МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Жамков Александр Сергеевич

Моделирование орбит космических аппаратов для решения астрометрических и гравиметрических задач

Специальность 01.03.01 – астрометрия и небесная механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Жаров В.Е.

Москва – 2018 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

1 Моделирование и уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью радиодальномерных и допплеровских измерений 13

1.1 Корреляционная обработка данных наземно-космического интерферометра и ее требования к точности определения орбиты КА «Спектр-Р» 15

1.2 Основы калмановской фильтрации 18

1.2.1 Постановка задачи 18

1.2.2 Основные уравнения 20

1.3 Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью фильтра Калмана 22

1.3.1 Модель движения 22

1.3.2 Модель наблюдений 24

1.3.3 Модель задержки радиосигнала 25

1.4. Результаты работы фильтра Калмана по уточнению орбиты КА «Спектр-Р» 25

2 Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» и необходимые для этого условия при использовании фильтра Калмана 34

2.1 Анализ работы алгоритма фильтра Калмана в сеансе «RAES03PU» 35

2.2 Условие наблюдаемости в задаче определения орбиты КА 40

2.3 Численное моделирование уточнения орбиты КА «Спектр-Р» на основе независимых измерений дальности с трех станций 42

3 Моделирование высокоточных орбит для низкоорбитальных КА 51

3.1 Постановка задачи 51

3.1.1 Численная модель движения КА на низкой околоземной орбите ... 54
3.1.2 Несферичность гравитационного потенциала Земли ... 55
3.1.3 Матрица перехода из GCRS в ITRS ... 59
3.1.4 Притяжение Луны, Солнца и планет ... 61
3.1.5 Твердые приливы ... 61
3.1.6 Океанические приливы ... 65
3.1.7 Твердый полярный прилив ... 67
3.1.8 Океанический полярный прилив ... 67
3.1.9 Воздействие атмосферы ... 68
3.1.10 Возмущение от давления солнечного излучения ... 69
3.2. Результаты моделирования ... 73
3.2.1 Начальные параметры моделирования ... 75
3.2.2 Требования к высоте рабочей орбиты КА ... 75
3.2.3 Требования к взаимному расстоянию и точности измерения межспутникового расстояния ... 79
3.2.4 Требования к наклонению рабочей орбиты. ... 83
3.2.5 Требования ко времени проведения измерений ... 86
3.2.6 Планирование измерений в случае группировки, состоящей из двух КА, и первые оценки уточнения коэффициентов Стокса. ... 90
3.2.7 Проведение градиентометрических измерений на борту КА ... 99
3.2.8 Результаты расчета программы в режиме градиентометрических измерений ... 106
3.2.9 Основные результаты, полученные в ходе численного моделирования движения КА в околоземном пространстве в интересах задач космической гравиметрии и градиентометрии ... 110

4 Уточнение орбиты низкоорбитального КА по данным глобальных навигационных спутниковых систем 113
4.1 Принцип измерений в ГНСС 113
4.1.1 Кодовые измерения 114
4.1.2 Фазовые измерения 115
4.1.3 Определение неоднозначностей 116
4.1.4 Учет ионосферной рефракции 118
4.2 Исходные данные для задачи уточнения орбиты КА на низкой околоземной орбите с использованием GPS сигнала 119
4.3 Модель наблюдения 121
4.4 Результаты уточнения положения КА на низкой околоземной орбите с использованием GPS сигнала 122
5 Моделирование высокоточных орбит для высокоорбитальных КА 126
5.1 Постановка задачи 126
5.2 Результаты моделирования орбиты высокоорбитальных КА на примере орбитальной группировки ГВ эксперимента 129
5.3 Проблема уточнения орбит высокоорбитальных КА 137
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 141
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 146
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 152
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 156

ВВЕДЕНИЕ

Запуск первого искусственного спутника Земли (ИСЗ) в 1957 году ознаменовал собой новую эру космических исследований, которая продолжается и в настоящее время. Важность исследований, проводимых космическими аппаратами (КА), как на околоземной орбите, так и на отлетных гелиоцентрических траекториях, трудно переоценить. В настоящее время КА выполняют ряд функций, без которых наша современная жизнь немыслима: обеспечивают связь в труднодоступных регионах Земли, поддерживают теле- и радиовещание, сеть «Интернет», предоставляют навигацию, в режиме реального времени осуществляют мониторинг различных процессов на Земле и в околоземном пространстве и мн. др.

Особую нишу занимают КА, функционирующие в интересах развития фундаментальной науки, предметом исследования которой являются основополагающие процессы всех явлений, наблюдаемых во Вселенной. Зачастую исследование этих процессов накладывает жесткие ограничения на характеристики аппаратуры, проводящей эти измерения. Если речь идет об измерениях с помощью космических средств, то, в первую очередь, это означает предъявление строгих требований к баллистическому обеспечению КА, поскольку выявление и исследование тонких эффектов немыслимо без точного знания местоположения КА.

Определение орбиты КА в сфере действия Земли отличается от классической задачи определения орбиты небесных тел. Для большинства КА, функционирующих на низких околоземных орбитах, гравитационные силы значительно отличаются от центральных притягивающих сил, а воздействие атмосферы имеет существенное воздействие. Наоборот, КА, функционирующие на высоких орбитах в большей степени подвержены влиянию Луны, Солнца и планет Солнечной системы и в меньшей степени зависят от всех остальных факторов. Эта специфика требует

индивидуального подхода к моделированию орбит КА, выполняющих различные целевые задачи.

Необходимость знания с высокой точностью положения КА на низких круговых околоземных орбитах (до 1000 км) обусловлена решением научно-прикладных задач. Одной из таких задач является исследование гравитационного поля Земли (ГПЗ). К настоящему времени уже реализованы некоторые проекты исследования ГПЗ с помощью КА: «GRACE» (NASA) и «GOCE» (ESA). В первом из них используются два КА, двигающиеся по одной орбите. Определение параметров ГПЗ осуществляется путем измерения расстояния между ними с помощью системы микроволновой связи. Такая конфигурация позволяет рассматривать два КА как чувствительный гравитационный прибор, в котором изменения в гравитационном поле порождают изменения в расстоянии между спутниками. На смену проекту «GRACE» пришел проект «GRACE Follow-On», запущенный 22 мая 2018 года, который должен использовать систему лазерной локации между КА (помимо системы микроволновой связи). Предполагается, что это позволит повысить точность измерений межспутникового расстояния до нескольких нанометров и, соответственно, улучшить точность определения параметров ГПЗ. При этом требования к точности абсолютного местоположения КА на орбите предъявляются очень строгие и составляют ≈1 см.

Необходимость знания с высокой точностью положения КА на высокоапогейных орбитах (высота апогея свыше 100 тыс. км) стала очевидной с запуском проекта «Радиоастрон». В ходе научных наблюдений находящийся на борту КА «Спектр-Р» радиотелескоп диаметром 10 метров является элементом наземно–космического интерферометра, вынесенным относительно наземных радиотелескопов на расстояние, ограниченное апогеем орбиты КА (около 300 тыс. км). Высокоэллиптическая орбита КА «Спектр-Р» является сильно эволюционирующей, что позволяет в ходе

полета для решения научных задач проекта вести наблюдение в разных режимах, как отдельного объекта, так и различных участков небесной сферы. Для успешной работы, а также корреляции наблюдений на наземно-космическом интерферометре необходимо с максимально высокой точностью определять положение базы наземно-космического интерферометра, а, значит, и геоцентрическую орбиту КА. Для корреляционной обработки научной информации отличие расчетной орбиты от реальной по положению, скорости и ускорению не должно превышать соответственно 100-300 м, 2 мм/с и 5×10^{-5} мм/с^2.

Знание с высокой точностью положения КА на высоких круговых околоземных орбитах (около 100 тыс. км) диктуется необходимостью решения одной из фундаментальных и актуальных задач современности – поиска гравитационных волн (ГВ). Существующие проекты космических детекторов гравитационных волн (например, «LISA») ставят целью создание ГВ-обсерватории для регистрации и изучения гравитационных волн от многообразия еще неизвестных источников. Обсерватория «LISA» (The Laser Interferometer Space Antenna) – совместная миссия ESA-NASA, её запуск планируется в 2029 году. «LISA» будет состоять из трех идентичных КА, размещенных на гелиоцентрической орбите на расстоянии 5 млн. км друг от друга. Флуктуации расстояния между двумя КА, вызванные прохождением гравитационно-волнового излучения, должны измеряться лазерными интерферометрами с пикометровой точностью.

Имеющиеся альтернативные отечественные проработки такого проекта показывают, что оптимальная конфигурация космического детектора для регистрации ГВ от известного источника должна быть реализована на трех идентичных КА, размещенных на почти идентичных геоцентрических орбитах с большой полуосью $\approx10^5$ км и формирующих почти равносторонний треугольник. Требования к измерению межспутникового расстояния составляют величину ≈1 пм, как и в проекте «LISA», а это значит,

что должен быть произведен точный баллистический расчет группировки КА.

Представленные выше примеры как функционирующих, так и готовящихся к запуску проектов, раскрывают актуальность решаемой в настоящей работе задачи моделирования орбит КА. При этом в зависимости от целевой задачи проекта требования к рабочей орбите КА различаются, поэтому на конкретных примерах проектов астрометрической и гравиметрической направленности эти требования будут оговорены и предложен метод их учета.

Необходимо отметить, что в зарубежных проектах для достижения целевой задачи в части определения орбиты КА находит широкое применение сеть наземных измерительных станций, а также использование сигналов ГНСС (глобальных навигационных спутниковых систем) с последующей их обработкой, использующей комплекс математических методов. В нашей стране до запуска проекта «Радиоастрон» отсутствовала необходимость в высокоточной проработке орбиты КА, поскольку того не требовали решаемые проектами задачи. Таким образом, совсем недавно появилась необходимость более тщательного рассмотрения этой проблемы.

По этой причине в данной работе при моделировании орбиты (программным методом) рассмотрен вопрос развития наземных измерительных станций, учета ГНСС сигналов, а также задействованы такие математические аппараты, как метод наименьших квадратов (МНК) и фильтр Калмана. Метод МНК хорошо зарекомендовал себя при обработке наблюдений на протяжении многих десятилетий, а его расширение – фильтр Калмана, широко применяется в последнее время для систем, параметры которых меняются за время проведения измерений, что имеет место быть в случае орбитального движения КА. В качестве интегратора орбиты был выбран алгоритм Рунге-Кутта 4-го порядка оптимально совмещающий в себе простоту программной реализации и точность расчета в рамках

рассматриваемой задачи. Для расчета орбиты были использованы общедоступные модели:

- модель ГПЗ EGM-96;
- модель атмосферы NRLMSISE-00;
- модель океанических приливов FES2004;
- эфемериды Луны, Солнца и планет DE 421.

Кроме этого в программе реализован высокоточный переход между системой GCRS (Geocentric Celestial Reference System) и ITRS (International Terrestrial Reference System), а также учет твердых приливов согласно рекомендациям IERS (International Earth Rotation Service).

Новизна работы и ее цель заключаются в создании унифицированного программного комплекса, применяющего описанные выше методы расчета и уточнения орбиты КА, для его использования в космических проектах астрометрической и гравиметрической направленности, требующих определения орбиты КА с высокой точностью.

Значимость работы определяется возможностью в перспективе осуществлять прецизионное моделирование орбит отечественных КА для реализации проектов, решающих широкой спектр как научно-прикладных задач в интересах социально-экономического сектора, так и задач двойного назначения.

На защиту выносятся следующие результаты диссертации.

1. В рамках моделирования движения КА на низкой околоземной орбите в интересах решения фундаментальных задач гравиметрии определены оптимальные величины межспутникового расстояния орбитальной группировки, состоящей из двух КА, и требования к точности измерения межспутникового расстояния в зависимости от уточняемой гармоники геопотенциала. Определена оптимальная рабочая высота группировки (400 км) и необходимое время проведения измерений для восстановления карты гравитационного поля Земли, которое составляет 1

месяц. Определены зависимости точности определения коэффициентов Стокса от наклонения и межспутникового расстояния, где показано, что коэффициенты уточняются тем лучше, чем выше исследуемый порядок геопотенциала. Проведена оценка работы КА с градиентометром на борту и показано, что такой КА может проводить измерения на одной и той же орбите, что и система «спутник-спутник», расширяя тем самым состав измерений в выделенной области пространства, однако более предпочтительной для градиентометрических измерений является более низкая орбита (≤300 км).

2. В рамках моделирования движения КА на высокой эллиптической орбите в рамках решения фундаментальных астрометрических задач на примере проекта «Радиоастрон» с помощью алгоритма фильтра Калмана на основе радиодальномерных и допплеровских измерений улучшен показатель отношения сигнал/шум, с одновременным уменьшением задержки и остаточной частоты интерференции в результате корреляционной обработки данных наблюдений, что является уверенным подтверждением успешной работы алгоритма по уточнению орбиты КА. Показано, что измерения дальности и радиальной скорости должны производиться минимум с трех наземных станций, для которых КА находится в зоне видимости. Отмечена необходимость рассмотрения возможности одновременных измерений со станций «Медвежьи Озера» и «Уссурийск» и увеличения периода радиодальномерных измерений более 15 минут. Для уточнения орбиты на основе одних только радиодальномерных данных нужна дополнительная независимая информация о ее наклонении и долготе восходящего узла; для уточнения орбиты на основе двух комплектов радиодальномерных данных нужна дополнительная независимая информация либо о наклонении, либо о долготе восходящего узла.

3. В рамках моделирования движения КА на высокой круговой околоземной орбите в интересах решения задач фундаментальной

гравитации было получено, что измерительная система КА в составе орбитальной группировки по детектированию гравитационных волн (ГВ) должна быть способна проводить измерения межспутникового расстояния с точностью ≈ 1 пм на фоне изменения длины базы ≈ 0,2 м/с. Для выявления эффектов прохождения ГВ необходим, в том числе, учет атмосферы Земли, оказывающей ускорение $\approx 10^{-14}$ м/с^2 при требуемой чувствительности эксперимента $\approx 10^{-15}$ м/с^2. Определены предварительные требования к системе ориентации КА группировки: максимальная скорость коррекции угла при наведении луча лазера на другой КА в орбитальной группировке должна составлять $\approx 1{,}25\times 10^{-4}$ "/с, при этом оценка сверху для точности упреждения луча $\approx 7{,}2\times 10^{-5}$ ".

Апробация результатов работы программы в части астрометрической направленности проведена на корреляторе АКЦ ФИАН при обработке наблюдений проекта «Радиоастрон», в части гравиметрической направленности – при сравнении полученных данных с имеющимися данными зарубежных проектов.

Результаты работы изложены в таких рецензируемых журналах из списка Scopus, WoS, RSCI как:

1. *Жамков А.С., Жаров В.Е.,* // Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью радиодальномерных и доплеровских измерений // Вестн. Моск. ун-та. Физ., Астрон., 2016., №3., С. 61. (*Zhamkov A.S., Zharov V.E.,* // Moscow University Physics Bulletin. 71. N 3. pp. 299-308, 2016, DOI 10.3103/S0027134916030152). Импакт-фактор: 0.503.
2. *Жамков А.С., Жаров В.Е.,* //Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «РадиоАстрон» и необходимые для этого условия при использовании фильтра Калмана // Вестн. Моск. ун-та. Физ., Астрон., 2017., №3., С.99. (*Zhamkov A.S., Zharov V.E.,* // Moscow University Physics Bulletin. 72. N3. pp. 318-325, 2017, DOI 10.3103/S0027134917030158). Импакт-фактор: 0.503.

3. *А.В Бурданов, А.С Жамков, В.Е. Жаров, В.К. Милюков, М.В. Сажин* // Новый подход к проведению гравитационных исследований на околоземной орбите. // Космонавтика и ракетостроение, ЦНИИмаш, 2016, том 8, №93, с. 5-15. Импакт-фактор: 0.284.
4. *Жамков А.С., Жаров В.Е.,* // Моделирование движения двух информационно связанных космических аппаратов в гравитационном поле Земли для решения гравиметрических задач // Вестн. Моск. ун-та. Физ., Астрон., 2018, №5, принята к печати. Импакт-фактор: 0.503.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- «Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», г. Москва, 2016, 2017 г.;
- «VI Пулковская молодежная астрономическая конференция», г. Санкт-Петербург, 2016 г.;
- «Научно-практическая конференция «Космонавтика и ракетостроение: Взгляд в будущее», г. Королев, 2016 г.;
- «Навигация по гравитационному полю Земли и ее метрологическое обеспечение», г. Менделеево, 2017 г.;
- «Ломоносовские чтения», г. Москва, 2017 г.

1 Моделирование и уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью радиодальномерных и допплеровских измерений

Результаты раздела 1 основаны на статье [1] из списка использованных источников. Космический проект «Радиоастрон» [2,3,4] – это уникальный по своим масштабам и сложности проект, воплотивший в себе принципы РСДБ (радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой), разработанные и реализованные с использованием КА «Спектр-Р». Радиотелескоп диаметром 10 метров на борту КА «Спектр-Р» в ходе научных наблюдений является элементом наземно–космического интерферометра, вынесенным относительно наземных радиотелескопов на расстояние, ограниченное апогеем орбиты КА, которое составляет в настоящее время около 300 тыс. км. В качестве наземных элементов интерферометра используются крупнейшие радиотелескопы мира: 300-м Аресибо и 100-м ГБТ (Грин-Бэнк телескоп) (США), 100-м Эффельсберг (Германия), интерферометр Вестерборк (Нидерланды), 70-м Евпатория (Россия) , 64-м Усуда (Япония), 70-м Тидбинбилла (Австралия), Российская система «Квазар» и др. Выбранная высокоэллиптическая орбита КА «Спектр-Р» является сильно эволюционирующей, что позволяет в ходе полета вести наблюдение как отдельного объекта, так и различных участков небесной сферы в разных режимах для решения научных задач проекта.

Для успешной работы, а также корреляции наблюдений на наземно-космическом интерферометре необходимо с максимально высокой точностью определять положение базы наземно-космического интерферометра, а, значит, и геоцентрическую орбиту КА. Для корреляционной обработки научной информации отличие расчетной орбиты от реальной по положению, скорости и ускорению не должно превышать соответственно 100-300 м, 2 мм/с и 5×10^{-5} мм/с^2 [3].

Определением расчетной орбиты КА «Спектр-Р» занимается Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша (ИПМ РАН), для чего

используется модель движения, учитывающая ряд возмущающих факторов [5]:

- несферичность гравитационного поля Земли, рассчитываемую в соответствии с моделью EGM-96 (Earth Gravitational Model 1996);
- притяжение Луны и Солнца, координаты которых вычисляются на основе эфемерид DE 421;
- давление солнечного света;
- возмущающие ускорения, возникающие в процессе разгрузки маховиков;
- «твердые приливы», т.е. поправки к гравитационному полю Земли, обусловленные ее деформацией под действием притяжения Луны и Солнца.

В настоящей работе отличительной чертой определения координат и компонент скорости КА «Спектр-Р» на момент проведения им наблюдений является использование фильтра Калмана, учитывающего дальномерные и допплеровские измерения.

Для аппарата «Спектр-Р» измерения положения и скорости его движения проводятся различными методами. Они включают, в частности, штатные радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости, которые регулярно осуществляются станциями управления в Уссурийске и Медвежьих Озерах. Измерения радиальной скорости по сигналу ВИРК (высокоинформативный радиоканал) проводятся на наземной станции слежения в Пущинской радиоастрономической обсерватории (ПРАО АКЦ ФИАН). Сюда же относятся и лазерные измерения дальности.

Лазерные измерения дальности являются одними из наиболее точных и информативных среди всех перечисленных источников орбитальной информации. Однако для их получения необходимо выполнение ряда условий, которые не всегда могут быть обеспечены: безоблачная погода, достаточная мощность лазера, способная обеспечить локацию вплоть до

расстояний 300000 км, доступ к средствам лазерной локации на территории других стран.

Таким образом, самыми доступными методами уточнения орбиты КА являются радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости. Использование описанной модели позволяет реконструировать орбиту для обработки данных в корреляторе с точностями для положения не хуже ±500 м и для скорости не хуже ±2 см/с по трем координатам и компонентам скорости.

Эти величины значительно превышают указанные в работе [3]. В настоящей работе показано, что применение фильтра Калмана улучшает параметры кросс-корреляционной функции (уменьшение задержки и остаточной частоты интерференции) в результате корреляционной обработки данных, что и служит показателем улучшения орбиты.

1.1 Корреляционная обработка данных наземно-космического интерферометра и ее требования к точности определения орбиты КА «Спектр-Р»

Программный коррелятор для проекта «Радиоастрон» [6] разработан в АКЦ ФИАН (Астрокосмический центр Физического Института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук) и является важнейшим элементом данного проекта.

Выходные потоки данных коррелятора служат мерой интегрального качества проекта «Радиоастрон» и определяют успех решения поставленных научных задач.

Корреляция – необходимый процесс обработки данных с разных антенн, составляющих радиоинтерферометр. Коррелятор, используемый в проекте «Радиоастрон», построен по схеме программного FX-коррелятора «станция-интерферометр». Это означает, что сначала выполняется Фурье-преобразование сигналов, а потом перемножение их спектров с учетом того,

что каждый из сигналов с i-го телескопа (i=1,2,…,n) задерживается на расчетную задержку относительно центра масс Земли.

По причине того, что КА на орбите и радиотелескопы на Земле движутся с разными скоростями относительно центра Земли, и моменты прихода фронта радиоволны от удаленного радиоисточника на каждый из телескопов различаются, необходимо это различие компенсировать введением дополнительной задержки τ, а также изменением этой задержки. Первый процесс обычно называют поправкой по задержке, а второй – поправкой по частоте интерференции.

Полную задержку можно представить в виде $\tau_{\mathrm{c}} = \tau_{\mathrm{geom}} + \Delta\tau_{\mathrm{b}} + \Delta\tau_{\mathrm{atm}}$. Здесь τ_{geom} – геометрическая задержка, которая вносит наибольший вклад и равна $\tau_{\mathrm{geom}} = (\mathbf{b} \times \mathbf{s})/c$, где **b** – вектор базы наземно-космического интерферометра, **s** – единичный вектор направления на радиоисточник, c – скорость света, $\Delta\tau_{\mathrm{b}}$ – поправка, учитывающая смещение второго из телескопов за время распространения волны от первого до второго телескопа, $\Delta\tau_{\mathrm{atm}}$ – задержка в атмосфере, вычисленная на основе принятой модели распространения радиоволн в атмосфере [7].

Поскольку координаты и скорости движения наземных телескопов в соответствии со стандартами IERS (International Earth Rotation Service) [8] вычисляются с очень высокой точностью, равной соответственно 1 мм и 1 мм/год, а успех корреляционной обработки данных зависит напрямую от базы наземно-космического интерферометра, то, как следствие, все зависит от точности определения положения и скорости КА.

В корреляторе задержка отслеживается с точностью шага выборки данных Δt, где Δt=1/(2Δf), Δf – ширина полосы приема радиосигнала [6,9]. Модельная задержка рассчитывается с использованием оригинальной орбиты баллистическим центром ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Для обнаружения корреляции (максимума кросс-корреляционной функции (ККФ) разность

между расчетной $\tau_{\text{с}}$ и истинной задержкой $\tau_{\text{о}}$ равная $\Delta\tau = \tau_{\text{о}} - \tau_{\text{с}}$ за время интегрирования T_{int} не должна превышать длительности одного (Δt) или нескольких ($m \times \Delta t$) шагов выборки. Увеличение количества шагов выборки необходимо для повышения вероятности обнаружения корреляции, поскольку требование к разности $\Delta\tau$ в пределах длительности одного шага выборки Δt является слишком строгим и практически невыполнимым. Если эта разность существует и постоянна на интервале интегрирования, то присутствует ошибка в определении задержки из-за погрешности в определении длины базы интерферометра Δb. Если максимум ККФ регулярно перемещается по каналам задержки на интервале интегрирования, то присутствует ошибка в скорости изменения длины базы $\mathrm{d}(\Delta b)/\mathrm{d}t$. Если же вдобавок ко всему присутствует ошибка в ускорении изменения длины базы, то происходит перемещение по каналам и ослабление (замывание) ККФ.

Запуск коррелятора с перебором по нескольким шагам выборки называется обработкой в широком окне или «первым прогоном». Если в процессе обработки в широком окне найден отклик ККФ, то запускается режим посткорреляционной обработки, учитывающий найденную поправку к задержке в результате «первого прогона»

В общем случае задержку можно представить рядом Тейлора:

$$\tau_{\text{о}}(t)=\tau_{\text{с}}(t_0)+[\dot{\tau}_{\text{с}}(t_0)+\Delta\dot{\tau}(t_0)](t\text{-}t_0)+\frac{1}{2}[\ddot{\tau}_{\text{с}}(t)+\Delta\ddot{\tau}(t_0)](t\text{-}t_0)^2+\ldots \qquad (1.1)$$

где t_0 – момент, соответствующий началу наблюдений; $\Delta\dot{\tau}$ и $\Delta\ddot{\tau}$ – поправки к производным задержки τ, которые рассчитываются на основе априорных данных по координатам наземной станции и координатам космического радиотелескопа.

Ограничившись в (1.1) членами 1-го и 2-го порядка малости, получим:

$$\Delta\dot{\tau}(t_0)(t\text{-}t_0)+\frac{1}{2}\Delta\ddot{\tau}(t_0)(t\text{-}t_0)^2<\frac{1}{2\Delta f}\,. \qquad (1.2)$$

Из условия (1.2) можно получить оценки [6] допустимой погрешности по $\Delta\dot{\tau}$ и $\Delta\ddot{\tau}$ и, соответственно, по скорости изменения базы $\mathrm{d}(\Delta b)/\mathrm{d}t$ и ускорению ее изменения $\mathrm{d}^2(\Delta b)/\mathrm{d}t^2$, определяющих точность компонент положения, скорости и ускорения КА [7].

Невыполнение этих условий может быть одной из причин того, что из 702 сеансов наблюдений квазаров и активных ядер галактик только в 224 сеансах обнаружена корреляция [6].

Разумеется, причина отсутствия корреляции в отдельных сеансах наблюдений может быть связана не только с неточной орбитой аппарата, но и с малым коррелированным потоком от разрешенных на наземно-космической базе радиоисточников, а также с приемной аппаратурой. В настоящей работе предлагается использование фильтра Калмана для уточнения орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с целью поиска корреляции в отдельных сеансах.

1.2 Основы калмановской фильтрации

1.2.1 Постановка задачи

Предположим, что имеется некоторая динамическая система, состояние которой непрерывно меняется со временем. Выходной сигнал системы $\mathbf{y}(t)$ (n-мерный вектор) известен и несет информацию о состоянии системы, которая описывается *вектором состояния* $\mathbf{X}(t)$. Вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ – это неизвестный m-мерный случайный вектор: $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)]$.

Связь между наблюдаемым выходным сигналом $\mathbf{y}(t)$ динамической системы и вектором состояния $\mathbf{X}(t)$ имеет линейный вид:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{r}(t), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{C}(t)$ – известная $n \times m$-матрица, называемая матрицей плана или матрицей наблюдений, $\mathbf{r}(t)$ – неизвестный n-мерный вектор невязок. Уравнение (1.3) называется моделью наблюдений.

Для дискретных систем состояние известно в моменты наблюдений t_0, t_1, …, t_k, t_{k+1},…, причем моменты t_k, t_{k+1} для разных k не обязательно равноотстоят друг от друга. Моменты наблюдений удобно обозначать их порядковыми номерами: 0,1,…,k,k+1,…

Тогда модель наблюдения в дискретном виде есть:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{r}(k). \tag{1.4}$$

Будем считать, что вектор состояния меняется в соответствии с *уравнением состояния*, также записанным в дискретном виде:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{v}(k), \tag{1.5}$$

где матрица $\mathbf{A}(k)$ размерности $m \times m$ предполагается известной, $\mathbf{v}(k)$ – вектор возмущений. Тогда задача фильтрации формулируется следующим образом.

Рассматривается динамическая система:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{r}(k), \tag{1.6а}$$

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{v}(k). \tag{1.6б}$$

Матрицы обратной связи $\mathbf{A}(k)$ размерности $m \times m$ и наблюдений $\mathbf{C}(k)$ размерности $n \times m$ предполагаются известными. Измеряемый вектор $\mathbf{y}(k)$ имеет размерность n.

Вектор невязок $\mathbf{r}(k)$ размерности n и m-мерный вектор возмущений $\mathbf{v}(k)$ представляют собой дискретные векторные случайные процессы типа белого шума с нулевым средним и априори известными автоковариациями:

$$E\{\mathbf{r}(k)\} = 0,\ E\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}'(j)\} = \mathbf{Q}(k)\delta_{\mathrm{kj}}, \tag{1.7}$$

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = 0,\ E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} = \mathbf{V}(k)\delta_{\mathrm{kj}}, \tag{1.8}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, штрих обозначает транспонирование, $\mathbf{Q}(k)$ – матрица автоковариации вектора невязок $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{V}(k)$ – матрица автоковариации вектора возмущений $\mathbf{v}(k)$. Предполагается также, что начальное состояние, ошибки измерений $\mathbf{r}(k)$ и вектор возмущений $\mathbf{v}(k)$ взаимно не коррелированы:

$$E\{\mathbf{X}(0)\mathbf{r}'(j)\} = 0,\ \mathrm{E}\{\mathbf{X}(0)\mathbf{v}'(j)\} = 0,\ E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{r}'(k)\} = 0. \tag{1.9}$$

Требуется на основе имеющихся данных $\mathbf{y}(k)$ построить такую линейную несмещенную оценку вектора $\hat{\mathbf{X}}(k)$, чтобы дисперсии ошибок

$$\tilde{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k), \tag{1.10}$$

т.е. диагональные элементы матрицы апостериорных автоковариаций

$$\mathbf{P}(k) = E\{\tilde{\mathbf{X}}(k)\tilde{\mathbf{X}}'(k)\} \tag{1.11}$$

были минимальны.

1.2.2 Основные уравнения

Для того чтобы применить фильтр Калмана к какой-либо конкретной задаче, необходимо знать дифференциальное уравнение состояния, которое описывает данный процесс:

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) + \mathbf{W}, \tag{1.12}$$

где $\mathbf{X}$ – вектор состояния системы, $f(\mathbf{X})$ – нелинейная функция этого состояния, $\mathbf{W}$ – случайный процесс, или шум системы.

После преобразования уравнения (1.12) к виду (1.5) [10,11] матрица $\mathbf{A}(k)$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{I} + \mathbf{F}(k)T, \tag{1.13}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерности $m \times m$, T – интервал времени между дискретными отсчетами, а $\mathbf{F}(k)$ – матрица размерности $m \times m$, элементы которой находятся согласно формуле:

$$\mathbf{F}(k) = \left.\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}(k)}. \tag{1.14}$$

Аналогично, если модель наблюдений описывается нелинейным уравнением:

$$\mathbf{Z} = h(\mathbf{X}) + \mathbf{R}, \tag{1.15}$$

где $h(\mathbf{X})$ – нелинейная модель наблюдений, $\mathbf{R}$ – шум наблюдений, то после приведения ее к виду (1.4) матрица $\mathbf{C}(k)$ определится как:

$$\mathbf{C}(k) = \left.\frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}(k)}. \tag{1.16}$$

Заметим, если рассматривается дискретный процесс, то в модели движения (1.12) и модели наблюдений (1.15) достаточно просто расставить индексы соответствующие определенному моменту времени t_k:

$$\dot{\mathbf{X}}(k) = f(\mathbf{X}(k)) + \mathbf{W}(k), \tag{1.17а}$$

$$\mathbf{Z}(k) = h(\mathbf{X}(k)) + \mathbf{R}(k), \tag{1.17б}$$

Таким образом, в процессе линеаризации получаются матрицы $\mathbf{A}(k)$ и $\mathbf{C}(k)$. Эти матрицы в дальнейшем используются для составления уравнений Риккати, которые необходимы для уточнения вектора состояния и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}(k)' + \mathbf{V}(k), \\ &\mathbf{K}(k) = \mathbf{M}(k)\mathbf{C}(k)'(\mathbf{C}(k)\mathbf{M}(k)\mathbf{C}(k)' + \mathbf{Q}(k))^{-1}, \\ &\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k))\mathbf{M}(k). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Теперь можно описать алгоритм действий по уточнению вектора состояния системы:

1. Экстраполяция вектора состояния на момент времени $t_{k+1} > t_0$:

$$\hat{\mathbf{X}}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{X}}(k), \ \hat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{X}(0), \tag{1.19}$$

где $\mathbf{X}(0)$ – априори известные начальные величины вектора состояния;

2. Вычисление матрицы ковариации оценки вектора состояния:

$$\mathbf{P}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{V}(k), \ \mathbf{P}(0) = \bar{\mathbf{P}}(0); \tag{1.20}$$

где $\bar{\mathbf{P}}(0)$ – априори известные начальные величины матрицы ковариации;

3. Вычисление матрицы усиления:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{P}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}; \tag{1.21}$$

4. Вычисление уточненной оценки вектора состояния с учетом новых наблюдений:

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1) = \hat{\mathbf{X}}_*(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{X}}_*(k+1)]; \tag{1.22}$$

5. Вычисление матрицы ковариации уточненной оценки вектора состояния:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}_*(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{P}_*(k+1). \quad (1.23)$$

Далее процесс рекуррентно повторяется, пока не будет исчерпан массив наблюдений $\mathbf{y}(k)$.

Начальное значение матрицы ковариации вектора состояния $\bar{\mathbf{P}}(0)$ выбирается, как правило, из физических соображений. Обычно задаются диагональные элементы, а все остальные принимаются равными нулю. Если нет абсолютно никакой информации о ковариациях искомых параметров, то они полагаются равными любому большому числу в рамках решаемой задачи. Алгоритм таков, что, если начальные условия заданы достаточно хорошо, то элементы ковариационной матрицы сами быстро сойдутся к истинным значениям.

1.3 Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью фильтра Калмана

1.3.1 Модель движения

Простейшая модель, которую можно применить к движению аппарата – это кеплеровская орбита. Однако эта модель слишком проста и не годится для описания движения большинства искусственных спутников Земли, в том числе и КА «Спектр-Р», который, вследствие своей орбиты и конструкции, испытывает значительные воздействия со стороны притяжения тел Солнечной системы (планет, Луны и Солнца), в особенности Луны и Солнца, а также давления солнечного излучения.

Поскольку в перигее спутник проходит достаточно близко к Земле, то нельзя рассматривать Землю как материальную точку с массой m. Необходимо учитывать несферичность гравитационного потенциала нашей планеты и раскладывать геопотенциал в ряд по полиномам Лежандра.

Учитывая все вышесказанное, можем записать [7,11]:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{s}} = -\frac{\mu_{\mathrm{E}}\mathbf{r}_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{s}}^3} + \mathbf{a}_{\mathrm{pl}} + \mathbf{a}_{\mathrm{harm}} + \mathbf{a}_{\mathrm{SPres}}, \quad (1.24)$$

где μ_{E} – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{r}_{\mathrm{s}}$ – геоцентрический радиус-вектор спутника, $\mathbf{a}_{\mathrm{pl}}, \mathbf{a}_{\mathrm{harm}}, \mathbf{a}_{\mathrm{SPres}}$ – возмущающие ускорения от тел Солнечной системы, несферичности геопотенциала и давления солнечного света соответственно. В нашем случае ускорение от тел Солнечной системы имеет вид:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{pl}} = \mu_{\mathrm{pl}} \left(\frac{\mathbf{r}_{\mathrm{pl}} - \mathbf{r}_{\mathrm{s}}}{|\mathbf{r}_{\mathrm{pl}} - \mathbf{r}_{\mathrm{s}}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{pl}}}{|\mathbf{r}_{\mathrm{pl}}|^3} \right), \tag{1.25}$$

где: μ_{pl} – гравитационный параметр планеты, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{pl}}$ – геоцентрический вектор координат планет, Луны и Солнца.

Ускорение от давления солнечного излучения:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{SPres}} = -P_{\mathrm{sun}} C_{\mathrm{R}} \frac{A}{m} \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{sun}}}{r_{\mathrm{sun}}^3} AU^2, \tag{1.26}$$

где: P_{sun} – постоянная давления солнечного излучения на орбите Земли равная 4.56×10^{-6} Н/м^2, C_{R} – коэффициент давления излучения, который равен $1+\varepsilon$, где ε – коэффициент поглощения (ε=1 – полное отражение, ε=0 – полное поглощение излучения), A – эффективная площадь спутника, m – масса спутника, $\mathbf{r}_{\mathrm{sun}}$ –геоцентрический радиус-вектор Солнца, AU – астрономическая единица.

Возмущающее ускорение вследствие несферичности геопотенциала:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{harm}} = \{\ddot{x}_{\mathrm{harm}}, \ddot{y}_{\mathrm{harm}}, \ddot{z}_{\mathrm{harm}}\}, \tag{1.27}$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{harm}} = \sum_{n,m} \ddot{x}_{\mathrm{nm}}, \quad \ddot{y}_{\mathrm{harm}} = \sum_{n,m} \ddot{y}_{\mathrm{nm}}, \quad \ddot{z}_{\mathrm{harm}} = \sum_{n,m} \ddot{z}_{\mathrm{nm}},$$

где $\ddot{x}_{\mathrm{nm}}$, $\ddot{y}_{\mathrm{nm}}$, $\ddot{z}_{\mathrm{nm}}$ – функции, описывающие разложение геопотенциала в ряд по полиномам Лежандра до 10 порядка включительно [7,12] (более подробное описание несферичности геопотенциала будет изложено в разделе 3).

Поскольку радиодальномерные и допплеровские измерения занимают небольшой интервал времени, в пределах нескольких часов, то заданная таким образом приближенная модель вполне достаточна для успешного решения поставленной задачи.

Вектор состояния в данной задаче, как уже было упомянуто выше, включает координаты и составляющие скорости, т.е $\mathbf{X}(t)$ = [$X_s(t), Y_s(t), Z_s(t)$, $V_{xs}(t), V_{ys}(t), V_{zs}(t)$], следовательно, производная по времени данного вектора будет иметь вид: $\dot{\mathbf{X}}(t)$ = [$V_{xs}(t), V_{ys}(t), V_{zs}(t), \ddot{r}_{xs}(t), \ddot{r}_{ys}(t), \ddot{r}_{zs}(t)$], где $\ddot{r}_{is}(t)$ – компоненты ускорения спутника, выраженные через координаты, которые были только что определены выше. Таким образом, модель приведена в соответствие с видом уравнения (1.17а).

1.3.2 Модель наблюдений

Модель наблюдений представляет собой два уравнения: одно – для дальномерных измерений, второе – для допплеровских. Для дальномерных измерений справедливо следующее очевидное соотношение:

$$Z_1 = \sqrt{(X_o - X_s)^2 + (Y_o - Y_s)^2 + (Z_o - Z_s)^2}\,, \tag{1.28}$$

X_o, Y_o, Z_o – геоцентрические координаты наземной станции, X_s, Y_s, Z_s – геоцентрические координаты КА.

Здесь необходимо учесть, что положение КА рассчитывается на момент испускания сигнала, а положение станции, естественно, на момент приема.

Модель допплеровских измерений [13] учитывает члены до 10^{-15} степени малости. Для данной задачи не требуется такая точность. Путем тестирования программы на модельных значениях были оставлены только несколько членов, дающих основной вклад, и, таким образом, модель допплеровских наблюдений приняла следующий вид:

$$Z_2 = V_{dop} = \mathbf{n}(\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_s) + \frac{v_s^2}{2c} - \frac{\mu_E}{r_s c} + L_G c + \frac{\mathbf{D}\mathbf{a}_s}{c} - \frac{\mathbf{v}_o \mathbf{v}_s}{c} + \tag{1.29}$$

$$\frac{\mu_{Moon}}{r_{Moon} c} - \frac{\mu_{Moon}}{|\mathbf{r}_{Moon} - \mathbf{r}_s|\, c} - \frac{\mu_{Moon}}{r_{Moon}^3 c}(\mathbf{r}_s \mathbf{r}_{Moon}) - \frac{\mu_E R_{ref}^2 J_2}{2 r_s^3 c}\left(1 - \frac{3 z_s^2}{r_s^2}\right)),$$

где, $\mathbf{n} = \mathbf{D}/D$ – единичный вектор направления от наблюдателя к КА, $\mathbf{D}$ – вектор, направленный от наблюдателя к КА, D – расстояние между наблюдателем и КА, $\mathbf{v}_o$ – вектор скорости наблюдателя, $\mathbf{v}_s$ – вектор скорости КА, c – скорость света, L_G –безразмерный потенциал геоида (табличное

значение), $\mathbf{a}_s$ – ускорение КА, J_2 – динамический форм-фактор Земли, μ_E, μ_{Moon} – гравитационные параметры Земли и Луны, $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_{Moon}$ – геоцентрические радиус-векторы координат КА и Луны, R_{ref} – экваториальный радиус Земли.

Таким образом, модель наблюдений приведена в соответствие с видом уравнения (1.17б).

1.3.3 Модель задержки радиосигнала

В разделе 1.3.2 было упомянуто, что следует учитывать время распространения радиосигнала от КА до наземной станции слежения. В условиях проекта «Радиоастрон» задержка достигает величин вплоть до 1 секунды. За это время аппарат может переместиться на сотни метров, а, возможно, и на километры.

Модель задержки приводится в работе [13]. Оставив только те члены, которые вносят существенный вклад, получим:

$$\Delta = \frac{D}{c} - \frac{(\mathbf{D}\mathbf{v}_s)}{c^2} + \frac{2\mu_E}{c^3}\ln\frac{r_s + R_{ref} + D}{r_s + R_{ref} - D} + \frac{Dv_s^2}{2c^3} + \frac{(\mathbf{D}\mathbf{v}_s)^2}{2Dc^3} \qquad (1.30)$$

1.4. Результаты работы фильтра Калмана по уточнению орбиты КА «Спектр-Р»

Для тестирования работы фильтра Калмана и для дальнейших вычислений в настоящей работе была написана программа на языке программирования «Fortran» в версии реализации «Intel Visual Fortran 11.1». Компиляция и запуск программы осуществлялась в среде «Visual Studio 2008» под операционной системой «Windows 7».

Первым сеансом наблюдений, используемым в данной работе, был сеанс под кодовым названием «RAES03ST». Сеанс был проведен 7 мая 2013 года в промежуток времени 17:00:00–17:40:00 UTC (Coordinated Universal Time). Наблюдение проводилось в L-диапазоне (18 см) на интерферометре «Радиоастрон»-Евпатория с базой 2,3 диаметра Земли. Радиодальномерные и допплеровские измерения аппарата были проведены на станции Медвежьи Озера в этот же день в 2 этапа в промежуток времени с 13:15:22 по 13:29:22 UTC и с 14:59:07 по 15:13:07 UTC. По техническим причинам весь

промежуток наблюдений разбивается на интервалы по 10 минут, далее в тексте эти промежутки будут называться «сканами». Результаты обработки сеанса представлены на рисунках 1.1 и 1.2.

На рисунке 1.1 представлены кросс-корреляционные функции (зависимость амплитуды интерференционного отклика от задержки и частоты интерференции) для оригинальной орбиты ИПМ РАН (рисунок 1.1а) и для орбиты, рассчитанной с помощью фильтра Калмана (рисунок 1.1б). Из рисунка видно, что для орбиты, рассчитанной с помощью фильтра Калмана, интерференционный отклик оказался ближе к центру картины: величина задержки уменьшилась на 1 мкс, а отклонение по частоте интерференции стало на порядок лучше: 0,03 Гц вместо 0,3 Гц. Это означает, что уточненная орбита точнее орбиты ИПМ по координатам и компонентам скорости.

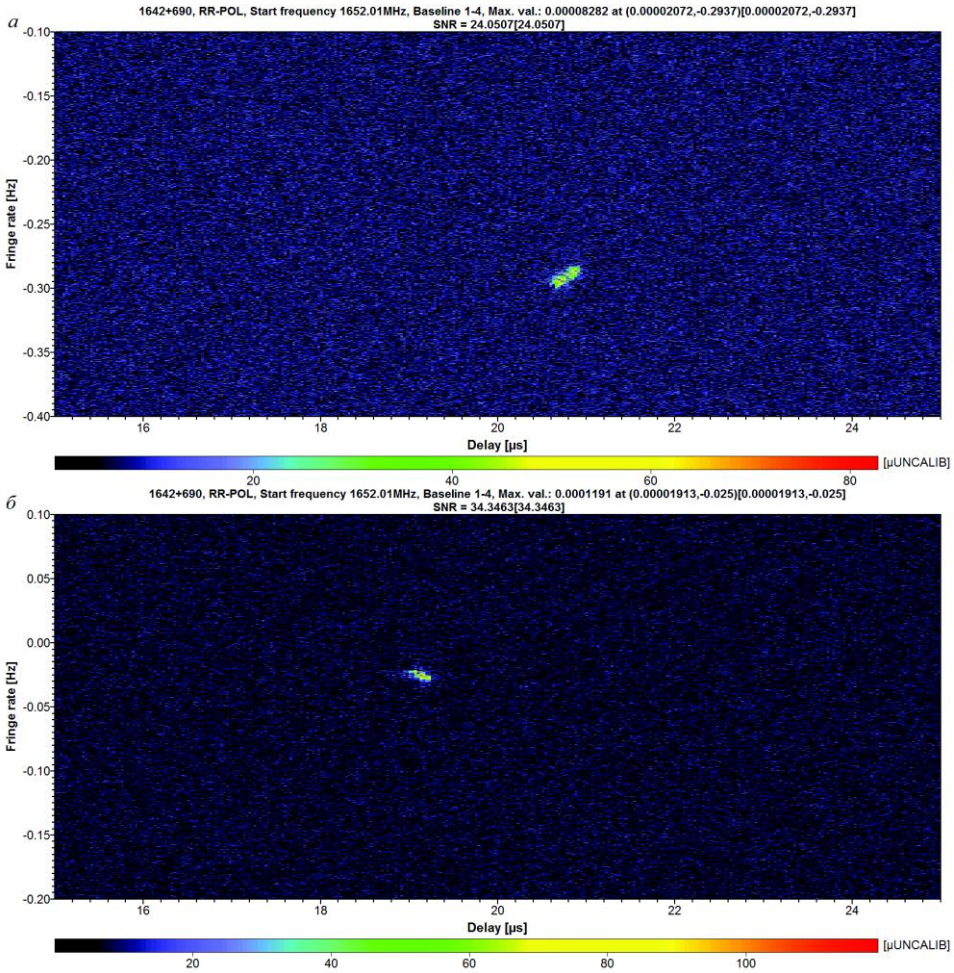


Рисунок 1.1 – Интерферометрический отклик на плоскости fringe rate/delay (частота интерференции/задержка): а) исходные данные; б) уточненные данные

На рисунке 1.2а представлено отношение сигнал/шум (SNR) для двух версий орбит, оригинальной и уточненной. Из рисунка видно, что для уточненной орбиты отношение сигнал/шум увеличилось более чем в 2 раза на всех 4-х сканах наблюдений. Это также говорит о более точном вычислении координат и составляющих скорости КА, поскольку величина отношения сигнал/шум – прямое следствие когерентного сложения двух сигналов с разных радиотелескопов, которое тем больше, чем точнее известны компоненты положения и скорости радиотелескопов, составляющих радиоинтерферометр.

На рисунке 1.2б показан ход поправки к задержке для двух версий орбит на протяжении всего промежутка наблюдений. Как уже было сказано выше, величина поправки к задержке определяет ошибку базы наземно-космического интерферометра. Из рисунка видно, что эта величина меньше для уточненной орбиты.

На рисунке 1.2в представлен ход изменения задержки на протяжении наблюдений. Из рисунка видно, что скорость изменения задержки для улучшенной орбиты уменьшилась на порядок (с $\approx 1{,}8\times10^{-10}$ с/с до $\approx 2\times10^{-11}$ с/с), что означает более точное определение скорости изменения базы наземно-космического интерферометра (6 мм/с вместо ≈5 см/с).

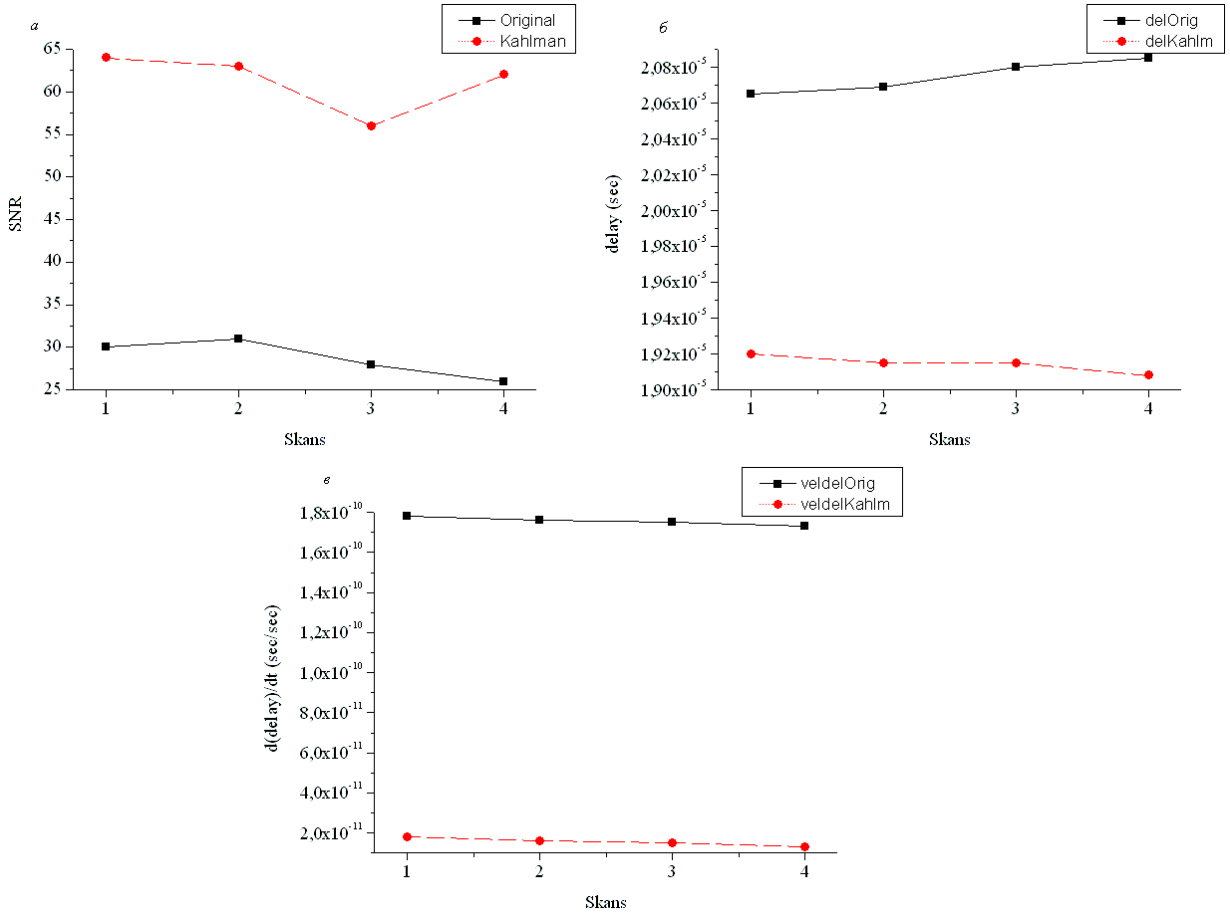


Рисунок 1.2 - а) Отношение сигнал/шум (SNR) при наблюдениях на протяжении 4-х сканов (1 скан – 10 минут наблюдений), Original – исходные данные, Kahlman – уточненные данные; б) Поведение задержки (delay) при наблюдениях на протяжении 4-х сканов, delOrig – задержка для исходных данных, delKahlm – задержка для уточненных данных; в) Поведение скорости изменения задержки d(delay)/dt при наблюдениях на протяжении 4-х сканов, veldelOrig – исходные данные, veldelKahlm – уточненные данные

Следующим обработанным сеансом стал «RAES03OE». Сеанс был проведен 12 марта 2013 года в промежуток времени 16:30:00-17:10:00 UTC на интерферометре «Радиоастрон»-Евпатория с базой 2 диаметра Земли. Существенное отличие данного сеанса от предыдущего состоит в том, что наблюдения проводились в С-диапазоне (6,2 см), который накладывает более серьезные требования к точности априорной оценки орбиты, нежели L-диапазон. В этом легко убедиться из простейшей оценки $\Delta f = \Delta v \times f / c$. Для того, чтобы остаться в пределах той же ошибки по частоте интерференции

Δf при наблюдениях на большей частоте необходимо уменьшить неопределенность в скорости аппарата. Другими словами, проводя наблюдения на частоте в три раза большей, мы должны знать компоненты скорости аппарата в три раза лучше.

Радиодальномерные и допплеровские измерения аппарата были проведены на станции в Уссурийске в этот же день в 2 этапа в промежуток времени с 06:12:40.5 по 06:27:37.5 UTC и с 07:20:09.5 по 07:35:08.5 UTC. Результаты обработки сеанса представлены на рисунке 1.3.

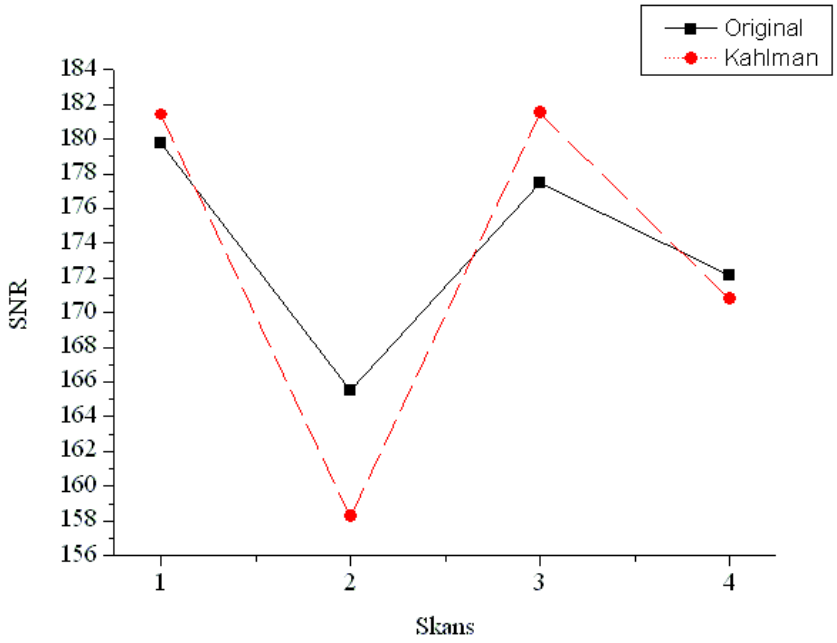


Рисунок 1.3 – Отношение сигнал/шум при наблюдениях в сеансе «RAES03OE» на протяжении 4-х сканов, Original – исходные данные, Kahlman – уточненные данные

На рисунке 1.3 показано отношение сигнал/шум для двух версий орбит, орбиты ИПМ и уточненной с помощью фильтра Калмана. Для первой орбиты результаты представлены после посткорреляционной обработки, для уточненной – после «первого прогона». Поскольку программное обеспечение обработки данных с коррелятора позволяет отображать прогнозное значение отношения сигнал/шум для посткорреляционной обработки по результатам прогона в широком окне, то сравнение с оригинальной орбитой ИПМ проводилось именно по этому параметру. Из рисунка 1.3 видно, что фильтр

Калмана местами улучшает показания оригинала. Этого факта достаточно, чтобы ожидать появления корреляции в тех сеансах, где ее не было. Таким образом, показана способность алгоритма к улучшению орбиты в С-диапазоне.

Сеанс «RAES03BB» был выбран для тестирования программы на сеансе с отсутствующей корреляцией. Сеанс был проведен 21 июля 2012 года в промежуток времени 12:30:00-13:30:00 UTC на интерферометрах «Радиоастрон»–Yebes (Испания), «Радиоастрон»–Медичина (Италия), «Радиоастрон»–Робледо (Испания) с базой два диаметра Земли. Радиодальномерные и допплеровские измерения аппарата были проведены на станции в Уссурийске в этот же день в 2 этапа в промежуток времени с 08:46:55 по 09:01:15 UTC и с 09:54:51 по 10:08:35 UTC. При использовании фильтра Калмана корреляция не была найдена ни в С, ни в L-диапазоне. Вопрос о причинах отсутствия корреляции остается открытым. Далее была предпринята попытка рассмотреть сеанс с отсутствием корреляции в отдельных сканах.

Таким образом, следующим обработанным сеансом оказался RAES03BC, где при использовании оригинальной орбиты ИПМ корреляция была найдена в пяти из шести сканов. Сеанс наблюдений проводился также 21 июля 2012 года в промежуток времени 16:30:00-17:30:00 UTC на интерферометре «Радиоастрон» - Эффельсберг (Германия) с базой 3 диаметра Земли. Используемые радиодальномерные и допплеровские данные те же, что и для сеанса RAES03BB. При обработке с использованием как орбиты ИПМ, так и уточненной с использованием фильтра Калмана из 6 сканов корреляция не найдена только в 4-ом, причем во всех остальных сканах наблюдалось достаточно устойчивое и хорошее отношение сигнал/шум. Результаты обработки сеанса представлены на рисунке 1.4.

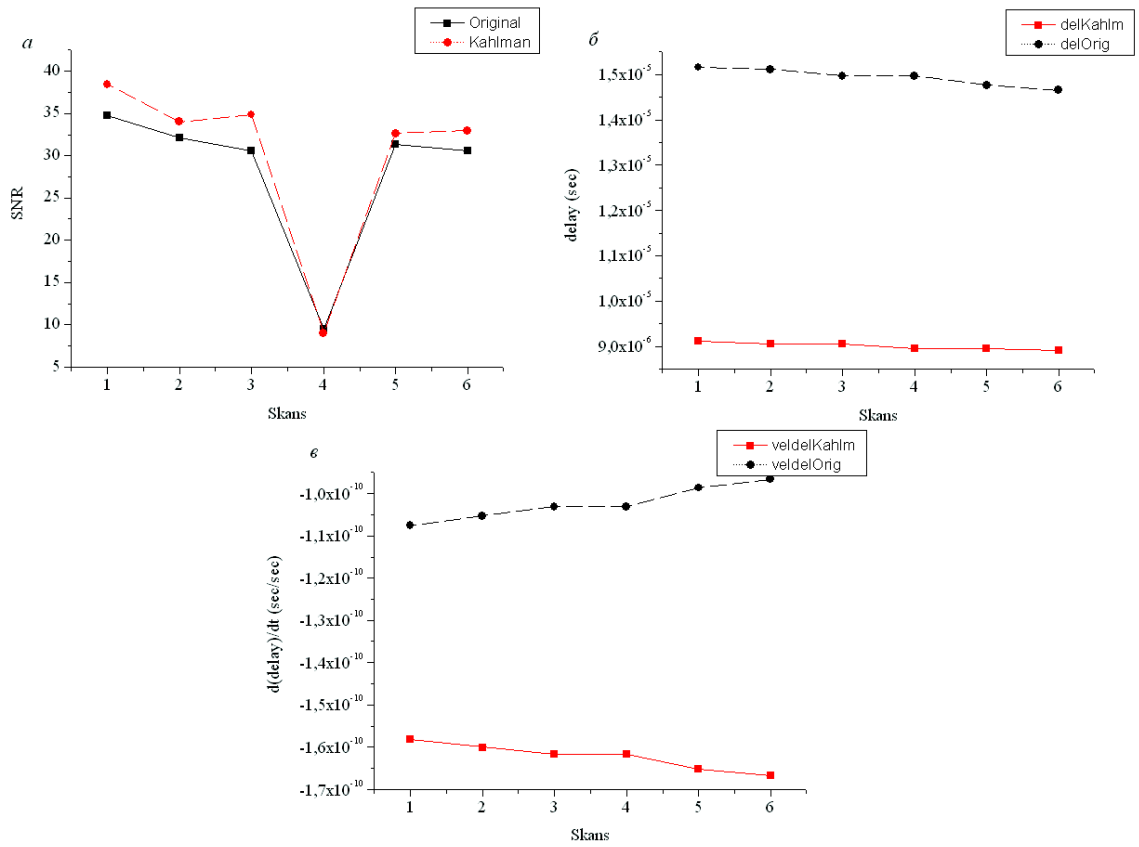


Рисунок 1.4 - а) Отношение сигнал/шум при наблюдениях в сеансе RAES03BC на протяжении 6-и сканов, Original – исходные данные, Kahlman – уточненные данные; б) Поведение задержки при наблюдениях в сеансе RAES03BC на протяжении 6-и сканов, delOrig – задержка для исходных данных, delKahlm – задержка для уточненных данных; в) Поведение скорости изменения задержки при наблюдениях в сеансе RAES03BC на протяжении 6-и сканов, veldelOrig – исходные данные, veldelKalm – уточненные данные

Из рисунка 1.4а видно, что с использованием фильтра Калмана удалось увеличить отношение сигнал/шум для 5 сканов (кроме 4-го) приблизительно на 14 процентов. К сожалению, в 4-ом скане корреляция так и не была обнаружена. С учетом того, что отношение сигнал/шум, наблюдаемое в соседних сканах достаточно высоко, а задержки до и после 4 скана описываются гладкой функцией, можно судить о том, что во время наблюдения, соответствующему 4-му скану, произошел некий сбой в аппаратуре.

На рисунке 1.4б показан ход поправки к задержке для двух версий орбит на протяжении всего промежутка наблюдений. В результате уточнения

орбиты поправка к задержке $\Delta\tau$ уменьшилась на 6 мкс, что говорит об увеличении точности определения орбиты.

На рисунке 1.5 для наглядности различия между уточненной орбитой и орбитой ИПМ представлено изменение со временем разности координат КА «Спектр-Р».

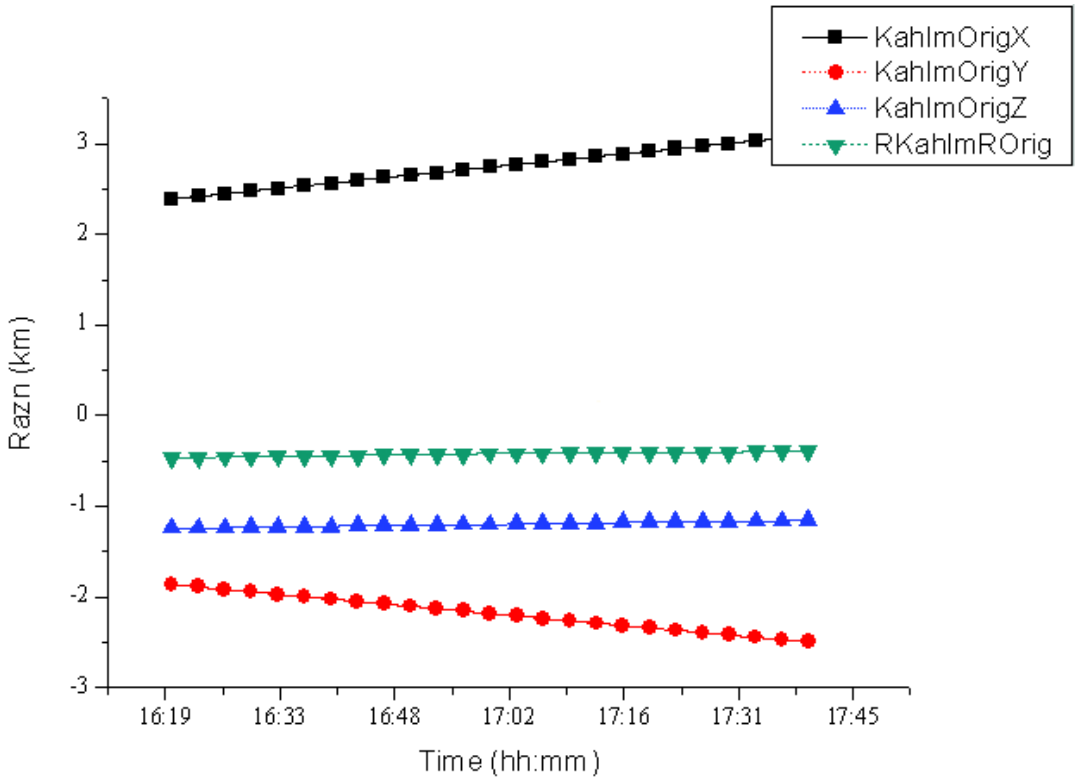


Рисунок 1.5 – Поведение разности компонент X,Y,Z орбиты, вычисленной с помощью фильтра Калмана, и орбиты ИПМ, а также модуля разности геоцентрических радиус-векторов аппарата для оригинальной и уточненной орбиты; сеанс RAES03BC

Так как

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}((X_{\text{Kahlm}} - X_{\text{IPM}})x + (Y_{\text{Kahlm}} - Y_{\text{IPM}})y + (Z_{\text{Kahlm}} - Z_{\text{IPM}})z),$$

где $x = \cos\delta\cos\alpha$, $y = \cos\delta\sin\alpha$, $z = \sin\delta$ – компоненты единичного вектора направления на источник со склонением δ и прямым восхождением α, а разности координат КРТ, исходя из рисунка, лежат в пределах:

$(X_{\text{Kahlm}} - X_{\text{IPM}})$=2,5÷3,0 км, $(Y_{\text{Kahlm}}$-$Y_{\text{IPM}})$= -2,5÷-2,0 км, $(Z_{\text{Kahlm}} - Z_{\text{IPM}})$~ -1,3 км,

то становится наглядным исправление задержки на 6 мкс, которая в эквиваленте поправки по положению КА составляет 1.8 км.

В результате уточнения орбиты КА «Спектр-Р», выполненного с помощью фильтра Калмана с использованием радиодальномерных и допплеровских измерений можно заключить следующее.

Улучшение результатов при корреляции впервые было обнаружено при наблюдениях в L-диапазоне, который накладывает не слишком строгие ограничения по скорости и местоположению аппарата на орбите. Обработка данных была проведена и в С-диапазоне с более существенными ограничениями на точность определения координат и компонент скорости КА. Показано, что алгоритм дает положительный результат и в этом диапазоне. Практически во всех рассмотренных случаях (сеансах) улучшен показатель отношения сигнал/шум, с одновременным уменьшением задержки и остаточной частоты интерференции, что является уверенным подтверждением успешной работы алгоритма по уточнению орбиты КА.

Вопрос относительно не найденной корреляции в тех сеансах, в которых она и не наблюдалась, остался открытым. Вероятно, причина в наблюдениях в С- и К-диапазонах, которые требуют гораздо более точного определения орбиты аппарата. Однако практика показала, что отсутствие корреляции также может носить как технический характер, так и являться следствием грубых результатов радиодальномерных измерений. Попытка разрешить эту проблему была предпринята в комплексе исследований, проведенных в разделе 2 настоящей работы.

2 Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» и необходимые для этого условия при использовании фильтра Калмана

Результаты раздела 2 основаны на статье [14] из списка использованных источников. В предыдущем разделе были рассмотрены сеансы наблюдений, в которых получено улучшение орбиты КА «Спектр-Р» благодаря применению фильтра Калмана. Сравнение проводилось с оригинальными орбитами, рассчитываемыми в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ РАН). Необходимость улучшения орбиты, во-первых, связана с нахождением корреляции на базе интерферометра с длиной до 300 тысяч км и, во-вторых, с увеличением времени когерентного накопления сигнала. В результате проведенной работы также был выявлен ряд сеансов, в которых не было замечено явного улучшения орбиты аппарата, и которые были связаны либо с плохими условиями наблюдений, либо с техническими неполадками.

В настоящем разделе рассматриваются вопросы применения фильтра Калмана при использовании только одного комплекта радиодальномерных данных и анализа условий, при выполнении которых будет наблюдаться улучшение орбиты.

Вычисления проводились для сеанса наблюдений «RAES03PU», который был проведен 27.03.2013 в промежуток времени 21:00-21:40 UTC. База интерферометра ≈ 220 тыс. км. Наблюдения выполнены в С – диапазоне (6,2 см, 4,83 ГГц), в двух полосах частот: USB (Upper Sideband) – наблюдения в верхней полосе частот, LSB (Lower Sideband) – наблюдения в нижней полосе частот. Вычисление корреляции возможно как в каждой из полос, так и одновременно в двух полосах (USB&LSB). Радиодальномерные данные, предшествующие наблюдениям, были получены на телескопе в Уссурийске 27.03.2013 в два этапа: 04:22:40.5 – 04:37:37.5 (UTC) и 05:56:12.5 – 06:11:10.5 (UTC).

Данный сеанс интересен для проверки по следующим причинам. Во-первых, статус его корреляции переменный, это означает, что орбита спутника определена на грани допустимой точности и нуждается в уточнении; во-вторых, для данного сеанса в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на основе улучшенной модели движения аппарата «Спектр-Р» данная орбита была пересчитана и в результате корреляционной обработки показала намного лучшие результаты. Это позволило наглядным образом проверить работу алгоритма и оценить его свойства применительно к задаче уточнения КА в проекте «Радиоастрон».

2.1 Анализ работы алгоритма фильтра Калмана в сеансе «RAES03PU»

При обработке наблюдений 40 минутная запись была разделена на 10-минутные интервалы (сканы), в каждом из которых определялись отношение сигнал/шум (SNR), величина задержки τ и скорость изменения задержки $\dot{\tau} = d\tau / dt$. Данные величины напрямую зависят от точности рассчитанной орбиты и, таким образом, служат мерой ее качества. Обычно считается, что корреляция найдена, если SNR>12.

Для данного сеанса в ИПМ были рассчитаны две орбиты (обозначим их как Орб 1 и Орб 2). Орбита Орб 2 получена путем уточнения модели движения аппарата. В таблице 2.1 представлены результаты корреляционной обработки орбиты Орб 1.

Таблица 2.1 – Результат корреляционной обработки для орбиты Орб 1

Время UTC (чч:мм)	SNR	$\tau \times 10^{-5}$(сек)	$\dot{\tau} \times 10^{-10}$ (сек/сек)
	USB&LSB		
21:10	9,3	0,650	4,103
21:20	9,1	2,103	1,435
21:30	9,2	2,108	1,430
21:40	9,2	-3,514	2,979
	LSB		
21:10	14,4	2,088	1,426
21:20	13,5	2,100	1,425
21:30	15,9	2,103	1,421

21:40	8,9	4,350	-1,568
	USB		
21:10	9,6	-2,988	0,362
21:20	11,7	2,103	1,427
21:30	12,9	2,106	1,422
21:40	12,1	2,122	1,422

Из таблицы 2.1 видно, что корреляция наблюдается не во всех сканах наблюдений, причем для разных полос корреляция отсутствует в разных сканах. Отсутствие значимой величины SNR для случая USB&LSB представляется весьма странным, поскольку соответствующие задержки и скорости изменения задержки близки по значению к полосам LSB и USB для 2 и 3 сканов.

В таблице 2.2 показаны результаты корреляционной обработки для орбиты Орб 2.

Таблица 2.2 – Результат корреляционной обработки для орбиты Орб 2

Время UTC (чч:мм)	SNR	$\tau \times 10^{-6}$(сек)	$\dot{\tau} \times 10^{-11}$ (сек/сек)
	USB&LSB		
21:10	16,9	6,688	3,440
21:20	18,2	6,734	3,440
21:30	17,4	6,703	3,440
21:40	16,2	6,750	3,458
	LSB		
21:10	14,6	6,688	3,476
21:20	16,2	6,719	3,458
21:30	17,4	6,688	3,440
21:40	12,0	6,719	3,475
	USB		
21:10	14,3	6,656	3,465
21:20	15,2	6,719	3,446
21:30	15,0	6,688	3,446
21:40	14,2	6,750	3,446

Из таблицы 2.2 видно значительное увеличение SNR по сравнению с орбитой Орб 1, а также уменьшение величин τ и $\dot{\tau}$. Это говорит о том, что

вычисленная орбита стала «ближе» к реальной в смысле уменьшения различия в координатах и компонентах скорости аппарата.

Радиодальномерные измерения были применены для уточнения орбит Орб 1 и Орб 2 с использованием фильтра Калмана, которые назовем Орб 3 и Орб 4. Результаты корреляционной обработки орбиты Орб 3 представлены в таблице 2.3, а орбиты Орб 4 – в таблице 2.4.

Таблица 2.3 – Результат корреляционной обработки для орбиты Орб 3

Время UTC (чч:мм)	SNR	$\tau \times 10^{-5}$(сек)	$\dot{\tau} \times 10^{-10}$ (сек/сек)
	USB&LSB		
21:10	13,6	1,963	1,168
21:20	14,9	1,975	1,163
21:30	17,5	1,980	1,163
21:40	10,4	4,503	3,850
	LSB		
21:10	13,0	1,959	1,170
21:20	13,1	1,975	1,168
21:30	16,2	1,978	1,163
21:40	11,6	1,994	1,164
	USB		
21:10	8,8	-5,159	2,363
21:20	12,5	1,975	1,168
21:30	13,4	1,978	1,163
21:40	12,6	1,991	1,161

Таблица 2.4 – Результат корреляционной обработки для орбиты Орб 4

Время UTC (чч:мм)	SNR	$\tau \times 10^{-6}$(сек)	$\dot{\tau} \times 10^{-12}$ (сек/сек)
	USB&LSB		
21:10	17,8	6,891	-1,092
21:20	18,2	6,938	-1,456
21:30	18,0	6,922	-1,274
21:40	15,4	6,969	-1,383
	LSB		
21:10	15,9	6,875	-1,274
21:20	15,4	6,938	-1,274
21:30	17,1	6,906	-1,274
21:40	12,8	6,938	-1,210

	USB		
21:10	14,6	6,875	-1,088
21:20	14,0	6,938	-1,451
21:30	13,8	6,906	-1,270
21:40	14,6	6,938	-1,379

Из таблицы 2.3 видно, что фильтрация Калмана приводит к значительному улучшению SNR для сканов в USB&LSB. Более того, в 4 скане для случая LSB на основе показаний задержек и скорости изменения задержки можно судить о найденной корреляции, несмотря на достаточно слабое отношение SNR.

Как было сказано выше, мы считаем, что корреляция найдена тогда, когда SNR>12, однако этот критерий не является строгим и базируется на предположении, что шум коррелируемого сигнала подчиняется нормальному распределению случайной величины в пределах 3 сигма. То есть SNR≈11÷12 соответствует трем сигма, и SNR выше этого значения можно принимать за полезный сигнал (хотя и здесь достоверность этого факта составляет ≈0,997). Когда возникают такие спорные моменты, определяющим фактором наличия корреляции служат показания задержек и скорости изменения задержки: если задержки в спорном скане согласуются с задержками в соседних сканах – корреляция найдена, если нет – корреляция отсутствует. Таким образом, исходя из результатов таблицы 2.3 для случая LSB, можно уверенно сказать о найденной корреляции в четвертом скане.

Из таблицы 2.4 следует, что величина SNR выросла незначительно по сравнению с корреляционной обработкой орбиты Орб 2, но значительно уменьшилась скорость изменения задержки (≈ в 30 раз). Это означает, что посредством применения фильтрации Калмана скорость изменения базы наземно-космического интерферометра, соответственно, и скорость самого аппарата оценены на порядок лучше.

В таблице 2.5 приводятся координаты и компоненты скорости аппарата для 4-х рассмотренных выше вариантов орбит.

Таблица 2.5 – Координаты и компоненты скорости для четырех версий орбит на момент 20:50 UTC 27.03.2013

	Орб 1	Орб 2	Орб 3	Орб 4
X(км)	-41101,246	-41098,980	-41100,813	-41098,909
Y(км)	191800,547	191803,301	191800,629	191802,927
Z(км)	98900,057	98894,692	98900,070	98894,376
R(км)	219676,998	219676,563	219676,995	219676,081
Vx(км/с)	-0,515495	-0,515472	-0,515483	-0,515469
Vy(км/с)	1,008792	1,008796	1,008792	1,008787
Vz(км/с)	-0,303554	-0,303587	-0,303555	-0,303595
V(км/с)	1,172835	1,172837	1,172830	1,172829

Из таблицы 2.5 видно, что:

- модуль расстояния и скорости для орбит ИПМ (Орб 1 и Орб 2) и рассчитанных с помощью фильтра Калмана (Орб 3 и Орб 4) отличаются незначительно в пределах нескольких метров и миллиметров в секунду соответственно, при этом координаты и компоненты скорости расходятся в пределах сотен метров и сантиметров в секунду;

- при различии в сотни метров и миллиметров в секунду по модулю расстояния и скорости между орбитами ИПМ Орб 1 и Орб 2, отличие по координатам составляет до 5 км, по компонентам скорости до 3 см/с;

Из таблицы 2.5 следует, что орбита, полученная в результате фильтрации Калмана, определяется исходной орбитой (Орб 1 и Орб 3), как и следует из теории фильтрации. Однако алгоритм фильтрации Калмана приводит к неопределенности в уточнении координат и компонент скорости, поскольку основой уточнения являются модули расстояния и радиальной скорости, которые могут принимать одно и то же значение при сильно изменяющихся значениях компонент, что видно из таблицы 2.5. Алгоритм оказался неспособным с начальным приближением на основе орбиты Орб 1 получить орбиту близкую к орбите Орб 2, которая по факту является лучшей.

Для того чтобы ответить на вопрос, почему так происходит, и что необходимо сделать для улучшения ситуации, кратко рассмотрим основы алгоритма фильтрации Калмана.

2.2 Условие наблюдаемости в задаче определения орбиты КА

Обычно применение фильтра Калмана сопровождается анализом наблюдаемости системы. Под наблюдаемостью системы понимается возможность непосредственного или косвенного определения состояния системы (вектора состояния системы) на основе измерения некоторых других величин и использования априорной информации [15]. Если возможно определение полного вектора состояния системы **X**, то говорят о полной наблюдаемости, а соответствующая система называется вполне наблюдаемой. Если же существует возможность определения лишь части компонент вектора состояния **X**, то имеет место неполная наблюдаемость, а система называется не вполне наблюдаемой. Проанализируем на предмет наблюдаемости задачу определения орбиты КА на основе одного комплекта радиодальномерных и доплеровских измерений.

Рассмотрим движение спутника, вектор состояния которого следует уточнить, на орбите вокруг Земли, считая ее идеальной сферической планетой с однородным распределением массы (рисунок 2.1).

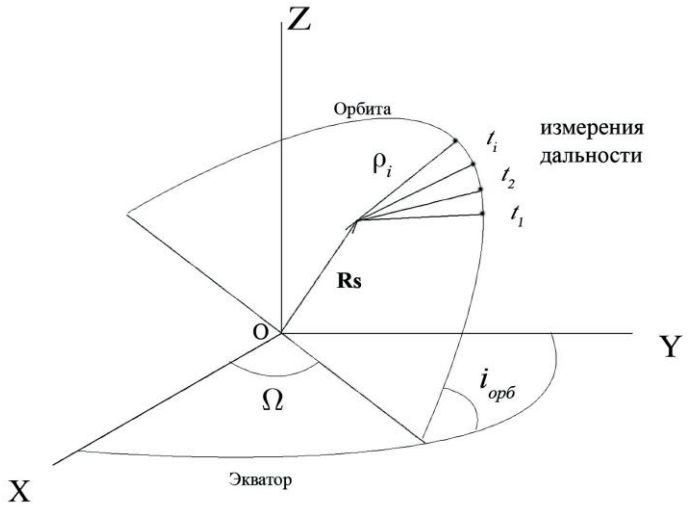


Рисунок 2.1 – Дальномерные измерения аппарата в случае одной наземной станции

Система координат OXYZ является геоцентрической, оси OX и OY определяют экваториальную плоскость системы. Предположим также, что на спутник не действуют никакие другие силы, и его движение является результатом только одного гравитационного взаимодействия с планетой. Пусть на Земле находится радиолокационная станция с геоцентрическим радиус-вектором $\mathbf{R_s}$, способная с высокой точностью определять дальность ρ_i до спутника в момент времени t_i. Таким образом, у нас имеется модель движения спутника, модель наблюдений и измерения дальности до спутника.

Применим фильтр Калмана [1,11,16] к данной задаче. Из рисунка 2.1 можно заметить, что существует бесконечное количество решений, соответствующих одному и тому же комплекту наблюдений ρ_i, и без дополнительных априорных знаний относительно наклонения орбиты i_{orb} и долготы восходящего узла Ω единственное решение задачи невозможно. То есть система в такой постановке задачи является не вполне наблюдаемой.

С математической точки зрения система вполне наблюдаема, если выполняются следующие условия.

Допустим, что рассматриваемую систему и наблюдения этой системы можно представить в линейном виде [16]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_i &= \boldsymbol{\Phi}(t_i, t_k)\boldsymbol{X}_k \\ \boldsymbol{Y}_i &= \tilde{\boldsymbol{H}}_i \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_k$ – значения вектора состояния системы $\mathbf{X}$ в моменты времени t_i и t_k, $\boldsymbol{\Phi}(t_i, t_k)$ - матрица перехода, $\boldsymbol{Y}_i$ - вектор-столбец наблюдений, выполненных в момент времени t_i, $\tilde{\boldsymbol{H}}_i$ - матрица наблюдений, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ - неизвестный вектор-столбец невязок наблюдений, $i = 1,\ldots l$. Система вполне наблюдаема, если для любого момента времени t_k и вариации произвольного вещественного вектора состояния $\delta \boldsymbol{X}_k$ справедливо следующее неравенство:

$$\delta \boldsymbol{X}_k^T \boldsymbol{\Lambda} \delta \boldsymbol{X}_k > 0, \tag{2.2}$$

где матрица информации Λ размерности $n \times n$ имеет вид [16]:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{\Phi}^T(t_i, t_k)\tilde{\boldsymbol{H}}_i^T \boldsymbol{R}_i^{-1} \tilde{\boldsymbol{H}}_i \boldsymbol{\Phi}(t_i, t_k) = \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{H}, \qquad (2.3)$$

где $\boldsymbol{R}$ - матрица автоковариации вектора невязок наблюдений.

Таким образом, математический критерий условия наблюдаемости системы заключается в том, чтобы матрица Λ была положительно определена, а это означает, что матрица наблюдений $\boldsymbol{H}$ должна иметь полный ранг.

Применительно к нашей задаче это означает, что для успешного ее решения (определения трех координат и компонент скорости) нам необходимы 3 независимых измерения дальности и радиальной скорости с трех станций, расположенных на Земле. Использование одного комплекта радиодальномерных данных всегда будет приводить к одному из множества возможных решений, которое не всегда будет истинно верным, что и было показано на примере сеанса «RAES03PU».

Для того, чтобы увидеть принципиальное различие в работе алгоритма при наличии трех измерений, были проведены численные расчеты, основанные на двух версиях орбит сеанса «RAES03PU».

2.3 Численное моделирование уточнения орбиты КА «Спектр-Р» на основе независимых измерений дальности с трех станций

В настоящее время радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости КА «Спектр-Р» выполняются на станциях Медвежьи Озера и Уссурийск. При этом, как правило, перед очередным сеансом наблюдений измерения проводятся только одной станцией. Таким образом, мы обладаем одним комплектом радиодальномерных данных, что, как было доказано выше, является недостаточным для полного решения задачи. Поэтому было выполнено моделирование орбиты [14] с использованием одновременных измерений дальности с трех станций.

Для этого, во-первых, орбита ИПМ Орб 2 была использована в качестве модели истинного положения аппарата; во-вторых, начальная точка для

инициализации фильтра Калмана бралась на основе старой орбиты Орб 1, моделирующей неточное знание истинной орбиты; в-третьих, дополнительно к станциям «Медвежьи Озера» и «Уссурийск» была добавлена станция «Пущино», моделирующая 3-ю наземную станцию.

На основе орбиты ИПМ Орб 2 и координат трех наземных станций были смоделированы одновременные измерения дальности. Для моделирования необходимо было задать ошибку измерений расстояния. Она была положена равной 1 см. Модельные значения дальности охватывали один 30 минутный этап с 14:00:00 по 14:30:00 (UTC). Для простоты численный расчет проводился только для дальномерных измерений. Поскольку радиодальномерные и доплеровские данные учитываются алгоритмом независимо, уточняя отдельно координаты и, соответственно, компоненты скорости, то подтверждение уточнения координат по радиодальномерным измерениям будет означать уточнение компонент скоростей при использовании доплеровских измерений.

Результаты моделирования представлены на рисунке 2.2.

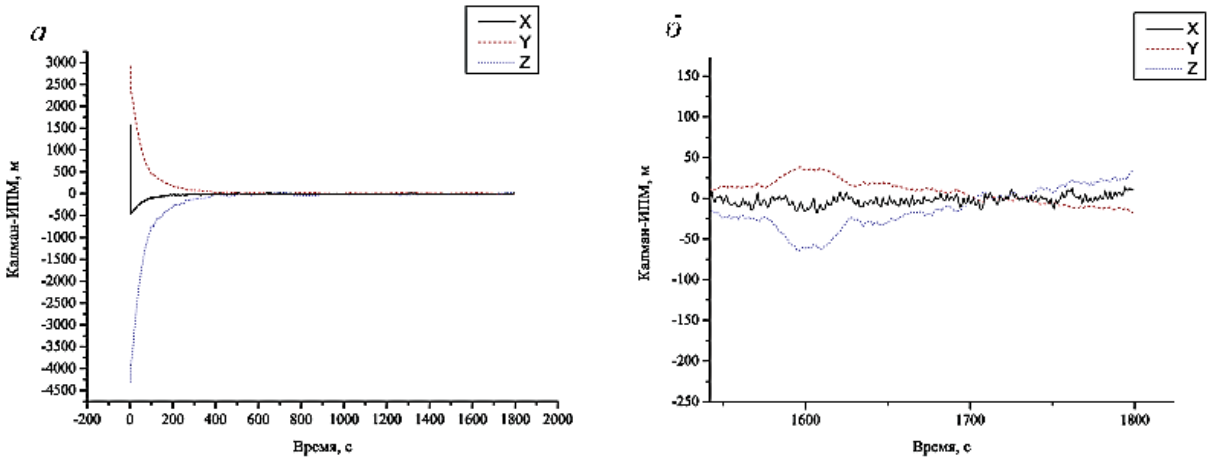


Рисунок 2.2 – *а*) Разность координат X,Y,Z численного моделирования уточнения орбиты аппарата «Спектр-Р» и орбиты ИПМ на основе трех независимых измерений дальности на всем временном интервале моделирования; *б*) Разность координат X,Y,Z численного моделирования уточнения орбиты аппарата «Спектр-Р» и орбиты ИПМ на основе трех независимых измерений дальности на окончании временного интервала моделирования

На рисунке 2.2 по вертикальной оси отложена разность в метрах между вычисленными координатами аппарата и орбитой ИПМ Орб 2, моделирующей истинное положение спутника, по горизонтальной оси – время в секундах от 14:00:00 UTC. Из представленных данных видно, что при начальном различии координат в несколько километров, алгоритм однозначно сводит расчетные значения координат с погрешностью в несколько десятков метров к координатам оригинальной орбиты.

При этом стоит отметить, что ошибка дальности составляет всего несколько сантиметров после 15 минут интегрирования, что видно из рисунка 2.3 (а, б, в).

На рисунке 2.3а показана ошибка дальности с трех станций до КА «Спектр-Р» (delta R1 – Медвежьи Озера, delta R2 – Уссурийск, delta R3 - Пущино) на всем интервале, модулирующем радиодальномерные измерения. На рисунке 2.3б показана ошибка дальностей на интервале времени, на котором алгоритм выходит на стационарную работу. На рисунке 2.3в представлена часть графика, показывающая ошибку дальности при выходе алгоритма на стационарный процесс.

Отличие расчетных величин от заявленной ошибки в 1см, скорее всего, является результатом ошибок интегрирования и неточной модели движения спутника и наблюдений, заложенных в программу. Однако, как видно на рисунке 2.3г, усреднение величины ошибки на интервале 100 секунд соответствует заявленной точности. Кроме того, стоит учитывать, что алгоритм работает в данном случае со скоростями старой орбиты, которые не уточняются в процессе его работы, и, значит, дополнительно к ошибкам интегрирования добавляется систематическая ошибка вектора предсказания на каждом шаге.

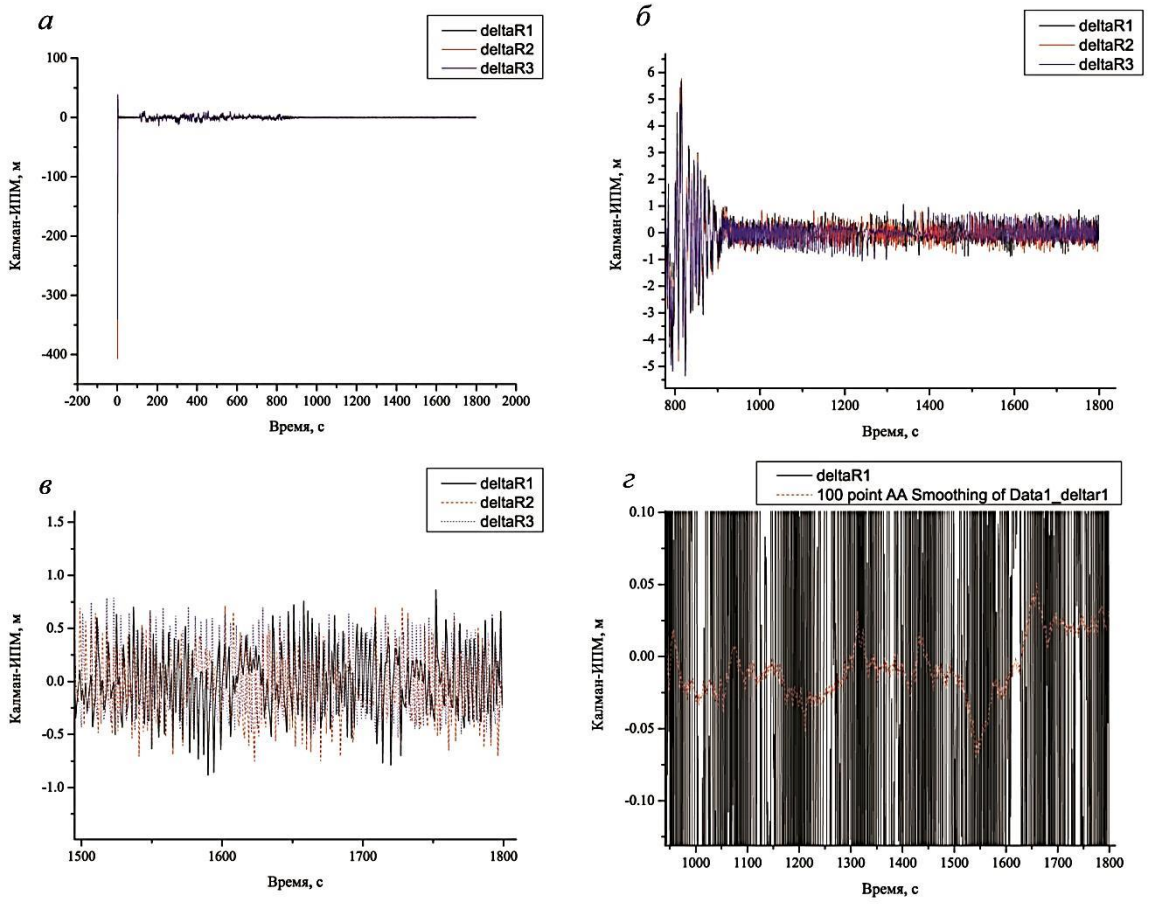


Рисунок 2.3 – *а*), *б*), *в*) – Ошибка дальности до КА «Спектр-Р» с трех наземных станций (deltaR1, deltaR2, deltaR3) в начале, середине и на конце временного интервала численного моделирования; *г*) – усредненная величина на временном интервале 100 секунд ошибки дальности до КА «Спектр-Р» со станции Медвежьи Озера (deltaR1) на конце временного интервала моделирования

Для проверки работы алгоритма при больших ошибках в начальных условиях к первоначальным геоцентрическим координатам X,Y,Z было добавлено по 5 километров. Результат представлен на рисунке 2.4.

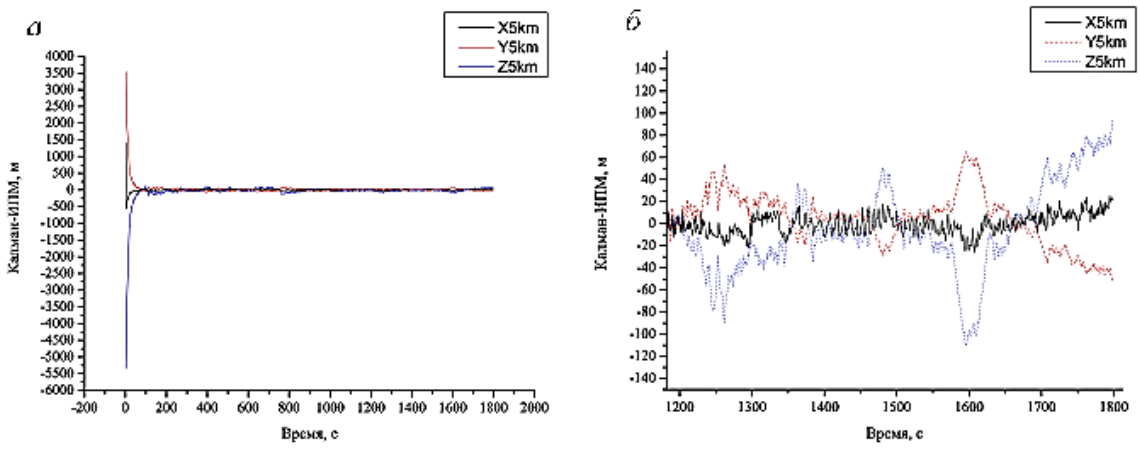


Рисунок 2.4 – *а*) Разность координат X,Y,Z численного моделирования уточнения орбиты аппарата «Спектр-Р» на основе трех независимых измерений дальности и орбиты ИПМ при плохой начальной точке на всем временном интервале моделирования; *б*) Разность координат X,Y,Z численного моделирования уточнения орбиты аппарата «Спектр-Р» на основе трех независимых измерений дальности и орбиты ИПМ при плохой начальной точке на конце временного интервала моделирования

Как видно, алгоритм и в этом случае прекрасно справляется с поставленной задачей.

Если предположить, что измерения дальности проводятся только с двух станций, то ситуация меняется.

На рисунке 2.5б видно, что при уточнении модуля дальности, тем не менее, отсутствует сходимость по координатам (рисунок 2.5а) к оригинальной орбите, в чем и проявляется явление неполной наблюдаемости системы.

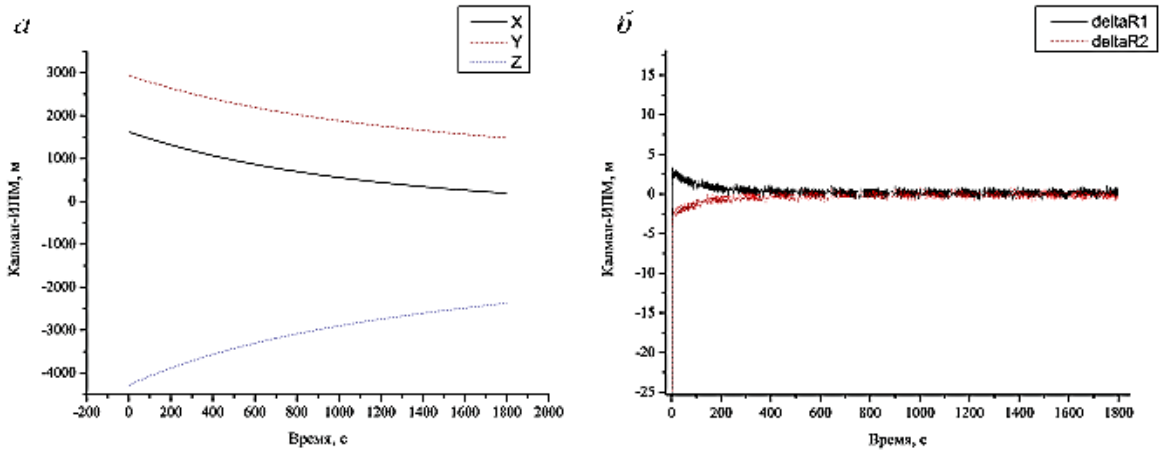


Рисунок 2.5 - *а*) Разность координат X,Y,Z численного моделирования уточнения орбиты аппарата «Спектр-Р» и координат орбиты ИПМ на основе двух независимых измерений дальности на всем временном интервале моделирования; *б*) Ошибка дальности до КА «Спектр-Р» с двух наземных станций: Медвежьи Озера и Уссурийск (deltaR1, deltaR2), на всем временном интервале численного моделирования

Если же начальная точка выбрана удачно (в данном случае в качестве начальных координат и скоростей использовались значения уточненной орбиты ИПМ Орб 2), то алгоритм Калмана, даже при наличии неполного комплекта наблюдений, будет работать и искать решение близкое к истинному, что показано на рисунке 2.6.

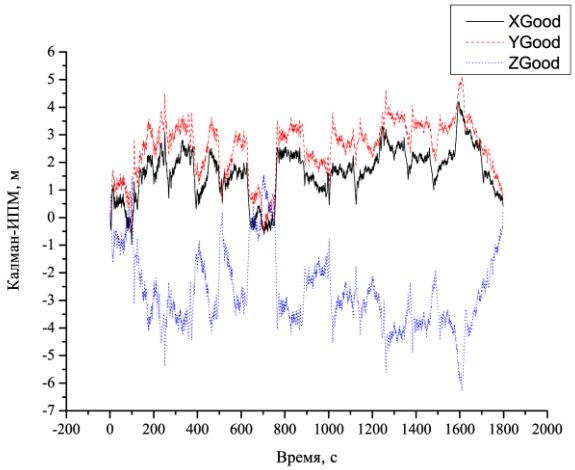


Рисунок 2.6 – Разность координат X,Y,Z численного моделирования уточнения орбиты аппарата «Спектр-Р» и координат орбиты ИПМ на основе одного комплекта измерений дальности при удачном выборе начальной точки на всем временном интервале моделирования

Данный пример, во-первых, показывает, что использование неполного комплекта данных наблюдений небесполезно и при достаточно хороших начальных условиях может обеспечить уточнение, а, во-вторых, указывает на неоднозначность улучшения в зависимости от времени интегрирования.

Таким образом, в данном разделе на конкретном сеансе измерений была рассмотрена проблема уточнения орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» при использовании фильтра Калмана и проанализирован вопрос наблюдаемости системы, существенно сказывающийся на результатах работы алгоритма Калмана применительно к поставленной выше задаче. Было показано, что наличие трех наземных станций, проводящих измерения одновременно решают поставленную задачу в полном объеме, даже при очень плохом начальном приближении.

Обратимся теперь к вопросу практической реализации сделанного выше вывода. Во-первых, реальное положение дел таково, что мы не обладаем необходимым набором наблюдательных данных, вследствие чего должны предприниматься попытки улучшить орбиту только на основе того, что имеем. Во-вторых, проведенный анализ показал, что далеко не лишним является использование одного комплекта радиодальномерных измерений. Имеется серия сеансов, в которых алгоритм Калмана производит уточнение вектора состояния космического аппарата, улучшая на порядок параметры корреляционной обработки данных наблюдений.

Результаты работы алгоритма Калмана с применением комплекта радиодальномерных данных только с одной радиолокационной наземной станции чувствительны к начальным условиям, и поэтому улучшение орбиты достигается только при выборе начальной точки интегрирования, лежащей вблизи исходной орбиты (в среднем улучшение составляет несколько процентов). Результаты работы данного алгоритма при использовании трех комплектов радиодальномерных данных с трех различных радиолокационных станций не чувствительны к начальным условиям и

определяют решение, которое является истинным, доставляющим улучшение на порядки величин. На основе полученных результатов можно выделить список требований, выполнение которых обеспечит как более точное знание орбиты КА «Спектр-Р», так и орбит планируемых к запуску проектов со схожими требованиями по баллистико-навигационному обеспечению.

1. Измерения дальности и радиальной скорости должны производиться минимум с трех наземных станций, для которых КА находится в зоне видимости. Измерения могут быть разных типов (радиодальномерные, лазерные, а также их комбинация). Необходимы отдельно дальномерные измерения для уточнения 3 координат и допплеровские – для уточнения 3 компонент скоростей.

2. Необходимо рассмотреть возможность одновременных измерений со станций «Медвежьи Озера» и «Уссурийск». Нужно по возможности их совмещать, так как раздельное использование нерационально. Если недоступны одновременные измерения, то будут полезны измерения с задержкой в несколько секунд между станциями (1-я секунда – «Медвежьи Озера», 2-я секунда – «Уссурийск», 3-я секунда – «Медвежьи Озера» и т.д.). Далее значения радиодальномерных измерений интерполируются на общую временную шкалу.

3. Период радиодальномерных измерений следует по возможности увеличить. В настоящий момент сеансы измерений занимают приблизительно 900 секунд, но, как видно из рисунков 2.3 а, б, это время требуется алгоритму только для того, чтобы выйти на минимальную разность по модулю расстояния, до этого еще могут возникать разного рода флуктуации. Для КА «Спектр-Р» это не представляет трудностей, поскольку, вследствие своей высокоэллиптической орбиты КА доступен для радиосвязи в течение достаточно большого промежутка времени.

4. Для уточнения орбиты на основе одних только радиодальномерных данных нужна дополнительная независимая информация о ее наклонении и

долготе восходящего узла. Для уточнения орбиты на основе двух комплектов радиодальномерных данных нужна дополнительная независимая информация либо о наклонении, либо о долготе восходящего узла. Источником такой дополнительной информации могут быть астрометрические наблюдения аппарата. Точность измерений в одну секунду дуги вместе с радиодальномерными данными будет достаточной для локализации аппарата в пространстве в пределах нескольких сот метров. Такая точность по местоположению на орбите вполне достаточна для успешной корреляционной обработки данных наблюдений КА.

5. В перспективе целесообразна проработка вопроса по установке ГНСС приемника на высокоапогейные КА. Несмотря на то, что в апогее (≈100 тыс. км) аппарат недоступен для получения навигационных параметров, так как рабочая высота орбиты навигационных систем (ГЛОНАСС, GPS и др.) составляет около ≈20 тыс. км, возможно уточнение его местоположения в период прохождения им перигея. Уточнение положения КА до ≈1 см в области перигея значительно облегчит задачу предсказания и реконструкции его орбиты при нахождении в апогее, где будет выполняться основная целевая задача.

3 Моделирование высокоточных орбит для низкоорбитальных КА

Результаты раздела 3 основаны на статье [17] из списка использованных источников

3.1 Постановка задачи

В предыдущих разделах была проведена работа по уточнению вектора состояния высокоапогейного КА «Радиоастрон» для решения прикладных астрометрических задач, где были учтены и описаны воздействия сил различной природы, превалирующих в удаленной от Земли точке. Другой крайностью является описание движения КА в ближнем околоземном пространстве, где основным воздействием является несферичность ГПЗ.

Если для успешного решения задач проекта «Радиоастрон» было достаточно поддерживать точность КА несколько сотен метров на интервале наблюдений в несколько десятков минут, то для решения фундаментальных задач низкоорбитальными спутниками необходима точность позиционирования КА в лучшем случае до нескольких мм, а в худшем до метров, причем эта точность должна поддерживаться непрерывно.

Одной из самых актуальных современных задач в области фундаментальной физики, решаемой на низкой околоземной орбите, является задача уточнения ГПЗ кластером КА. Актуальность разработки отечественного проекта для получения карты ГПЗ высокого пространственного разрешения на данный момент не вызывает сомнения. Такой проект имел бы как множество научно-прикладных приложений, так и стратегическое значение:

- получение карты ГПЗ высокого разрешения ($1^{\circ}\times1^{\circ}$);
- исследование полярных областей Земли;
- изучение распределения и перемещения масс во внешних геосферах Земли (атмосфере, континентальной гидросфере и океанах, литосфере);
- мониторинг процессов подготовки крупных землетрясений;
- поиск нефтегазовых месторождений;

– отработка технологии лазерной интерферометрии;
– конкуренция на международной арене среди других стран (США, Китай).

Как видно из представленных выше задач, необходимость создания такого проекта диктуется также зарубежными тенденциями, некоторые из которых уже нашли практическое применение, например, в таком проекте как «GRACE» [18,19,20], который планируется вывести на новый уровень точности с помощью проекта GRACE-Follow-On [21,22,23], запущенного 22 мая 2018 года.

Используя термин «высокое разрешение» в контексте, связанном с ГПЗ, следует понимать под ним локализацию области на Земле размером градус на градус, что соответствует длинам волн геоида менее 200 км и порядку разложения ГПЗ более 200. Соответствие длин волн геоида порядку разложения ГПЗ и угловому размеру представлено в таблице 3.1 [24].

Таблица 3.1 – Соответствие длин волн геоида λ порядку разложения ГПЗ n и угловому размеру s

Длины волн геоида				
	Длинные	Средние	Короткие	Сверхкороткие
λ, км	>8000	>1000	>200	<200
n	<5	<36	<200	>200
s	>10°	>5°	>1°	<1°

Традиционно несферичность ГПЗ описывают с помощью разложения в ряд по сферическим функциям:

$$R = (U - U_0) \approx \frac{GM}{r}\left[\sum_{n=2}^{N\max}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_E}{r}\right)^n \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda)\right], \quad (3.1)$$

где максимальная степень и порядок разложения определяются пределами суммирования по n и m, а результирующая минимальная длина волны, называется длиной волны геоида.

Имеет смысл привести также пояснение к остальным параметрам, входящим в выражение (3.1):

GM - гравитационный параметр Земли;

r, φ, λ - сферические координаты точки в системе координат жестко связанной с Землей (система ITRF);

a_E - средний экваториальный радиус Земли;

$\overline{P}_{nm}(\sin\varphi)$ - присоединенные функции Лежандра;

$\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$ - нормированные коэффициенты Стокса (m=0 – зональные гармоники, m>0 – тессеральные);

n,m - степень и порядок разложения.

Таким образом, разложение гравитационного поля Земли задается коэффициентами Стокса, к определению поправок к которым сводится задача уточнения гравитационного поля Земли.

Одним из самых целесообразных методов решения данной задачи является метод, реализованный в упомянутом выше проекте «GRACE»: два аппарата, функционирующих на околополярной орбите высотой 500 км с относительным расстоянием 220 км вдоль траектории движения. Система измерения межспутникового расстояния в проекте реализована в К-диапазоне, который достаточно чувствителен, чтобы зарегистрировать изменение расстояния около 10 мкм на дистанции 220 км. Когда первый аппарат проходит над областью более сильной гравитации – гравитационной аномалией – он ускоряется и уходит слегка вперед относительно второго аппарата. Это приводит к тому, что расстояние между аппаратами увеличивается. После того, как первый аппарат проходит аномалию он начинает замедляться, в то время как второй аппарат ускоряется, и расстояние между аппаратами уменьшается. Непрерывно измеряя изменение расстояния между двумя аппаратами, а также совмещая эти измерения с прецизионными абсолютными измерениями координат аппаратов посредством GPS (Global Positioning System) появляется возможность определить детальную карту гравитационных аномалий Земли.

Однако задача, решаемая в данной работе, имеет целью разработать требования (в первую очередь баллистико-навигационного характера) к системе, которая, как минимум, была бы не хуже отработанной системы «GRACE» в смысле точности определения коэффициентов Стокса и диапазона уточняемых гармоник, а как максимум превосходила бы ее. О разработке подобной отечественной системы и требований, предъявляемых к ней, и пойдет речь дальше.

Из написанного выше следует, что для решения данной задачи необходимо точное априорное знание положения аппаратов на орбите, а также их взаимное расположение. Таким образом, первоочередной задачей является оценка вклада всевозможных эффектов, как гравитационного, так и негравитационного характера, воздействующих на движение КА. Для этого была построена численная модель движения КА на низкой околоземной орбите.

3.1.1 Численная модель движения КА на низкой околоземной орбите

Численная модель движения КА на высокоапогейной орбите уже была описана выше в подразделе 1.3.1. Однако описание движения КА в непосредственной близости к Земле требует более детального рассмотрения.

На движение КА в непосредственной близости к Земле влияет большое количество сил как гравитационной, так и негравитационной природы. Учесть их все не представляется возможным по причине отсутствия удовлетворительной модели большинства из них. Однако если речь идет о точности локализации аппарата на орбите не хуже сантиметра, то следующий выбор параметров в дифференциальном уравнении движения КА вполне обоснован:

$$\frac{m_s d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(t; \boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}) \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{F} / m_s = \boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{a}_K + \boldsymbol{a}_R + \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_E + \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_S ...$$

$\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор КА в геоцентрической системе координат;

$\boldsymbol{F}$ - сила, действующая на КА;

$\boldsymbol{a}_K$ - кеплеровская составляющая ускорения спутника;

$\boldsymbol{a}_R$ - ускорение от несферичности геопотенциала;

$\boldsymbol{a}_B$ - ускорение от притяжения Луны, Солнца и планет;

$\boldsymbol{a}_E$ - ускорение от твердых приливов;

$\boldsymbol{a}_O$ - ускорение от океанических приливов;

$\boldsymbol{a}_D$ - ускорение от сопротивления атмосферы;

$\boldsymbol{a}_S$ - ускорение от воздействия солнечного излучения;

$\mathrm{m_s}$ - масса КА.

Поскольку кеплеровская составляющая не нуждается в отдельном пояснении в силу тривиальности ее использования, рассмотрим первый основной фактор – несферичность ГПЗ, которая составляет основной предмет анализа.

3.1.2 Несферичность гравитационного потенциала Земли

В задаче высокоточного моделирования движения КА на низкой околоземной орбите необходимо, насколько это возможно, грамотно описать ГПЗ с помощью коэффициентов Стокса, которые и определяют его разложение по сферическим функциям. Существуют различные модели этого разложения, а также методы его расчета [7,12]. Для данной задачи, в отличие от задачи уточнения КА на высокоапогейной орбите, был выбран алгоритм Беликова и Тайбаторова [25]. Основным плюсом этого алгоритма является новая нормировка полиномов Лежандра, которая позволяет избежать перерасчета коэффициентов в ходе реккурентной процедуры и делает расчет несферичности геопотенциала устойчивым на больших степенях n.

Имея исходное уравнение для гравитационного потенциала Земли с новой нормировкой для полиномов Лежандра:

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\left[\sum_{n=2}^{N\max}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_E}{r}\right)^n \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda)\right]$$

$$\overline{P}_{nm}(\sin\varphi) = \frac{2^m n!}{(n+m)!}P_{nm}(\sin\varphi) \tag{3.3}$$

сделаем замену переменных:

$$T_n^m = \left(\frac{a_E}{r}\right)^{n+1}\overline{P}_{nm}(\sin\varphi) \tag{3.4}$$

и получим новый вид уравнения (3.3) с рекуррентными соотношениями и начальными значениями:

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\left[\sum_{n=2}^{N\max}\sum_{m=0}^{n}T_n^m(\widehat{C}_{nm}\cos m\lambda + \widehat{S}_{nm}\sin m\lambda)\right]$$

$$T_n^m = \frac{R}{r}\left[\sin\varphi T_{n-1}^m - \frac{\cos\varphi}{4}(T_{n-1}^{m+1} - 4T_{n-1}^{m-1})\right] \qquad T_0^0 = 1$$

$$\frac{T_n^m}{\partial\varphi} = n\frac{R}{r}\left[\cos\varphi T_{n-1}^m + \frac{\sin\varphi}{4}(T_{n-1}^{m+1} - 4T_{n-1}^{m-1})\right] \tag{3.5}$$

$$T_n^{-1} = -T_n^1/4.$$

Производные по координатам от функции гравитационного потенциала, они же ускорения аппарата вдоль осей, являются функциями от новой переменной:

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} = F(T_n^m, \frac{T_n^m}{\partial\varphi}...), \tag{3.6}$$

что и позволяет вести расчет ускорений с помощью этой процедуры.

Стоит также отметить, что этот алгоритм относится к реккурентому алгоритму «столбцового» типа, где в правой части стоят функции с одинаковым индексом n-1, в отличие от алгоритмов «строчного» типа. Все вместе делает этот алгоритм быстрым и устойчивым для расчета на больших n.

Забегая вперед, стоит показать на рисунке 3.1 поведение разных алгоритмов расчета разности межспутникового расстояния при переходе от

n=200 порядка разложения ГПЗ к n=201. Из рисунка видно, что алгоритм «строчного» типа (рисунок 3.1 б) дает сбой в отличие от алгоритма Беликова-Тайбаторова (рисунок 3.1 а).

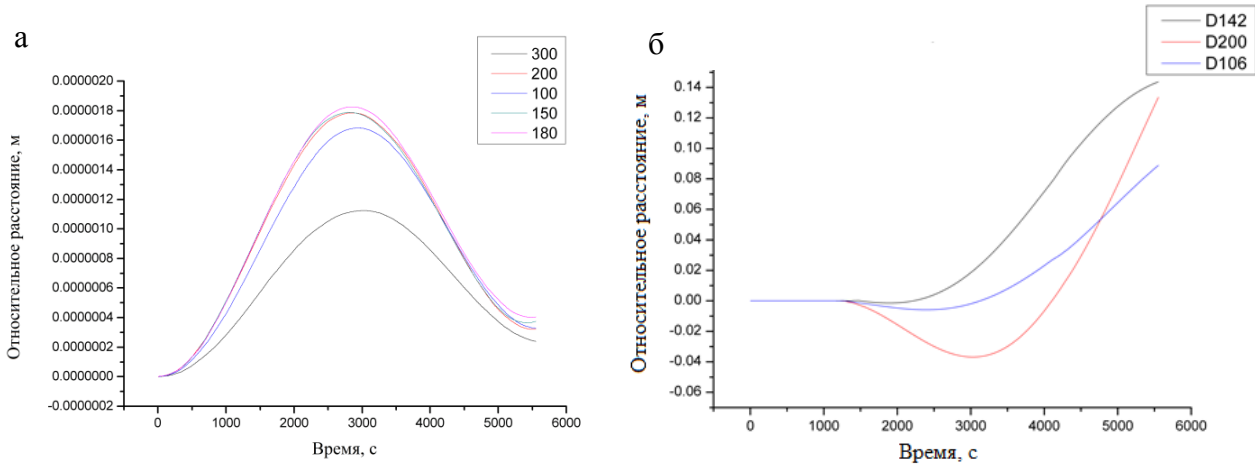


Рисунок 3.1 – а) Поведение алгоритма Беликова-Тайбаторова при расчетах на больших n при различных межспутниковых расстояниях (в км); б) Поведение алгоритма «строчного» типа при расчетах на больших n при различных межспутниковых расстояниях (в км)

Ввиду того, что ненормированные коэффициенты Стокса C_{nm} и S_{nm} покрывают диапазон десяти и более порядков, для расчета и хранения используются именно нормированные коэффициенты $\bar{C}_{nm}$ и $\bar{S}_{nm}$, величина которых плавно меняется с ростом n и может быть представлена следующей эмпирической формулой:

$$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm} \approx \frac{10^{-5}}{n^2}. \tag{3.7}$$

С учетом замены переменных в исходном выражении (3.3) для алгоритма Беликова и Тайбаторова коэффициенты Стокса, используемые в выражении (3.5) вычисляются по формуле:

$$\left.\begin{matrix} \hat{C}_{nm} \\ \hat{S}_{nm} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2^m n!}\sqrt{2(2n+1)(n+m)!(n-m)!}\left\{\begin{matrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{matrix}\right. . \tag{3.8}$$

Нормированные коэффициенты Стокса находятся в свободном доступе в сети «Интернет». В данной работе были использованы коэффициенты Стокса модели EGM96 [26], которые полны до 360 порядка и степени включительно. Стоит также упомянуть, что имеется более совершенная модель гравитационного потенциала Земли EGM2008 полная до 2190 порядка и 2159 степени, полученная в рамках проекта «GRACE» и «CHAMP» с привлечением наземных и альтиметрических измерений. Тем не менее, использование этой модели геопотенциала в рамках моделирования не оправдано как минимум по двум причинам:

– далее будет показано, что способ уточнения коэффициентов гравитационного поля Земли кластером из двух КА касается гармоник, не превосходящих степени и порядка 250;
– для численного моделирования в рамках поставленной задачи не является принципиальным незначительное различие моделей EGM96 и EGM2008 в длинноволновой и средневолновой части спектра (до n≈250).

Необходимо также заострить внимание на тот факт, что расчет по формуле (3.3) проводится с использованием сферических координат аппарата r,φ,λ, жестко связанных с Землей, т.е. в неинерциальной системе ITRS (International Terrestrial Reference System) [27]. В то время как численное интегрирование орбиты аппарата должно выполняться в инерциальной системе GCRS (Geocentric Celestial Reference System) [27]. Таким образом, для расчета ускорений, вызванных несферичностью геопотенциала необходимо каждый раз осуществлять перевод координат $\boldsymbol{r}_{GCRS}$ из GCRS в

ITRS, а затем, рассчитанные в ITRS ускорения $\boldsymbol{a}_{R\,ITRS}$, переводить обратно в GCRS по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{ITRS} &= W^T \boldsymbol{r}_{GCRS}, \\ \boldsymbol{a}_{R\,GCRS} &= W\,\boldsymbol{a}_{R\,ITRS}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где W - матрица перехода из ITRS в GCRS, о построении которой будет изложено ниже.

3.1.3 Матрица перехода из GCRS в ITRS

Подробное описание построения матрицы перехода из GCRS в ITRS и обратно можно найти в стандартах Международной службы вращения Земли [8]. Здесь в общих чертах будут описаны основные моменты построения этой матрицы.

Международная земная система отсчета (ITRS), по определению, есть геоцентрическая система с началом в центре масс Земли, включающая океаны и атмосферу, вращающаяся вместе с Землей. Шкалой координатного времени является шкала геоцентрического координатного времени TCG, Geocentric Coordinate Time.

Ось Z системы ITRS в пределах ±30 мс дуги совпадает с условным международным началом (Conventional International Origin, CIO). По определению, условное международное начало есть среднее положение земного полюса по измерениям на интервале с 1900 г. по 1905 г., выполненным Международной службой широты (предшественницей Международного Союза Вращения Земли).

Ось X лежит в плоскости Гринвичского меридиана и экватора, ось Y лежит в плоскости меридиана с долготой 90° и дополняет систему до правой.

Начало пространственных координат в GCRS так же, как и в ITRS находятся в центре масс Земли, однако ее оси не вращаются относительно удаленных радиоисточников, и сама система отсчета движется вокруг барицентра Солнечной системы. Шкалой времени в системе GCRS является шкала геоцентрического координатного времени TCG.

Преобразование вектора из земной системы в небесную систему координат, задаваемую средним экватором и равноденствием на эпоху J2000.0 [27], осуществляется, как уже было показано в выражении (3.9) с помощью матрицы преобразования W:

$$\boldsymbol{r}_{GCRS} = W\boldsymbol{r}_{ITRS}, \tag{3.10}$$

где матрица преобразования определяется выражением:

$$W = PNR_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p). \tag{3.11}$$

Для вычисления матрицы W необходимо сначала выполнить три поворота осей земной системы: сначала относительно оси y на угол x_p, затем относительно оси x на угол y_p и вокруг оси z на угол $-GAST$, после чего перемножить матрицы поворота:

$$\boldsymbol{r}_T = R_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p)\boldsymbol{r}_{GCRS}, \tag{3.12}$$

где $\boldsymbol{r}_T$ - вектор в промежуточной системе (система, в которой движение произвольной оси, связанной с Землей, разделено на движение относительно инерциальной системы и относительно самой Земли). В выражении (3.11) x_p, y_p – координаты небесного эфемеридного полюса (НЭП), $GAST$ – истинное звездное время, R_i – матрицы вращения вокруг i – ой оси. Затем $\boldsymbol{r}_T$ умножается на матрицу нутации N и матрицу прецессии P, что завершает преобразование из ITRS в GCRS.

Описание, выражения и порядок расчета матриц прецессии, нутации, а также истинного звездного времени, координат небесного эфемеридного полюса и матриц вращения содержатся в [8,27].

В результате преобразования (3.10) оси земной системы координат будут повернуты и ориентированы так же, как оси барицентрической системы. Начало этой системы совпадает с центром Земли, но геоцентрическая небесная система отсчета GCRS движется вместе с Землей относительно барицентра Солнечной системы, а ее оси не вращаются относительно удаленных внегалактических радиоисточников.

3.1.4 Притяжение Луны, Солнца и планет

Следующим необходимым для учета фактором является гравитационное воздействие на КА со стороны Луны, Солнца и, не столь существенным, от планет. Процедура учета этих воздействий стандартна и описана, например, в [7]. Дополнительное ускорение КА в результате этого воздействия может быть представлено следующим образом:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = GM\left(\frac{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}|^3} - \frac{\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|^3}\right), \tag{3.13}$$

где $\boldsymbol{r}$ – геоцентрический радиус-вектор КА, $\boldsymbol{s}$ – геоцентрический радиус-вектор притягивающего тела. Геоцентрические координаты Луны, Солнца и планет были рассчитаны на основе модели DE421.

3.1.5 Твердые приливы

В численной модели эффект от влияния твердых приливов может быть учтен с помощью поправок ΔC_{nm} и ΔS_{nm}, прибавляемым к коэффициентам Стокса. Эти поправки рассчитывались в соответствии с рекомендациями IERS2010 (International Earth Rotation Service) и являются функциями от так называемых чисел Лява.

Поскольку Земля не является абсолютно твердым и упругим телом, то для описания ее упругих деформаций английский геофизик Ляв ввел безразмерные параметры k и h (позже японский ученый Шида определил число l), которые сейчас называются числами Лява. Так как числа Лява связаны с модулями упругости Земли, а упругие свойства Земли зависят от частоты воздействующей на нее силы, то и числа Лява также являются частотно зависимыми величинами. Для низких частот числа Лява известны с большими ошибками, поэтому модель учета приливов неточна из-за незнания долгопериодических чисел Лява. Модель геопотенциала и система координат, построенная таким образом, называются «условно свободными от приливов» (conventional tide free). Модель EGM96 и земная система координат ITRF2000, используемые в численном моделировании, условно свободны от приливов.

Эффекты эллиптичности и силы Кориолиса вследствие вращения Земли приводят к необходимости использования трех чисел Лява $k^0_{nm,}k^{(\pm)}_{nm}$ (кроме случая при n=2, поскольку k^-_{2m}=0 в силу закона сохранения массы). Неупругие свойства мантии добавляют к величинам $k^0_{nm,}$ и $k^{(\pm)}_{nm}$ мнимые части (отображающие фазовую задержку в отклике деформации Земли на приливные силы), а также приводят к изменению частот, которые ярко выражены в течение больших периодов. Более подробную информацию об учете приливов можно найти в [8,9].

В данной задаче алгоритм расчета поправок к коэффициентам Стокса сводится к 3-х шаговой процедуре [8]:

Шаг 1. Рассчитываются частотно независимые поправки к коэффициентам Стокса. Оценивается (2,m) часть приливного потенциала, для каждого m с использованием лунных и солнечных эфемерид. Соответствующие поправки ΔC_{2m} и ΔS_{2m} рассчитываются с использованием частотно независимых чисел Лява k_{2m}. Затем оценивается (3,m) часть

приливного потенциала с использованием чисел Лява k_{3m}. Аналогичным образом оценивается (4,m) приливной потенциал с использованием чисел Лява $k_{2m}^{(+)}$. Расчет ведется по формуле:

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1}\sum_{j=2}^{3}\frac{GM_j}{GM_E}\left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{n+1}\bar{P}_{nm}(\sin\Phi_j)e^{-im\lambda_j}, \qquad (3.14)$$

где

k_{nm} - число Лява для степени n и порядка m;

R_e - экваториальный радиус Земли;

GM_E - гравитационный параметр Земли;

GM_j - гравитационный параметр для Луны (j=2) и Солнца (j=3);

r_j - расстояние от геоцентра до Луны или Солнца;

Φ_j - геоцентрическая широта Луны или Солнца в системе координат жестко связанной с Землей;

λ_j - долгота Луны или Солнца, отсчитываемая от Гринвичского меридиана в системе координат жестко связанной с Землей.

Стоит отметить, что случаи при (n,m)=(2,0) и (n,m)=(2,1) требуют дополнительного рассмотрения, о чем будет изложено ниже. А случай при n=4 рассчитывается аналогичным образом путем замены в формуле (3.14) k_{2m} на $k_{2m}^{(+)}$:

$$\Delta\bar{C}_{4m} - i\Delta\bar{S}_{4m} = \frac{k_{2m}^{(+)}}{5}\sum_{j=2}^{3}\frac{GM_j}{GM_E}\left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{3}\bar{P}_{2m}(\sin\Phi_j)e^{-im\lambda_j} \quad (m = 0,1,2). \qquad (3.15)$$

Значения чисел Лява для данного (n,m) можно найти в [7].

Шаг 2. Рассчитываются частотно зависимые поправки к $\Delta\bar{C}_{nm}$ и $\Delta\bar{S}_{nm}$, полученным на шаге 1. Учет представляет собой сумму ряда приливных составляющих, относящихся к разным полосам (приливным волнам с

разными частотами). Вклад в $\Delta\overline{C}_{20}$ от долгопериодической приливной составляющей выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Re}\sum_{f(2,0)}(A_0\delta k_f H_f)e^{i\theta f} = \sum_{f(2,0)}[(A_0 H_f \delta k_f^R)\cos\theta_f - (A_0 H_f \delta k_f^I)\sin\theta_f]. \quad (3.16)$$

В то время как вклад в гармонику (2,1) от суточных составляющих и в гармонику (2,2) от полусуточных составляющих приливных волн:

$$\Delta\overline{C}_{2m} - i\Delta\overline{S}_{2m} = \eta_m \sum_{f(2,m)}(A_m \delta k_f H_f)e^{i\theta_f}, \ (m = 1,2), \quad (3.17)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{R_e\sqrt{4\pi}} = 4.4228\times10^{-8}\ м^{-1},$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_e\sqrt{8\pi}} = (-1)^m(3.1274\times10^{-8})\ м^{-1},\ (m \neq 0),$$

$$\eta_1 = -i,\ \eta_2 = 1,$$

δk_f - разница между $k_{2m}^{(0)}$ на частоте f и номинальным значением величины k_{2m}, плюс вклад за океаническую нагрузку;

δk_f^R - действительная часть δk_f;

δk_f^I - мнимая часть δk_f;

H_f - амплитуда (в метрах) члена на частоте f в гармоническом разложении приливообразующего потенциала;

$$\theta_f = \overline{n}\overline{\beta} = \sum_{i=1}^{6} n_i\beta_i \text{ или}$$

$$\theta_f = m(\theta_g + \pi) - \overline{N}\overline{F} = m(\theta_g + \pi) - \sum_{j=1}^{5} N_j F_j,$$

где

$\overline{\beta}$ - аргументы Дудсона (τ, s, h, p, N', p_s) [8];

$\overline{n}$ - множители аргументов Дудсона;

$\bar{F}$ - фундаментальные аргументы (l, l', F, D, Ω) (переменные Делоне) из теории нутации [8];

$\bar{N}$ - множители фундаментальных аргументов;

θ_g - среднее Гринвичское звездное время, выраженное в угловой мере.

Подробная информация о том, как получить описанные выше величины содержится в стандартах IERS2010.

Шаги 1 и 2 могут быть использованы для расчета полного приливного вклада, включая постоянный вклад в коэффициент геопотенциала $\bar{C}_{20}$, в случае, если используется модель «условно свободная от приливов», такая как EGM96. Если же используется модель «нулевого прилива» (zero tide) [8,9], эта постоянная часть коэффициента $\bar{C}_{20}$ не должна учитываться дважды, и это цель шага 3 [8]. Тем не менее, описание процедуры шага 3 в данной работе не представляется необходимой, так как работа шла с моделью «условно свободной от приливов».

3.1.6 Океанические приливы

Воздействие океанических приливов учитывается в программе тем же образом, что и учет твердых приливов – посредством поправок к коэффициентам Стокса. Расчет этих поправок может быть выполнен по следующей формуле:

$$[\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm}](t) = \sum_{f}\sum_{+}^{-}(C^{\pm}_{f,nm} \mp iS^{\pm}_{f,nm})e^{\pm i\theta_f(t)}, \qquad (3.18)$$

где $C^{\pm}_{f,nm}$ и $S^{\pm}_{f,nm}$ гармонические амплитуды геопотенциала для приливной составляющей на частоте f. Данные амплитуды различны в разных моделях. В нашем случае расчет ведется в соответствии с моделью океанических приливов FES2004 [8,28]. В данной модели учитываются все приливные волны до сотой степени и порядка, кроме длиннопериодических, для которых в свою очередь ведется учет до пятидесятых степени и порядка

включительно. Необходимо отметить, что существует более совершенная модель океанических приливов – FES2014 [28]. Однако для данной задачи точность, предоставляемая данной моделью, избыточна. Данная модель позволяет точно описывать воздействие приливов с дискретизацией пространственного разрешения 1/16°. Целью же данной работы является расчет орбитальной группировки КА, разрешающей ГПЗ с точностью до 1°.

Как и в случае учета твердых приливов для расчета воздействия океанических приливов необходим аргумент θ_f, являющийся функцией, так называемых, аргументов Дудсона. Поскольку этот момент существенен в данной работе, имеет смысл более подробно описать, что представляют собой аргументы Дудсона:

1) $\tau=(\theta_m+\pi-s)$ – среднее лунное время, часовой угол средней Луны для нулевого меридиана плюс 12 часов;
2) $s=(F+\Omega)$ – средняя долгота Луны;
3) $h=(s-D)$ – средняя долгота Солнца;
4) $p=(s-l)$ – долгота среднего перигея Луны;
5) $N'=(-\Omega)$ – взятая с противоположным знаком долгота среднего восходящего узла Луны на эклиптике;
6) $p_s=s-D-l'$ – долгота среднего перигея Солнца.

Здесь используются следующие обозначения (переменные Делоне):

l - средняя аномалия Луны (угловое расстояние в радианах от ее перигея);

l' - средняя аномалия Солнца (угловое расстояние в радианах от его перигея);

F - средний аргумент долготы Луны (угловое расстояние в радианах от ее узла);

D - средняя элонгация Луны (угловое расстояние в радианах от Солнца).

Аргументы Дудсона представляются в радианной мере и пересчитываются на заданный момент времени.

3.1.7 Твердый полярный прилив

Твердый полярный прилив является следствием центробежной силы вследствие движения полюсов Земли [8]. Этот эффект может быть учтен с помощью поправок к коэффициентам геопотенциала C_{21} и S_{21}:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{C}_{21} &= -1,333\times10^{-9}(m_1 + 0,0115m_2), \\ \Delta\bar{S}_{21} &= -1,333\times10^{-9}(m_2 - 0,0115m_1), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где m_1 и m_2 описывают отклонение мгновенного полюса Земли от среднего и выражены в секундах дуги. Процедура расчета переменных m_1 и m_2 описана в стандартах IERS2010.

3.1.8 Океанический полярный прилив

Океанический полярный прилив является следствием центробежного эффекта движения полюсов Земли на океаны. В движении полюса преобладает 14-месячная чандлеровская гармоника [8,27], а также годовые колебания. На протяжении этого долгого промежутка времени считается, что океанический полярный прилив будет иметь равновесный отклик, т.е. смещенная поверхность океана будет находиться в равновесии с воздействующей эквипотенциальной поверхностью.

Для учета этого эффекта была использована модель Desai [29] – равновесная модель океанического полярного прилива. В этой модели учтены границы континентов, сохранение массы над океанами, самогравитация и нагрузка на дно океанов. Выражение для расчета поправок к коэффициентам Стокса согласно этой модели выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = R_n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}^R_{nm} \\ \bar{B}^R_{nm} \end{bmatrix} (m_1\gamma_2^R + m_2\gamma_2^I) + \begin{bmatrix} \bar{A}^I_{nm} \\ \bar{B}^I_{nm} \end{bmatrix} (m_2\gamma_2^R - m_2\gamma_2^I) \right\}, \tag{3.20}$$

где

$$R_n = \frac{\Omega^2 a_E^4}{GM} \frac{4\pi G \rho_w}{g_e} \left(\frac{1+k_n^{'}}{2n+1} \right),$$

Ω - угловая скорость вращения Земли;

a_E - экваториальный радиус Земли;

GM - гравитационный параметр Земли;

g_e - среднее значение ускорения свободного падения на экваторе Земли;

G - гравитационная постоянная;

ρ_w - плотность морской воды;

$k_n^{'}$ - нагрузочные коэффициенты (числа Лява) для оценки воздействия океанического полярного прилива;

$\gamma = \gamma_2^R + i\gamma_2^I = (1 + k_2 - h_2) = 0,6870 + i0,0036$;

m_1 и m_2 - описывают отклонение мгновенного полюса Земли от среднего и выражены в радианах.

Коэффициенты $\bar{A}_{nm} = \bar{A}_{nm}^R + \bar{A}_{nm}^I$ и $\bar{B}_{nm} = \bar{B}_{nm}^R + \bar{B}_{nm}^I$ доступны на ftp сервере IERS [30].

3.1.9 Воздействие атмосферы

Спутник, движущийся в атмосфере Земли, испытывает тормозящее ускорение вследствие соударения с частицами атмосферы. Тормозящая сила зависит от относительной скорости спутника и атмосферы, а также плотности атмосферы и может быть вычислена по формуле:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_D A \rho v_r^2 \vec{e}_v \,, \tag{3.21}$$

где C_D – аэродинамический коэффициент пропорциональности, величина которого соответствует тому, насколько сильно данный спутник тормозится атмосферой при заданных относительной скорости и плотности атмосферы (величина коэффициента определяется эмпирически и зависит в основном от формы спутника и материалов его поверхности; характерные значения 1.5-3.0); A – миделевое сечение; ρ – плотность атмосферы в окрестности

спутника; v_r – скорость спутника относительно атмосферы Земли; $\vec{e}_v = \frac{\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}$ - единичный вектор направления движения спутника.

Для расчета плотности атмосферы в данной точке пространства была использована модель NRLMSISE-00 [31] – стандартная, согласно US Naval Research Laboratory (NRL), международная модель атмосферы для космических исследований. Для расчета плотности в данной модели используются данные о солнечной активности и активности магнитосферы Земли, находящиеся в файлах «SolResap.txt» и «Solfsmy.txt», которые можно найти в сети «Интернет» по адресу [32].

Значение плотности атмосферы вычисляется подпрограммой, которая использует для расчета входные данные о дате и времени, на которые производится вычисление, высоте спутника над поверхностью Земли, а также широте и долготе спутника и данные о солнечной активности. На выходе из подпрограммы дается значение плотности атмосферы в указанной точке в указанное время.

3.1.10 Возмущение от давления солнечного излучения

Формула 1.26, в соответствии с которой был выполнен расчет возмущения от давления солнечного излучения для моделирования движения КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон», не может быть использована для моделирования движения КА в интересах гравиметрических задач, поскольку в данной задаче точность моделирования должна быть на порядки выше вследствие специфики исследуемой задачи. По этой причине нельзя рассматривать КА в виде сферически симметричного объекта, упрощающего расчеты. В качестве модели КА был выбран прямоугольный параллелепипед с размерами сторон 3м × 1.5м × 1.5м (длина × ширина × высота). Такая модель КА была выбрана на основе реальных размеров КА «GRACE», которые имели форму трапеции с длиной 3122 мм, высотой 720 мм, шириной нижнего основания трапеции 1942 мм и верхнего основания – 693 мм [33].

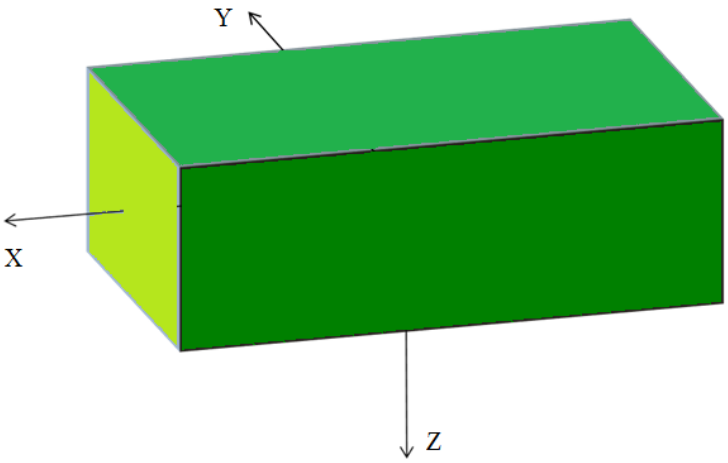


Рисунок 3.2 – Модель КА, ось «Z» направлена в центр масс Земли, ось «X» – по направлению движения КА, ось «Y» дополняет систему координат до правой

На рисунке 3.2 характеристики покрытия сторон КА в направлениях «X», «-X», «Z» были приняты аналогичными характеристикам алюминиевой фольги с коэффициентом отражения ε=0.88, все остальные стороны считались покрытыми солнечными батареями с коэффициентом отражения ε=0.21. На сторонах «X» и стороне «Z» должна располагаться служебная аппаратура для измерения межспутниковых расстояний и передачи служебной информации на Землю, что не позволяет задействовать эти стороны под расположение солнечных батарей. Таким образом, расчет воздействия солнечного излучения на КА производился с учетом отражения и поглощения излучения сторонами КА по следующей формуле [7]:

$$\boldsymbol{a}_s = -\nu \sum_{i=1}^{3} P_{sun} \frac{AU^2}{r_{sun}^2} \frac{A_i}{m} cos(\theta)[(1-\varepsilon_i)\boldsymbol{e}_{sun} + 2\varepsilon_i cos(\theta)\boldsymbol{n}_i], \qquad (3.22)$$

где ν – теневая функция (ν=0, если спутник находится в тени Земли; ν=1, если спутник находится в солнечном свете; 0<ν<1, если спутник находится в полутени Земли), P_{sun} – постоянная давления солнечного излучения на орбите Земли, AU – астрономическая единица, r_{sun} – геоцентрическое расстояние до Солнца, A_i – площадь рассматриваемой стороны КА, m – масса КА, θ – угол между нормалью к рассматриваемой стороне КА и направлением на Солнце, $\boldsymbol{e}_{sun}$ – единичный вектор в направлении на Солнце, $\boldsymbol{n}_i$ – единичный вектор

нормали к рассматриваемой стороне КА, ε_i – коэффициент отражения рассматриваемой стороны КА.

Суммирование в формуле 3.22 идет только по трем сторонам ввиду того, что максимальное число сторон КА одновременно освещаемых Солнцем в любой момент времени не больше трех. Эффекты воздействия на КА отраженного излучения от Земли в оптическом и инфракрасном диапазонах, а также влияние нагрева КА в моделировании не рассматривалось, поскольку расчеты в работе [34] показывают, что эти величины на порядок-два меньше величины воздействия солнечного излучения. Ввиду того, что рассматриваемый в работе [34] КА имел большую «парусность», чем рассматриваемый прототип КА «GRACE», было решено на данном этапе работы опустить моделирование этих эффектов, которые сами по себе представляют серьезную задачу.

На основе приведенной теории был разработан программный комплекс, состоящий из двух программ под названием «SpaceGrav» и «PlanGrav». Программа «SpaceGrav» предназначена для проектирования высокоточных орбит низкоорбитальных КА и планирования экспериментов по определению геодезических параметров Земли. Программа «PlanGrav» предназначена для обеспечения планирования измерений геодезических параметров Земли в части спутниковой градиентометрии и межспутниковых измерений. Написанные программы адаптированы для пользователя, не имеющего навыков программирования, а также могут быть запущены на персональном компьютере с операционной системой «Windows XP» и выше.

На рисунке 3.3 представлено окно задания начальных параметров для работы программы «SpaceGrav». В первых двух строчках задается информация о входной директории, где находятся файлы, необходимые для работы программы: параметры вращения Земли, информация о солнечной активности, приливные коэффициенты, эфемериды Луны, Солнца и планет и т.д. В строках 23-32 пользователь определяет, какую информацию подавать

на вывод. В строках 3-22 задается информация о времени проведения исследования, а также о параметрах группировки: межспутниковое расстояние, наклонение, долгота восходящего узла и т.д. Более подробное описание программы «SpaceGrav» изложено в Приложении №1.

```
DirInput      : C:\SpaceGrav\InputFiles\
DirOutput     : C:\SpaceGrav\OutputFiles\
Year          : 2012
Month         : 7
Day           : 16
Hour          : 23
Min           : 59
Sec           : 00
Nmax          : 20
Distance      : 220
Incl          : 89.0
RA            : 0
Ecc           : 0.001
AP            : 0
MA1           : 90
Alt_geoc      : 400
h             : 5
T             : 17280
mass          : 500
Lx            : 3
Ly            : 1.5
Lz            : 1.5
output r1            : 1
output r2            : 1
output dr            : 1
output dv            : 1
output da            : 1
output Xcoord        : 1
output Ycoord        : 1
output Zcoord        : 1
output alt_geodesy   : 1
output longlat       : 1
```

Рисунок 3.3 – Окно задания начальных параметров для работы программы «SpaceGrav»

На рисунке 3.4 представлено окно задания начальных параметров для работы программы «PlanGrav».

```
DirInput      : C:\PlanGrav\InputFiles\
DirOutput     : C:\PlanGrav\OutputFiles\
Gradientometer (0) or Stocks_coeff (1) : 1
For Gradientometer data
Year          : 2012
Month         : 7
Day           : 16
Hour          : 23
Min           : 59
Sec           : 00
Nmax          : 20
Incl          : 89.0
RA            : 0
Ecc           : 0.001
AP            : 0
MA1           : 90
Alt_geoc      : 400
h             : 1
T             : 500
delta_grad    : 0.25
mass          : 500
Lx            : 3
Ly            : 1.5
Lz            : 1.5
output acc          : 1
output loglat       : 1
output alt_godesy   : 1
```

```
For Stocks_coeff data
Year          : 2012
Month         : 7
Day           : 16
Hour          : 23
Min           : 59
Sec           : 00
Nmax_int      : 20
Nmax_calc     : 20
Distance      : 220
Incl          : 89.0
RA            : 0
Ecc           : 0.001
AP            : 0
MA1           : 90
Alt_geoc      : 400
h             : 5
T             : 1800
mass          : 500
Lx            : 3
Ly            : 1.5
Lz            : 1.5
Output - 2 files Result_MNK_Cnk, Result_MNK_Snk
```

Рисунок 3.4 – Окно задания начальных параметров для работы программы «PlanGrav»

Структура обращения к программе «PlanGrav» имеет определенное сходство с программой «SpaceGrav», однако данная программа решает принципиально другую задачу. Более подробное описание программы «PlanGrav» изложено в Приложении №2.

Подразделы 3.2.1 – 3.2.5 представляют результаты расчета по программе «SpaceGrav», подразделы 3.2.6, 3.2.8 – по программе «PlanGrav»

3.2. Результаты моделирования

Прежде чем приступить к моделированию движения КА и получению из этого требований к перспективной орбитальной группировке КА на низкой околоземной орбите, программа «SpaceGrav» была проанализирована на предмет соответствия результатов расчета с имеющимися данными проекта «GRACE» [35].

При проверке функционирования программы «SpaceGrav» на орбитах типа «GRACE» в режиме моделирования выяснилось, что модуль дает правдоподобные результаты: орбиты аналога «GRACE» в целом совпадают с имеющимися публикациями о реальном эксперименте, например, эволюция межспутникового расстояния выглядит как на рисунке 3.5.

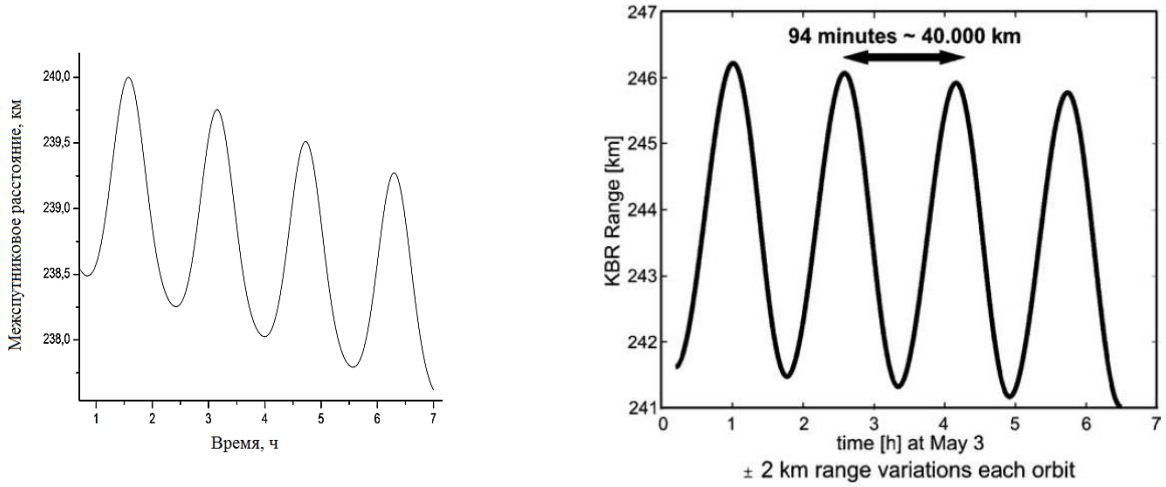


Рисунок 3.5 – Поведение межспутникового расстояния между моделируемыми КА (слева) и реальные данные «GRACE» [36] (справа)

Накопление взаимного расстояния между КА находится на уровне 0,1 мкм за время накопления сигнала 10 секунд при разрешении 150-й гармоники ГПЗ (рисунок 3.6), что также согласуется с публикациями по проекту «GRACE» [35].

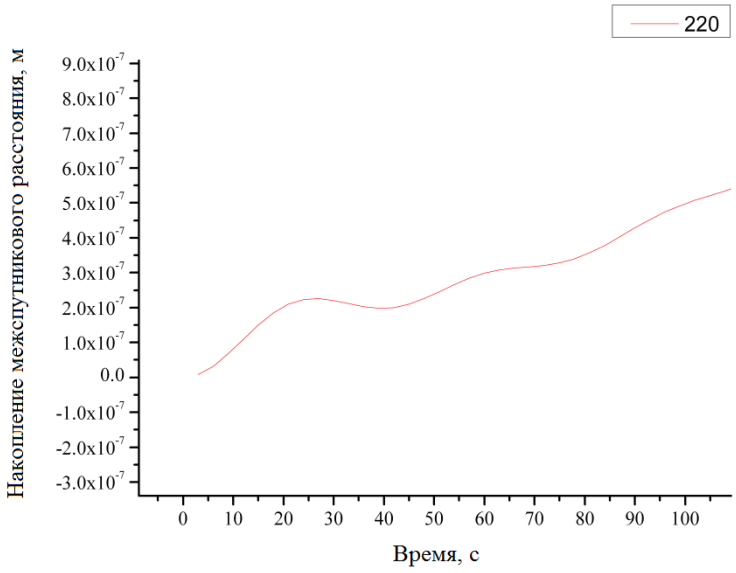


Рисунок 3.6 – Накопление межспутникового расстояния при воздействии 150-й гармоники ГПЗ; 220 – исследуемое межспутниковое расстояние

Удостоверившись в правдоподобности выдаваемых программой результатов, моделирование было продолжено.

3.2.1 Начальные параметры моделирования

Поскольку поставленная задача носит поисковый характер (определение оптимальной конфигурации орбитальной группировки КА), то задание начальных параметров по определению не может быть однозначным. Именно поэтому расчеты были проведены с вариацией ключевых (в рамках данной задачи) элементов орбит: наклонения (обоснование выбора будет изложено ниже), большой полуоси (высоты движения КА) и разницы средней аномалии (взаимного расстояния между КА в направлении движения). Начальные параметры представлены в таблице 3.2:

Таблица 3.2 – начальные параметры моделирования

Элемент орбиты	Ед. изм.	КА1	КА2
Наклонение i	град.	88,9; 60; 45	88,9; 60; 45
Эксцентриситет e		0,001	0,001
Большая полуось а	м	$\sqrt[3]{GM/n^2}$	$\sqrt[3]{GM/n^2}$
Долгота восходящего узла Ω	рад.	0	0
Аргумент перигея w	рад.	0	0
Средняя аномалия М	рад.	0	$\Delta d/a$

В данной таблице: GM – гравитационный параметр Земли ($м^3с^{-2}$); n – среднее движение аппарата (рад/с), варьируемый параметр, определяющий высоту движения КА; Δd - взаимное расстояние между КА (м), варьируемый параметр.

3.2.2 Требования к высоте рабочей орбиты КА

Здесь и далее под высотой рабочей орбиты КА понимается геодезическая высота. Выбор оптимальной высоты рабочей орбиты ограничивается двумя факторами. С одной стороны, выгоднее проводить измерения на низких высотах < 300 км, так как в этом случае измерительная система КА намного чувствительнее к неоднородностям гравитационного поля. Однако воздействие атмосферы на таких высотах приведет к быстрой

деградации орбиты, и без двигательной установки с достаточным количеством топлива на борту КА эксперимент бессмыслен.

С другой стороны, на высотах более 500 км, где воздействие атмосферы практически несущественно очень сложно выявить неоднородности гравитационного поля, поскольку амплитуда гармоник геопотенциала падает с увеличением степени и расстояния до КА как $\sim(a/r)^{n+3}$ [36], где r – расстояние до спутника, n – степень разложения геопотенциала.

С помощью численного моделирования с использованием модели NRLMSISE-00 был оценен вклад атмосферы на движение КА в диапазоне высот от 300 до 500 км над поверхностью Земли в течение суток. Параметры КА были выбраны близкими к параметрам КА «GRACE»: масса 700 кг, площадь миделева сечения A = 0,72 м^2, безразмерный аэродинамический коэффициент C_D = 2. Результаты моделирования представлены на рисунке 3.7:

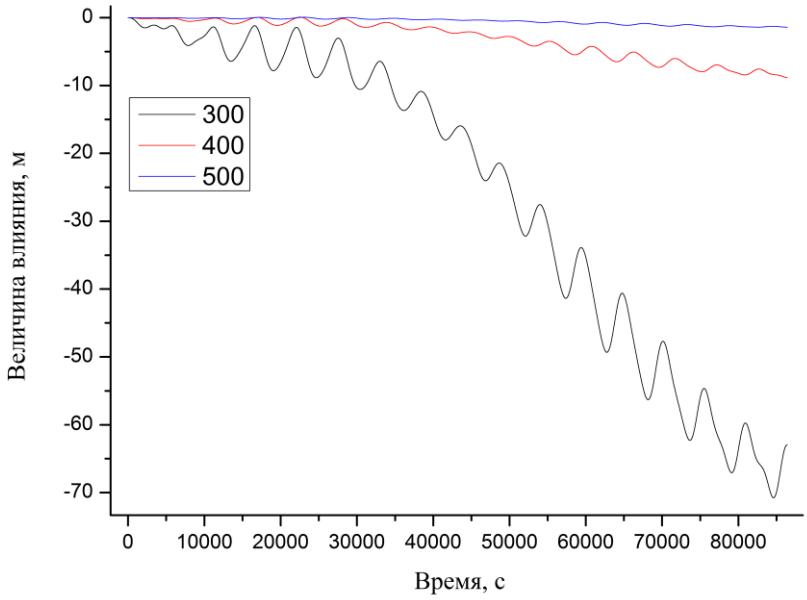


Рисунок 3.7 – Деградация орбиты КА, движущегося на орбитах высотой 300 км, 400 км и 500 км, за один день (в метрах), вычисленная в системе GCRS

Исходя из полученных данных, можно сделать вывод, что оптимальной высотой размещения КА является высота в районе 400 км. В случае движения КА на высоте 300 км ее уменьшение за сутки составляет порядка

70 м, что весьма существенно. В случае высоты 400 км деградация орбиты почти на порядок меньше, что дает возможность проводить измерения на этой высоте. На высоте 500 км, как уже было сказано, несмотря на слабое воздействие атмосферы, чувствительность к гармоникам геопотенциала существенно снижается.

Представленные выше данные, однако, не учитывают других возмущающих сил. Этот момент является существенным, поскольку суммарный эффект от воздействия различных факторов может иметь произвольную структуру.

К примеру, на рисунке 3.8 представлено воздействие от различных возмущающих факторов на положение КА, движущегося на высоте 400 км, на интервале в одни сутки:

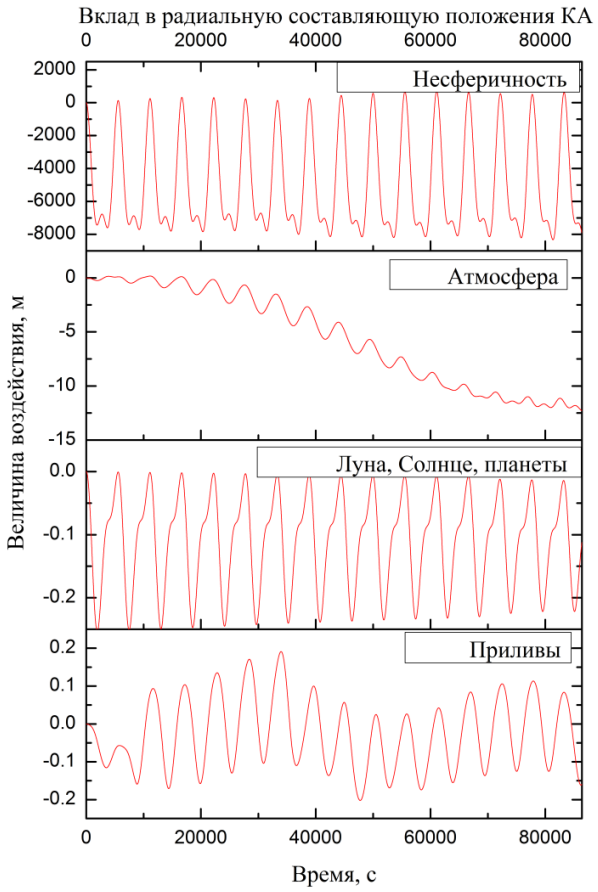


Рисунок 3.8 – Воздействие различных возмущающих факторов на радиальную составляющую (высоту) положения КА, движущегося вокруг Земли; вычисления выполнены в системе GCRS

Из рисунка 3.8 видно, что самый большой вклад по абсолютному значению имеет вклад от несферичности геопотенциала; вклад от планет, так же, как вклад от атмосферы дает эффект со знаком минус, в то время как эффект от приливов дает эффект со знаком плюс. На рисунке 3.9 показано суммарное воздействие этих эффектов на изменение высоты КА для высот 300 и 400 км (для наглядности шкала для случая 400 км сдвинута по оси ординат вниз на 100 км для совмещения со случаем 300 км)

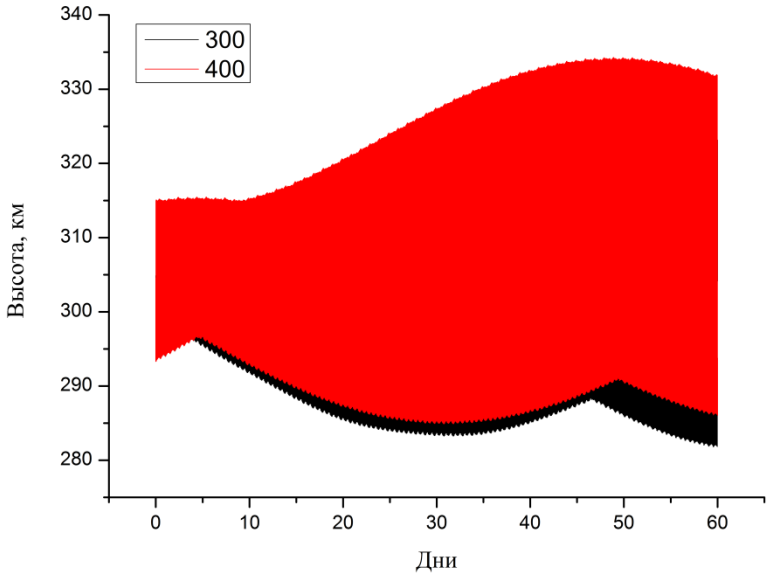


Рисунок 3.9 – Изменение геодезической высоты КА в случае движения на высоте 300 км и 400 км на интервале 2 месяца (для сравнения случай для 400 км сдвинут на 100 км вниз по оси ординат)

Вследствие ненулевого начального эксцентриситета орбиты КА в перигее аппарат испытывает более сильное тормозное воздействие со стороны атмосферы, чем в апогее. Вместе с другими силами это приводит к изменению формы орбиты КА. При этом общее уменьшение минимальной высоты КА в случае движения на высоте 300 км примерно на 4 км больше, чем на высоте 400 км на интервале 2 месяца, и составляет примерно 12 км против 8 км на высоте 400 км.

Данный факт препятствует использованию рабочих орбит до 300 км для схемы с двумя КА, поскольку снижается потенциальный срок активного существования КА, а также возникает необходимость более частой корректировки орбиты, что приведет к большой потере наблюдательного времени. Учитывая этот факт, все остальные вычисления были проделаны для случая движения КА на высоте 400 км.

3.2.3 Требования к взаимному расстоянию и точности измерения межспутникового расстояния

Ранее было упомянуто, что способ уточнения коэффициентов гравитационного поля Земли кластером из двух КА касается гармоник, не превосходящих степени и порядка 250. В подтверждение этого вывода ниже приводятся таблицы 3.3 а, б, в, г, д с результатами численного моделирования (Δd – взаимное расстояние между двумя КА).

Таблица 3.3а – Накопление разности расстояния между двумя КА в зависимости от исследуемой секториальной гармоники, n=m=150

	Время накопления сигнала		
	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм		
160	129	288	484
180	137	301	498
200	141	304	495
220	140	299	481
240	136	286	456

Таблица 3.3б – Накопление разности расстояния между двумя КА в зависимости от исследуемой секториальной гармоники, n=m=175

	Время накопления сигнала		
	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм		
140	7	30	65
160	13	41	74

180	17	43	73
200	17	39	60

Таблица 3.3в – Накопление разности расстояния между двумя КА в зависимости от исследуемой секториальной гармоники, n=m=200

	Время накопления сигнала		
	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм		
120	7	16	23
140	8	15.9	21
160	7	12	15
180	4	8	9
200	2	3	1

Таблица 3.3г – Накопление разности расстояния между двумя КА в зависимости от исследуемой секториальной гармоники, n=m=225

	Время накопления сигнала		
	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм		
80	0,7	1,7	2,6
100	1	2	3
120	1	3	3
140	1	2	2

Таблица 3.3д – Накопление разности расстояния между двумя КА в зависимости от исследуемой секториальной гармоники, n=m=250

	Время накопления сигнала		
	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм		
60	0	0,1	0,3
80	0,1	0,3	0,4
100	0,2	0,3	0,5
120	0	0	0,1
140	0	0	0

Под накоплением разности расстояния при данных n и m здесь понимается дополнительное межспутниковое расстояние, которое

зарегистрирует измерительная система космической группировки, если вместо гармоники (n,m) на нее начнет действовать гармоника (n+1,m+1). Иными словами, если при увеличении порядка и степени гармоники на единицу накопление можно измерить, значит, система разрешает эту гармонику, если нет – гармоника неразрешима, и это является пределом чувствительности системы.

Из представленных таблиц видно, что при увеличении разрешаемой гармоники растет требование к точности измеряемого межспутникового расстояния, которое в случае n=m=250 составляет ≈ 0,2 нм. Измерение таких величин за относительно небольшой промежуток времени (10 с) является очень сложной задачей, которая может быть решена только с помощью интерференционных лазерных систем на борту. Необходимо отметить, что в последнем случае время накопления 10 секунд является максимально допустимым, поскольку за это время аппараты проделают путь на орбите ≈ 80 км, что и составляет величину пространственного разрешения для 250-ой гармоники. Дальнейшие попытки увеличить порядок разрешаемой гармоники приведут к необходимости измерять сотые доли нанометра за несколько секунд, что является недостижимым для современного уровня развития отечественных измерительных систем, и к чему, безусловно, стоит стремиться.

Из представленных данных также можно заметить, что при повышении порядка гармоники изменялся диапазон рассматриваемых межспутниковых расстояний с понижением их абсолютного значения. Этот факт является следствием того, что при увеличении порядка разложения геопотенциала и попытке более детального изучения гравитационного поля Земли нам следует уменьшать межспутниковое расстояние, делая более чувствительной измерительную систему космического комплекса. Для каждого диапазона, таким образом, было найдено такое межспутниковое расстояние, которое доставляло максимум накопления разности, что означало нахождение оптимального расстояния между двумя КА, настроенного на данную

гармонику. Зависимость необходимого межспутникового расстояния от исследуемой гармоники представлена на рисунке 3.10.

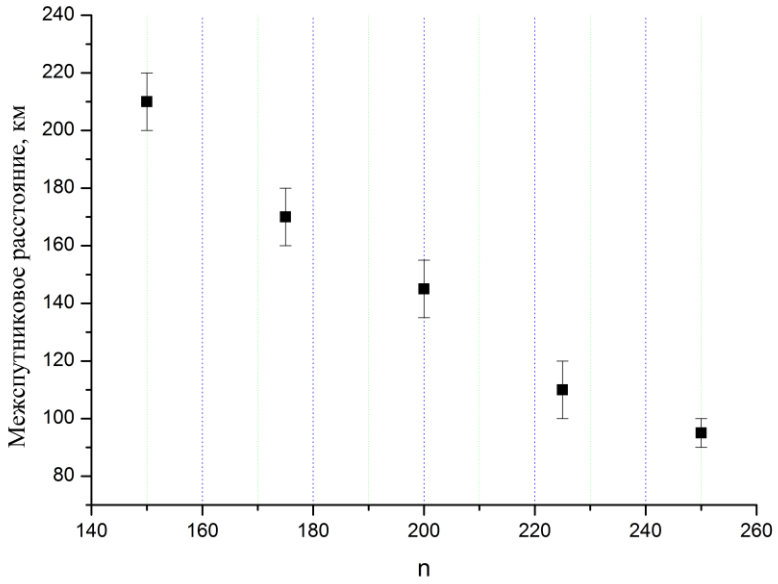


Рисунок 3.10 – Зависимость межспутникового расстояния от исследуемой гармоники (n)

При этом, если межспутниковое расстояние между аппаратами, как видно из рисунка, меняется линейно с увеличением исследуемой гармоники, то необходимая точность измерения межспутникового расстояния имеет степенную зависимость, что представлено на рисунке 3.11.

Рисунок 3.11 показывает, что при увеличении исследуемого порядка геопотенциала на 100 единиц, требования к точности измерения межспутникового расстояния возрастают на 3 порядка. Кроме этого на рисунке 3.11 приведено примерное значение ускорения, которая должна выделить измерительная система на фоне всех шумов, как инструментального, так и иного характера. В частности, если мы хотим разрешить 250-ую гармонику, нам необходимо подавлять помехи на уровне ~10^{-12} м/с^2.

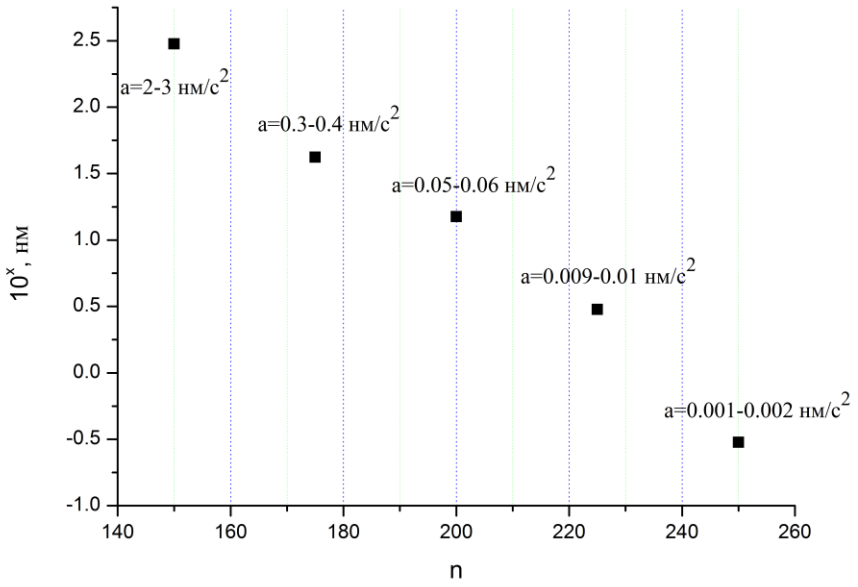


Рисунок 3.11 – Зависимость требуемой точности измерения межспутникового расстояния от исследуемой гармоники

3.2.4 Требования к наклонению рабочей орбиты.

Выше был рассмотрен стандартный случай размещения орбитальной группировки, состоящей из 2-х КА, на околополярной орбите с наклонением ≈89°. Стандартный, потому что такая схема была реализована в проекте «GRACE». Околополярная орбита привлекательна тем, что измерения покрывают все широты, и можно восстановить всю структуру геопотенциала. Проводя измерения на меньших наклонениях, мы теряем информацию о структуре геопотенциала выше этих наклонений. Тем не менее, если эти измерения превзойдут измерения на околополярной орбите (по величине накопления сигнала, времени проведения измерений и т.д.), имеет смысл практической реализации этой схемы.

В таблицах 3.4а и 3.4б представлены результаты расчетов по накоплению межспутникового расстояния в зависимости от наклонения рабочей орбиты КА.

Таблица 3.4а – Накопление разности между двумя КА в зависимости от исследуемой гармоники и наклонения орбиты, n=m=200

	Наклонение 89°			Наклонение 60°			Наклонение 45°		
	10 с	15 с	20 с	10 с	15 с	20 с	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм								
120	7,0	16,0	23,0	5,0	13,0	22,0	3,0	9,0	15,0
140	**8,0**	**15,9**	**21,0**	**6,0**	**14,0**	**23,0**	4,0	10,0	16,0
160	7,0	12,0	15,0	**6,0**	**14,0**	**23,0**	**5,0**	**11,0**	**18,0**
180	4,0	8,0	9,0	6,0	14,0	21,0	5,0	10,0	18,0
200	2,0	3,0	1,0	5,0	11,0	17,0	5,0	9,0	17,0

Таблица 3.4б – Накопление разности между двумя КА в зависимости от исследуемой гармоники и наклонения орбиты, n=m=250

	Наклонение 89°			Наклонение 60°			Наклонение 45°		
	10 с	15 с	20 с	10 с	15 с	20 с	10 с	15 с	20 с
Δd (км)	Накопление разности расстояния между двумя КА, нм								
60	0,0	0,1	0,3	0,1	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3
80	0,1	0,3	0,4	0,1	0,4	0,6	0,1	0,3	0,3
100	**0,2**	**0,3**	**0,5**	**0,2**	**0,4**	**0,7**	**0,2**	**0,3**	**0,5**
120	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
140	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Жирным текстом выделены строки, соответствующие максимальному накоплению расстояния и относящиеся к наиболее оптимальной величине межспутникового расстояния для исследования данной гармоники. Как видно из представленных таблиц, величина наклонения не влияет существенным образом ни на величину накопления расстояния, ни на величину межспутникового расстояния, ни на время накопления сигнала, а также не зависит от исследуемой гармоники. Как будет показано ниже, на точность определения коэффициентов Стокса величина наклонения также не влияет существенным образом, как и на необходимое время накопления измерений для восстановления карты геопотенциала.

Однако ситуация коренным образом меняется при использовании двух пар КА на разных наклонениях. Моделирование такой конфигурации позволяет оценить равномерность заполнения сферы наблюдения КА и,

таким образом, улучшить задачу определения коэффициентов Стокса и высоты геоида. На рисунке 3.12 представлено различие заполнение сферы наблюдения в случае одной группировки на полярной орбите и в случае дополнительного использования группировки на наклонении 75°.

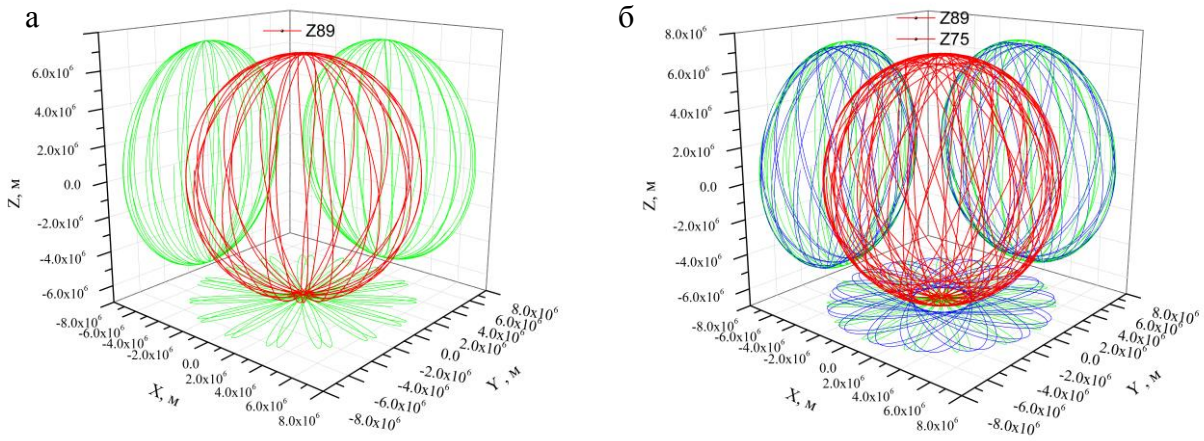


Рисунок 3.12 – а) Заполнение сферы наблюдения на наклонении 89°; б) Заполнение сферы наблюдения на наклонении 89° и 75°; интервал измерений 1 день

Из рисунка 3.12 видно, как дополнительная группировка помогает уменьшить разреженные области наблюдения в экваториальном регионе, что является необходимым условием для проведения прецизионных гравиметрических измерений. Анализ наиболее предпочтительной структуры группировки, состоящей из более 2-х КА, выходит за рамки настоящей работы и составляет основу гравитационных миссий следующего поколения (ГМСП). Необходимо отметить, что работы по созданию ГМСП уже проводятся зарубежными космическими организациями [37,38], что еще раз подчеркивает важность построения отечественной группировки типа «GRACE», без которой не представляется возможным создание отечественной ГМСП. Программа «SpaceGrav» в том виде, в котором она представлена сейчас, может дать оценку заполняемости сферы наблюдения с использованием КА на разных наклонениях, но как это заполнение отразится на уточнении коэффициентов Стокса и определении высоты геоида является предметом дальнейших исследований и усовершенствования программы.

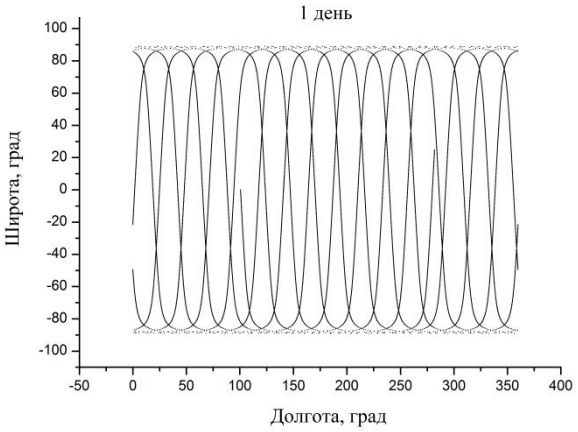
3.2.5 Требования ко времени проведения измерений

Для рационального определения коэффициентов Стокса в выражении (3.1) временной промежуток проведения измерений должен быть подобран таким образом, чтобы за его длительность трассы орбитальной космической группировки в проекции на земную поверхность отстояли друг от друга не больше чем на половину длины волны геоида для данной гармоники. Например, для определения и уточнения коэффициентов Стокса до 250 гармоники включительно необходимо, чтобы трассы КА в проекции на земную поверхность отстояли друг от друга на расстояние не более 80 км.

Поскольку в процессе пролета КА самые разреженные участки по покрытию остаются в районе экватора (рисунок 3.13), то заполнение трассами необходимо смотреть именно в этом регионе.

На рисунке 3.14 показано, что в случае движения КА на околополярной орбите (≈89°) необходимое заполнение (< 1° ≈ 80 км) достигается за промежуток времени в один месяц. Причем картина не сильно меняется с изменением наклонения на 60° и 45° (рисунок 3.16 и рисунок 3.18). Количество трасс остается неизменным в выбранной области, меняется лишь способ ее заполнения, что не является принципиальным в процедуре уточнения коэффициентов Стокса.

а



б

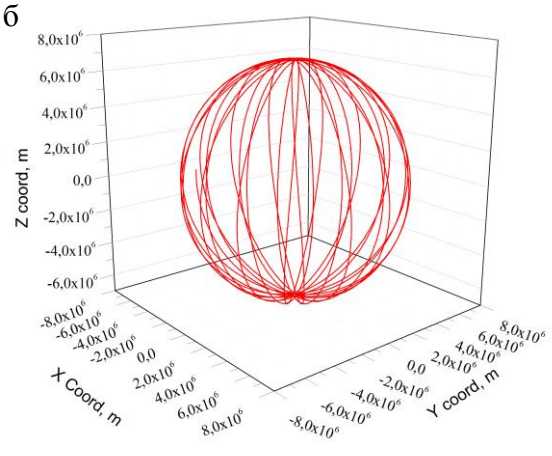


Рисунок 3.13 – а) Проекция трасс КА на земную поверхность в случае движения КА на орбите с наклонением 89° за промежуток 1 день (общий вид); б) Трасса КА в декартовой системе координат (ITRS), XCOORD, YCOORD, ZCOORD – координаты X,Y,Z (м)

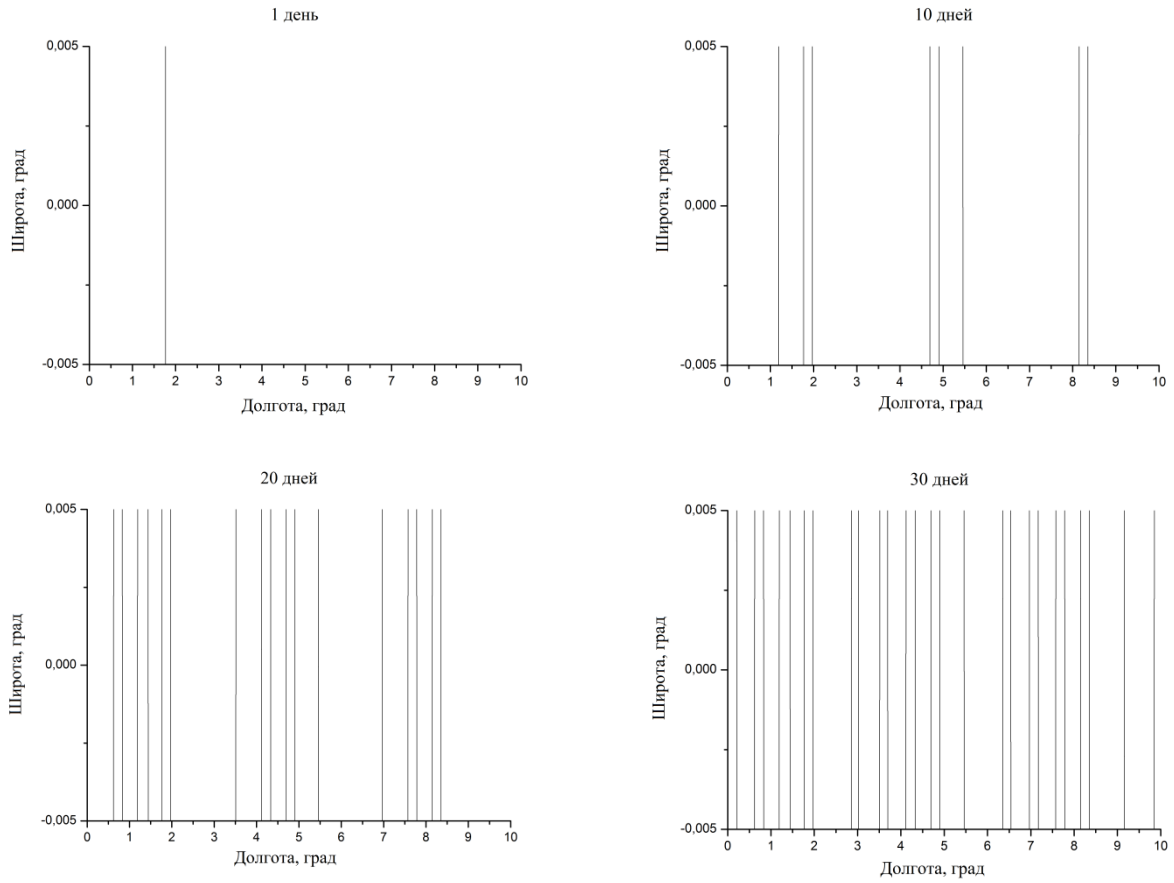


Рисунок 3.14 – Проекция трасс КА на земную поверхность в выделенной области района экватора в случае движения КА на орбите с наклонением 89° в зависимости от времени измерения от 1 до 30 суток

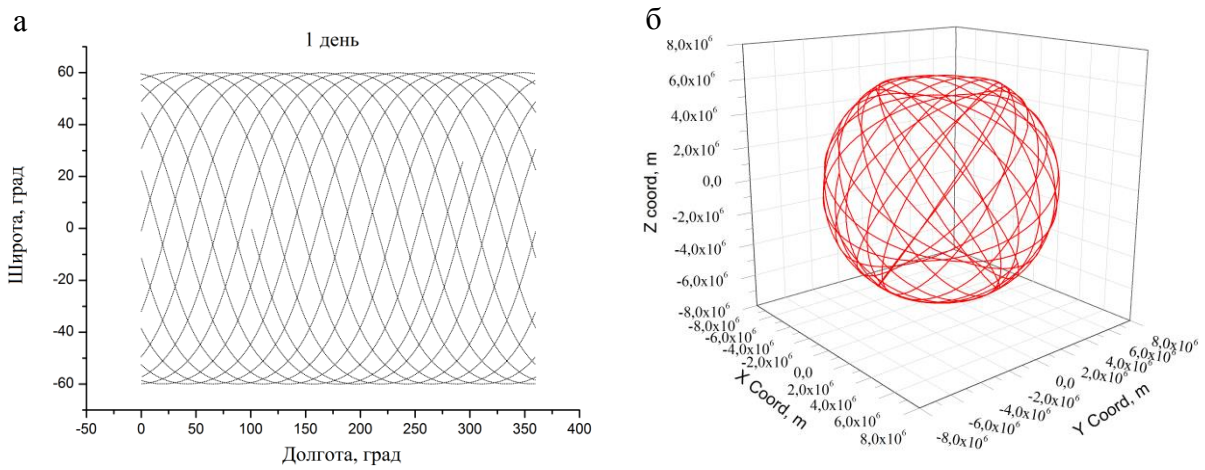


Рисунок 3.15 – а) Проекция трасс КА на земную поверхность в случае движения КА на орбите с наклонением 60° за промежуток 1 день (общий вид); б) Трасса КА в декартовой системе координат (ITRS), XCOORD, YCOORD, ZCOORD – координаты X,Y,Z (м)

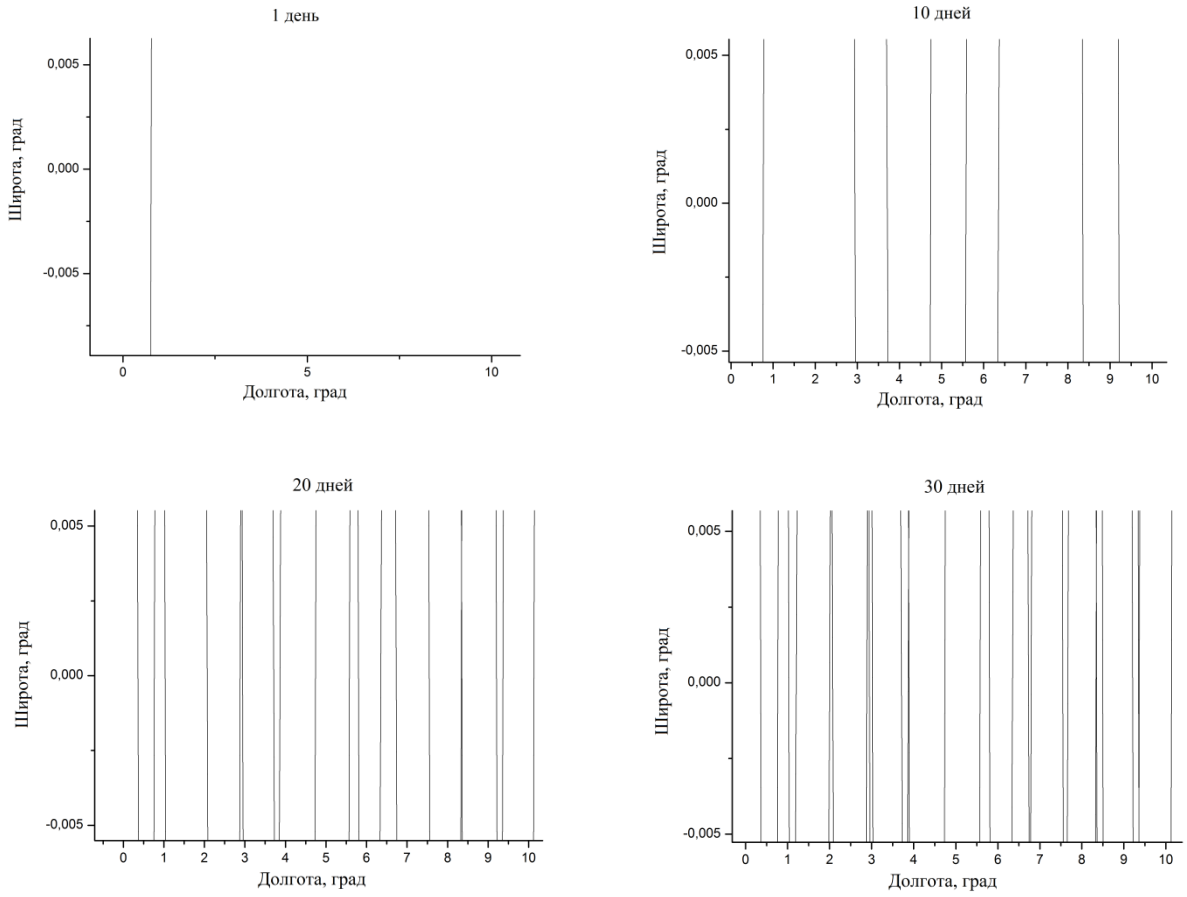
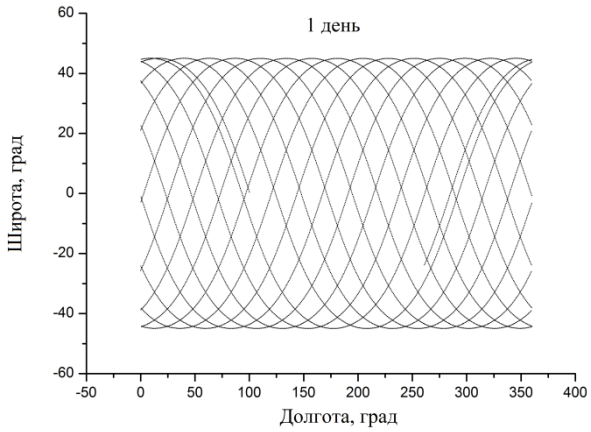


Рисунок 3.16 – Проекция трасс КА на земную поверхность в выделенной области района экватора в случае движения КА на орбите с наклонением 60° в зависимости от времени измерения от 1 до 30 суток

а



б

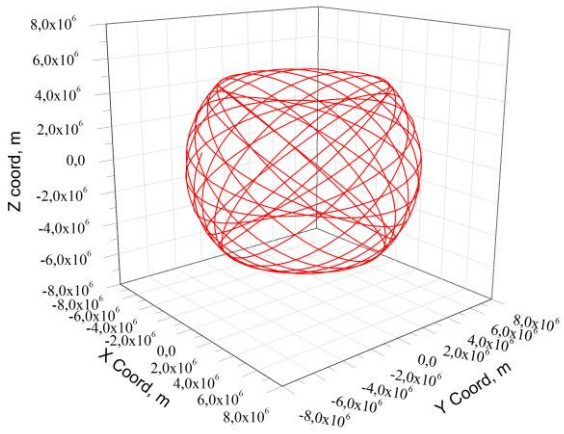


Рисунок 3.17 – а) Проекция трасс КА на земную поверхность в случае движения КА на орбите с наклонением 45° за промежуток 1 день (общий вид); б) Трасса КА в декартовой системе координат (ITRS), XCOORD, YCOORD, ZCOORD – координаты X,Y,Z (м)

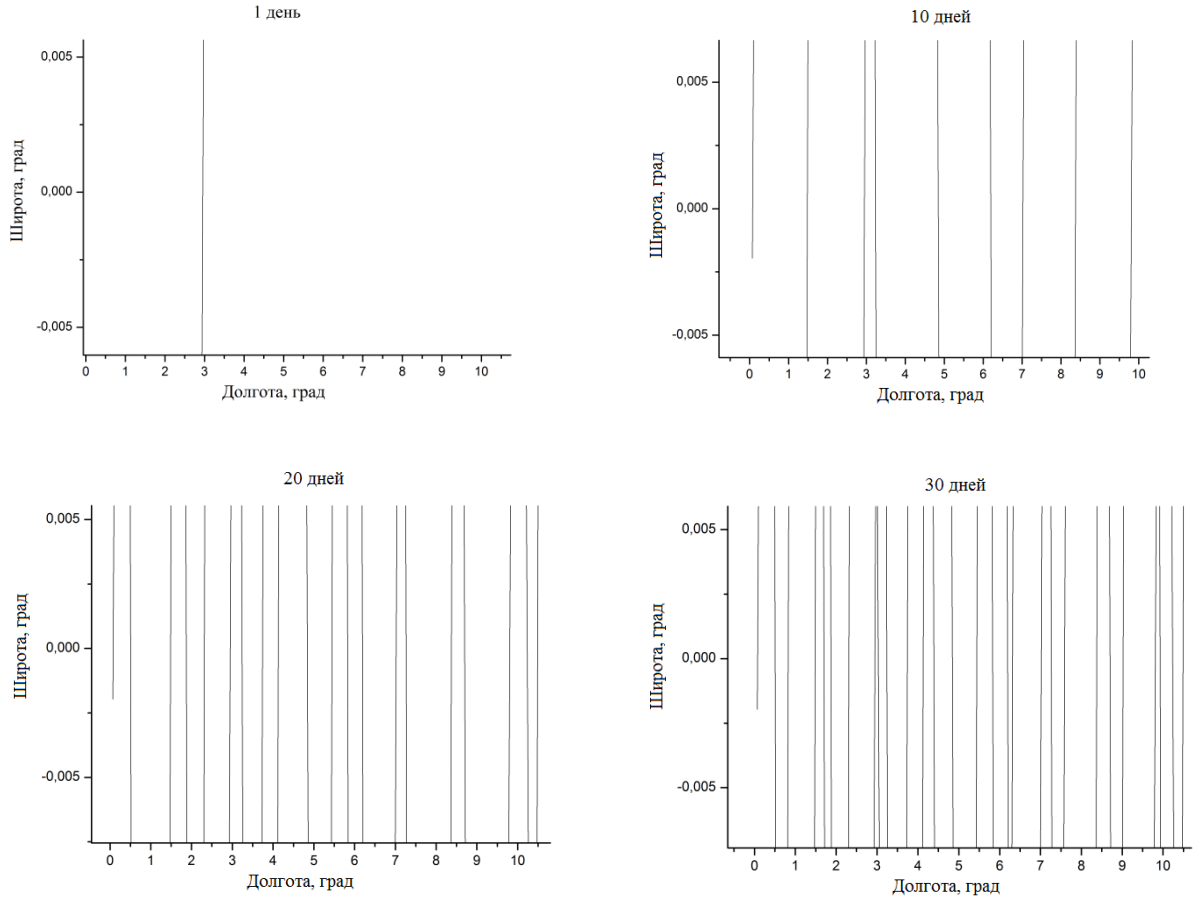


Рисунок 3.18 – Проекция трасс КА на земную поверхность в выделенной области района экватора в случае движения КА на орбите с наклонением 45° в зависимости от времени измерения от 1 до 30 суток

Как можно заметить из представленных данных, численный расчет проводился для наклонений равных 45°, 60° и 89°. Данные значения наклонения были выбраны по нескольким причинам:

– моделирование движения для наклонений <45° нецелесообразно, поскольку в этом случае отсутствует информация как минимум о половине пространственной структуры геопотенциала;

– моделирование на наклонении 45° интересно в случае использования такой пары КА как дополняющей основные измерения, проводимые на околополярных орбитах; в случае много лучших результатов

по сравнению с орбитальной группировкой на околополярной орбите, возможно применение такой системы как независимой;

– моделирование на наклонении 60° интересно в качестве промежуточного варианта между околополярными и среднеширотными типами орбит, на котором можно отследить изменение характеристик измерения при повышении наклонения; в случае достижения много лучших результатов по сравнению с орбитальной группировкой на околополярной орбите, возможно применение вышеупомянутой системы как независимой;

– моделирование на наклонении 89° - основной рассматриваемый вариант, зарекомендовавший себя в результате эксперимента «GRACE», покрывающий практически всю земную поверхность;

– моделирование на наклонении 90° - имеет небольшое преимущество по сравнению с наклонением 89° в части покрытия поверхности Земли, однако на этом наклонении отсутствует прецессия орбиты, и заполнение покрытия осуществляется только благодаря суточному вращению Земли, что является не совсем логичным вариантом проведения измерений.

Из всех проведенных выше результатов вычислений пока что нет серьезных предпосылок для использования рабочих орбит с наклонениями отличными от 89°, если они не являются вспомогательными и расширяющими основную группировку КА.

3.2.6 Планирование измерений в случае группировки, состоящей из двух КА, и первые оценки уточнения коэффициентов Стокса.

Для уточнения коэффициентов Стокса на основе проведенных измерений предлагается проводить следующий комплекс мероприятий, основанный на методике обработки, изложенной в работах [39,40]:

1. Задание на момент времени T_0 вектора состояния аппаратов, включающего их положение и скорость $\boldsymbol{X_0}=\{X_0,Y_0,Z_0,V_{x0},V_{y0},V_{z0}\}$;

2. Интегрирование движения КА на момент времени $T_{i+1}=T_i+\Delta t$, на основе априорно известной модели гравитационного поля Земли на интервале 30 минут (расчет грубой орбиты);

3. Уточнение вектора состояния аппаратов с использованием измерений системы ГЛОНАСС с помощью метода МНК или с помощью фильтра Калмана (расчет уточненной орбиты);

4. Составление уравнений МНК относительно неизвестных параметров по совокупности коротких дуг (30 минут) для интервала измерений один месяц на основе уточненной орбиты.

Использование коротких дуг продолжительностью 30 минут необходимо для уменьшения ошибок интегрирования, неучтенных возмущений, а также позволяет гибко описывать процесс наблюдений, который может содержать ошибки и разрывы вследствие сбоя аппаратуры или орбитальных маневров КА.

Условные уравнения для уточнения коэффициентов Стокса будут иметь вид:

$$\ddot{r}_i^o - \ddot{r}_i^c = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{k} a_{nm}^i \Delta p_{nm} \qquad a_{nm}^i = \left(\frac{\partial \ddot{r}^c}{\partial p_{nm}}\right)_i,\ p_{nm} = C_{nm}, S_{nm}\ , \tag{3.23}$$

где $\ddot{r}_i^o$ - измеренное взаимное расстояние между двумя КА, а $\ddot{r}_i^c$ - рассчитанное в соответствии с теорией на основе модели (3.2). Выражение для расчета $\ddot{r}^c$ имеет следующий вид:

$$\ddot{r}^c = \frac{(V_1^2 + V_2^2 - 2\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}}\vec{\boldsymbol{V}}_2 + (\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}})(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}})) \times D^2 - (\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}})(\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}})}{D^3}, \tag{3.24}$$

где $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1,2}} = \{X_{1,2}, Y_{1,2}, Z_{1,2}\}$ - радиус-вектор каждого КА, $\vec{\boldsymbol{V}}_{1,2} = \{V_{x1,2}, V_{y1,2}, V_{z1,2}\}$ - вектор скорости каждого КА, $\vec{\boldsymbol{a}}_{1,2} = \{a_{x1,2}, a_{y1,2}, a_{z1,2}\}$ - вектор ускорения каждого КА, $D = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$ - расстояние между КА. Для производных a_{nm}^i из (3.23) получим:

$$a_{nm}^{i} = \left(\frac{\partial \ddot{r}^{c}}{\partial p_{nm}} \right)_{i} = \frac{(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}})}{D} \frac{\partial(\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}})}{\partial p_{nm}}, \;\; p_{nm} = C_{nm}, S_{nm} \qquad (3.25)$$

Производные вектора ускорения по коэффициентам Стокса считаются на основе алгоритма Беликова и Тайбаторова.

Для испытания этой схемы расчета на реальных данных, имеет смысл провести поэтапную процедуру ее реализации, которая заключается в следующем:

– 0 этап: считаем, что вектор состояния аппаратов известен предельно точно; заменяем разницу $\ddot{r}_i^o - \ddot{r}_i^c$ случайной величиной – ошибкой измерений; находим поправки к коэффициентам Стокса с помощью метода МНК;

– 1 этап: считаем, что вектор состояния аппаратов известен предельно точно; заменяем разницу $\ddot{r}_i^o - \ddot{r}_i^c$ физически подкрепленной величиной – разницей за счет действия приливов

– 2 этап: в системе нормальных уравнений (3.23) дополнительно берется производная по вектору состояния аппаратов, таким образом, вместе с коэффициентами Стокса уточняется и вектор состояния;

– 3 этап: на основе лазерных и фазовых измерений ГЛОНАСС с помощью фильтра Калмана независимо уточняется орбита аппаратов; на основе уточненной орбиты составляются условные уравнения относительно коэффициентов Стокса.

Ниже будут приведены результаты расчетов в рамках нулевого и первого этапов. Расчеты в рамках остальных этапов являются целью дальнейшего усовершенствования основной расчетной программы.

Для отображения результатов уточнения коэффициентов Стокса, можно воспользоваться несколькими приемами. Самый простой вариант – оценить относительную величину поправки к коэффициентам Стокса к их абсолютному значению, она должна быть много меньше самой величины:

$\Delta C_{nm} << C_{nm}$, $\Delta S_{nm} << S_{nm}$. Однако такой способ ненагляден. Одним из самых распространенных вариантов представления результатов решения данной задачи является использование дисперсии [41]:

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^{n} \sigma_{nm}^2 = \sum_{m=0}^{n} (C_{nm}^2 + S_{nm}^2). \tag{3.26}$$

Соответствующее среднеквадратичное отклонение для каждой степени представляется в следующем виде:

$$СКО_n = \sqrt{(2n+1)^{-1} \sum_{m=0}^{n} \sigma_{nm}^2} \ . \tag{3.27}$$

Для сравнения двух решений используется дисперсия разности коэффициентов Стокса:

$$\Delta\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^{n} (\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2) \ , \tag{3.28}$$

где

$\Delta C_{nm} = (C_{nm})_{est} - (C_{nm})_{ref}$,

$\Delta S_{nm} = (S_{nm})_{est} - (S_{nm})_{ref}$.

$(C_{nm})_{est}$, $(S_{nm})_{est}$ – оценки коэффициентов Стокса, полученные в результате уточнения, $(C_{nm})_{ref}$, $(S_{nm})_{ref}$ – исходные величины коэффициентов Стокса.

Форма представления результатов (3.28), как видно из ее структуры, является зависимой величиной от степени геопотенцала, что требует графического представления для полноценного анализа. Поэтому иногда удобнее использовать скалярную величину, описывающую ошибку всего набора полученных коэффициентов, с помощью которой можно сразу же сделать вывод о качестве полученного решения. В этом случае используется так называемая кумулятивная величина ошибки геоида:

$$\Delta\sigma_{cum}^2 = R_e \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{n} (\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2) \ , \tag{3.29}$$

где R_e – средний радиус Земли.

Представление зависимого от времени решения, например, в случае оценки действия приливов удобнее и нагляднее всего описывать в терминах высоты геоида [42,43]. Геоид определен как эквипотенциальная поверхность, которая соответствует среднему уровню высоты океана, вектор направления силы тяжести к которой перпендикулярен в любой ее точке. Вариация гравитационного поля Земли может быть представлена в терминах высот геоида $N(\varphi,\lambda)$, что представляет собой расстояние между геоидом и соответствующим референц эллипсоидом. Согласно формуле Бруна [42] высота геоида может быть получена с помощью возмущающего потенциала, который представляет собой различие между реальным гравитационным потенциалом $V(r,\varphi,\lambda)$ и нормальным $U(r,\varphi)$:

$$N(\varphi,\lambda) = \frac{V(r,\varphi,\lambda) - U(r,\varphi)}{\gamma(\varphi,\lambda)} \tag{3.30}$$

где $\gamma(\varphi,\lambda)$ – нормальная сила тяжести, которая с погрешностью ≈0.3% может быть описана величиной GM/r. Нормальный гравитационный потенциал $U(r,\varphi)$, по определению, величина постоянная, таким образом, различия в высотах геоида определяются только различиями в реальных гравитационных потенциалах $\Delta V(r,\varphi,\lambda)$ и могут быть представлены в виде набора по сферическим гармоникам:

$$\Delta N(\varphi,\lambda) = R_e \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{n} (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \tag{3.31}$$

С помощью выражения (3.31) будут представлены результаты расчетов по этапу 1. Результаты расчета по этапу 0 будут представлены в простейшем варианте (относительном), поскольку данное приближение является абстрактным и предназначено только для проверки правильности работы программы «PlanGrav».

На рисунке 3.19 приведены ошибки определения коэффициентов Стокса в зависимости от межспутникового расстояния для n=30:

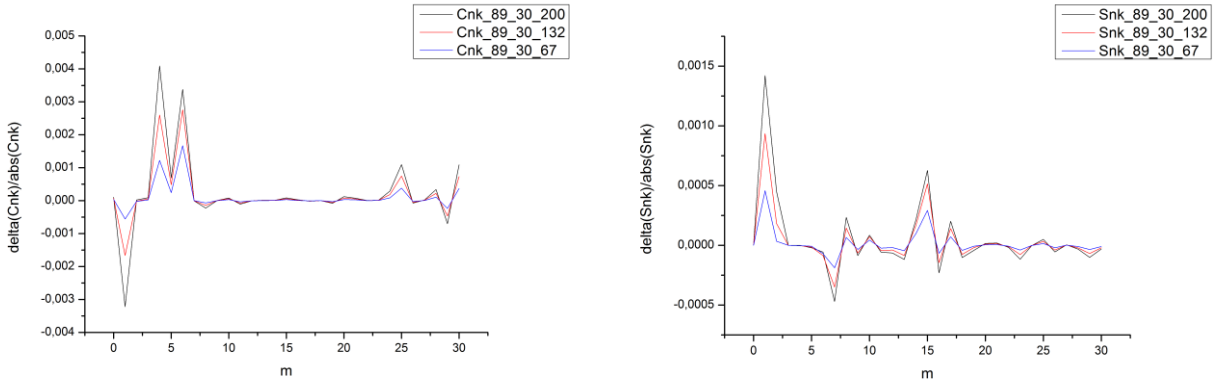


Рисунок 3.19 – Ошибка определения коэффициентов Стокса в зависимости от взаимного расстояния между аппаратами для n=30 и наклонения 89°; m – порядки, соответствующие степени n=30; по оси ординат – вычисленная величина поправки по отношению к абсолютной величине коэффициента Стокса

В данном случае при моделировании «этапа 0» коэффициенты Стокса согласно модели EGM96 принимались за истинные, а расчет движения КА проводился с этими же коэффициентами, но зашумленными по Гауссу. Исходя из этого, критерием точности решения обратной задачи (определения коэффициентов Стокса) было отклонение вычисленной величины коэффициента Стокса от величины в EGM96, нормированное на абсолютную величину коэффициента в EGM96. Эта величина представлена на оси ординат.

Вычисления, результаты которых представлены на рисунке 3.19, проводились со следующими параметрами: наклонение орбиты КА i = 89°; исследуемые межспутниковые расстояния Δd = 67 км, 132 км, 200 км; уточняемая степень геопотенциала n=30. Из рисунка 3.19, таким образом, можно сделать вывод, что чем меньше расстояние между КА, тем более точно определяются поправки к коэффициентам Стокса.

На рисунке 3.20 приведены результаты вычисления по определению ошибок коэффициентов Стокса в зависимости от разного наклонения орбит КА для n=30:

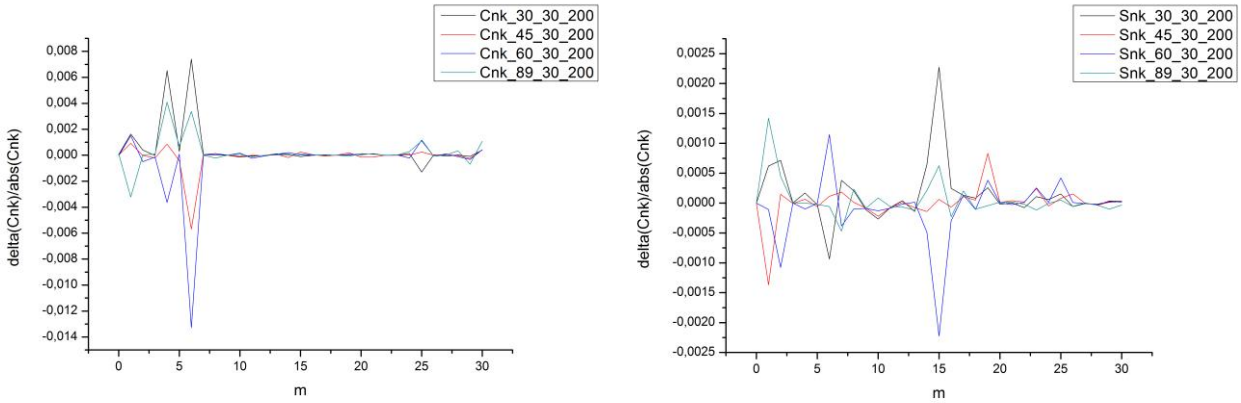


Рисунок 3.20 – Ошибка определения коэффициентов Стокса в зависимости от разного наклонения орбит аппаратов для n=30 и межспутникового расстояния 200 км; m – порядки, соответствующие степени n=30; по оси ординат – вычисленная величина поправки по отношению к абсолютной величине коэффициента Стокса

Вычисления, результаты которых представлены на рисунке 3.20, проводились со следующими параметрами: исследуемые наклонения орбиты КА i = 89°, 60°, 45°, 30°; межспутниковое расстояние Δd=200 км; уточняемая степень геопотенциала n=30. Из рисунка 3.20 можно заключить, что величина наклонения орбит аппаратов не отражается существенным образом на ошибках определения коэффициентов Стокса, так как на графиках не прослеживается никакой явной зависимости.

Наконец, был исследован вопрос зависимости величин ошибок коэффициентов Стокса от уточняемой степени гармоники. Вычисления выше касались одной только 30-ой гармоники. Ниже будут приведены результаты измерений для нескольких гармоник. Проведение расчетов для всех гармоник на данном этапе не представляется возможным ввиду большого количества затрачиваемого времени на расчеты. Поэтому расчет проводился выборочно для отображения качественной картины, исходя из которой, может быть сделан однозначный вывод.

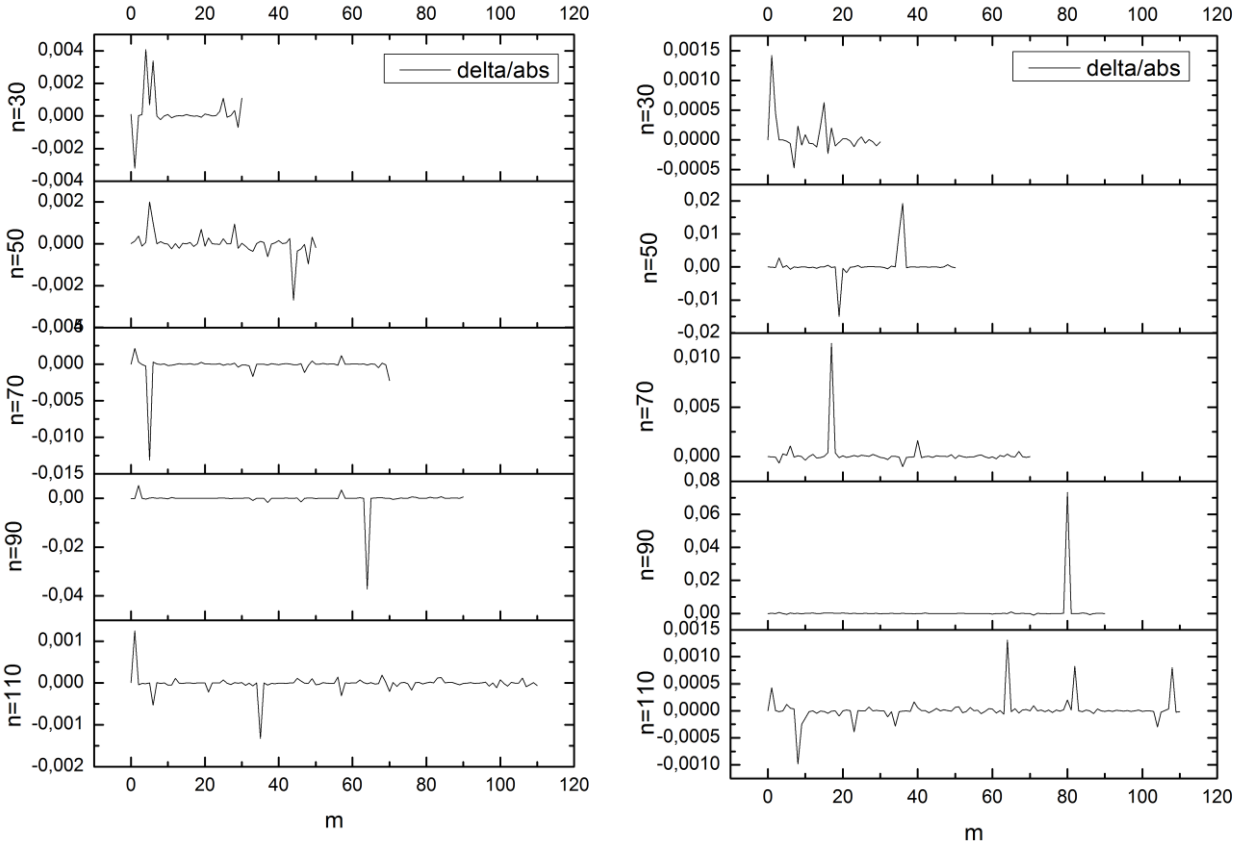


Рисунок 3.21 – Ошибка определения коэффициентов Стокса в зависимости от уточняемой гармоники (слева C_{nk}, справа S_{nk})

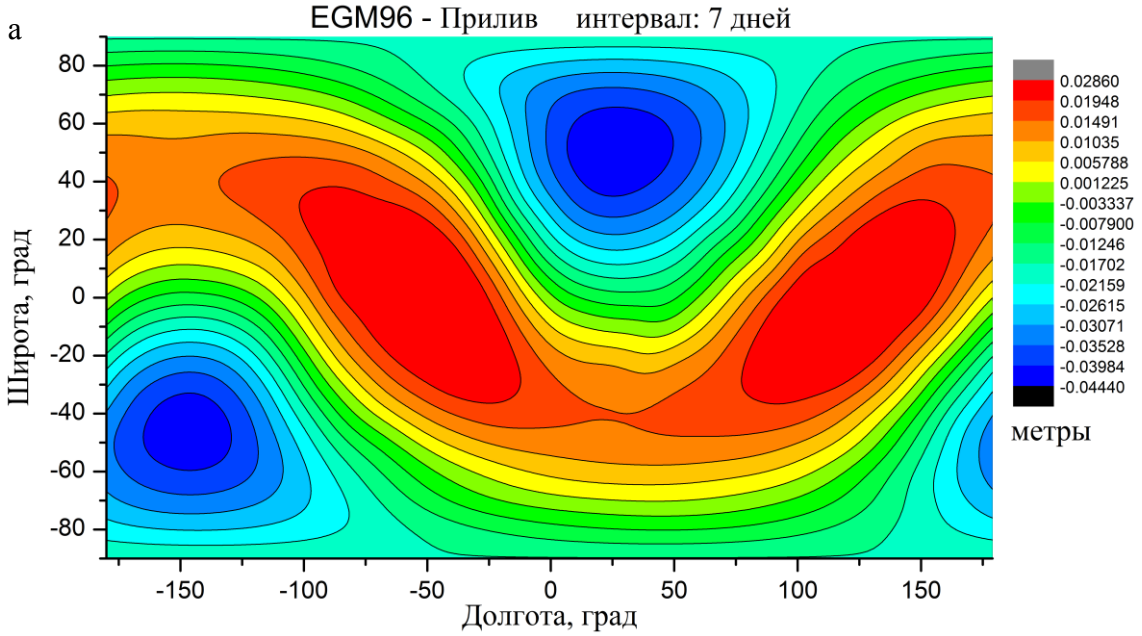
Вычисления, представленные на рисунке 3.21, проводились со следующими параметрами: наклонение орбиты КА i = 89°; межспутниковое расстояние Δd=200 км; уточняемая степень геопотенциала n = 30, 50, 70, 90, 110.

Основной вывод, который можно извлечь из рисунка 3.21 – в системе «спутник-спутник» больший порядок гармоники определяется с большей точностью. Для уточнения низких гармоник наиболее целесообразным является, например, использование градиентометров на борту КА [44].

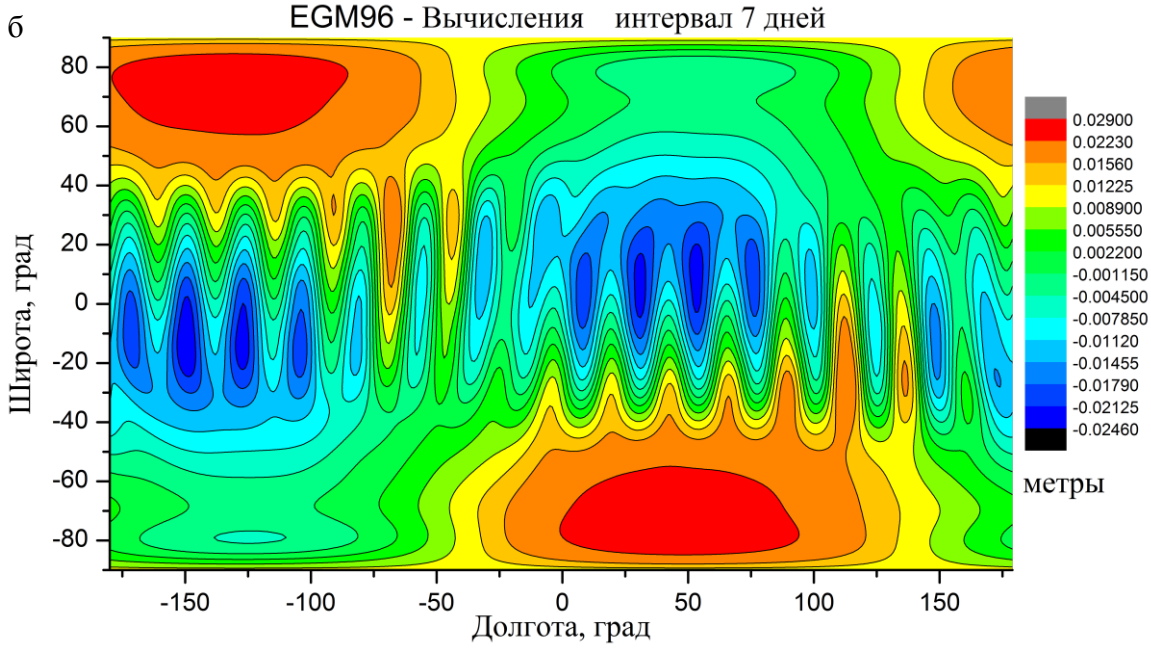
Расчеты в рамках этапа 1 выполнялись следующим образом. С помощью программы «SpaceGrav» на конкретную дату и промежуток времени были рассчитаны межспутниковые ускорения в присутствии приливов (океанических, твердых и полярных), моделирующие

наблюденные, «реальные» значения межспутниквого ускорения. Затем в программе «PlanGrav» на ту же дату и время был выполнен расчет модельных межспутниковых ускорений без учета действия приливов. После этого вычислялась разность $\ddot{r}_i^o - \ddot{r}_i^c$, и начиналась процедура поиска коэффициентов Стокса (восстановления гравитационного поля) согласно формулам 3.23-3.25 с учетом разбиения выбранного промежутка времени на дуги по 30 минут. Результаты расчетов представлены ниже.

а



б



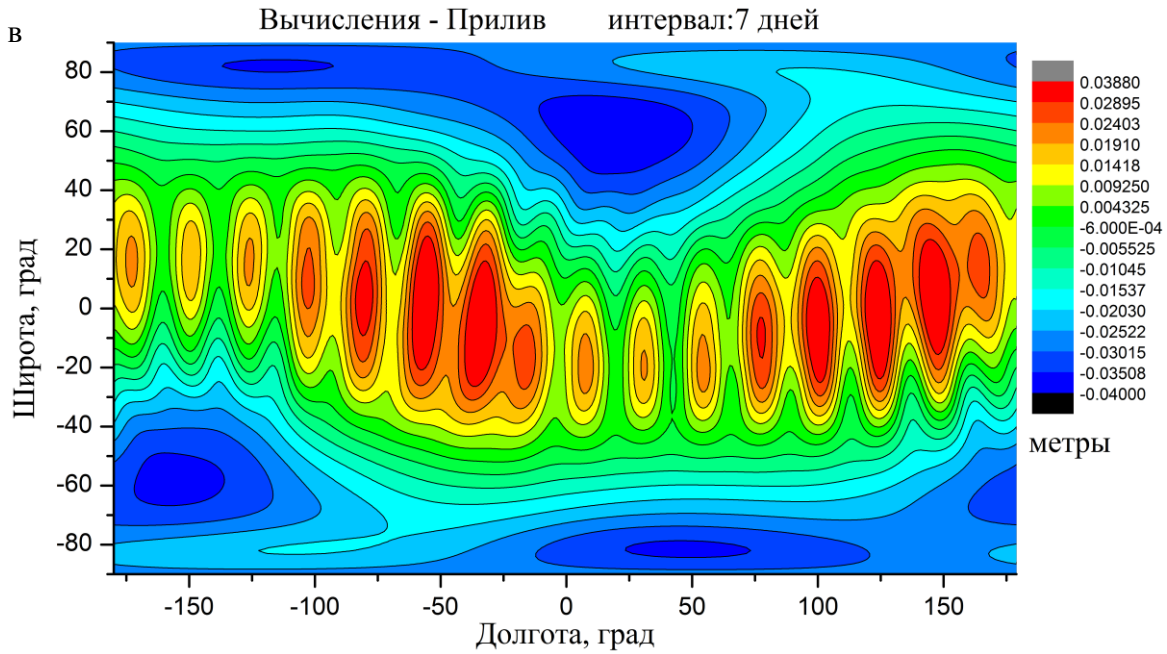


Рисунок 3.22 – Результаты уточнения коэффициентов Стокса с учетом действия приливов. а) Результат действия приливов на структуру геопотенциала EGM96 на интервале 7 дней; б) Разность уточненной модели, полученной в результате вычислений, и исходной модели EGM96 на интервале 7 дней; в) Разность уточненной модели, полученной в результате вычислений и приливного воздействия на интервале 7 дней.

На рисунке 3.22 представлен результат восстановления гравитационного поля Земли для гармоник от (2,0) до (20,20) на интервале 7 дней. В данном случае производилось уточнение $n_p=n^2_{max}+2n_{max}-3=$ 437 неизвестных на основе 120960 уравнений (интегрирование с шагом 5 секунд) по совокупности 336 коротких дуг. Восстановление гравитационного поля Земли на более высоких гармониках и на большем интервале времени (30 дней) представляет на данный момент трудоемкую процедуру для ПК и решается оптимизацией исходного кода программы «PlanGrav».

На рисунках 3.22 б) и в) отчетливо видны долготные полосы в экваториальной и среднеширотной области, проявляющиеся в результате восстановления гравитационного поля Земли. Эти полосы являются следствием как анизотропии измерений, так и наложения спектров. Первая проблема появляется в результате неравномерного покрытия измерениями покрытия Земли, что было отмечено в разделе 3.2.4. Вторая проблема

возникает, когда гравитационный сигнал на более высокой частоте становится неотличимым от более низких частот. Высокие частоты либо искажают, либо создают ложный сигнал на более низких частотах и, следовательно, портят результат восстановления гравитационного поля. Подобные результаты можно наблюдать в работах, посвященных восстановлению гравитационного поля Земли по наблюдениям гравиметрических КА [43]:

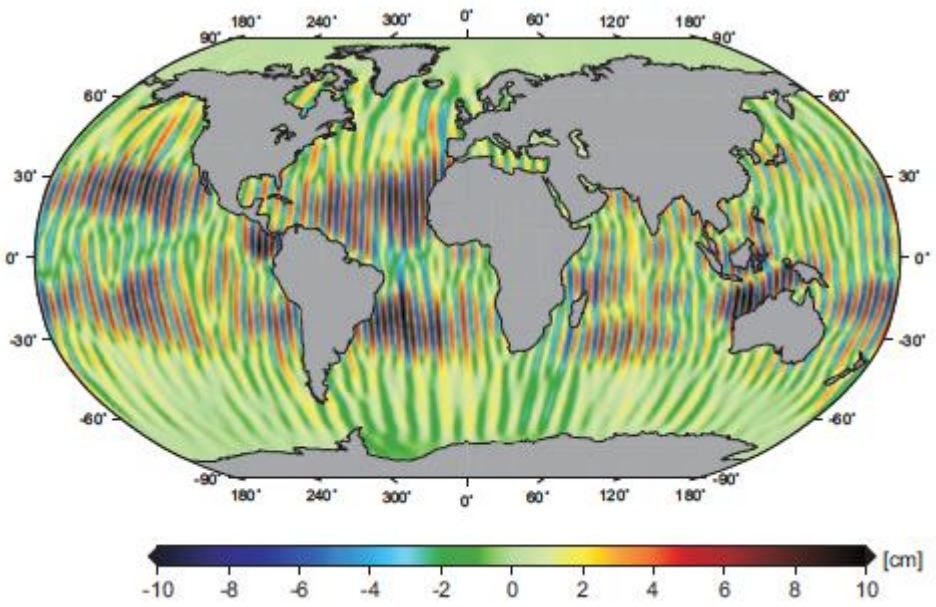


Рисунок 3.23 – Результат восстановления гравитационного поля Земли за счет действия океанических приливов на основе модели ITG-GRACE03s (Вычисления – ITG-GRACE03s) для степеней геопотенциала до n_{max}=80 включительно.

Таким образом, результат работы программы «PlanGrav» по восстановлению карты гравитационного поля Земли в рамках этапа 1 можно считать правдоподобным.

3.2.7 Проведение градиентометрических измерений на борту КА

В градиентометрии измеряется градиент от вектора силы тяжести $\vec{g}(\vec{r})$, зависящего от радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ точки измерения P:

$$\nabla \vec{g}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} \frac{\partial g_x}{\partial y} \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} \frac{\partial g_y}{\partial y} \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} \frac{\partial g_z}{\partial y} \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

причем вектор силы тяжести $\vec{g}(\vec{r})$ определяется потенциалом силы тяжести Земли W:

$$W = U + V,$$

U – потенциал сил притяжения, V – потенциал центробежных сил:

$$\vec{g} = \nabla W$$

∇ - дифференциальный оператор градиента.

Значит

$$\nabla(\nabla W) = \begin{pmatrix} W_{xx} W_{xy} W_{xz} \\ W_{yx} W_{yy} W_{yz} \\ W_{zx} W_{zy} W_{zz} \end{pmatrix},$$

где $W_{ij} = \frac{\partial^{ij} W}{\partial i \partial j}$ - компонент тензора градиентов силы тяжести.

В произвольной декартовой системе координат градиент от вектора силы тяжести в точке P представляется матрицей 3×3, которую обозначим как $M(P)$, т.е. $M(P) = \nabla(\nabla W)$.

Единица измерения градиентов – этвеш (Е): 1 Е = 10^{-9} $с^{-2}$ = 0,1 мгал/км.

Первый и пока единственный пример использования спутникового градиентометра для определения гравитационного поля Земли продемонстрирован в проекте «GOCE» [45].

Измерения с помощью градиентометра основаны на принципе дифференциальной акселерометрии. Прибор размещается в центре масс спутника. Измерительный модуль состоит из системы трех взаимно перпендикулярных одноосевых градиентометров. Каждый из них состоит из

пары трехосевых акселерометров, расстояние (база) между которыми равно 50 см (рисунок 3.24).

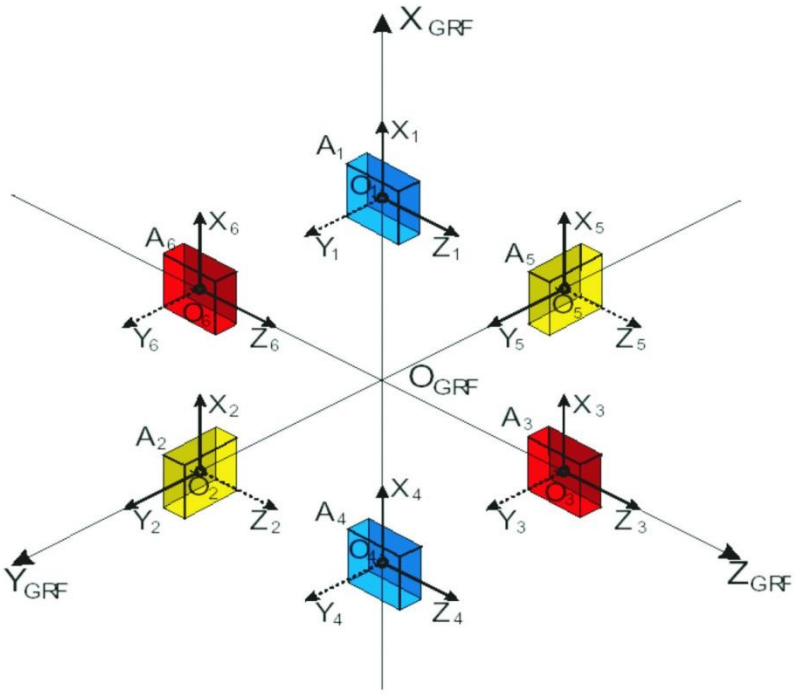


Рисунок 3.24 – Принцип построения градиентометра «GOCE»

Оси акселерометров задают систему координат градиентометра $OXYZ_{GRF}$ и связаны с локальной спутниковой системой координат с началом в центре масс аппарата. Ось акселерометров A_1-A_4 ориентирована примерно в направлении движения аппарата (ось O*x* спутниковой системы), ось акселерометров A_2-A_5 близка к оси O*y* спутниковой системы (перпендикулярно плоскости орбиты) и ось A_3-A_6 - к оси O*z* (направлена по радиусу вниз – в надир). Точка O – центр масс аппарата. Реальная ориентация аппарата (спутниковой системы координат) определяется в пространстве с ошибкой около одной секунды дуги с помощью трех звездных датчиков.

Каждый акселерометр состоит из пробной массы в виде параллелепипеда размером 4×4×1 см из сплава родия-платины весом 320 г. Положение пробной массы измеряется электростатическим образом относительно неподвижной части акселерометра. Точка пересечения осей

одноосевых градиентометров приблизительно совпадает с центром масс спутника. Поэтому компоненты W_{ij} тензора градиентов силы тяжести M можно приближенно представить в виде отношения разности ускорений к длине базы.

Обозначим центр базы одномерного градиентометра как точку О. Пусть акселерометры расположены в точках А и В. Вектор ускорения в точке О, близкой к точке А, можно найти из разложения в ряд Тейлора:

$$\vec{a}(O) = \vec{a}(A) - M(O)\Delta\vec{x}_A + (o^2),$$
$$\Delta\vec{x}_A = \vec{x}_A - \vec{x}_O.$$

Вектор ускорения в точке О можно вычислить, используя измерения в точке В. Тогда разность ускорений в точках А и В равна

$$\vec{a}(B) - \vec{a}(A) = M(O)\Delta\vec{x}_{AB} + (o^3).$$

Таким образом, компоненты тензора M вычисляются как отношение измеренной разности ускорений к длине базы градиентометра, причем точность измерения зависит от продольного или поперечного размещения пробных масс. Например, компонент W_{xy} тензора равен:

$$W_{xy} \approx \frac{\Delta a_x}{\Delta y},$$

т.е. отношению разности ускорений пробных масс A_1 и A_4 (рисунок 3.24) в направлении оси y (в локальной системе акселерометров вдоль осей Y_1 и Y_4).

Используя измерения трех пар акселерометров, можно получить все девять компонент тензора M:

$$M = \begin{pmatrix} W_{xx} W_{xy} W_{xz} \\ W_{yx} W_{yy} W_{yz} \\ W_{zx} W_{zy} W_{zz} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\Delta a_x}{\Delta x} \frac{\Delta a_x}{\Delta y} \frac{\Delta a_x}{\Delta z} \\ \frac{\Delta a_y}{\Delta x} \frac{\Delta a_y}{\Delta y} \frac{\Delta a_y}{\Delta z} \\ \frac{\Delta a_z}{\Delta x} \frac{\Delta a_z}{\Delta y} \frac{\Delta a_z}{\Delta z} \end{pmatrix}.$$

В системе координат градиентометра компоненты тензора $W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{xz}$ вычисляются с высокой точностью, тогда как компоненты W_{xy}, W_{yz} с низкой точностью.

Градиентометр жестко связан с аппаратом поэтому, вращается вместе с аппаратом в пространстве (главным образом вдоль оси Oy). Следовательно, акселерометры регистрируют ускорения, вызванные вращением аппарата:

$$\vec{a}\,'(A) = \vec{a}(A) - \vec{\Omega}\vec{\Omega}\Delta\vec{x}_A - \dot{\vec{\Omega}}\Delta\vec{x}_A,$$

т.е. во вращающейся системе координат.

В матричном виде разностные ускорения равны:

$$M' = M + \Omega = \begin{pmatrix} W'_{xx} & W'_{xy} & W'_{xz} \\ W'_{yx} & W'_{yy} & W'_{yz} \\ W'_{zx} & W'_{zy} & W'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & \Omega_{xz} \\ \Omega_{yx} & \Omega_{yy} & \Omega_{yz} \\ \Omega_{zx} & \Omega_{zy} & \Omega_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_y\omega_x & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y\omega_z \\ \omega_z\omega_x & \omega_z\omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix} = M + (\vec{\Omega}\vec{\Omega} + \dot{\vec{\Omega}}).$$

Левая часть уравнения – это измеренные разности ускорений, например, $W'_{xy} = \Delta a_x / \Delta y$, которые включают гравитационные и центробежные ускорения, а также комбинацию компонент угловой скорости вращения аппарата.

Симметрия матриц M и $\vec{\Omega}\vec{\Omega}$ позволяет найти матрицу $\dot{\vec{\Omega}}$:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{1}{2}(M' - M'^T)$$

Интегрирование угловых ускорений позволяет найти угловые скорости, т.е. вычислить матрицу $\vec{\Omega}\vec{\Omega}$, затем найти матрицу M из уравнения

$$M = \frac{1}{2}(M' + M'^T) - \vec{\Omega}\vec{\Omega}$$

В действительности для вычисления угловых скоростей и ускорений используются данные звездных датчиков.

Рассмотрим теперь модель градиентометра. Предположим, что каждый из акселерометров расположен в точке, радиус-вектор которой в системе координат градиентометра $OXYZ_{GRF}$ равен $\vec{x}_i^T = (x, y, z), i = 1, 2, \ldots 6$. Ось OX_{GRF} совпадает с длинной осью аппарата и близка к оси Ox спутниковой системы, OY_{GRF} к оси Oy, OZ_{GRF} направлена вверх по радиусу (в зенит) (рисунок 3.25)

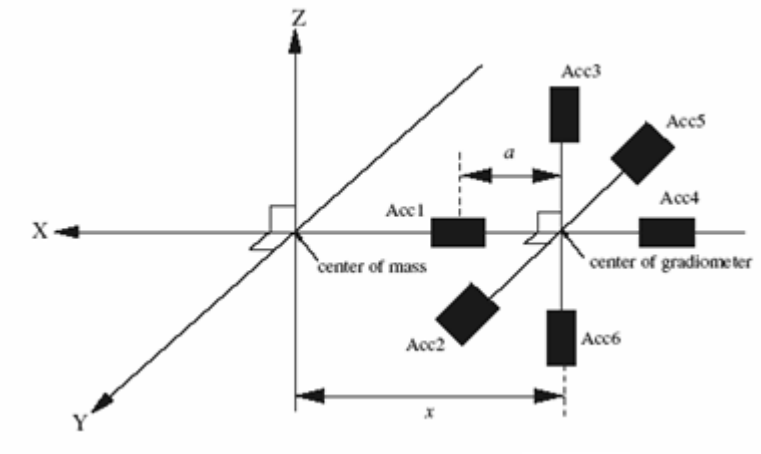


Рисунок 3.25 – Описание модели градиентометра

Различие в направлении осей системы градиентометра и спутниковой системы связано с воздействием на аппарат негравитационных сил; углы тангажа, рысканья и крена не превышают нескольких градусов.

С учетом того, что оси каждого из акселерометров не совпадают с осями системы градиентометра, модель акселерометра (или измеренное ускорение) может быть представлена уравнением:

$$\vec{a}_{obs,i} = S_i[D_i(M + \Omega)\vec{x}_i + \vec{d}] + \vec{b}_i + \varepsilon_i$$

Диагональная матрица S представляет собой матрицу масштабных коэффициентов для каждого из акселерометров:

$$S_i = \begin{pmatrix} S_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & S_{i,z} \end{pmatrix}$$

Матрица D представляет собой матрицу направляющих косинусов осей каждого из акселерометров с осями системы градиентометра:

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_i & \beta_i \\ \gamma_i & 1 & -\alpha_i \\ -\beta_i & \alpha_i & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - углы крена, тангажа и рысканья. Векторы $\vec{d}^T = (d_x, d_y, d_z), \vec{b}_i^T = (b_{i,x}, b_{i,y}, b_{i,z}), \varepsilon^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ представляют собой негравитационные ускорения, смещения акселерометров и ошибки измерений.

Процедура планирования градиентометрического эксперимента включает следующие шаги.

1. Определение положения каждого акселерометра относительно системы координат градиентометра, т.е. векторов $\vec{x}_i^T = (x, y, z), i = 1, 2, \ldots 6$:

$$\vec{x}_1^T = (L_x / 2 + o_x, o_y, o_z), \vec{x}_2^T = (o_x, L_y / 2 + o_y, o_z), \vec{x}_3^T = (o_x, o_y, L_z / 2 + o_z),$$
$$\vec{x}_4^T = (-L_x / 2 + o_x, o_y, o_z), \vec{x}_5^T = (o_x, -L_y / 2 + o_y, o_z), \vec{x}_6^T = (o_x, o_y, -L_x / 2 + o_z),$$

где L_x, L_y, L_z - длины баз одноосных градиентометров, вектор $\vec{o}^T = (o_x, o_y, o_z)$ есть смещение начала системы координат градиентометра относительно центра масс аппарата.

2. Вычисление градиентов от вектора силы тяжести на основе априорной модели ГПЗ (формула 3.1).

3.2.8 Результаты расчета программы в режиме градиентометрических измерений

В результате численного моделирования удалось провести оценку компонент тензора градиентов силы тяжести. Моделирование было выполнено при условии движения КА на высоте 400 км. Моделью градиентометра был выбран градиентометр проекта «GOCE» [45], измерительный модуль которого состоит из системы трех взаимно перпендикулярных одноосевых градиентометров с базой 50 см.

Типичные значения вычисленных компонент имеют следующие порядки величин:

$W_{xx} \sim 10^3$ E	$W_{xy} \sim 10^0$ E	$W_{xz} \sim 10^2$ E
$W_{yx} \sim 10^0$ E	$W_{yy} \sim 10^3$ E	$W_{yz} \sim 10^{-1}$ E
$W_{zx} \sim 10^2$ E	$W_{zy} \sim 10^{-1}$ E	$W_{zz} \sim 10^3$ E

Также был исследован вопрос чувствительности градиентометра в зависимости от времени накопления сигнала и исследуемой гармоники.

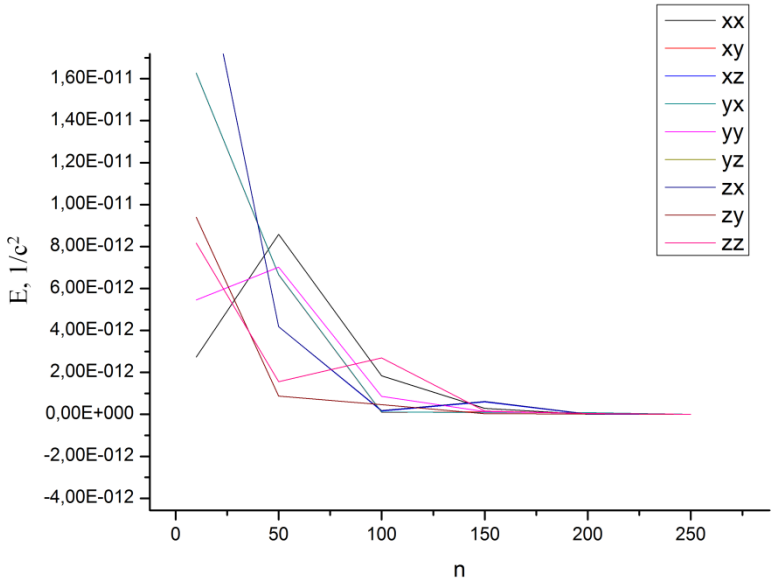


Рисунок 3.26 – Чувствительность градиентометра к различным гармоникам

На рисунке 3.26 представлена зависимость компонент тензора градиентов силы тяжести в зависимости от исследуемой гармоники. Из рисунка видно, что градиентометр, в отличие от системы «спутник-спутник», оптимален для использования до n≈100 гармоники, использовать его при уточнении более высоких гармоник не имеет смысла. Чувствительность градиентометра при этом, как следует из рисунка, должна быть не хуже 0,001E.

Для частотной характеристики в случае n=100 получим следующую картину:

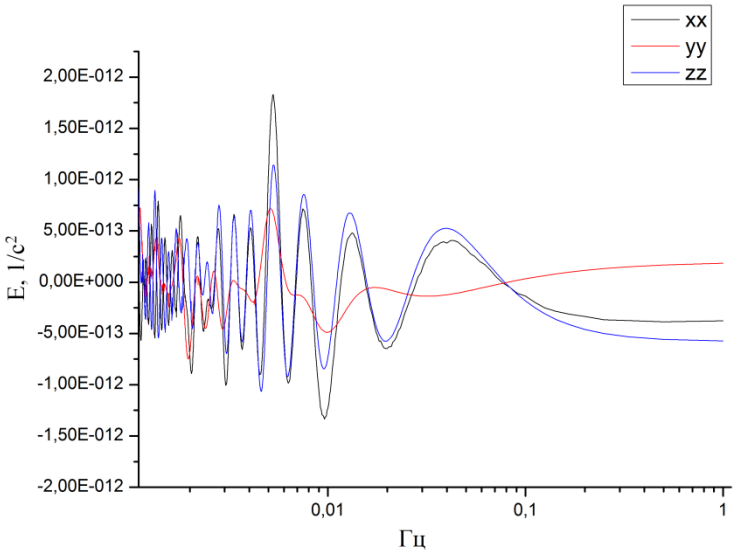


Рисунок 3.27 – Частотная характеристика градиентометра для разрешения гармоники n=100, h=400 км

На рисунке 3.27 изображена частотная характеристика градиентометра в отношении главных компонент тензора градиентов силы тяжести, настроенного на гармонику n=100. Пик чувствительности попадает на частоту $\nu \approx 0{,}005$ Гц, что соответствует времени накопления 200 секунд. Величина накопления сигнала при этом составляет порядка 0,001 Е, что согласуется с результатами, изложенными в [46].

Для 50-ой гармоники требования, предъявляемые к градиентометру, более мягкие (рисунок 3.28).

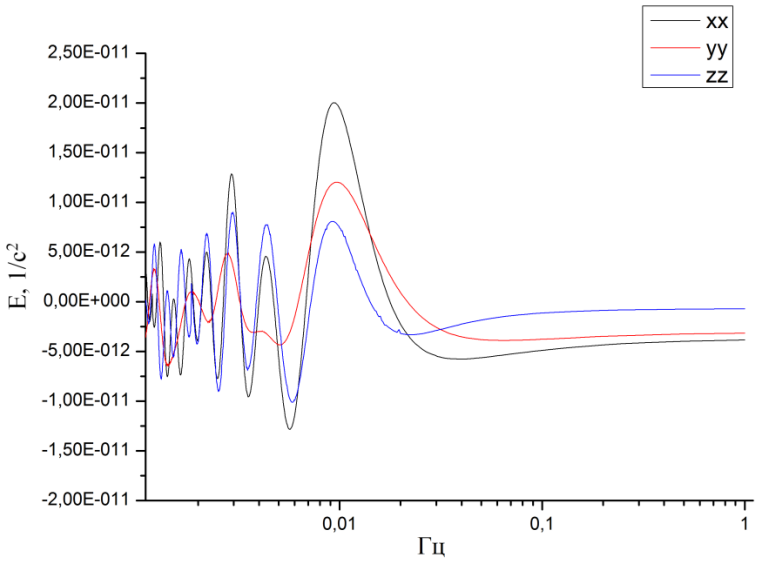


Рисунок 3.28 – Частотная характеристика градиентометра для разрешения гармоники n=50, h=400 км

Пик чувствительности в данном случае попадает на частоту ν≈0,01 Гц с амплитудой накапливаемого сигнала порядка 10 мЕ.

Приведенные результаты показывают, что использование градиентометра на борту КА дополнит гравиметрические измерения более точной информацией о низких гармониках геопотенциала (до n≈100), в то время как система «спутник-спутник» будет способна изучать более высокие (до n≈250) гармоники.

Однако необходимо заметить, что моделирование режима градиентометра было проведено на высоте 400 км, которая не является оптимальной высотой для проведения измерений такого типа ввиду потери чувствительности к амплитуде гармоник гравитационного потенциала. Например, частотная характеристика градиентометра для разрешения гармоники n=100 на высоте h=300 км будет выглядеть следующим образом:

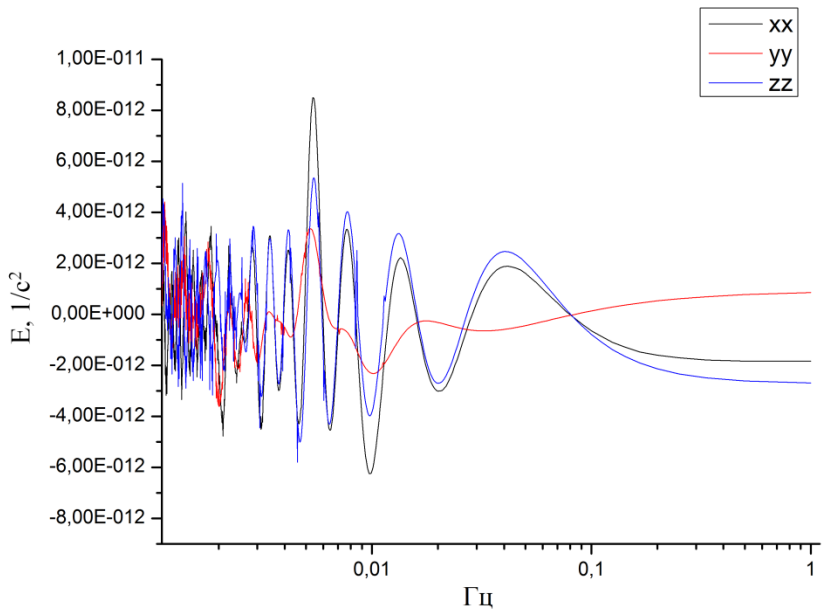


Рисунок 3.29 – Частотная характеристика градиентометра для разрешения гармоники n=100, h=300 км

Структура этой характеристики повторяет характеристику на рисунке 3.27, однако амплитуда накапливаемого сигнала возрастает приблизительно в 4 раза. Поэтому градиентометр желательно использовать на более низких высотах в отличие от системы «спутник-спутник».

3.2.9 Основные результаты, полученные в ходе численного моделирования движения КА в околоземном пространстве в интересах задач космической гравиметрии и градиентометрии

В результате проведенных вычислений можно сделать следующие выводы.

1. Для увеличения чувствительности системы «спутник-спутник» необходимо варьировать взаимное расстояние между КА в зависимости от желаемого максимального порядка разрешаемой гармоники; при увеличении порядка расстояние между КА необходимо уменьшать; для разрешения n=250 гармоники потребуется взаимное расстояние ≈90 км.

2. Чем выше порядок разрешаемой гармоники, тем строже требования к измерительной аппаратуре межспутникового расстояния: для n=150 за время 10 секунд (время накопления сигнала) необходимо выявлять эффекты порядка микрона, для n=200 этот эффект уже порядка нанометра; по этой причине разрешение гармоник выше n=250 с помощью орбитальной космической группировки КА не представляется возможным с существующим уровнем развития отечественных технологий.
3. Работа КА на высоте h≈400 км наиболее предпочтительна для системы «спутник-спутник», чем на высотах 300 и 500 км; работа на высотах ниже 400 км затруднена вследствие сильного тормозного воздействия со стороны атмосферы; при работе на высотах более 400 км регистрация тонкой структуры гравитационного поля становится все более проблематичной ввиду потери чувствительности к амплитудам гармоник гравитационного потенциала.
4. Первые данные моделирования определения поправок к коэффициентам Стокса показали, что поправки тем точнее, чем меньше взаимное расстояние между двумя КА.
5. Явной зависимости ошибок определения коэффициентов Стокса от величины наклонения орбиты аппаратов не обнаружено; не выявлено также и других улучшений в части чувствительности и необходимого времени проведения измерений при использовании орбит, отличных полярной.
6. В системе «спутник-спутник» больший порядок гармоники определяется с большей точностью, в то время как в режиме градиентометра лучше всего уточняются гармоники до n≈100.
7. Оптимальным временем проведения непрерывных измерений для достижения разрешения 250 гармоники является период 1 месяц.

8. Использование КА на орбитах с наклонениями отличными от полярной целесообразно в случае совместной их работы с основной группировкой, расположенной на околополярной орбите; улучшение достигается за счет увеличения одновременных измерений в один и тот же момент времени и за счет более равномерного заполнения сферы наблюдений (трасс КА в проекции на земную поверхность).
9. КА с градиентометром на борту может проводить измерения на одной и той же орбите, что и система «спутник-спутник», расширяя тем самым состав измерений в выделенной области пространства; однако более предпочтительной для градиентометрических измерений является более низкая орбита (≤300 км).

4 Уточнение орбиты низкоорбитального КА по данным глобальных навигационных спутниковых систем

Выше в работе шла речь о моделировании группировки КА типа «GRACE» для решения гравиметрических задач. При этом вопрос о точности абсолютного местоположения КА на орбите не затрагивался. Однако этот вопрос очень важен при решении поставленной задачи определения ГПЗ и требует внимательного рассмотрения.

Основываясь на опыте проекта «GRACE», в котором межспутниковые измерения проводились с точностью до 1 мкм, можно сказать, что точности абсолютного местоположения КА «GRACE» в 1 см с помощью системы GPS было достаточно для выполнения целевой задачи проекта. Таким образом, следует ожидать, что проведение прецизионных интерферометрических измерений на борту КА с точностью до 1 нм потребует точности определения абсолютного местоположения КА на орбите не хуже 1 см. Поэтому на данном этапе необходимо отработать принципы уточнения местоположения КА на низкой околоземной орбите с помощью глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). В данном разделе будет проведено моделирование орбиты КА типа «GRACE» с использованием:

- реальных данных измерений GPS в проекте «GRACE»;
- программы, использующей задел «SpaceGrav»;
- программы уточнения орбиты КА «Спектр-Р» с помощью фильтра Калмана, используемой в разделах 1 и 2 настоящей работы.

4.1 Принцип измерений в ГНСС

Измерения, полученные с помощью ГНСС, делят на кодовые и фазовые, которые различаются по точности. Принцип измерений сводится к исключению всевозможных ошибок из-за рассинхронизации часов на борту исследуемого КА и спутника ГНСС с последующей комбинацией различных

измерений для повышения точности. В данном разделе в качестве ГНСС будет рассмотрена система GPS.

4.1.1 Кодовые измерения

Кодовые измерения представляют собой импульсы, чередующиеся в определенной последовательности. Один цикл передачи кода состоит из 1023 бит и повторяется 1000 раз в секунду. По факту коды имеют псевдослучайное распределение нулей и единиц. На спутнике системы GPS (GPS) и приемнике GPS на борту исследуемого КА (приемнике) синхронно генерируются одинаковые коды, при этом код в приемнике представляет собой копию кода GPS. Два идентичных кода коррелируют лишь тогда, когда при совмещении они полностью совпадают друг с другом. Принятый в приемнике код GPS запаздывает по отношению к коду приемника на время, пропорциональное пройденному им расстоянию, поэтому коды GPS и приемника не коррелируют. Время распространения сигнала, следовательно, и дальность от GPS до приемника определяют задержкой кода приемника до обнаружения сильной его корреляции с кодом GPS. Таким образом, если удастся совместить код приемника и код GPS с точностью до бита, то точность местоположения КА составит 3×10^8 м/с / (1023×1000) бит/с = 293 м/бит. Это предел точности для кодовых измерений. Практически измеряют не дальности, а их искаженные значения – псевдодальности, поскольку в измеренное расстояние входят ошибки часов.

Обозначим время передачи сигнала со спутника GPS как t_{sat}, а время приема сигнала на исследуемом КА – t_{rec}. Ошибки часов приемника и GPS обозначим как δ_r и δ_s. Умножая разницу $t_{sat} - t_{rec}=[t_r+ \delta_r]- [t_s+ \delta_s] = \Delta t+\Delta\delta$, где t_r и t_s времена в некоторой общей системе времени, на скорость света c, получаем выражение для кодовой псевдодальности:

$$R=c\Delta t + c\Delta\delta = \rho + c\Delta\delta\,, \qquad (4.1)$$

где ρ есть расстояние между спутником в момент времени t_s и антенной приемника в момент времени t_r.

4.1.2 Фазовые измерения

Фазовые измерения по сравнению с кодовыми являются наиболее точными измерениями. Инструментальная погрешность метода не превышает 1-2 мм. Метод основан на том, что фаза синусоидального колебания изменяется пропорционально времени. По истечении каждого периода фаза колебаний меняется на один цикл. Фаза принятого от спутника GPS сигнала отличается от фазы колебаний в приемнике на величину, пропорциональную расстоянию от GPS до приемника.

При фазовом методе измерения расстояний возникает сложная проблема разрешения неоднозначностей. На пути от спутника GPS к приемнику изменению расстояния в одну длину волны соответствует изменение фазы волны в один цикл (период). Поэтому результат измерения разности фаз пришедшего GPS сигнала и сигнала в приемнике должен был бы состоять из некоторого целого числа циклов и их дробной части. В действительности измерениями фиксируется только дробная часть. Это означает, что при длине волны 19 см расстояние, каким бы оно не было большим, фиксируется только в пределах этого отрезка. Неоднозначность фазовых измерений обусловлена тем, что отсутствует возможность счета целого числа уложений длины волны в измеряемом расстоянии. Нужны дополнительные усилия, чтобы получить однозначные значения дальностей.

Пусть $\varphi_s(t)$ полученная приемником фаза на частоте f_s, а $\varphi_r(t)$ опорная фаза приемника на частоте f_r, t – эпоха в общей системе времени. Выражения для этих фаз имеют следующий вид [46]:

$$\begin{aligned} \varphi_s(t) &= f_s t - f_s \frac{\rho}{c} - \varphi_s^0, \\ \varphi_r(t) &= f_r t - \varphi_r^0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где начальные фазы φ_s^0, φ_r^0 возникают из-за наличия ошибок часов:

$$\begin{aligned} \varphi_s^0 &= -f_s \delta_s, \\ \varphi_r^0 &= -f_r \delta_r. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Реальное отличие частот f_s, f_r от номинальной f достаточно мало. Поэтому им можно пренебречь, и разница фаз запишется как:

$$\varphi_s^r(t) = \varphi_s(t) - \varphi_r(t) = -f\frac{\rho}{c} - f\Delta\delta. \tag{4.4}$$

Целое число циклов N в момент включения приемника t_0 заранее неизвестно. Для разницы фаз можно записать:

$$\varphi_s^r(t) = \Delta\varphi_s^r(t)\Big|_{t_0}^{t} + N, \tag{4.5}$$

где $\Delta\varphi_s^r(t)$ отвечает за дробную (измеряемую) часть фазы, увеличенную на целое число циклов, прошедших с момента t_0. Принимая обозначение F=-$\Delta\varphi_s^r(t)$ и подставляя уравнение 4.5 в 4.4, получаем выражение для фазовой псевдодальности:

$$F = \frac{\rho}{\lambda} + \frac{c\Delta\delta}{\lambda} + N. \tag{4.6}$$

Умножая это выражение на длину волны λ, получаем псевдодальность, измеряемую не в циклах, а в единицах измерения длины:

$$\lambda F = \rho + c\Delta\delta + \lambda N. \tag{4.7}$$

Выражение (4.7) отличается от выражения (4.1) только наличием члена, содержащего неоднозначность.

4.1.3 Определение неоднозначностей

Одним из наиболее точных способов разрешения фазовых неоднозначностей является комбинирование кодовых и фазовых измерений, полученных на двух частотах [46], что и было реализовано в настоящей работе. Модели кодовых и фазовых измерений могут быть представлены в следующем виде [46]:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= af_1 - \frac{b}{f_1} + N_1, \\
F_2 &= af_2 - \frac{b}{f_2} + N_2, \\
R_1 &= af_1 + \frac{b}{f_1}, \\
R_2 &= af_2 + \frac{b}{f_2},
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

где f_1=1575,42 МГц (L1), f_2=1227,60 МГц (L2), геометрический член a и ионосферный член b определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\rho}{c} + \Delta\delta, \\
b &= \frac{f_i^2}{c}\Delta^{ion}, \\
\Delta^{ion} &= \frac{40,3}{f_i^2 \cos z} TVEC, \ i = 1,2
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где z – зенитное расстояние спутника GPS, а $TVEC$ есть полное содержание электронов в ионосфере в направлении на зенит, по умолчанию подразумевается содержание в трубке, площадью поперечного сечения один квадратный метр. Умножая третье уравнение в (4.8) на f_1, а четвертое на f_2 и вычитая четвертое из третьего, выразим геометрический член:

$$
a = \frac{1}{f_2^2 - f_1^2}(R_2 f_2 - R_1 f_1). \tag{4.10}
$$

Умножая теперь третье уравнение в (4.8) на f_2, а четвертое на f_1 и вычитая третье из четвертого, выразим ионосферный член:

$$
b = \frac{f_2 f_1}{f_2^2 - f_1^2}(R_1 f_2 - R_2 f_1). \tag{4.11}
$$

Подставляя (4.10) и (4.11) в первые два уравнения (4.8), получим выражения для фазовых неоднозначностей:

$$N_1 = F_1 + \frac{f_2^2 + f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} R_1 - \frac{2 f_2 f_1}{f_2^2 - f_1^2} R_2,$$
$$N_2 = F_2 - \frac{f_2^2 + f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} R_2 + \frac{2 f_2 f_1}{f_2^2 - f_1^2} R_1. \quad (4.12)$$

4.1.4 Учет ионосферной рефракции

Ионосфера представляет собой верхние слои земной атмосферы, в которой газы частично ионизованы под влиянием ультрафиолетового и рентгеновского солнечного излучения. Ионосфера электрически нейтральна, она содержит равное количество положительных и отрицательных частиц, т.е. является плазмой. При высоких частотах основное воздействие на распространение радиоволн в ионосфере оказывают свободные электроны. Концентрация электронов на кубический метр достигает максимума на высотах от 250 до 400 км и зависит от времени суток, времени года и уровня солнечной активности. Величина концентрации в одно и то же время от точки к точке ионосферы может меняться на порядок.

Ионосферной рефракцией называется разница между измеряемым и истинным расстоянием между двумя объектами. Рефракция в ионосфере сводится к изменению длины пути луча в атмосфере (или к набегу фазы). Незнание количества свободных электронов на пути радиоволны в ионосфере и содержания водяного пара в нижних слоях атмосферы определяет ошибки вычисления задержки сигнала. Таким образом, для случая КА на низких околоземных орбитах особенно важно учитывать ионосферную поправку.

Так же как и для определения неоднозначностей, эффективным способом учета ионосферной рефракции является использование двух сигналов на двух разных частотах. Допустим, что имеются фазовые измерения, которые можно смоделировать по первым двум формулам в (4.8). Тогда избавиться от ионосферного члена в фазовых измерениях можно с

помощью следующей комбинации [46]. Умножаем первое уравнение в (4.8) на f_1, а второе на f_2, вычитая второе из первого и умножая все на комбинацию

$$\frac{f_1}{f_2^2 - f_1^2},$$

получаем свободную от ионосферной рефракции комбинацию:

$$\left[F_1 - \frac{f_2}{f_1} F_2\right] \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} = af_1 + \left[N_1 - \frac{f_2}{f_1} N_2\right] \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}. \tag{4.13}$$

Пусть теперь имеются кодовые измерения, модельные уравнения которых выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho + c\Delta\delta + \Delta_1^{ion}, \\ R_2 &= \rho + c\Delta\delta + \Delta_2^{ion}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Тогда, чтобы избавиться от ионосферного члена, нужно умножить первое уравнение (4.14) на f_1^2, а второе на f_2^2, вычесть второе из первого и разделить все на $f_1^2 - f_2^2$. Тогда в левой части выражения получим известную комбинацию кодовых измерений, а справа – псевдодальность, исправленную за ионосферную рефракцию:

$$\left[R_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2} R_2\right] \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c\Delta\delta \tag{4.15}$$

4.2 Исходные данные для задачи уточнения орбиты КА на низкой околоземной орбите с использованием GPS сигнала

Как уже было отмечено выше, поставленная задача решалась на примере уже реализованного проекта «GRACE». Исходные данные по GPS измерениям КА «GRACE» были взяты с официального сайта ESA[47]. Там находятся данные уровней 1b и 2, описание их форматов и инструкции по обработке можно найти в [48] и [49]. Для целей настоящей работы были использованы данные уровня 1b. Из полученных данных уровня 1b были извлечены RINEX-файлы, которые представляют собой стандартный формат обмена данными для файлов исходных данных спутниковых навигационных приёмников. В нем содержится информация о кодовых и фазовых

измерениях. Подробное описание формата можно найти в [50], а сам вид RINEX-файла представлен на рисунке 4.1.

```
     2.20           OBSERVATION DATA    GPS                 RINEX VERSION / TYPE
gps1x2rnx           zharov              2017-03-21 13:34:51 PGM / RUN BY / DATE
GRACE A                                                     MARKER NAME
GRACE A             NASA                                    OBSERVER / AGENCY
RECNUM              RECTYPE             RECVERS             REC # / TYPE / VERS
ANTNUM              ANTTYPE                                 ANT # / TYPE
        0.0000        0.0000        0.0000                  APPROX POSITION XYZ
        0.0000        0.0000        0.0000                  ANTENNA: DELTA H/E/N
     1     1     0                                          WAVELENGTH FACT L1/2
     9    L1    L2    C1    P1    P2    LA    SA    S1    S2# / TYPES OF OBSERV
    10                                                      INTERVAL
  2005    01    01    00    00   00.000000      GPS        TIME OF FIRST OBS
SNR is mapped to signal strength [0,1,2-9]                  COMMENT
 SNR: >500 >100  >50  >10   >5   >3  >1  >0  bad  n/a       COMMENT
 sig:    9    8    7    6    5    4   3   2    1    0       COMMENT
 Loss of Lock Indicator is set for all phase observations   COMMENT
 in case a phase break/cycle slip is detected.              COMMENT
 Loss of Lock Indicator is also set at acquisition of a PRN COMMENT
 Undetected cycle slips may remain in this file.            COMMENT
                                                            END OF HEADER
 05 01 01 00 00 00.0000000  0  7 04 10 13 17 23 24 30
 114828116.89748  89476480.23548  21851063.67148  21851064.26248  21851070.54148
 114828113.39148        411.00048        118.00048        113.00048
 105675357.45348  82344462.96048  20109352.29249  20109352.08148  20109359.02948
 105675358.94849        675.00049        337.00048        359.00048
 120557849.39546  93941201.86646  22941395.58048  22941395.78046  22941401.11746
 120557845.89048        258.00048         41.00046         50.00046
 107450793.76948  83727920.13348  20447206.27949  20447206.20648  20447213.30148
 107450793.26849        703.00049        372.00048        378.00048
 134022969.30245 104433494.16546  25503723.82147  25503725.63045  25503726.91046
 134022969.81047         98.00047          7.00045         14.00046
 112663862.66048  87790051.69048  21439220.05348  21439220.45348  21439227.58048
 112663861.15748        487.00048        177.00048        153.00048
 126704006.48446  98730420.54246  24110970.17948  24110971.10346  24110977.15946
 126704001.99748        158.00048         20.00046         21.00046
 05 01 01 00 00 10.0000000  0  7 04 10 13 17 23 24 30
```

Рисунок 4.1 – Структура RINEX-файла на примере измерений КА «GRACE»

Кроме этого, для уточнения орбиты КА «GRACE» с помощью фильтра Калмана было необходимо получить информацию об их эфемеридах, а также об эфемеридах спутников GPS. Эфемериды спутников GPS были взяты с сайта Международного сервиса ГНСС (IGS) [51], где они содержатся в формате «.sp3». Описание этого формата приводится на сайте [52]. Задача же поиска эфемерид КА «GRACE» в свободном доступе оказалась весьма непростой. Оказалось невозможным найти их эфемериды с удовлетворительной точностью, поэтому в настоящий момент предпринимается попытка получить эфемериды по запросной форме в GFZ (GeoForschungsZentrum – немецкий исследовательский центр геонаук).

Таким образом, для задания начального вектора состояния КА «GRACE» было принято решение вычислить примерные координаты и скорости, исходя из имеющихся данных по GPS-эфемеридам и псевдодальностям ρ.

Также здесь необходимо было учесть ошибку часов δ_{gps} каждого из GPS спутников. В результате уравнение для вычисления координат (X_{grace},Y_{grace},Z_{grace}) было записано в следующем виде:

$$\rho + c\delta_{gps} = \sqrt{(X_{grace} - X_{GPS})^2 + (Y_{grace} - Y_{GPS})^2 + (Z_{grace} - Z_{GPS})^2}. \qquad (4.16)$$

Таких уравнений было составлено столько, сколько измерений псевдодальностей имелось на рассматриваемый момент времени. Затем эта система уравнений решалась с помощью метода МНК. После решения данной системы были найдены грубые компоненты скорости КА. В данном случае удалось получить координаты спутника «GRACE B», которые удовлетворяли исходным псевдодальностям с ошибкой порядка 50 м. Компоненты скорости КА были вычислены как разности полученных таким образом координат в соседние моменты времени, отстоящие друг от друга на 10 секунд.

4.3 Модель наблюдения

В разделе 1 было упомянуто, что при использовании фильтра Калмана для уточнения орбиты КА необходимо задать модель движения и модель наблюдения. Модель движения в данной задаче была задана такой же, как и в разделе 3 выражением (3.2). Модель наблюдения основана на использовании фазовых измерений, как наиболее точных измерений GPS.

Рассмотрим измерение расстояния между спутником GPS под номером j и спутником «GRACE B»:

$$F_B^j(t) + f^j\delta^j(t) = \frac{\rho_B^j(t)}{\lambda^j} + N_B^j + f^j\delta_B(t). \qquad (4.17)$$

От члена $f^j\delta^j(t)$, содержащего ошибку часов j-го спутника GPS, можно избавиться, так как формат файла GPS эфемерид содержит информацию об

этой ошибке. Также можно избавиться от члена N_B^j, согласно процедуре, описанной в подразделе 4.1.3.

Для задания матрицы наблюдения согласно формуле (1.16) необходимо взять производные по уточняемым параметрам от измеряемой величины. В случае уточнения координат и компонент скорости КА «GRACE B» получим:

$$\frac{\partial F_B^j}{\partial \vec{r}_B} = \frac{1}{\lambda^j}\frac{\vec{r}_B - \vec{r}^{\,j}}{\rho_B^j}, \quad \frac{\partial F_B^j}{\partial \vec{v}_B} = 0. \tag{4.18}$$

Таким образом, матрица наблюдений для спутника «GRACE B» в случае уточнения только его координат будет выглядеть следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_B^1}{\partial x_B} & \frac{\partial F_B^1}{\partial y_B} & \frac{\partial F_B^1}{\partial z_B} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_B^n}{\partial x_B} & \frac{\partial F_B^n}{\partial y_B} & \frac{\partial F_B^n}{\partial z_B} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

где n – число спутников GPS видимых с КА «GRACE B» в заданный момент времени.

4.4 Результаты уточнения положения КА на низкой околоземной орбите с использованием GPS сигнала

В результате проделанной работы была получена уточненная орбита КА «GRACE B». Расчет был выполнен для измерений, проводившихся 1 января 2005 года в период с 00:00:00 по 00:14:30 времени GPS (GPS-UTC=13 секунд, по состоянию на 2005 год). Результаты представлены в виде зависимостей разности между вычисленными расстояниями «КА «GRACE B» - спутник GPS» и исходными псевдодальностями (невязками) от времени. На рисунке 4.2 можно увидеть, как ведут себя невязки без включения алгоритма фильтрации Калмана.

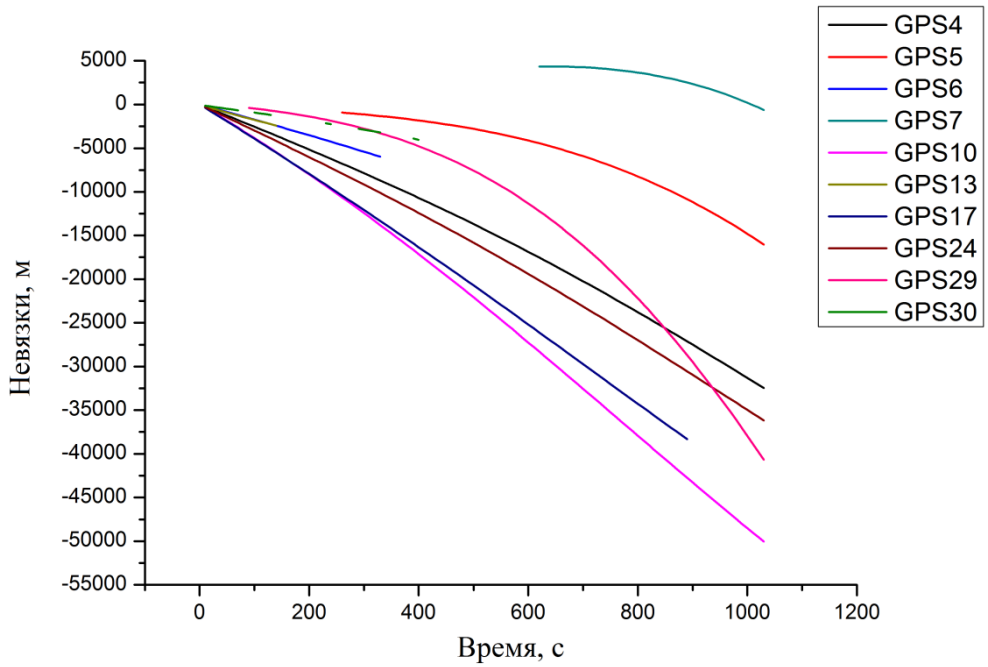


Рисунок 4.2 – Зависимость невязок различных спутников GPS от времени в случае отсутствия фильтра Калмана

Ранее в разделе 4.2 было отмечено, что начальный вектор состояния КА «GRACE B» вследствие отсутствия актуальных эфемерид был оценен на основе псевдодальностей со спутников GPS. Рисунок 4.2, таким образом, показывает, насколько грубой была эта оценка. При интегрировании движения КА «GRACE B» на интервале 1000 секунд невязки по измерениям ряда GPS составили десятки километров.

На рисунке 4.3 показана та же зависимость, но в результате работы фильтра Калмана.

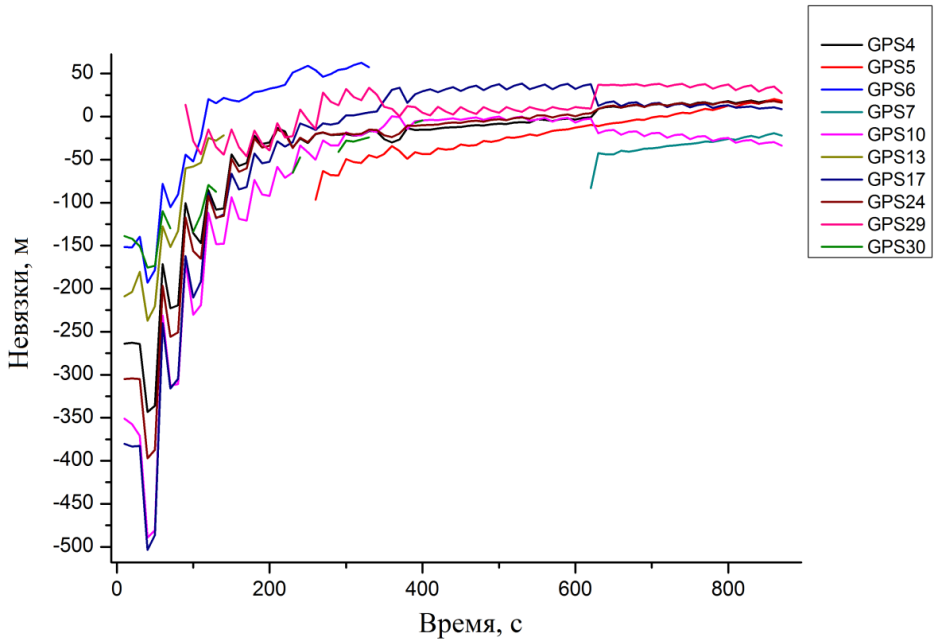


Рисунок 4.3 – Зависимость невязок различных спутников GPS от времени в результате работы фильтра Калмана

На полученной зависимости имеются «скачки», вызванные включением в разные моменты времени измерений от разных GPS спутников, так как видимость тех или иных GPS спутников непрерывно меняется. Особенно заметным на графике является появление измерений от спутника GPS под номером 7. Из сравнения двух графиков видно, что алгоритм действительно работает, он позволил сократить начальные (300-400 метров) невязки, до 30-40 метров. Однако такой результат нельзя считать удовлетворительным. Требуемая точность уточнения орбиты КА до 1 см не была достигнута.

Можно только предположить, почему не удалось достичь требуемого результата. Определение скорости КА в начальный момент времени на основе его координат, определенных с ошибкой ≈50 метров (раздел 4.2), влечет ошибки определения скорости порядка ≈100 м/с на 10-секундном интервале. Поскольку в данном случае уточнение проходило только по координатам КА, погрешность в скорости оставалась все той же, несмотря на то, что координаты постоянно корректировались. Таким образом, шаг экстраполяции (раздел 1.2.2) в фильтре Калмана имел постоянную

систематическую погрешность в ≈100 метров, которую невозможно убрать методом фильтрации. По этой причине для полноценной отработки метода уточнения с помощью ГНСС в рамках данной задачи необходимы точные эфемериды «GRACE».

Еще одной важной деталью, которую необходимо будет учесть в дальнейших работах, является включение ошибки часов «GRACE» в качестве уточняемого параметра, так как данная ошибка содержится в псевдодальностях и априори неизвестна.

В работе [6] можно найти похожие вычисления по уточнению орбиты спутника «MicroLab-1». На рисунке 4.4 можно видеть похожую зависимость ошибок положения КА.

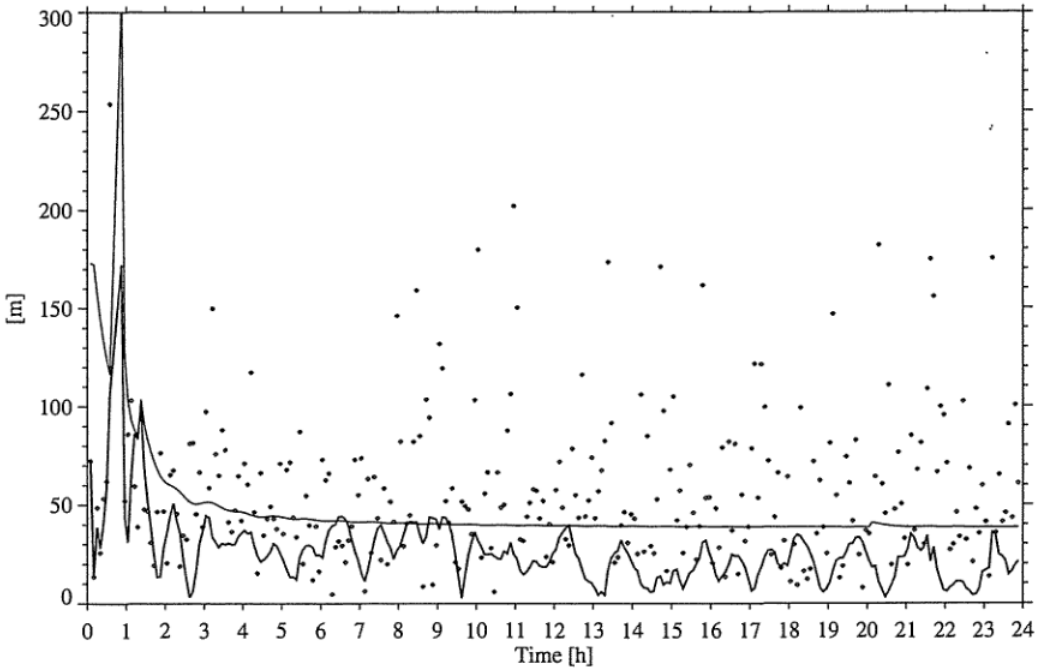


Рисунок 4.4 – Результат работы фильтра Калмана по уточнению орбиты спутника «MicroLab-1»; порядок несферичности ГПЗ, используемый в модели – 10, шаг интегрирования – 30 с, априорное стандартное отклонение положения КА 1 км, априорное стандартное отклонение скорости КА – 10 м/с

Толстой линией на рисунке 4.4 отмечена ошибка оценки положения исследуемого КА, а тонкой – стандартное отклонение оценки, точками – ошибки GPS измерений. Необходимо отметить, что данный спутник находился на высоте 740 км, где гравитационные возмущения от несферичности геопотенциала меньше, чем в случае КА «GRACE».

5 Моделирование высокоточных орбит для высокоорбитальных КА

Результаты раздела 5 основаны на статье [53] из списка использованных источников

5.1 Постановка задачи

В разделе 1 настоящей работы были представлены результаты по уточнению высокоапогейной орбиты КА на примере КА «Спектр-Р» проекта «Радиоастрон», где необходимая точность реконструкции орбиты составляла десятки и даже сотни метров. В данном разделе пойдет речь о позиционировании КА на орбите на порядок точнее для решения одной из фундаментальных и актуальных задач современности – поиска гравитационных волн (ГВ).

ГВ представляют собой слабые возмущения пространства-времени, распространяющиеся со скоростью света практически без поглощения (волны низких и сверхнизких частот). Детектирование ГВ открывает новый канал для получения принципиально важной информации о строении нашей Вселенной от самых ранних времен ее возникновения, а также состоянию вещества во Вселенной при масштабе энергий, которые не могут быть достигнуты в других космических экспериментах.

11 февраля 2016 года было объявлено, что наземная гравитационно-волновая обсерватория LIGO (международный ГВ проект) зарегистрировала гравитационный сигнал, предположительно, от слияния двух черных дыр с массами порядка 30 масс Солнца. Таким образом, начата эра гравитационно-волновой астрономии.

Существующие проекты космических детекторов гравитационных волн (например, LISA) ставят целью создание ГВ-обсерватории, которая предназначена для регистрации и изучения гравитационных волн от большого многообразия еще неизвестных источников. Обсерватория LISA (The Laser Interferometer Space Antenna) – совместная миссия ESA-NASA, ее запуск планируется в 2034 году. LISA состоит из трех идентичных

космических аппаратов, размещенных на гелиоцентрической орбите на расстоянии 5 миллионов километров друг от друга. Флуктуации расстояния между двумя КА, вызванные прохождением гравитационно-волнового излучения, будут измеряться лазерными интерферометрами с пикометровой точностью.

В работах [53,54], касающихся разработки в рамках сотрудничества двух университетов: МГУ (Россия) и университета им. Сунь Ят Сена (SYSU, Китай), проекта «TianQin», было показано, что оптимальная конфигурация космического детектора для регистрации гравитационных волн от известного источника должна быть реализована на трех идентичных космических аппаратах, размещенных на почти идентичных геоцентрических орбитах с большой полуосью $\sim 10^5$ км и формирующих почти равносторонний треугольник. Основным преимуществом геоцентрической орбиты является уменьшение эксплуатационных расходов.

Каждый КА будет оснащен лазерной системой, способной передавать и принимать лазерные сигналы на два других космических аппарата группировки. Гетеродинный лазерный интерферометр будет использоваться для мониторинга изменений расстояния между КА. Каждый космический аппарат может быть выбран в качестве центра лазерного интерферометра, в то время как два других будут концами плеч интерферометра. Опорные точки интерферометра совмещены с пробными массами системы редукции негравитационных возмущений, таким образом, интерферометр будет измерять расстояние между этими пробными массами, находящимися в свободном падении. Конфигурация трех КА, формирующих лазерный интерферометр для регистрации гравитационных волн, показана на рисунке 5.1.

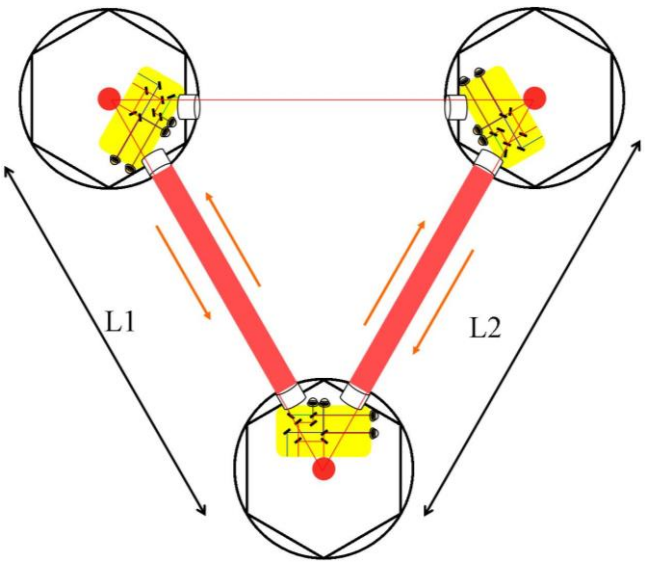


Рисунок 5.1 – Три спутника на круговых геоцентрических орбитах; лазерный интерферометр измеряет разность расстояний (разность фаз) между двумя плечами интерферометра, которая содержит информацию о гравитационных волнах

Длина плеч интерферометра ~10^5 км, плоскость детектора должна быть перпендикулярна источнику гравитационных волн. Схема космической группировки ГВ детектора с выбранным источником ГВ излучения показана на рисунке 5.2.

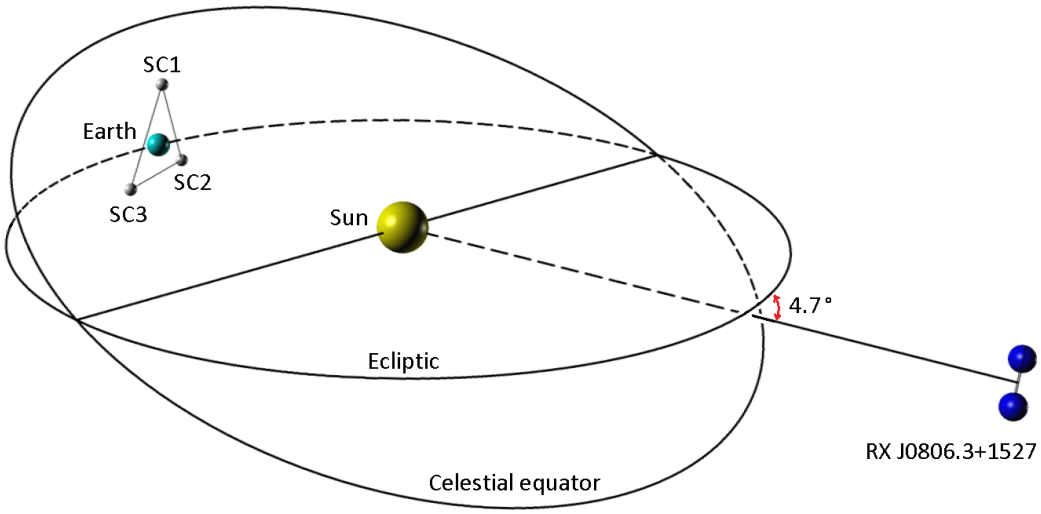


Рисунок 5.2 –Схема космического кластера ГВ эксперимента с двойной звездой J0806 в качестве источника ГВ. Космические аппараты обозначены как SC1, SC2 и SC3. Показаны также плоскость небесного экватора и направление на источник.

5.2 Результаты моделирования орбиты высокоорбитальных КА на примере орбитальной группировки ГВ эксперимента

Математический аппарат, задействованный при моделировании низкоорбитальных КА в интересах задач высокоточной гравиметрии, был применен для моделирования движения КА на высоких орбитах (≈100000 км) в интересах решения задач фундаментальной гравитации. В случае движения КА на высоких орбитах несферичность геопотенциала перестает оказывать превалирующее гравитационное воздействие, и основным фактором, определяющим движение КА, становится воздействие от Луны и Солнца, что продемонстрировано в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Величины воздействий различной природы, оказываемых на КА, находящийся на высоте 400 и 100000 км, выраженные в величине сообщаемого ими ускорения

Тип воздействия	Примерная величина воздействия, выраженная в м/с^2	
	h=400 км	h=100000 км
Кеплеровская составляющая	8,7	4×10^{-2}
Несферичность геопотенциала	10^{-2}	3×10^{-7}
Луна, Солнце и планеты	3×10^{-7}	4×10^{-6}
Атмосфера	10^{-7}	10^{-14}
Давление солнечного излучения	3×10^{-8}	3×10^{-8}

Из таблицы 5.1, в частности, следует, что для проведения гравитационно-волновых измерений с точностью $\approx10^{-15}$ м/с^2 необходим учет воздействия, в том числе, и от атмосферы Земли.

Для наглядности проявления каждого из воздействий на конфигурацию группировки КА ГВ эксперимента графически будет показан их эффект на

изменение величины межспутникового расстояния одного из плеч группировки.

Моделирование проводилось для КА, движущихся на орбите с начальными параметрами, представленными в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Начальные параметры моделирования

Элемент орбиты	Ед. изм.	КА1	КА2
Наклонение *i*	град.	108,8	108,8
Эксцентриситет *e*		0	0
Большая полуось a	км	100000	100000
Долгота восходящего узла Ω	рад.	0	0
Аргумент перигея *w*	рад.	0	0
Средняя аномалия M	рад.	0	2π/3

Параметры КА для учета воздействия давления солнечного излучения были выбраны следующими: масса m=1000 кг, эффективная площадь, взаимодействующая с излучением A = 5 м^2, коэффициент давления излучения C_r=1,5 (C_r=1 – излучение полностью поглощается, C_r=2 – излучение полностью отражается).

В результате моделирования на интервале 10 суток были получены следующие результаты (рисунки 5.3-5.6).

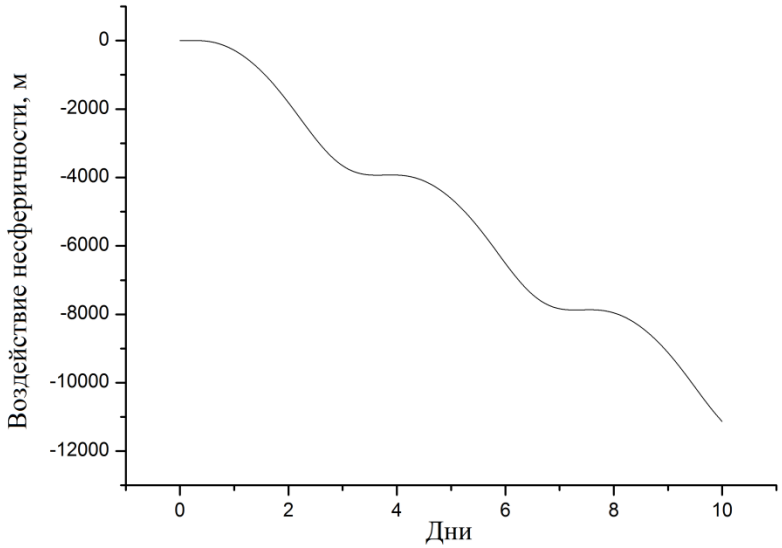


Рисунок 5.3 – Воздействие несферичности геопотенциала на изменение межспутникового расстояния между КА

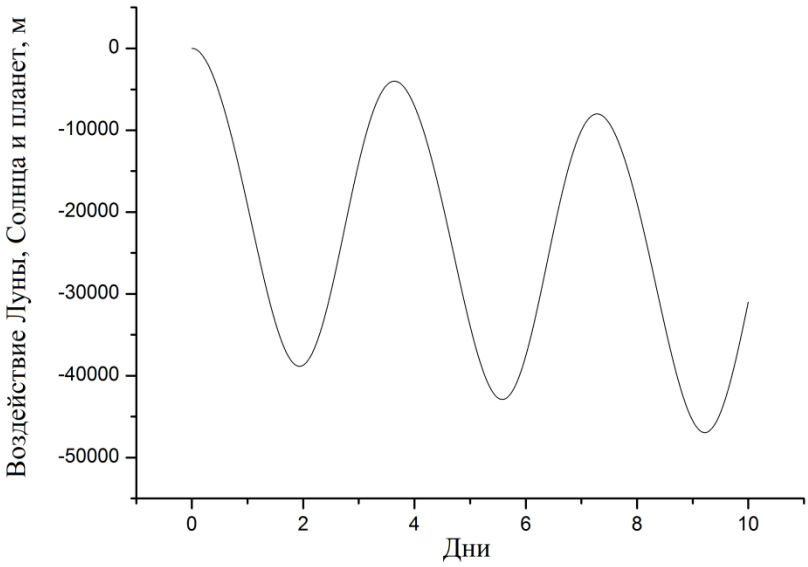


Рисунок 5.4 – Воздействие Луны, Солнца и планет на изменение межспутникового расстояния между КА

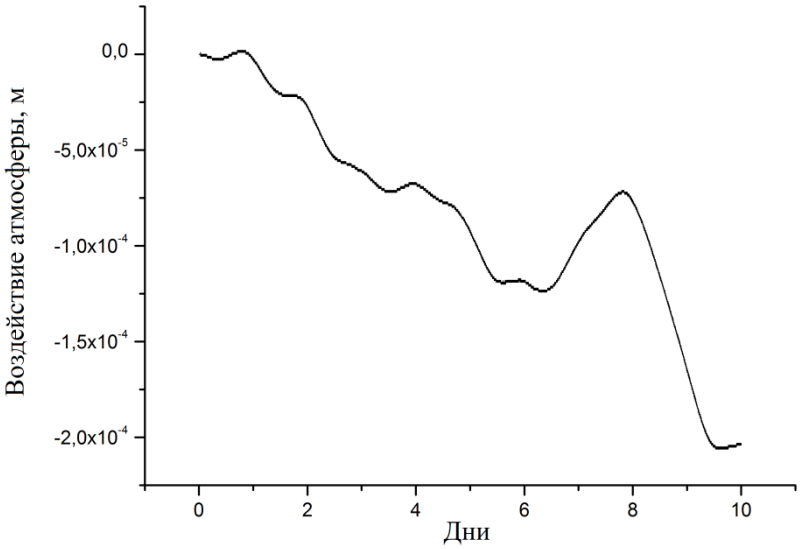


Рисунок 5.5 – Воздействие атмосферы на изменение межспутникового расстояния между КА

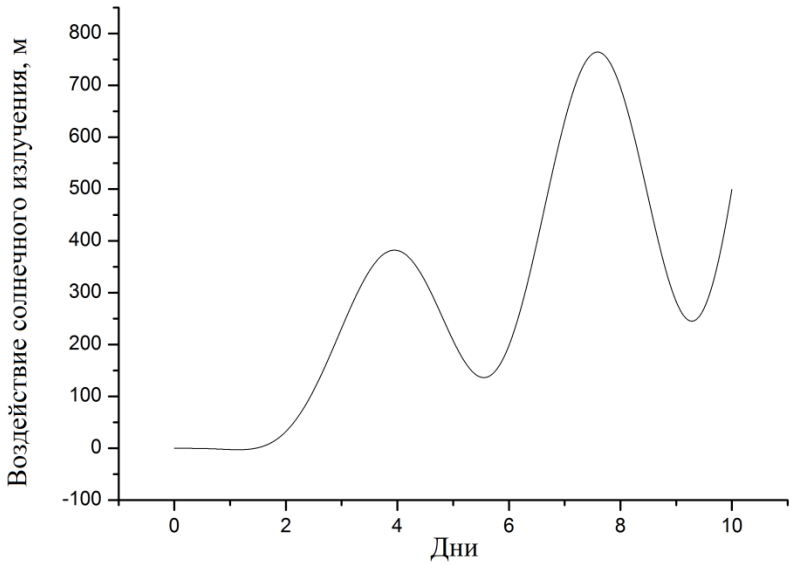


Рисунок 5.6 – Воздействие давления солнечного излучения на изменение межспутникового расстояния между КА; InflSolRad – величина воздействия в метрах

Из представленных данных видно, что основной эффект, влияющий на изменение конфигурации группировки – воздействие Луны, Солнца и планет, приводящее к изменению межспутникового расстояния примерно на 40 км за

2 суток. Таким образом, измерительная система должна быть способна проводить измерения межспутникового расстояния с точностью ≈ 1 пм на фоне изменения длины базы ≈ 0,23 м/с.

Другим следствием изменения геометрической структуры группировки КА в пространстве является изменение направления луча между КА в плоскости их движения.

В случае, когда КА движутся строго по круговым орбитам и расстояние между ними не изменяется, для поддержания ориентации лазерного луча между КА достаточно обеспечить вращение аппаратов вокруг оси, перпендикулярной плоскости их движения, с угловой скоростью, равной скорости среднего движения на рассматриваемой орбите (≈ 2×10^{-5} рад/с или ≈ 4 "/с). Но, поскольку в процессе движения КА вследствие воздействия сил как гравитационного, так и негравитационного характера меняются все три стороны треугольника О-КА1-КА2 (рисунок 5.7), то меняются, соответственно, и углы этого треугольника. Следовательно, ориентацию КА необходимо дополнительно корректировать. В данной задаче нас интересует поправка к углу *l*, который определяет ориентацию базы КА1-КА2 в плоскости движения КА.

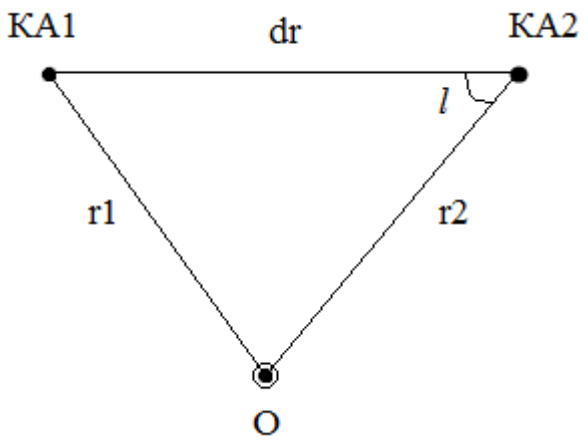


Рисунок 5.7 – Пояснение ориентации КА в пространстве, О – центр масс Земли, КА1 – местоположение КА1, КА2 – местоположение КА2, r1 – геоцентрическое расстояние КА1, r2 – геоцентрическое расстояние КА2, dr – межспутниковое расстояние между КА1 и КА2

В процессе моделирования была получена следующая оценка на величину дополнительной коррекции угла.

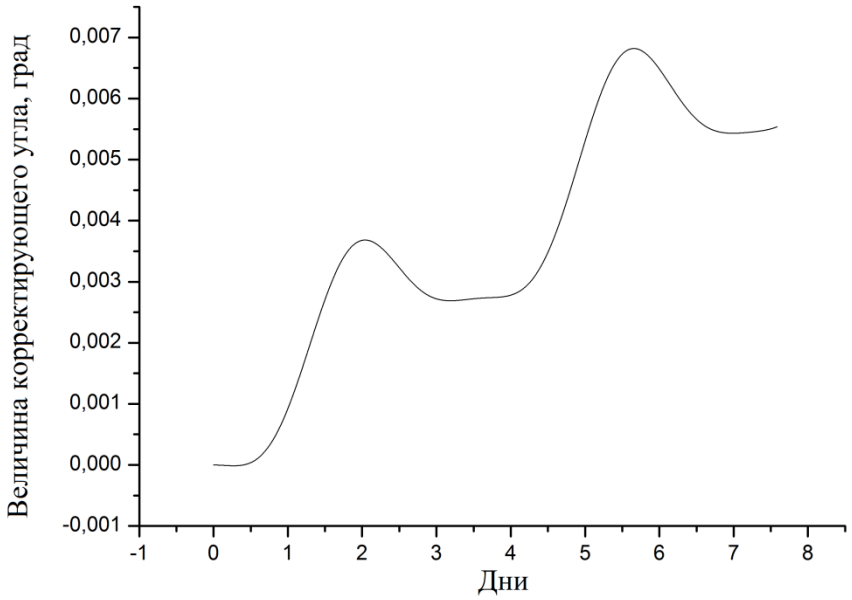


Рисунок 5.8 – Величина корректирующего угла вследствие изменения конфигурации КА в пространстве

Из рисунка 5.8 следует, что максимальная скорость коррекции угла составляет $\approx 1{,}25\times10^{-4}$ "/с. При длине базы $\approx \sqrt{3}\times10^{5}$ км в линейной мере эта величина эквивалентна ≈10 см/с, что является необходимым для учета.

С учетом того, что для преодоления лучом лазера длины базы требуется ≈0,577 с, получим оценку сверху для точности упреждения луча $\approx 7{,}2\times10^{-5}$ ".

Таким образом, к системе ориентации и стабилизации КА так же, как и к измерительной системе, предъявляются очень высокие требования.

Следует отметить, что расчет проводился без учета релятивистских эффектов при распространении луча лазера в гравитационном поле Земли. Более детальные требования к ориентации КА могут быть получены после анализа характеристик планируемой к применению на борту лазерной установки и геометрических параметров КА.

В работе [54] было также проведено похожее моделирование орбитальной группировки в рамках проекта «TianQin» на более длительном интервале времени и получены результаты, которые представлены на рисунке 5.9.

Как видно из рисунка 5.9 (панели 1, 2, 3) изменения относительной скорости по линии прямой видимости между каждой парой КА остаются меньше 10 м/с, и такое поведение остается в течение пяти лет. Относительные скорости будут вызывать допплеровское смещение в лазерных сигналах, которые должны быть скомпенсированы или промоделированы.

Относительные углы «нестворности» между каждой парой космических аппаратов (обозначаются как SC1, SC2, SC3) отображены на панелях 4,5,6 и 8. При этом предполагается, что три КА движутся по почти идентичным орбитам с большой полуосью $\approx 10^5$ км. Панели 1-6 показывают пятилетние реализации движения, а панели 7 и 8 показывают более подробно движение в первые несколько месяцев для пары SC3-SC1 (поведение пар SC1 - SC2 и SC2 - SC3 аналогично).

Вариации относительной угловой ориентации («нестворность» телескопов, панели 4, 5, 6 и 8) могут быть разделены на две части: кратковременные флуктуации и долговременный сдвиг средних значений вариаций. Кратковременные флуктуации имеют периоды порядка нескольких дней с амплитудой $\sim 0.1^0$. Эта часть может быть скорректирована системой наведения (нацеливания) лазерного луча с использованием специального зеркала быстрого управления. С другой стороны, необходима также система позиционного контроля телескопов с использованием карданного механизма для того, чтобы компенсировать большие уходы, которые накапливаются в течение длительного периода времени. Такие корректировки могут осуществляться с интервалом порядка нескольких месяцев.

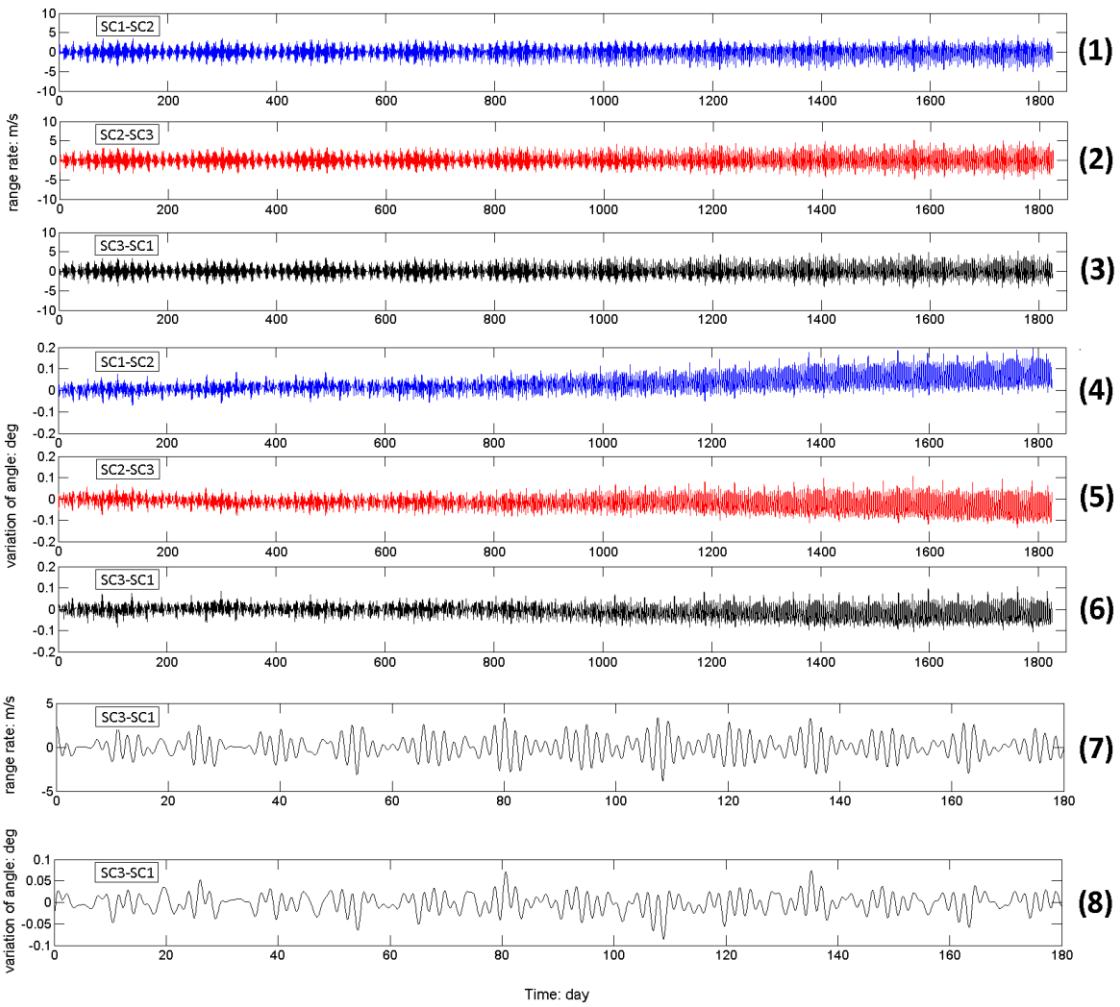


Рисунок 5.9 – Временная эволюция взаимного орбитального движения двух космических аппаратов кластера ГВ эксперимента

Полученные результаты моделирования в рамках настоящей работы не только согласуются с результатами работы [54], но и дополняют ее требованиями к учету тонких эффектов на небольших промежутках времени. При этом необходимо отметить, что моделирование в рамках работы [54], выполненное на больших интервалах (более 5 лет) не вызывает большого доверия, так как из рисунка 5.9 явно видно нарастание ошибок интегрирования к концу периода интегрирования. Именно в целях выявления тонких эффектов, необходимых для учета в данном проекте, моделирование в рамках настоящей работы проводилось на небольшом временном интервале (до 10 суток).

5.3 Проблема уточнения орбит высокоорбитальных КА

В разделах, касающихся вопросов моделирования высокоапогейных и низкоорбитальных КА, был освещен вопрос возможности уточнения их орбит с помощью имеющихся технических средств, базирующихся как на Земле, так и в космическом пространстве.

Касательно возможности уточнения орбиты высокоорбитальных КА следует отметить, что в отличие от высокоапогейных и низкоорбитальных КА, полноценное уточнение орбиты с помощью ГНСС проблематично вследствие нахождения КА выше орбит группировок ГНСС. Наземным радиотехническим станциям, в свою очередь, придется провести модернизацию своей аппаратуры для надежного измерения параметров на таких дальностях.

Тем не менее, использование технологии слабых сигналов ГНСС для навигации КА на высоких орбитах имеет хорошие перспективы. Безусловно, такая навигация является весьма сложной задачей с точки зрения обработки ГНСС сигналов: меньшая видимость по сравнению с приемником, находящимся на Земле, низкий уровень сигнала, плохая геометрия спутников, проблемы затмения сигнала Землей. Однако имеется ряд работ, в которых рассматриваются проблемы навигации космических аппаратов, например, вблизи Луны с использованием сигналов ГНСС. В частности, результаты таких исследований представлены в работе [55] (рисунок 5.10).

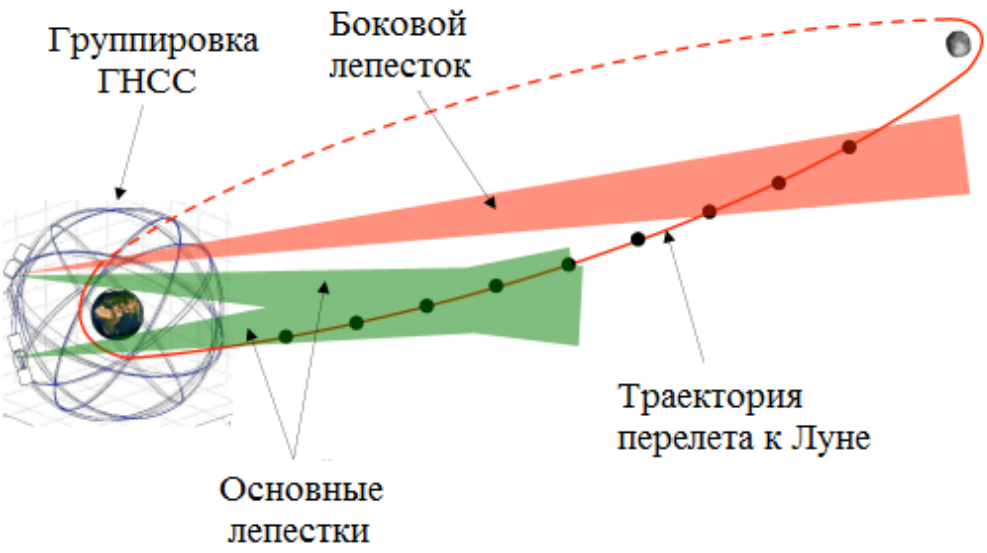


Рисунок 5.10 – Принцип использования ГНСС сигнала для уточнения высокоорбитальных КА, на примере проекта полета к Луне

Задел по таким работам может быть успешно задействован и в данном проекте.

Для обеспечения уточнения орбиты высокоорбитальных КА на основе наземных средств необходимо создание системы дальней космической связи (СДКС), обеспечивающей траекторные измерения положения и скорости КА. Одним из основных требований к СДКС является оптимальное расположение комплексов на поверхности Земли. Наилучшей комбинацией в минимальном составе будет система из 4-х комплексов (два - в северном, два - в южном полушариях), разнесенных по долготе на 180° со сдвигом по широте на 90°.

СДКС должна обеспечивать:

- траекторные измерения положения и скорости КА;
- прием телеметрической информации с космического аппарата;
- передачу команд управления на спутники;
- прием и сбор научных данных со спутников;
- контроль первоначальных параметров орбит.

Имеющиеся на сегодняшний день технологии (радиоинтерферометр со сверхдлинной базой (РСДБ) и допплеровские наблюдения), позволяют измерить положение аппаратов в системе ICRS с ошибкой около

0,1 миллисекунды дуги (1,5 см на расстоянии 100 тыс. км) и скорость КА с ошибкой около 1 мкм/с.

Антенны, используемые в СДКС для слежения за движущимся объектом должны быть полноповоротными. Наиболее распространены антенны с альт - азимутальной монтировкой. Слабые сигналы, полученные антенной, усиливаются «малошумящими» усилителями, смонтированными на антенне, и далее по коаксиальному кабелю передаются к приемнику, где они дополнительно усиливаются и детектируются, затем записываются на носителях. Записанные сигналы обрабатывают, пропуская их через ряд полосовых фильтров, которые разделяют полный телеметрический сигнал на его составляющие, выделяя служебную и научную информацию.

Наиболее развитой и активно используемой является система дальней космической связи США (The Deep Space Network, DSN), управляемая Лабораторией реактивного движения НАСА (JPL NASA). DSN состоит из трех комплексов: в Голдстоуне (Калифорния, США), в Робледо (пригород Мадрида, Испания) и в Тидбинбилла (Канберра, Австралия). Расположение комплексов на поверхности Земли позволяет проводить прием и передачу информации, выполнять траекторные измерения в любой момент времени.

Поскольку, как уже было отмечено выше, проект по регистрации ГВ разрабатывается совместными усилиями России и Китая, имеет смысл рассмотреть СДКС, реализованную на базе комплексов России и Китая.

В России в настоящее время СДКС состоит из 4-х комплексов - в Медвежьих озерах, Калязине, Уссурийске и Евпатории. Система дальней космической связи Китая насчитывает 5 станций – в Кашгаре (Kashgar), Чиндао (Qingdao), Миюне (Miyun), Юннане (Yunnan) и Джамуси (Jiamusi). В ближайшее время планируется запустить в работу дополнительную станцию Китайской СДКС в Южной Африке. Расположение станций дальней космической связи Китая и России показаны на рисунке 5.11.

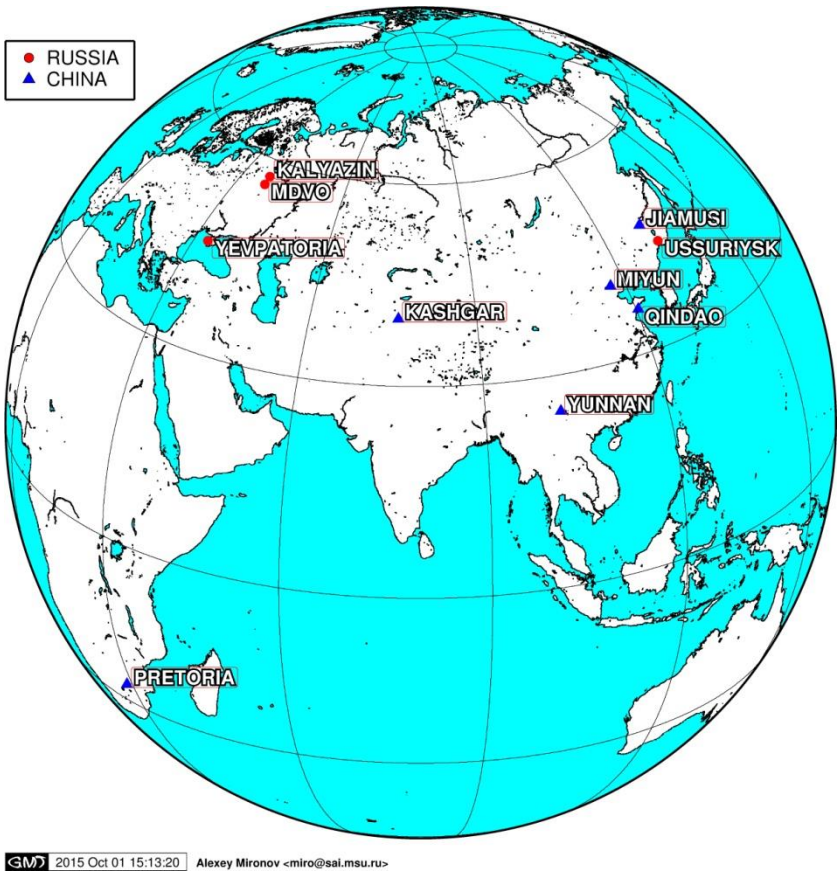


Рисунок 5.11 – Станции дальней космической связи России (Медвежьи Озера, Калязин, Уссурийск, Евпатория – показаны красным цветом) и Китая (Kashgar, Qingdao, Miyun, Yunnan и Jiamusi – показаны синим цветом)

Представляется, что такое расположение СДКС обеспечит выполнение высоких требований по навигации, предъявляемых к проекту по регистрации ГВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено моделирование и создан программный комплекс, описывающий движение КА на разных типах орбит: низкой околоземной круговой, высокоапогейной эллиптической, высокой околоземной круговой, в интересах астрометрических и гравиметрических задач, требующих высокой точности определения орбиты КА. Модельный расчет орбит был выполнен на примере как функционирующих («Радиоастрон», «GRACE»), так и готовящихся к запуску («GRACE Follow-On», «TianQin») проектов. Показано, что в зависимости от целевой задачи проекта требования к рабочим орбитам КА различаются существенно, эти требования определены и предложен метод их учета.

В рамках моделирования движения КА на низкой околоземной орбите в интересах решения фундаментальных задач гравиметрии были получены следующие результаты.

1. Для увеличения чувствительности системы «спутник-спутник» необходимо варьировать взаимное расстояние между КА в зависимости от желаемого максимального порядка разрешаемой гармоники; при увеличении порядка расстояние между КА необходимо уменьшать; для разрешения n=250 гармоники потребуется взаимное расстояние ≈90 км.
2. Чем выше порядок (n) разрешаемой гармоники, тем строже требования к измерительной аппаратуре межспутникового расстояния: для n=150 за время накопления сигнала 10 с необходимо выявлять эффекты порядка микрона, для n=200 – уже порядка нанометра, поэтому разрешение гармоник выше n=250 с помощью орбитальной космической группировки КА не представляется возможным с существующим уровнем развития отечественных технологий.
3. Для системы «спутник-спутник» работа КА на высоте ≈400 км более предпочтительна, чем на высотах 300 и 500 км, поскольку работа на высотах ниже 400 км затруднена из-за сильного тормозного

воздействия со стороны атмосферы, а при работе на высотах более 400 км регистрация тонкой структуры гравитационного поля становится все более проблематичной ввиду потери чувствительности к амплитудам гармоник гравитационного потенциала.

4. Первые данные моделирования определения поправок к коэффициентам Стокса показали, что поправки тем точнее, чем меньше взаимное расстояние между двумя КА.
5. Явной зависимости ошибок определения коэффициентов Стокса от величины наклонения орбиты аппаратов не обнаружено; не выявлено так же и других улучшений в части чувствительности и необходимого времени проведения измерений при использовании орбит, отличных полярной.
6. В системе «спутник-спутник» больший порядок гармоники определяется с большей точностью, в то время как в режиме градиентометра лучше всего уточняются гармоники до $n \approx 100$.
7. Оптимальным временем проведения непрерывных измерений для достижения разрешения 250 гармоники является период 1 месяц.
8. Использование КА на орбитах с наклонениями отличными полярной целесообразно в случае совместной их работы с основной группировкой, расположенной на полярной орбите; улучшение достигается за счет увеличения одновременных измерений в один и тот же момент времени и за счет более равномерного заполнения сферы наблюдений.
9. КА с градиентометром на борту может проводить измерения на одной и той же орбите, что и система «спутник-спутник», расширяя тем самым состав измерений в выделенной области пространства; однако более предпочтительной для градиентометрических измерений является более низкая орбита (≤300 км).

10. Необходимая точность локализации КА на орбите для решения гравиметрических задач должна составлять ≈1 см и может быть достигнута только благодаря использованию сигналов ГНСС. Первые результаты по уточнению орбиты с помощью измерений ГНСС показали принципиальную возможность такого уточнения, однако величина уточнения будет зависеть от качества эфемерид КА.

Моделирование движения КА на высокой эллиптической орбите в рамках решения фундаментальных астрометрических задач на примере проекта «Радиоастрон» показало следующие результаты.

1. Улучшение результатов при корреляции впервые было обнаружено при наблюдениях в L-диапазоне, который накладывает не слишком строгие ограничения по скорости и местоположению аппарата на орбите. Обработка данных была проведена и в С-диапазоне с более существенными ограничениями на точность определения координат и компонент скорости КА. Показано, что алгоритм фильтрации Калмана дает положительный результат и в этом диапазоне. Практически во всех рассмотренных случаях (сеансах) улучшен показатель отношения сигнал/шум, с одновременным уменьшением задержки и остаточной частоты интерференции, что является уверенным подтверждением успешной работы алгоритма по уточнению орбиты КА.
2. Измерения дальности и радиальной скорости должны производиться минимум с трех наземных станций, для которых КА находится в зоне видимости. Измерения могут быть разных типов (радиодальномерные, лазерные, а также их комбинация). Необходимы отдельно дальномерные измерения для уточнения 3 координат и допплеровские – для уточнения 3 компонент скоростей.
3. Необходимо рассмотреть возможность одновременных измерений со станций «Медвежьи Озера» и «Уссурийск». Нужно по возможности их совмещать, так как раздельное использование нерационально. Если

недоступны одновременные измерения, то будут полезны измерения с задержкой в несколько секунд между станциями (1-я секунда – «Медвежьи Озера», 2-я секунда – «Уссурийск», 3-я секунда – «Медвежьи Озера» и т.д.). Далее значения радиодальномерных измерений интерполируются на общую временную шкалу.

4. Период радиодальномерных измерений следует по возможности увеличить. В настоящий момент сеансы измерений занимают приблизительно 900 с, что может быть недостаточно для полноценного уточнения орбиты КА с помощью метода фильтрации типа Калмана. Для высокоапогейных КА это не представляет трудностей, поскольку они доступны для радиосвязи в течение достаточно большого промежутка времени.
5. Для уточнения орбиты на основе одних только радиодальномерных данных нужна дополнительная независимая информация о ее наклонении и долготе восходящего узла; для уточнения орбиты на основе двух комплектов радиодальномерных данных нужна дополнительная независимая информация либо о наклонении, либо о долготе восходящего узла. Источником такой дополнительной информации могут быть астрометрические наблюдения аппарата. Точность измерений в одну секунду дуги вместе с радиодальномерными данными будет достаточной для локализации аппарата в пространстве в пределах нескольких сот метров. Такая точность по местоположению на орбите вполне достаточна, например, для успешной корреляционной обработки данных наблюдений КА в радиодиапазоне.
6. В перспективе целесообразна проработка вопроса по установке ГНСС приемника на высокоапогейные КА. Несмотря на то, что в апогее (≈100 тыс. км) аппарат недоступен для получения навигационных параметров, так как рабочая высота орбиты навигационных систем

(ГЛОНАСС, GPS и др.) составляет около ≈20 тыс. км, возможно уточнение его местоположения в период прохождения им перигея. Уточнение положения КА до ≈1 см в области перигея значительно облегчит задачу предсказания и реконструкции его орбиты при нахождении в апогее, где будет выполняться основная целевая задача.

В рамках моделирования движения КА на высокой круговой околоземной орбите в интересах решения задач фундаментальной гравитации были получены следующие результаты.

1. Измерительная система КА в составе орбитальной группировки по детектированию гравитационных волн должна быть способна проводить измерения межспутникового расстояния с точностью ≈ 1 пм на фоне изменения длины базы ≈ 0,2 м/с.
2. Для выявления эффектов прохождения гравитационной волны необходим, в том числе, учет атмосферы Земли, оказывающей ускорение $\approx 10^{-14}$ м/с^2 при требуемой чувствительности эксперимента $\approx 10^{-15}$ м/с^2.
3. Максимальная скорость коррекции угла при наведении луча лазера на другой КА в орбитальной группировке составляет $\approx 1{,}25\times 10^{-4}$ "/с, при этом оценка сверху для точности упреждения луча $\approx 7{,}2\times 10^{-5}$ ".
4. Навигация КА на планируемой высоте проведения эксперимента может быть обеспечена средствами дальней космической связи, а также использованием слабого сигнала ГНСС с применением специальной приемной аппаратуры.

Таким образом, в результате выполнения настоящей работы поставленные во введении цели достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Жамков А.С., Жаров В.Е.,* // Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью радиодальномерных и доплеровских измерений // Вестн. Моск. ун-та. Физ., Астрон., 2016., №3., С. 61. (*Zhamkov A.S., Zharov V.E.*, // Moscow University Physics Bulletin. 71. N 3. pp. 299-308, 2016, DOI 10.3103/S0027134916030152).
2. *Авдеев В.Ю., Алакоз А.В., Александров Ю.А., Андреянов В.В. и др. //* Космическая миссия «Радиоастрон». Первые результаты. // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2012 том 3, №14, с. 4-21.
3. *Кардашев Н.С., Хартов В.В., Абрамов В.В., Авдеев В.Ю. и др. //* «Радиоастрон» - телескоп размером 300000 км: основные параметры и первые результаты наблюдений. // Астрономический журнал, 2013, том 90, №3, с.179-222.
4. *Кардашев Н.С., Алакоз А.В., Ковалев Ю.Ю., Попов М.В. и др. //* «Радиоастрон»: Итоги выполнения ранней научной программы исследований объектов Вселенной со сверхвысоким угловым разрешением. // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2014 том 3, №24, с 4-11.
5. *Захваткин М.В.* Определение и прогнозирование параметров движения космического аппарата с учетом возмущений, вызванных работой бортовых систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва. 2013.
6. *Андрианов А.С., Гирин И.А., Жаров В.Е., Костенко В.И. и др. //* Корреляционная обработка данных наземно-космического интерферометра «Радиоастрон». // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2014 том 3, №24, с. 55-59.
7. *Montenbruck O. Gill, E.* // Satellite Orbits. Models, Methods, and Applications. // ISBN 3-540-67280 - X Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, New York. 2000.

8. *Gerard Petit, Brian Luzum.* // IERS Conventions; IERS Technical Note No.36. IERS Conventional Centre 2010. http://www.iers.org/iers/publications /tn/tn36/.
9. *Жаров В.Е.* // Основы радиоастрометрии. // Москва: Физический факультет МГУ. 2011.
10. *Губанов В.С.* // Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. // Санкт-Петербург: Наука. 1997.
11. *Zarchan P.* // Fundamentals of Kalman Filtering – A Practical Approach, Second Edition. // American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 2005.
12. *Cunningham L.E.* // On the Computation of the Spherical Harmonic Terms needed during the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // Celestial Mechanics, 1970, vol 2, pp. 207-216.
13. *Сажин М.В., Власов И.Ю., Сажина О.С., Турышев В.Г. //* «Радиоастрон»: релятивистское изменение частоты и сдвиг шкалы времени. // Астрономический Журнал, 2010, том 87, №11, с. 1043-1058. (*Sazhin M.V., Vlasov I.Yu., Sazhina O.S., Turyshev V.G. //* RadioAstron: Relativistic Frequency Change and Time-Scale Shift. // Astronomy Reports, 2010, vol 64, №11 pp.959-973).
14. *Жамков А.С., Жаров В.Е.,* //Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «РадиоАстрон» и необходимые для этого условия при использовании фильтра Калмана // Вестн. Моск. ун-та. Физ., Астрон., 2017., №3., С.99. (*Zhamkov A.S., Zharov V.E.,* // Moscow University Physics Bulletin. 72. N3. pp. 318-325, 2017, DOI 10.3103/S0027134917030158).
15. *Синицын И.Н.* // Фильтры Калмана и Пугачева. // М., 2007.
16. *Tapley, B.D., Schutz, B.E., Born, G.H.* // Statistical Orbit Determination. // USA: Elsevier academic press. 2004.
17. *Жамков А.С., Жаров В.Е.,* // Моделирование движения двух информационно связанных космических аппаратов в гравитационном

поле Земли для решения гравиметрических задач // Вестн. Моск. ун-та. Физ., Астрон., 2018, №5, принята к печати.

18. *G. Balmino* // Gravity field recovery from GRACE: Unique aspects of the high precision inter-satellite data and analysis methods // Space Science Reviews 108 (1-2): pp. 47-54, 2003.
19. *P. Bond* // Gravity map from GRACE // *Astronomy & Geophysics,* Volume 44, Issue 5, 1 October 2003, Pages 5.4. https://doi.org/10.1093/astrog/44.5.5.4-a.
20. *Zh. Kang et. al* // Precise orbit determination for the GRACE mission using only GPS data // Journal of Geodesy (2006) Vol 80, Issue 6, pp. 322-331. https://doi.org/10.1007/s00190-006-0073-5.
21. *N. Darbeheshti et. al.* // Instrument data simulations for GRACE Follow-on: observation and noise models // Earth System Science Data, 9(2), pp. 833-848. https://dx.doi.org/10.5194/essd-9-833-2017.
22. *F. Flechtner et al.* // Status of the Grace Follow-on Mission // In: Marti U. (eds) Gravity, Geoid and Height Systems. International Association of Geodesy Symposia, vol 141. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10837-7_15.
23. *F. Flechtner et al.* // What Can be Expected from the GRACE-FO Laser Ranging Interferometer for Earth Science Applications? // In: Cazenave A., Champollion N., Benveniste J., Chen J. (eds) Remote Sensing and Water Resources. Space Sciences Series of ISSI, vol 55. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32449-4_11.
24. *C.Reigber* // Gravity Field Recovery From Satellite Tracking Data // Deutsches Geodätisches Forschungsinstitute (DGFI), Abt.I, pp.197-234.
25. *М. Беликов, К. Тайбаторов* // Эффективный алгоритм вычисления гравитационного потенциала Земли и его первых производных для решения спутниковых задач. // Кинематика и физика небесных тел, том 6 №2 (1990) стр. 24-32.
26. http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/egm96.html.

27. *В.Е. Жаров* // Сферическая астрономия //Век 2, 2006, 480 с, ISBN 5-85099-168-9.
28. https://www.aviso.altimetry.fr/en/data/products/auxiliary-products/global-tide-fes/description-fes2004.html.
29. *S. Desai* // Observing the pole tide with satellite altimetry. // J. Geophys, Res., 107(C11), 3186, doi:10.1029/ 2001JC001224, 2002.
30. ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/desaiscopolecoef.txt.
31. http://www.nrl.navy.mil/research/nrl-review/2003/atmospheric-science/picone/.
32. http://sol.spacenvironment.net/jb2008/indices.html.
33. https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/g/grace
34. *J.A. Marshall, S.B. Luthcke, P.G. Antreasian, G.W. Rosborough* // Modeling Radiation Forces Acting on TOPEX/Poseidon for Precision Orbit Determination // NASA Technical Memorandum 104564, https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19920019100.pdf
35. *C. Reigber et al.* // An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S // Journal of Geodynamics 39 (2005) pp. 1-10
36. *В.Л. Пантелеев* //Теория фигуры Земли. // М.: Физический факультет МГУ, 2000, 98 с.
37. *Basem Elsaka* // Feasible multiple satellite mission scenarios flying in a constellation for refinement of the gravity field recovery. // International Journal of Geosciences 03/2014, 5(3): 263-273.
38. *P.L. Bender, D. Wiese* et al // A Possible Dual-GRACE Mission with 90 Degree and 63 Degree Inclination Orbits. // Proceedings of the 3rd International Symposium on Formation Flying, Missions and Technologies, ESA/ESTEC, Noordwijk, April 2008, pp. 1-6.
39. *T. Mayer-Gurr, K.H. Ilk, A. Eicker, M. Feuchtinger* // ITG-CHAMP01: a CHAMP gravity field model from short kinematic arcs over a one-year observation period // Journal of Geodesy (2005) 78: 462-480.

40. *T. Mayer-Gurr, A. Eicker, K.H. Ilk* // Gravity Field Recovery from GRACE-SST Data of Short Arcs. In: J. Flury, R. Reigber, M. Rothacher, G. Boedecker, U. Schreiber (eds), Observation of the Earth System from Space. Springer, Berlin Heidelberg, 131-148.
41. *X. Liu* // Global gravity field recovery from satellite-to-satellite tracking data with the acceleration approach // Publications on Geodesy 68, ISBN: 978 90 6132 309 6.
42. *W. Heiskanen, H. Moritz* // Physical Geodesy. By Helmut Moritz, Reprint of the original edition published by W.H. Freeman and Company San Francisco, 1967, Institute of Physical Geodesy, Graz.
43. *B. Elsaka* // Simulated Satellite Formation Flights for Detecting the Temporal Variations of the Earth's Gravity Field // Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademishen Grades Doktor-Ingenieur. Institut fur Geodasie und Geoinformation der Universitat Bonn.
44. *С.Н. Яшкин* //Спутниковая градиентометрия и системы «спутник-спутник». // М.: МИИГАиК, 2009, 113 с, ISBN 978-5-91188-020-0.
45. *R. Rummel, W. Yi, C. Stummer* // Goce gravitational gradiometry. // Geoid (2011) 85: 777-790, DOI 10.1007/s00190-011-0500-0.
46. *B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, E. Wasle* // GNSS – Global Navigation Satellite Systems// Institut für Navigation und Satellitengeodäsie Technishe Universität Graz, Graz, Austria, SpringerWienNewYork, 2008, 546 p.
47. *GRACE Level-1B data product* // ftp://isdcftp.gfz-potsdam.de/grace/Level-1B/JPL/Instrument/RL02/2005/.
48. *K. Case, G. Kruizinga, S.-C. Wu* // GRACE Level 1B Data Product User Handbook. // Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology, 2010, 62p.
49. *S.-C. Wu, G. Kruizinga, W. Bertiger* // Algorithm Theoretical Basis Document for GRACE Level-1B Data Processing. // Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology, 2006, 54p.

50. *W. Gurtner, L. Estey* // RINEX The Receiver Independent Exchange Format. Astronomical Institute University of Bern and UNAVCO Boulder, Co., 2007. 40p.
51. *IGS Product Availability* // https://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods_cb.html.
52. *Paul R. Spofford, W. Remondi Benjamin* // The National Geodetic Survey Standard GPS Format SP3. ftp://igs.org/pub/data/format/sp3_docu.txt.
53. *А.В Бурданов, А.С Жамков, В.Е. Жаров, В.К. Милюков, М.В. Сажин* // Новый подход к проведению гравитационных исследований на околоземной орбите. // Космонавтика и ракетостроение, ЦНИИмаш, 2016, том 8, №93, с. 5-15.
54. *Luo Jun, Chen Li-Sheng, Duan Hui-Zong et al* // TianQin: a space-borne gravitational wave detector. // Class. Quantum Grav, 33, 035010 (2016).
55. *Maria Manzano-Jurado et al* // Use of Weak GNSS Signals in a Mission to the Moon. // 2014 7th ESA Workshop on Satellite Navigation Technologies and Signal Processing (NAVITEC 2014), IEEE Catalog Number: ISBN: CFP1440L-POD 978-1-4799-6530-4 (2014).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Описание программы «SpaceGrav»

Программа «SpaceGrav» предназначена для проектирования высокоточных орбит низкоорбитальных КА и планирования экспериментов по определению геодезических параметров Земли. Программа адаптирована для пользователя, не имеющего навыков программирования, а также может быть запущена на персональном компьютере с операционной системой «Windows XP» и выше.

На рисунке П1.1 представлено окно задания начальных параметров для работы программы «SpaceGrav».

```
DirInput      : C:\SpaceGrav\InputFiles\
DirOutput     : C:\SpaceGrav\OutputFiles\
Year          : 2012
Month         : 7
Day           : 16
Hour          : 23
Min           : 59
Sec           : 00
Nmax          : 20
Distance      : 220
Incl          : 89.0
RA            : 0
Ecc           : 0.001
AP            : 0
MA1           : 90
Alt_geoc      : 400
h             : 5
T             : 17280
mass          : 500
Lx            : 3
Ly            : 1.5
Lz            : 1.5
output r1           : 1
output r2           : 1
output dr           : 1
output dv           : 1
output da           : 1
output Xcoord       : 1
output Ycoord       : 1
output Zcoord       : 1
output alt_geodesy  : 1
output longlat      : 1
```

Рисунок П1.1 – Окно задания начальных параметров для работы программы «SpaceGrav»

Входные параметры:

- DirInput – входная директория, где расположены файлы данных для работы программы: параметры вращения земли, эфемериды Солнца, Луны и планет, информация о солнечной активности и т.д.; пользователем не изменяется;
- DirOutput – выходная директория, где выводятся файлы данных с результатами расчета; может задаваться пользователем;
- Year, Month, Day – год, месяц, день начального положения КА, на которое выполняется моделирование;
- Hour, Min, Sec – час, минуты, секунды начального положения КА, на которое выполняется моделирования;
- Nmax – максимальный порядок разложения геопотенциала (не превышает 360);
- Distance – межспутниковое расстояние (км);
- Incl – наклонение орбиты КА (град.);
- RA – долгота восходящего узла орбиты КА (град.);
- Ecc – эксцентриситет орбиты КА;
- AP – аргумент перигея орбиты КА (град);
- MA1 – средняя аномалия орбиты КА (град);
- Alt_geoc – геоцентрическая высота орбиты, высота над поверхностью, ограниченной средним радиусом Земли (км);
- h – шаг интегрирования (сек);
- T – количество шагов интегрирования;
- mass – масса КА (кг);
- L_x – длина КА (м);
- L_y – ширина КА (м);
- L_z – высота КА (м).

Выходные параметры:

- output r1 – геоцентрическое расстояние КА1 (м);
- output r2 – геоцентрическое расстояние КА2 (м);
- output dr – межспутниковое расстояние (м);

- output dv – межспутниковая скорость (м/с);
- output da – межспутниковое ускорение (м/с^2);
- output Xcoord – координата «X» КА 1,2 в GCRS (м);
- output Ycoord – координата «Y» КА 1,2 в GCRS (м);
- output Zcoord – координата «Z» КА 1,2 в GCRS (м);
- output alt_geodesy – геодезическая высота КА 1,2 (км)
- output longlat – долгота и широта КА 1,2 в ITRS (град.)

Пользователь может выбирать выходные файлы, которые он хочет получить, простановкой соответствующей цифры напротив выходного файла (1 – файл выдается, 0 – файл не выдается). Поскольку моделируется движение пары КА на одной орбите во входных параметрах задается информация только о КА1, местоположение КА2 будет отличаться только за счет разницы в средней аномалии, которая является функцией межспутникового расстояния и геоцентрической высоты.

После запуска программы «SpaceGrav.exe» появится окно прогресса ее выполнения (Рисунок П1.2):

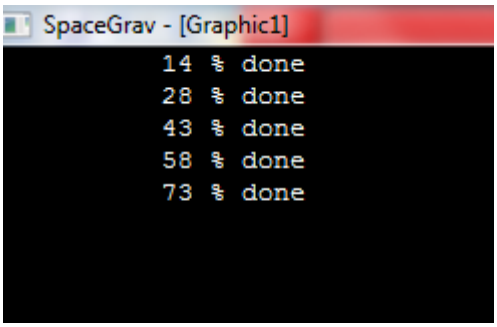


Рисунок П1.2 – Выполнение программы «SpaceGrav.exe»

По завершении расчетов программа выдает системное сообщение об отсутствии ошибок при выполнении расчетов (рисунок П1.3), где после нажатия кнопки «Да» программа закрывается.

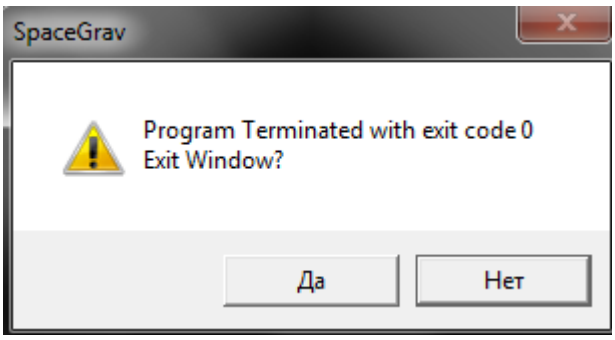


Рисунок П1.3 – Окончание расчетов программой «SpaceGrav.exe»

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Описание программы «PlanGrav»

Программа «PlanGrav» предназначена для обеспечения планирования измерений геодезических параметров Земли в части спутниковой градиентометрии и межспутниковых измерений. Программа адаптирована для пользователя, не имеющего навыков программирования, а также может быть запущена на персональном компьютере с операционной системой «Windows XP» и выше.

На рисунке П2.1 представлено окно задания начальных параметров для работы программы «PlanGrav».

```
DirInput      : C:\PlanGrav\InputFiles\
DirOutput     : C:\PlanGrav\OutputFiles\
Gradientometer (0) or Stocks_coeff (1) : 1
For Gradientometer data
Year          : 2012
Month         : 7
Day           : 16
Hour          : 23
Min           : 59
Sec           : 00
Nmax          : 20
Incl          : 89.0
RA            : 0
Ecc           : 0.001
AP            : 0
MA1           : 90
Alt_geoc      : 400
h             : 1
T             : 500
delta_grad    : 0.25
mass          : 500
Lx            : 3
Ly            : 1.5
Lz            : 1.5
output acc          : 1
output loglat       : 1
output alt_godesy   : 1
```

```
For Stocks_coeff data
Year          : 2012
Month         : 7
Day           : 16
Hour          : 23
Min           : 59
Sec           : 00
Nmax_int      : 20
Nmax_calc     : 20
Distance      : 220
Incl          : 89.0
RA            : 0
Ecc           : 0.001
AP            : 0
MA1           : 90
Alt_geoc      : 400
h             : 5
T             : 1800
mass          : 500
Lx            : 3
Ly            : 1.5
Lz            : 1.5
Output - 2 files Result_MNK_Cnk, Result_MNK_Snk
```

Рисунок П2.1 – Окно задания начальных параметров для работы программы «PlanGrav»

Входные параметры:

- DirInput – входная директория, где расположены файлы данных для работы программы: параметры вращения земли, эфемериды Солнца, Луны и планет, информация о солнечной активности и т.д.; пользователем не изменяется;
- DirOutput – выходная директория, где выводятся файлы данных с результатами расчета; может задаваться пользователем;

- «Gradientometer (0) or Stocks_coeff (1)» - в случае задания значения «0» осуществляет расчет в режиме градиентометра, в случае задания значения «1» – расчет по определению поправок к коэффициентам Стокса;
- в блоке «For Gradientometer data» задаются начальные параметры для расчета в режиме градиентометрических измерений при этом описание входных параметров до строки «delta_grad» аналогично описанию для программы «SpaceGrav»;
- delta_grad – размер плеча градиентометра (половина размера градиентометра, м)

Выходные параметры:

- output acc – тензор градиентометра ($1/c^2$);
- output loglat - долгота и широта КА в ITRS (град.);
- output alt_geodesy – геодезическая высота КА (км).

В блоке «For Stocks coeff data» задаются начальные параметры для расчета в режиме определения поправок к коэффициентам Стокса при этом описание входных параметров аналогично описанию для программы «SpaceGrav», за исключением двух параметров:

- Nmax_int – максимальный порядок геопотенциала для расчета движения КА (не превышает 360);
- Nmax_calc – уточняемый порядок геопотенциала (не должен превышать Nmax_int).

Выходные файлы «Result_MNK_Cnk.dat» и «Result_MNK_Snk.dat» формируются автоматически и содержат поправки к коэффициентам Стокса для данного Nmax_calc.

После запуска программы «PlanGrav.exe» появится окно прогресса ее выполнения (рисунок П2.2):

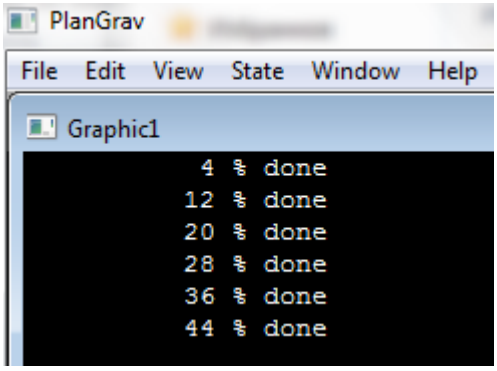


Рисунок П2.2 – Выполнение программы «PlanGrav.exe»

По завершении расчетов программа выдает системное сообщение об отсутствии ошибок при выполнении расчетов (рисунок П2.3), где после нажатия кнопки «Да» программа закрывается.

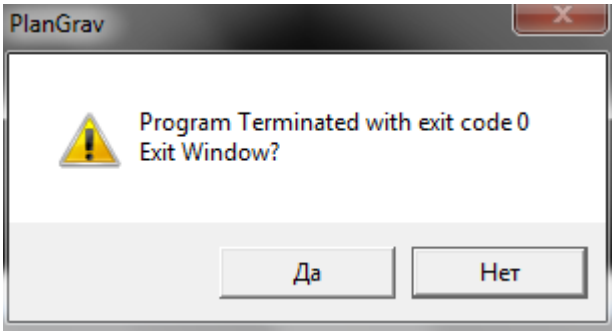


Рисунок П2.3 – Окончание расчетов программой «PlanGrav.exe»