднего течения поддерживают продольные вихри, которым соответствуют области повышенных и пониженных значений средней продольной завихренности  $\Omega_x$ . Распределение  $\Omega_x^2$  в том же сечении трубы приведено на Рисунке 8(б). Определяющий вклад в производство  $\Omega_x$  в уравнении (2) дают слагаемые (3). Вклад слагаемых, соответствующих (3), в производство  $\Omega_x^2$  приведен на Рисунке 8(в). Механизм образования пульсаций продольной завихренности в области формирования продольных вихрей также аналогичен выделенному в модельном порыве.

**Разделы 4.4 и 4.5** посвящены анализу трехмерных бегущих волн в течении Гагена-Пуазейля и в плоском течении Пуазейля. Постановка задачи для плоского течения Пуазейля аналогична постановке для течения Гагена-Пуазейля. В каждом течении вид бегущей волны имеют предельные решения на сепаратрице, найденные в непротяженной расчетной области. Также в плоском течении Пуазейля найдена устойчивая бегущая волна (при наложенных условиях сим-

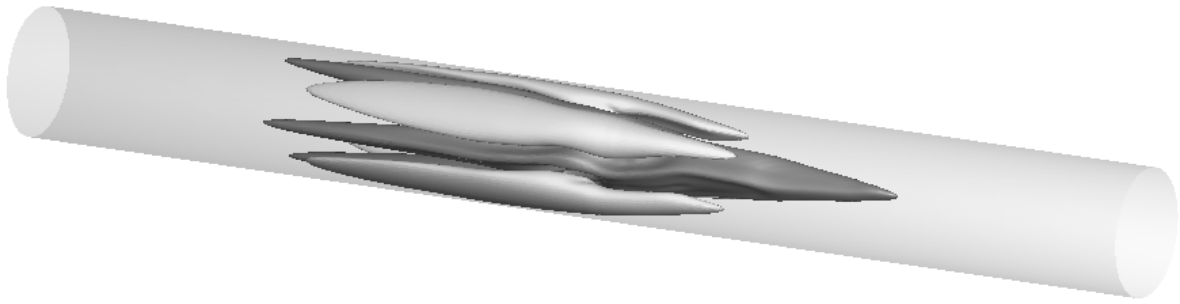


Рис. 7. Условно-периодическое решение с верхней ветви

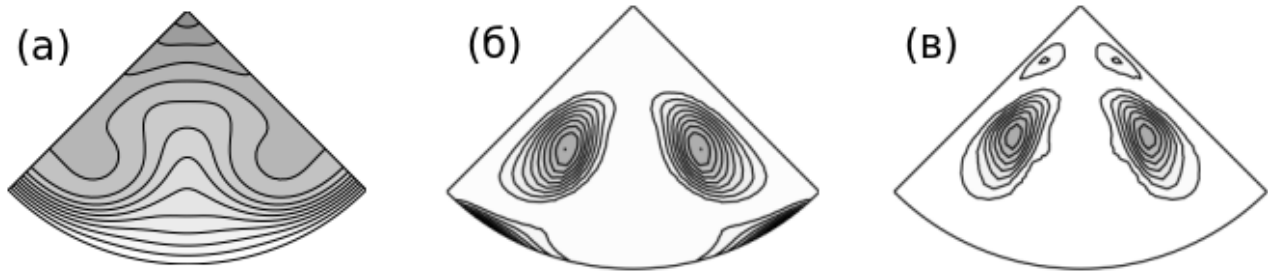


Рис. 8. Различные компоненты движения решения с верхней ветви

метрии). Методом продолжения по параметру рассчитаны соответствующие семейства решений. В отличие от модельного порыва, среднее поле скорости бегущей волны не зависит от продольной координаты — полосы и продольные вихри имеют бесконечную протяженность. Решения достаточно существенно отличаются друг от друга, но, несмотря на это, механизм поддержания колебаний во всех трех семействах решений также аналогичен механизму поддержания колебаний в модельном порыве.

В **разделе 4.6** приведены выводы по главе. Основные результаты главы опубликованы в работах автора диссертации [1; 5; 8; 9; 13; 14; 21].

## Основные результаты и выводы

1. Рассчитан и исследован модельный порыв — условно-периодическое решение уравнений Навье-Стокса с пространственно-локализованной структурой, являющееся предельным состоянием решения, эволюционирующего на сепаратрисе, разделяющей в фазовом пространстве области притяжения решений, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения. Это решение воспроизводит характерные особенности турбулентного порыва, но имеет более

простое временное поведение, что позволяет выполнить его детальное исследование. Определены основные элементы механизма поддержания колебаний в модельном порыве. Его поле скорости представляется в виде суперпозиции средней и пульсационной составляющих. Характерной особенностью среднего течения является наличие вытянутых вдоль потока полос повышенной и пониженной скорости. Пульсации возникают в результате линейной неустойчивости среднего течения в областях между соседними полосами. В этих областях находятся точки перегиба, если рассматривать среднее течение как функцию угловой переменной, что позволяет связать механизм образования колебаний с неустойчивостью струйного течения с токами перегиба. Продольная неоднородность среднего течения не является необходимым условием возникновения пульсаций. Угловую неоднородность среднего течения поддерживают продольные вихри, перемещающие жидкость в нормальной к основному потоку плоскости. Продольные вихри, в свою очередь, формируются в результате нелинейного взаимодействия пульсаций. Таким образом, можно говорить о цикле поддержания колебаний.

2. Обнаружен нелинейный механизм поддержания продольных вихрей, вызывающих полосчатое искажение в распределении продольной скорости. Существование продольных вихрей поддерживается нелинейным взаимодействием пульсаций продольной скорости и пульсаций продольной завихренности. Пульсации продольной завихренности образуются за счет сжатия и растяжения существующих в среднем течении вихревых трубок пульсациями продольной скорости, что обеспечивает необходимую для поддержания продольных вихрей согласованность фаз между этими пульсациями.

3. Исследовано семейство условно-периодических решений уравнений Навье-Стокса с пространственно локализованной структурой, полученное продолжением решения, соответствующего модельному порыву, по числу Рейнольдса. Также рассчитано и исследовано три семейства решений, имеющих вид бегущих волн. Одно семейство описывает течение в круглой трубе и два — в плоском канале. Механизм поддержания колебаний во всех исследованных решениях аналогичен найденному в модельном порыве, что подтверждает универсальность этого механизма и позволяет надеяться на возможность его обобщения на широкий класс пристенных турбулентных течений.

## Основные публикации по теме диссертации

### Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus

1. *Пиманов В. О.* О поддержании колебаний в трехмерных бегущих волнах в плоском течении Пуазейля // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2018. — № 4. — С. 47–53. — Перевод: Pimanov V. O. Maintenance of Oscillations in Three-Dimensional Traveling Waves in Plane Poiseuille Flows // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, No. 4. — Pp. 91–96. — Scientific Journal Rankings 2016: 0.108.
2. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — № 1. — С. 68–76. — Перевод: Nikitin N. V., Pimanov V. O. Sustainment of Oscillations in Localized Turbulent Structures in Pipes // Fluid Dynamics. — 2018. — Vol. 53, Iss. 1. — Pp. 65–73. — Impact Factor 2017: 0.608.
3. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* Численное исследование локализованных турбулентных структур в трубах // Изв. РАН. МЖГ. — 2015. — № 5. — С. 64–75. — Перевод: Nikitin N. V., Pimanov V. O. Numerical study of localized turbulent structures in a pipe // Fluid Dynamics. — 2015. — Vol. 50, Iss. 5. — Pp. 655–664. — Impact Factor 2017: 0.608.

### Научные статьи в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки РФ

4. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* Локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2015. — Т. 157, кн. 3. — С. 111–116. — Импакт-фактор РИНЦ 2017: 0,248.

### Другие научные труды

5. *Пиманов В. О.* Некоторые детали механизма самоподдержания турбулентности в пристенных течениях // Труды конференции-конкурса молодых ученых 10-12 октября 2016 г. / под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2017. — С. 46–53.

6. *Пиманов В. О.* О механизме самоподдержания локализованных турбулентных структур в трубах // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 12–14 октября 2015 г. / под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 44–51.
7. *Пиманов В. О.* Пространственно-локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 13–17 октября 2014 г. / под ред. А. Г. Куликовского, В. А. Самсонова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 42–50.
8. *Пиманов В. О.* О механизме поддержания колебаний в пристенных турбулентных течениях // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2018» / под ред. И. А. Алешковского, А. В. Андриянова, Е. А. Антипова. — М. : МАКС Пресс, 2018. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Газовая и волновая динамика». — URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2018/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/index.htm).
9. *Пиманов В. О.* О механизме формирования продольных вихрей в пристенных турбулентных течениях // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2017» / под ред. И. А. Алешковского, А. В. Андриянова, Е. А. Антипова. — М. : МАКС Пресс, 2017. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Гидромеханика». — URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2017/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/index.htm).
10. *Пиманов В. О.* О механизме самоподдержания локализованных турбулентных структур в круглых трубах // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2016» / под ред. И. А. Алешковского, А. В. Андриянова, Е. А. Антипова. — М. : МАКС Пресс, 2016. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Гидромеханика». — URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2016/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2016/index.htm).
11. *Пиманов В. О.* Численное исследование локализованных турбулентных структур в трубах круглого сечения // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2015» / под ред. А. И. Андреева, А. В. Андриянова, Е. А. Антипова. — М. : МАКС Пресс, 2015. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Гидромеханика». — URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2015/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/index.htm).

12. *Пиманов В. О.* Исследование трехмерных пространственно локализованных периодических решений уравнений Навье-Стокса при переходных значениях числа Рейнольдса в круглой трубе // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2014» / под ред. А. И. Андреева, А. В. Андриянова, Е. А. Антипова. — М. : МАКС Пресс, 2014. — Секция «Математика и механика», Подсекция «Гидромеханика». — URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2014/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2014/index.htm).
13. *Пиманов В. О., Никитин Н. В.* О механизме формирования стационарных продольных вихрей в пристенных турбулентных структурах // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 17–26 апреля 2017 г. Тезисы докладов. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2017. — С. 165–166.
14. *Пиманов В. О., Никитин Н. В.* Эволюция пристенных турбулентных структур в круглых трубах с увеличением числа Рейнольдса // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18–27 апреля 2016 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 143–143.
15. *Пиманов В. О., Никитин Н. В.* Трехмерные локализованные периодические решения уравнений Навье-Стокса в круглой трубе // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 14–23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2014. — С. 119–120.
16. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* Новые данные о механизме пристенной турбулентности // Тезисы докладов XXIII международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». 25 февраля – 04 марта 2018 г. Пансионат «Звенигородский» РАН, Моск. область, г. Звенигород / под ред. Н. В. Никитина. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2018. — С. 76–76.
17. *Пиманов В. О., Никитин Н. В.* Исследование локализованных турбулентных структур в трубах при переходных числах Рейнольдса // Материалы XXII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». 14 – 21 февраля 2016 г. Московская область, г. Звенигород, пансионат «Звенигородский» РАН /

под ред. Н. В. Никитина. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — Электронное издание. — URL: [http://hit-conf.imec.msu.ru/books/NeZaTeGiUs\\_2016.pdf](http://hit-conf.imec.msu.ru/books/NeZaTeGiUs_2016.pdf).

18. *Пиманов В. О., Никитин Н. В.* Исследование трехмерных пространственно локализованных периодических решений уравнений Навье-Стокса при переходных значениях числа Рейнольдса в круглой трубе // Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». 25 февраля – 4 марта 2014 г. Моск. обл., панс. «Звенигородский» РАН. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2014. — С. 198–199.
19. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* Структура локализованных турбулентных порывов в круглых трубах // Современные проблемы аэрогидродинамики: Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции, посвященной 60-летию Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике и 125-летию со дня рождения его первого председателя академика АН СССР Н.И. Мусхелишвили. 5–15 сентября 2016 г., Сочи, «Буревестник» МГУ. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. — С. 89–89.
20. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* Локализованные в пространстве периодические по времени трехмерные решения уравнений Навье-Стокса в круглой трубе // Современные проблемы аэрогидродинамики: Тезисы докладов XVII школы-семинара, посвященной памяти академика Г.Г. Черного и 55-летию со дня основания НИИ механики МГУ. 20–30 августа 2014 г., Сочи, «Буревестник» МГУ. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2014. — С. 98–98.
21. *Пиманов В. О., Никитин Н. В.* О поддержании колебаний в пристенных турбулентных течениях // Турбулентность, динамика атмосферы и климата. Международная конференция, посвященная столетию со дня рождения академика А.М. Обухова. Москва. 16–18 мая 2018 г. Сборник тезисов докладов. — М. : Физматкнига, 2018. — С. 31–31.
22. *Никитин Н. В., Пиманов В. О.* Локализованные турбулентные структуры в круглой трубе // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.) / под ред. Д. А. Губайдуллина, А. М. Елизарова, Е. К. Липачёва. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. — С. 2783–2785.