

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Шахманов Викентий Юрьевич

**СТРУКТУРА ПЕТЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ
В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ**

01.04.02 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент П.И. Пронин

Москва – 2018

Оглавление

Введение	4
Глава 1. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса и ее регуляризация высшими ковариантными производными	23
1.1. Действие рассматриваемой теории	23
1.2. BRST-неинвариантная регуляризация высшими ковариантными производными	26
1.3. BRST-инвариантная регуляризация высшими ковариантными производными	29
1.4. Производящий функционал	33
1.5. Ренормгрупповые функции	34
Глава 2. NSVZ соотношение для двухпетлевой β-функции при использовании BRST-неинвариантной регуляризации	39
2.1. Двухпетлевая двухточечная функция Грина фонового калибровочного поля	39
2.2. Однопетлевые двухточечные функции Грина	43
2.3. Соотношение между двухточечными функциями Грина	47
Глава 3. Проверка NSVZ соотношения для слагаемых, пропорциональных четвертой степени юкавских констант	49
3.1. Структура NSVZ соотношения, пропорциональная четвертой степени по юкавским константам	49
3.2. NSVZ схема	60
Глава 4. NSVZ соотношение для слагаемых второй степени по юкавским константам	67
4.1. Суперграфы	67

4.2. Вклад в функцию Грина фонового калибровочного поля для рассматриваемой структуры	69
4.3. Вклады в функции Грина суперполей материи и квантового калибровочного поля рассматриваемой структуры	72
4.4. NSVZ соотношение для рассматриваемых вкладов в функции Грина	74
Заключение	75
Приложение А. Явные выражения для супердиаграмм, пропорциональных четвертой степени юкавских констант	77
Приложение Б. Вычисления петлевых интегралов, регуляризованных высшими ковариантными производными	84
Приложение В. Супердиаграммы, пропорциональные второй степени юкавских констант	89
Список литературы	94

Введение

Обзор литературы, актуальность темы исследования.

Суперсимметричные теории поля при квантовании раскрывают перед исследователем замечательные свойства. Например, известно, что благодаря так называемой теореме о неперенормировке [1] $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные калибровочные теории не имеют расходящихся квантовых поправок к суперпотенциалу. Применительно к $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса было доказано [2, 3, 4], что за пределами однопетлевого приближения данная теория не приобретает расходимостей. Также $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга-Миллса является конечной [5, 6, 3] во всех порядках по теории возмущения. Поэтому введение суперсимметрии в квантовую теорию поля значительно улучшило ультрафиолетовое поведение исследуемых моделей, к которым относятся, в частности, суперсимметричные расширения Стандартной Модели элементарных частиц.

Суперсимметрия была открыта в работах [7, 8]. Вскоре после этого была построена простейшая суперсимметричная теория, которая получила название модели Весса-Зумина [9]. Ее действие в наиболее простом безмассовом варианте можно представить в виде:

$$S_{WZ} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^* \phi,$$

где $\phi(x, \theta)$ - киральное суперполе, которое удовлетворяет условию $\bar{\mathcal{D}}_a \phi = 0$, а интеграл берется по полному суперпространству. Здесь под $\bar{\mathcal{D}}_a$ мы обозначаем суперсимметричную ковариантную производную. Начиная с модели Весса-Зумино фактически началась история последовательного построения и исследования моделей теории полей с суперсимметрией в четырехмерной реализации физического пространства-времени, которые, например, можно использовать для создания суперсимметричных расширений Стандартной Модели.

При выводе теорем о неперенормировке существенно используется нали-

чие большого количества симметрий, которые при этом не должны нарушаться на квантовом уровне во всех порядках теории возмущений. Поэтому эти симметрии должны сохраняться при регуляризации и квантовании. Другими словами, после регуляризации теория должна оставаться инвариантной относительно рассматриваемых симметрий. Наиболее распространенная размерная регуляризация [10, 11, 12, 13] не сохраняет суперсимметрию. Есть ее модификация, размерная редукция [14], которая отличается от размерной регуляризации тем, что при ее использовании все операции с γ -матрицами проводятся, как в четырехмерном пространстве и все тождества с γ -матрицами Дирака имеют соответствующий вид, однако оставшиеся петлевые интегралы вычисляются в D измерениях. Однако известно, что размерная редукция является математически противоречивой [15]. После избавления от противоречия размерная редукция при квантовании в высших порядках теории возмущения может нарушать суперсимметрию [16, 17, 18]. На данный момент, единственной регуляризацией, сохраняющей калибровочную инвариантность и суперсимметрию, является регуляризация высшими ковариантными производными [19, 20].

Квантовые поправки в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях поля имеют одно замечательное свойство. А именно, β -функция и аномальные размерности суперполей материи связаны соотношением, которое получило название точная NSVZ β -функция [21, 22, 23, 24]. Это соотношение записывается для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, взаимодействующей с киральными суперполями материи в представлении R , в виде

$$\beta(\alpha, \lambda) = -\frac{\alpha^2 \left(3C_2 - T(R) + C(R)_i^j (\gamma_\phi)_j^i(\alpha, \lambda)/r \right)}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}, \quad (1)$$

где $\alpha = e^2/4\pi$ - константа связи, λ^{ijk} - юкавские константы связи, а r - размерность калибровочной группы. Константы C_2 , $T(R)$, $C(R)_i^j$ определены через структурные константы и генераторы калибровочной группы в представлении R следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
f^{ACD} f^{BCD} &= C_2 \delta^{AB}, \\
tr (T^A T^B) &= T(R) \delta^{AB}, \\
(T^A T^A)_i^j &= C(R)_i^j.
\end{aligned}$$

Также мы для фундаментального представления выбираем генераторы следующим образом:

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}.$$

NSVZ соотношение было изначально получено на основе общих представления о структуре инстантонных вкладов [21, 23, 25] в эффективное действие, перенормировке топологического члена [26] и аномалиях [22, 24, 27]. Однако явными вычислениями было показано, что NSVZ соотношение не выполняется при использовании модифицированной схемы минимальных вычитаний с размерной редукцией (\overline{DR} - схема) [28, 29, 30, 31, 32] или со схемой вычитаний MOM [33] в силу схемной зависимости [34, 35]. Путем конечных перенормировок [28, 29, 30, 36] возможно связать схемы, указанные выше, с NSVZ схемой. Сама возможность проведения такой конечной перенормировки является весьма нетривиальной [28] в силу схемнонезависимых следствий NSVZ соотношения [33, 35]. Таким образом, при использовании размерной редукции NSVZ схема должна быть подстроена в каждом порядке теории возмущения. В случае использования размерной техники нет простой процедуры сделать единообразным образом это во всех порядках теории возмущения. При использовании регуляризации высшими ковариантными производными [19, 20, 37] такую процедуру удалось построить [38]. Регуляризация высшими ковариантными производными является математически непротиворечивой и может быть сформулирована в явном $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричном виде [39, 40]. Такая регуляризация также может использоваться в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теориях [41, 42, 43].

Для $\mathcal{N} = 1$ квантовой суперсимметричной электродинамики ($\mathcal{N} = 1$ SQED) было показано, что при использовании регуляризации высшими производными NSVZ β -функция справедлива во всех порядках по теории возмущения [44, 45], если ренормгрупповые функции определены в терминах голой константы связи. Это утверждение было проверено на трехпетлевом уровне в работе [46]. Можно предположить, что и в общем случае NSVZ соотношение выполняется для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голой константы связи, во всех порядках теории возмущения в калибровочных суперсимметричных теориях при использовании регуляризации высшими ковариантными производными. Это является следствием того, что при использовании регуляризации высшими ковариантными производными β -функция, определенная в терминах голой константы связи, является интегралом от двойной полной производной в импульсном пространстве при внешнем импульсе, стремящемся к нулю. История этого утверждения следующая: сначала было показано, что такая β -функция является интегралом от полной производной [47], а потом было также доказано, что даже от двойной полной производной [48]. Аналогично факторизация в интегралы от полных производных была доказана во всех порядках для D-функции Адлера [49] в $\mathcal{N} = 1$ СКХД [50, 51], определенной в терминах голой константы связи, а также для аномальной размерности массы фотино в $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с мягко нарушенной суперсимметрией [52].

Для абелевых суперсимметричных калибровочных теории можно простым графическим способом [48, 53] объяснить появление точной NSVZ β -функции. Нарисуем любой суперграф без внешних линии. Путем присоединения к этому суперграфу двух линий фонового калибровочного поля всеми возможными способами мы получим совокупность диаграмм, дающих вклад в β -функцию. С другой стороны, из исходного суперграфа, если мы разрежем всеми способами внутренние линии материи, возникнет набор супердиаграмм, дающих вклад в аномальную размерность материи. Вклад от диаграмм для β -функции в данном случае будет соотносится с вкладом от супердиаграмм для аномальной

размерности материи благодаря NSVZ соотношению (1).

При рассмотрении неабелевых калибровочных теории описанная выше графическая интерпретация не подойдет для описания появления точной NSVZ β -функции. Действительно, в данной теории, если взять произвольный суперграф и разрезать его по внутренним линиям, принадлежащим не только пропагаторам суперполей материи, то мы получим набор супердиаграмм с внешними линиями калибровочного поля, суперполей материи и духов Фаддеева-Попова, дающих вклады в соответствующие аномальные размерности. Кроме того, в формуле (1) знаменатель зависит от константы связи, благодаря чему β -функция оказывается связанной с аномальной размерностью суперполей материи во всех предыдущих порядках по теории возмущений. Все эти сложности при исследовании квантовых поправок можно преодолеть с использованием результата работы [54], где было показано, что NSVZ соотношение для RG-функций, определенных в терминах голых констант связи, при использовании регуляризации высшими ковариантными производными можно переписать в виде (2).

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi} (3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0) - 2C_2\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) + C(R)_i^j \gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i / r). \quad (2)$$

Данное соотношение уже не содержит зависящего от константы связи знаменателя и предположительно выполняется во всех порядках. Согласно этому соотношению мы можем дать аналогичное графическое объяснение появлению NSVZ β -функции в неабелевых теориях. Для таких теории явными вычислениями [55, 56, 57, 58, 59, 60] была проверена факторизация β -функции в интегралы от полных производных в низших петлях. Также в работе [54] было доказано, что все вершины, содержащие две внешние линии духов Фаддеева-Попова и внешнюю линию квантового калибровочного поля, определяются нерасходящимися выражениями, что помогло вывести выражение для NSVZ соотношения в

виде, приведенном выше.

В свою очередь соотношение (2) позволяет предположить (смотрите работу [54]), что функции Грина, определенные ниже, удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p \rightarrow 0} &= -\frac{3C_2 - T(R)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \times \\ &\times \left(-2C_2 \ln G_c - C_2 \ln G_V + C(R)_{i^j} \ln(G_\phi)_{j^i} / r \right) \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; q \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса было показано, что если выполняется уравнение (3) во всех порядках по теории возмущения, то также будут выполняться (2) и (1). Соотношение (3) было проверено при использовании BRST-инвариантного варианта регуляризации высшими ковариантными производными в трехпетлевом приближении в работе [60] для слагаемых, пропорциональных четвертой степени юкавских констант связи. Полное вычисление β -функции и аномальных размерностей для регуляризации высшими ковариантными производными было проведено на текущий момент только в однопетлевом приближении в работах [59, 61] из-за роста сложности вычисления при увеличении порядка квантовых поправок. С другой стороны, если использовать BRST-неинвариантную регуляризацию высшими ковариантными производными [55, 56, 57, 58], то вычисления в высших петлях упростятся. При такой регуляризации во вкладах от супердиаграмм остаются неинвариантные слагаемые и поэтому дополнительно вводят специальную схему вычитания для того, чтобы сохранить выполнение тождеств Славнова-Тейлора [62, 63] в многопетлевых вычислениях. Примеры таких процедур приведены для несуперсимметричных калибровочных теории в работах [64, 65], а для случая суперсимметрии в [66, 67]. Полная β -функция для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса при использовании BRST-неинвариантного варианта регуляризации высшими ковариантами производными в двухпетлевом приближении была вычислена в работах [55, 56] и записана в виде интегралов от двойных полных производных [57, 58, 68]. С использованием такой регуляризации однопетле-

вые аномальные размерности квантовых полей, определенные в терминах голой константы связи, были вычислены в [69], где они также были сравнены с результатами для β -функции [57]. Тем самым в рассматриваемом порядке теории возмущений было проверено соотношение (3).

Однако стандартные ренормгрупповые функции определены в терминах перенормированных констант связи (см. [70]). При использовании стандартных определений в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса схемная зависимость для β -функции становится существенной начиная с трехпетлевого и аномальных размерностей с двухпетлевого приближений. Для того чтобы NSVZ соотношение выполнялось для таких функции, нужно использовать процедуру (введенную в [54]) для получения NSVZ-схемы. Суть процедуры заключается в регуляризации высшими ковариантными производными и в введении граничных условия (4,5) на константы перенормировки

$$Z_\alpha(\alpha, \lambda, x_0) = 1; \quad Z_\phi(\alpha, \lambda, x_0)_i^j = \delta_i^j; \quad (4)$$

$$Z_c(\alpha, \lambda, x_0) = 1; \quad Z_V = Z_\alpha^{1/2} Z_c^{-1}, \quad (5)$$

где x_0 фиксированное значение для $x = \ln \Lambda/\mu$, Λ - размерный параметр регуляризованной теории и μ - точка перенормировки.

Выше написанные граничные условия для NSVZ-схемы в неабелевой теории были введены аналогично граничным условиям [33, 35, 38] для констант перенормировки в абелевых калибровочных теориях. С помощью аналогичных граничных условия может быть построена NSVZ-схема для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики во всех порядках по теории возмущения, а также NSVZ-схема для аномальной размерности фотино для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики с мягко нарушенной суперсимметрией [71].

На данный момент для неабелевого случая пока еще не доказана справедливость NSVZ соотношения в формах (1), (2) или (3) для ренормгрупповых функции во всех порядках по теории возмущения. Также еще не было дока-

зано, что упомянутая выше процедура перенормировки, включающаяся в себя граничные условия (5) и использование регуляризации высшими ковариантными производными, производит NSVZ схему во всех приближениях по теории возмущения. В этой работе исследуются данные вопросы на двухпетлевом или трехпетлевом уровне вычисления для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса при использовании регуляризации высшими ковариантными производными.

Цель и задачи работы.

Целью работы является вычисление и исследование структуры вкладов в ренормгрупповые функции в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях в высших порядках по теории возмущения при использовании регуляризации высшими ковариантными производными. Задачами для данного исследования являются: проверка для определенных вкладов в ренормгрупповые функции ранее предложенных соотношений, а именно точной NSVZ β -функции (1), а также новой формы NSVZ соотношения (2), которое связывает бета-функцию и аномальные размерности квантовых полей рассматриваемой теории, или, что эквивалентно, в виде NSVZ соотношения для функции Грина квантовых полей данной теории. В частности, рассматриваются вклады в β -функцию и аномальные размерности $\mathcal{N} = 1$ SYM при использовании BRST-инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными, пропорциональные четвертой степени юкавских констант и, отдельно, некоторые вклады, пропорциональные второй степени юкавских констант. Дополнительно изучаются однопетлевые вклады в функции Грина квантовых полей в $\mathcal{N} = 1$ SYM при использовании BRST-неинвариантной регуляризации высшими ковариантными производными. Также в данной работе осуществляется проверка гипотезы того, что при использовании регуляризации высшими производными многопетлевые вклады в бета-функцию действительно определяются интегралами от двойных полных производных. Также производится проверка ранее предложенных граничных условий для констант перенормировки, определяющих NSVZ схему для ренорм-

групповых функций, определенных в терминах перенормированных констант.

Научная новизна работы.

Впервые были вычислены трехпетлевые вклады в бета-функцию в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, пропорциональные четвертой степени юкавских констант, при использовании регуляризации высшими ковариантными производными. Для данных вкладов и соответствующих вкладов в аномальные размерности проверено NSVZ соотношение для β -функции и всех суперполей рассматриваемой теории. При этом для вычислений в рамках теории возмущения использован BRST инвариантный вариант регуляризации высшими ковариантными производными. Также в пределе нулевого внешнего импульса вычислены однопетлевые двухточечные функции Грина всех суперполей для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории при использовании BRST неинвариантного варианта регуляризации высшими ковариантными производными, которые сравниваются с полной двухпетлевой функцией Грина для фонового калибровочного поля, посчитанной ранее в той же регуляризации. Таким образом, впервые была проведена полная двухпетлевая проверка новой формы NSVZ соотношения, которое связывает β -функцию с аномальными размерностями квантовых полей теории.

Объект исследования.

В диссертационной работе исследуется:

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса, взаимодействующая с киральными суперполями материи, при использовании двух вариантов регуляризации высшими ковариантными производными: с сохранением BRST инвариантности и с нарушением BRST инвариантности соответственно.

Методология и методы исследования.

В данной работе использованы методы суперсимметричной квантовой теории поля, включающие в себя метод квантования с использованием фонового поля в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве, методы регуляризации высшими ковариантными производными (дополненными методом Паули-Вилларса для регуляриза-

ции остаточных однопетлевых расходимостей), формализм квантования суперсимметричных теорий с использованием континуального интеграла для записи производящего функционала, метод для записи выражений супердиаграмм с помощью правил Фейнмана, метод перенормировок и ренормгруппы в суперсимметричных моделях квантовой теории поля.

Научные положения, выносимые на защиту.

- Вычислены однопетлевые двухточечные функции Грина всех полей $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса при использовании BRST-инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными, дополненной специальной схемой перенормировки, восстанавливающей справедливость тождества Славнова—Тейлора. Продемонстрирована справедливость новой формы NSVZ соотношения в виде (3) в рассматриваемом приближении после сравнения данных результатов с вычисленной ранее полной двухпетлевой двухточечной функции Грина фонового калибровочного поля. Доказано тем самым для данной теории выполнение NSVZ соотношения (2) для полных вкладов в ренормгрупповые функции до двухпетлевого порядка включительно.
- Показано, что выражения для всех трехпетлевых вкладов в β -функцию, пропорциональных четвертой степени юкавских констант, и для некоторых вкладов, пропорциональных второй степени юкавских констант, при использовании BRST-инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, могут быть представлены в виде интегралов от двойной полной производной в импульсном пространстве. Для данных интегралов произведено сравнение с соответствующими выражениями для петлевых интегралов, определяющих вклады в аномальные размерности суперполей материи. Проверена для данных вкладов явными вычислениями справедливость NSVZ соотношения для ренормгрупповых функции, определенных в тер-

минах голых констант.

- Вычислены вклады в ренормгрупповые функции, определенных в терминах перенормированных констант связи для простейшего примера регуляризирующей функции. Доказано, что NSVZ соотношение в общем случае не удовлетворяется для таких функции. Проведена проверка того, что NSVZ схему действительно определяет ранее предложенная процедура перенормировки, которая состоит в использовании регуляризации высшими ковариантными производными и наложении определенных граничных условия на константы перенормировки.

Теоретическая и практическая значимость.

Полученные результаты для вкладов в бета-функцию, аномальные размерности и функции Грина $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса позволили проверить NSVZ соотношения, связывающие ренормгрупповые функции или функции Грина, для вкладов рассматриваемых структур. В свою очередь проверяемые NSVZ соотношения связаны с теоремами о неперенормировке, играющими важную роль при исследованиях суперсимметричных моделей в рамках квантовой теории поля. В следствии этого полученные в данной работе результаты имеют важную роль для исследовании в суперсимметричных моделях квантовой теории поля вопросов, которые связаны со структурой расходимостей в эффективном действии и условий их сокращения. Кроме того, использование регуляризации высшими ковариантными производными для практических вычислений по теории возмущений позволяет лучше понять, как устроены квантовые поправки в суперсимметричных теориях, а также применимость используемой в этой работе регуляризации для их исследования.

Степень разработанности темы исследования.

Полностью выполнены поставленные в диссертационной работе цели и задачи.

Достоверность и обоснованность результатов.

Достоверность выносимых на защиту диссертационной работы результатов обеспечивается использованием строгих математических методов, используемых в суперсимметричной квантовой теории поля.

Апробация результатов.

Некоторые результаты диссертационной работы были представлены в тезисах и докладах следующих конференций:

- XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов-2017", Секция "Физика", г. Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, 10-14 апреля 2017 // Шахманов В.Ю. "Вклад в трехпетлевую β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса при использовании БРСТ-инвариантной версии регуляризации высшими ковариантными производными, пропорциональный четвертой степени юкавских констант "
- 18th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow State University, Moscow, Russia, 24 – 30 August, 2017 // V.Yu. Shakhmanov "The three-loop contribution to beta-function quartic in the Yukawa couplings for the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Yang-Mills theory with the higher covariant derivative regularization"

Публикации.

Основные результаты, приведенные в диссертации, опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI, в следующих работах:

- Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. Three-loop nsVZ relation for terms quartic in the Yukawa couplings with the higher covariant derivative regularization // Nuclear Physics B. — 2017. — Vol. 920. — P. 345–367.
- Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. New form of the nsVZ relation at the

two-loop level // Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics. — 2018. — Vol. 776. — P. 417–423.

- Kazantsev A. E., Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. New form of the exact nsyz beta-function: the three-loop verification for terms containing yukawa couplings // Journal of High Energy Physics. — 2018. — Vol. 2018, no. 4. — P. 130.

а также в тезисе доклада:

- Шахманов В.Ю. Вклад в трехпетлевую β -функцию N=1 суперсимметричной теории Янга–Миллса при использовании БРСТ-инвариантной версии регуляризации высшими ковариантными производными, пропорциональный четвертой степени юкавских констант // XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов–2017». Секция «Физика». Сборник тезисов. — Физический факультет МГУ, Москва, 2017. — С. 287–289.

Личный вклад автора.

Из результатов совместных работ автором в диссертацию включены результаты, полученные им лично.

Структура, объём и краткое содержание работы.

Данная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и списка литературы. Общий объем диссертации 101 страница. Список литературы включает 85 наименований.

В Введении дан обзор литературы и истории вопросов по тематике работы, обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, обоснована новизна выбранной темы, перечислены основные защищаемые положения, приведена структура работы и краткое содержание.

В главе 1 дается общее описание $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, в том числе описание квантования методом фонового поля, квантовой

и фоновой калибровочной симметрии, также введение регуляризации высшими ковариантными производными и фиксация калибровки, добавление суперполей духов Фаддеева-Попова и Нильсена-Каллош, а также суперполей Паули-Вилларса.

В параграфе 1.1 приводится явно суперсимметричное действие $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, взаимодействующей с суперполями материи, в безмассовом пределе, описывается введение фонового калибровочного поля, излагаются основные симметрии этого действия после добавления фонового калибровочного поля.

В параграфе 1.2 рассматриваются BRST-неинвариантный вариант регуляризации высшими ковариантными производными $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и фиксация калибровки для регуляризованного таким образом действия. Также вводятся для данного варианта регуляризации суперполя духов Фаддеева-Попова и Нильсена-Каллош в пункте 1.2.1, а также суперполя Паули-Вилларса в пункте 1.2.2.

В параграфе 1.3 описывается BRST-инвариантная регуляризация высшими ковариантными производными для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, приводится добавочное слагаемое действия для фиксации калибровки. В пункте 1.3.1 данного параграфа выписаны действия полей духов Фаддеева-Попова и Нильсена-Каллош для использования при BRST-инвариантной регуляризации высшими производными, дается их общее описание. В пункте 1.3.2 рассматривается введение полей Паули-Вилларса.

В параграфе 1.4 для рассматриваемой теории конструируется производящий функционал.

В параграфе 1.5 приводится описание перенормировки $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с суперполями материи, определяются константы перенормировки. В пункте 1.5.1 приведены определения для β -функции и аномальных размерностей квантовых суперполей данной теории.

Глава 2 посвящена проверке NSVZ соотношения для функции Грина в виде

(3) вплоть до двухпетлевого порядка при использовании BRST-неинвариантного варианта регуляризации высшими ковариантными производными.

В параграфе 2.1 приводится полученный в ранних работах результат для двухпетлевой двухточечной функции Грина фонового калибровочного поля, который используется далее для сравнения с соответствующими функциями Грина квантовых суперполей теории в конце главы 2. Также в данном параграфе описываются общие свойства приведенного результата, выписаны соответствующие выражения, и также отмечено, что выражение для β -функции представляется в виде интегралов от двойных полных производных.

В параграфе 2.2 вычислены для рассматриваемой в данной главе регуляризации однопетлевые вклады в двухточечные функции Грина $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса. В пунктах 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 приведены выражения для однопетлевых вкладов в двухточечные функции Грина суперполей материи, духов Фаддеева-Попова, квантового калибровочного поля соответственно, вычисленных при использовании BRST-неинвариантной регуляризации высшими ковариантными производными. Кратко обсуждены свойства этих выражений. В пункте 2.2.3 приводится пример использования специальной схемы перенормировки, восстанавливающей справедливость тождеств Славнова—Тейлора. Данная схема перенормировки позволила избавиться от неинвариантных слагаемых в выражении для функции Грина квантового калибровочного поля.

В параграфе 2.3 проведена проверка NSVZ соотношения между полной двухпетлевой двухточечной функцией Грина фонового калибровочного поля и однопетлевыми функциями Грина квантовых суперполей $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, приводится общее обсуждение данного результата.

Глава 3 посвящена вычислениям в трехпетлевом приближении по теории возмущения вкладов в ренормгрупповые функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с использованием BRST-инвариантного варианта регуля-

ризации высшими ковариантными производными, пропорциональных четвертой степени юкавских констант, и проверке NSVZ соотношения для данных вкладов.

В параграфе 3.1 приводится описание структуры NSVZ соотношения, пропорциональной четвертой степени по юкавским константам в трехпетлевом приближении. В пункте 3.1.1 приведены все суперграфы рассматриваемой в этой главе структуры. В пунктах 3.1.2 и 3.1.4 приведены в иллюстрациях получающиеся из них супердиаграммы. При вычислении выражений для различных супердиаграмм получается вклад рассматриваемой структуры в обе стороны от равенства в формуле NSVZ соотношения. Также в данном пункте изложена графическая интерпретация проверяемого NSVZ соотношения, в том числе методика получения супердиаграмм, из которых путем вычислений получаются искомые вклады в ренормгрупповые функции.

В пункте 3.1.3 приведена сумма выражений супердиаграмм, дающих вклад в β -функцию рассматриваемой структуры. Проверено, что сумма выражений для этих супердиаграмм представляет собой трехпетлевой интеграл от двойной полной производной в импульсном пространстве. Представлено выражение для вклада в β -функцию после взятия интеграла от двойной полной производной, которое представляется уже в виде двухпетлевого интеграла в импульсном пространстве. В пункте 3.1.4 получено выражение для вклада в двухточечную функцию Грина для суперполей материи после вычисления соответствующих супердиаграмм и сравнено с соответствующим выражением для β -функции, полученным в предыдущем пункте 3.1.3. Путем этого сравнения подтверждена справедливость NSVZ соотношения в виде (2), а также в виде (1) для рассматриваемых вкладов в ренормгрупповые функции, определенных через голые константы.

В пункте 3.1.5 приведена связь между перенормированными и голыми юкавскими константами и вычислены с использованием простейшей регуляризующей функции явные выражения для вкладов в β -функцию и аномальную

размерность.

В параграфе 3.2 вычислены ренормгрупповые функции, выраженные через перенормированные константы связи для простейшего примера регуляризующей функции, а также описана процедура перенормировки, восстанавливающая NSVZ схему для данных ренормгрупповых функций.

В пункте 3.2.1 проинтегрировано уравнение для аномальной размерности и получено выражение для логарифма константы перенормировки суперполя материи. С помощью этого выражение вычислено выражение уже для двухпетлевого вклада в аномальную размерность, определенной в перенормированных константах, имеющего максимальный четвертый порядок по степени юкавских констант. Продемонстрировано, что это выражение является схемнонезависимым для вклада рассматриваемой структуры.

В пункте 3.2.2 проинтегрировано уравнение уже для β -функции и получено выражение с максимальной четвертой степенью по юкавским константам, зависящее только от перенормированных юкавских констант. В результате получается равенство, связывающее голую калибровочную константу связи с перенормированной. Путем дифференцирования соответствующих выражений получен вклад в β -функцию, определенной полностью в терминах перенормированных констант. Данный вклад содержит произвольные константы b_2 и g_1 и поэтому является схемозависимым. Проверено, что полученные в этой работе результаты согласуются с результатами работы [28], в которой проведены вычисления в размерной технике, при специальном выборе конечных констант.

В пункте 3.2.3 продемонстрировано, что NSVZ соотношение не выполняется в общем случае для ренормгрупповых функции, определенных через перенормированные константы связи. Тем не менее, в этом же пункте на константы перенормировки наложены предложенные ранее [54] граничные условия, которые вместе с регуляризацией высшими производными определяют проверяемое в этой работе перенормировочное предписание. Таким образом найдены фиксированные значения для констант b_2 и g_1 , определяющих схему перенормиров-

ки. После подстановки этих значений в выражение для вклада в β -функцию, определенную в терминах перенормированных констант, было сравнено это выражение с соответствующим выражением для аномальной размерности. Путем данного сравнения было доказано, что NSVZ соотношение уже справедливо для рассматриваемых вкладов с использованием данной процедуры перенормировки. Тем самым подтверждено сделанное в работе [54] предположение о перенормировочном предписании, которое должно воспроизводить NSVZ схему во всех порядках по теории возмущения.

Глава 4 посвящена вычислениям вкладов, пропорциональных второй степени юкавских констант, в двухточечные функции Грина фонового калибровочного поля в трехпетлевом порядке, суперполей материи и квантового калибровочного поля в двухпетлевом порядке, в случае использования BRST-инвариантного варианта регуляризации высшими ковариантными производными для частного выбора топологии суперграфа, производящего супердиаграммы рассматриваемых вкладов.

В параграфе 4.1 приведен суперграф, определяющий рассматриваемый вклад, а также приведены все получающиеся из него супердиаграммы, сумма которых дает вклад в β -функцию.

В параграфе 4.2 выписано выражение для вклада в функцию Грина фонового калибровочного поля, получающегося после суммирования всех трехпетлевых супердиаграмм рассматриваемой структуры. Данное выражение представляет собой трехпетлевой интеграл от двойной полной производной в импульсном пространстве, что подтверждает сделанное ранее утверждение о таком представлении. Тем самым это позволяет взять один из петлевых интегралов и представить результат уже в виде двухпетлевого интеграла.

В параграфе 4.3 приведены супердиаграммы, представляющие вклады исследуемой структуры в функции Грина суперполей материи и квантового калибровочного поля, либо, что эквивалентно, в соответствующие аномальные размерности.

Параграф 4.4 содержит проверку NSVZ соотношения для функций Грина в виде (3), которое подтверждает, что оно выполняется явно в виде совпадения выражения для петлевых интегралов по обе стороны от знака равенства данного соотношения.

В заключении 4.4 перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В приложении А выписаны явные выражения для супердиаграмм структуры, пропорциональной четвертой степени юкавских констант, полученные при вычислениях с использованием BRST-инвариантной регуляризации высшими производными, описаны их основные свойства и некоторые особенности вычислений.

В приложении Б приведен пример вычисления петлевого интеграла, регуляризованного высшими ковариантными производными.

В приложении В выписаны выражения для супердиаграмм, являющимися квадратичными по юкавским константам, имеющих рассматриваемую структуру и дающих вклад в функцию Грина фонового калибровочного поля или, что эквивалентно, в β -функцию, определенную через голые константы. Также перечислены их основные свойства.

Глава 1

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса и ее регуляризация высшими ковариантными производными

1.1. Действие рассматриваемой теории

Мы будем рассматривать $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную теорию Янга-Миллса. В явном виде выраженное через суперполя в безмассовом пределе действие [72, 73] для этой теории выглядит следующим образом:

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} (e^{2V})_i{}^j \phi_j + \left(\frac{1}{6} \int d^4x d^2\theta \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \text{c.c.} \right), \quad (1.1)$$

где e_0 - голая константа связи, λ_0^{ijk} - константа юкавского взаимодействия. При этом $V = e_0 V^A T^A$ - эрмитова матрица, V^A - вещественные поля, ϕ_i - киральные поля. Так как мы рассматриваем калибровочно инвариантную теорию, то юкавские слагаемые удовлетворяют следующему тождеству

$$\lambda_0^{ijm} (T^A)_m{}^k + \lambda_0^{imk} (T^A)_m{}^j + \lambda_0^{mjk} (T^A)_m{}^i = 0, \quad (1.2)$$

В силу выполнения соотношения (1.2) действие (1.1) инвариантно под действием калибровочных преобразований:

$$\phi_i \rightarrow (e^A)_i{}^j \phi_j; \quad (1.3)$$

$$(e^{2V})_i{}^j \rightarrow (e^{-A^+} e^{2V} e^{-A})_i{}^j. \quad (1.4)$$

При этом обладающий свойством киральности тензор калибровочного поля определен следующим выражением:

$$W_a \equiv \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_a e^{2V}) = e_0 W_a^A t^A. \quad (1.5)$$

Часто калибровочное поле V представляют следующим образом:

$$e^{2V} \equiv e^{+\Omega} e^{\Omega}. \quad (1.6)$$

Для квантовых вычислений в суперсимметричных калибровочных теориях удобно использовать метод фонового поля [74, 75, 76]. Этот метод заключается в введении дополнительного калибровочного поля Ω следующей заменой

$$e^{\Omega} \rightarrow e^{\Omega} e^{\Omega}, \quad (1.7)$$

так что

$$e^{2V} \rightarrow e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega}. \quad (1.8)$$

Далее фоновое калибровочное поле V будем определять таким образом:

$$e^{2V} = e^{\Omega^+} e^{\Omega}. \quad (1.9)$$

Полученная после замены (1.7) теория явным образом инвариантна под действием преобразования фонового калибровочного поля

$$e^{\Omega} \rightarrow e^{iK} e^{\Omega} e^{-A}; \quad (1.10)$$

$$e^{\Omega} \rightarrow e^{\Omega} e^{-iK}; \quad (1.11)$$

$$V \rightarrow e^{iK} V e^{-iK}; \quad (1.12)$$

$$\phi \rightarrow e^A \phi, \quad (1.13)$$

где K - произвольное эрмитовое суперполе и A - киральное суперполе, которое лежит в алгебре Ли калибровочной группы.

Также рассматриваемая теория инвариантна под действием квантовых калибровочных преобразований

$$e^{2V} \rightarrow e^{-A^+} e^{2V} e^{-A}; \quad (1.14)$$

$$\phi \rightarrow e^{-\Omega} e^A e^{\Omega} \phi; \quad (1.15)$$

$$e^{\Omega} \rightarrow e^{\Omega}; \quad (1.16)$$

$$e^{\Omega^+} \rightarrow e^{\Omega^+}. \quad (1.17)$$

Фоновое киральное суперполе \mathcal{A} является параметром квантовых калибровочных преобразований и по определению удовлетворяет условию

$$\bar{\nabla}_{\dot{a}} \mathcal{A} = 0, \quad (1.18)$$

где суперсимметричные фоновые ковариантные производные для калибровочной теории определены следующим образом:

$$\nabla_a = e^{-\Omega^+} D_a e^{\Omega^+}; \quad (1.19)$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{a}} = e^{\Omega} \bar{D}_{\dot{a}} e^{-\Omega}. \quad (1.20)$$

Если суперполе S преобразовывается как $S \rightarrow e^{iK} S$ при фоновых калибровочных преобразованиях, то для суперполя под действием фоновой ковариантной производной закон преобразования будет иметь точно такой же вид, а именно

$$\nabla_a S \rightarrow e^{iK} \nabla_a S.$$

После замены (1.7) тензор суперполя W_a будет иметь следующую форму

$$W_a = \frac{1}{8} e^{-\Omega} \bar{\nabla}^2 (e^{-2V} \nabla_a e^{2V}) e^{\Omega} + \mathbf{W}_a, \quad (1.21)$$

где мы вводим дополнительное обозначение

$$\mathbf{W}_a = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_a e^{2V}). \quad (1.22)$$

Принято фиксировать калибровку и вводить регуляризацию таким образом, чтобы инвариантность (1.13) оставалось ненарушенной. Тогда эффективное действие также будет оставаться инвариантным под действием преобразования (1.13), которое нужно для вычисления RG-функции.

1.2. BRST-неинвариантная регуляризация высшими ковариантными производными

Рассмотрим регуляризацию $\mathcal{N} = 1$ теории Янга-Миллса BRST-неинвариантным образом, добавляя к действию (1.1) следующее слагаемое с высшими ковариантными производными:

$$\begin{aligned} S_\Lambda = & \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^4\theta V \frac{(\nabla_\mu^2)^{n+1}}{\Lambda^{2n}} V + \\ & + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^{*i} \left(e^{\Omega^+} \frac{(\nabla_\mu^2)^m}{\Lambda^{2m}} e^{\Omega} \right)_i^j \phi_j, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где используется обозначения (1.20) для фоновых ковариантных производных. Также мы добавляем следующее слагаемое в действие для фиксации калибровки, инвариантное относительно фоновых калибровочных преобразований:

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{32e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta V (\nabla^2 \bar{\nabla}^2 + \bar{\nabla}^2 \nabla^2) V. \quad (1.24)$$

1.2.1. Поля духов Фаддеева-Попова и Нильсена-Каллош

Для того чтобы зафиксировать калибровку, необходимо также ввести в рассмотрение поля духов Фаддеева-Попова (1.25) и Нильсена-Каллош (1.26).

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(e^{\Omega} \bar{c} e^{-\Omega} + e^{-\Omega^+} \bar{c}^+ e^{\Omega^+} \right) \times \\ \times \left\{ \left(\frac{V}{1 - e^{2V}} \right)_{\text{Adj}} \left(e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+} \right) + \left(\frac{V}{1 - e^{-2V}} \right)_{\text{Adj}} \left(e^{\Omega} c e^{-\Omega} \right) \right\}, \quad (1.25)$$

$$S_{\text{НК}} = \frac{1}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta b^+ e^{\Omega^+} e^{\Omega} b e^{-\Omega} e^{-\Omega^+}. \quad (1.26)$$

1.2.2. Поля Паули-Вилларса

Для того чтобы избавиться от расходимостей в однопетлевом приближении, кроме добавления слагаемого с высшими производными нужно еще ввести детерминанты Паули-Вилларса в производящий функционал:

$$\left(\int D\Phi \exp(iS_{\Phi}) \right)^{-1} \int DB \exp(iS_B) \times \\ \times \prod_{I=1}^K \left(\int D\bar{C}_I DC_I \exp(iS_{C,I}) \right)^{c_I}. \quad (1.27)$$

Здесь коммутирующие суперполя Паули-Вилларса Φ_i с действием:

$$S_{\Phi} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Phi^{*i} \left(e^{\Omega^+} \frac{(\nabla_{\mu}^2)^m}{\Lambda^{2m}} e^{\Omega} + e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \right)_i^j \Phi_j + \\ + \left(\frac{1}{4} M^{ij} \int d^4x d^2\theta \Phi_i \Phi_j + \text{c.c.} \right). \quad (1.28)$$

Данные суперполя определены в представлении R . Также мы предполагаем существование инвариантного массового слагаемого, для которого $M^{ij}M_{jk}^* = \delta_k^i M^2$ с $M = a_\phi \Lambda$, где a_ϕ - константа. Киральные суперполя \bar{C}_I и C_I с $I = 1, \dots, K$ - антикоммутирующие и лежат в присоединенном представлении. Коммутирующее киральное суперполе B также лежит в присоединенном представлении. Действия для этих полей имеют вид:

$$S_{C,I} = \frac{1}{e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(e^\Omega \bar{C}_I e^{-\Omega} + e^{-\Omega^+} \bar{C}_I^+ e^{\Omega^+} \right) \times \\ \times \left\{ \left(\frac{V}{1 - e^{2V}} \right)_{Adj} \left(e^{-\Omega^+} C_I^+ e^{\Omega^+} \right) + \left(\frac{V}{1 - e^{-2V}} \right)_{Adj} \left(e^\Omega C_I e^{-\Omega} \right) \right\} + \\ + \left(\frac{m_{C,I}}{e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^2\theta \bar{C}_I C_I + \text{c.c.} \right); \quad (1.29)$$

$$S_B = \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta B^+ e^{2V} B e^{-2V} + \left(\frac{m_B}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^2\theta B^2 + \text{c.c.} \right). \quad (1.30)$$

Массы полей Паули-Вилларса мы берем пропорциональными параметру Λ ,

$$m_B = a_B \Lambda, \quad m_{C,I} = a_{C,I} \Lambda,$$

где коэффициенты a_B and $a_{C,I}$ некоторые константы, независимые от констант связей. Для того чтобы избавиться от однопетлевых расходимостей, коэффициенты c_I (1.27) должны удовлетворять условиям:

$$1 + \sum_{I=1}^K c_I = 0; \quad \sum_{I=1}^K c_I m_{C,I}^2 = 0. \quad (1.31)$$

Заметим, что регуляризация в виде (1.23) не нарушает фоновую калибровочную инвариантность и ведет к более простым вершинам по сравнению с BRST-инвариантной регуляризацией высшими ковариантными производными, так как регуляризирующее слагаемое (1.23) не содержит квантового калибровочного поля.

1.3. BRST-инвариантная регуляризация высшими ковариантными производными

Квантовые поправки в рассматриваемой теории мы исследуем с использованием двух вариантов регуляризации высшими ковариантными производными. Введем теперь BRST-инвариантный вариант регуляризации с помощью добавления к исходному действию (1.1) слагаемых с высшими ковариантными производными. Регуляризованное таким образом действие примет вид

$$\begin{aligned}
S + S_\Lambda = & \frac{1}{2e_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta \times \\
& \times e^\Omega e^\Omega W^a e^{-\Omega} e^{-\Omega} R\left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2}\right)_{Adj} e^\Omega e^\Omega W_a e^{-\Omega} e^{-\Omega} + \\
& + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{\Omega^+} e^{\Omega^+} F\left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2}\right) e^\Omega e^\Omega \phi + \\
& + \left(\frac{1}{6} \int d^4x d^2\theta \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \text{c.c.}\right), \tag{1.32}
\end{aligned}$$

где мы вводим следующие обозначения для суперсимметричных ковариантных производных для калибровочной теории:

$$\nabla_a = e^{-\Omega^+} e^{-\Omega^+} D_a e^{\Omega^+} e^{\Omega^+}; \tag{1.33}$$

$$\bar{\nabla}_a = e^\Omega e^\Omega \bar{D}_a e^{-\Omega} e^{-\Omega}. \tag{1.34}$$

Нижний индекс Adj указывает, что производные действуют на суперполя в присоединенном представлении следующим образом

$$\left(f_0 + f_1 V + f_2 V^2 + \dots\right)_{Adj} X \equiv f_0 X + f_1 [V, X] + f_2 [V, [V, X]] + \dots \tag{1.35}$$

$R(x)$ и $F(x)$ являются функциями, удовлетворяющим условиям $R(0) = 1$, $F(0) = 1$, а также имеющие полиномиальный рост при $x \rightarrow \infty$.

Слагаемое, фиксирующее калибровку для нашей теории, принято выбирать таким образом:

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{16\xi_0 e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \nabla^2 V K \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right)_{\text{Adj}} \bar{\nabla}^2 V. \quad (1.36)$$

Здесь функция $K(x)$ удовлетворяет условиям $K(0) = 1$, $K(\infty) = \infty$, ξ_0 - константа.

При этом, используя дополнительное поле f , (1.36) можно переписать в виде:

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(16\xi_0 f^+ \left[e^{\Omega^+} K^{-1} \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} \right]_{\text{Adj}} f^+ + e^{\Omega} f e^{-\Omega} \nabla^2 V + e^{-\Omega^+} f^+ e^{\Omega^+} \bar{\nabla}^2 V \right). \quad (1.37)$$

1.3.1. Поля духов Фаддеева-Попова и Нильсена-Каллош

Действие для антикоммутирующих духов Фаддеева-Попова выглядит так же, как и в случае BRST-неинвариантной теории (1.25), а для духов Нильсена-Каллош отличается от (1.26):

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(e^{\Omega} \bar{c} e^{-\Omega} + e^{-\Omega^+} \bar{c}^+ e^{\Omega^+} \right) \times \\ \times \left\{ \left(\frac{V}{1 - e^{2V}} \right)_{\text{Adj}} \left(e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+} \right) + \left(\frac{V}{1 - e^{-2V}} \right)_{\text{Adj}} \left(e^{\Omega} c e^{-\Omega} \right) \right\}, \quad (1.38)$$

$$S_{\text{NK}} = \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta b^+ \left[e^{\Omega^+} K \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} \right]_{\text{Adj}} b. \quad (1.39)$$

Антикоммутирующие суперполя $c = e_0 c^A t^A$, $\bar{c} = e_0 \bar{c}^A t^A$, $b = e_0 b^A t^A$ духов Фаддеева-Попова и Нильсена-Каллош удовлетворяют условию киральности. При этом суперполя духов Нильсена-Каллош взаимодействуют только с фоновым калибровочным полем.

После суммирования всех вкладов, получим полное действие

$$S = S + S_\Lambda + S_{\text{gf}} + S_{\text{FP}} + S_{\text{NK}}, \quad (1.40)$$

которое получается после процедуры фиксации калибровки и является инвариантным относительно преобразований (1.13), под действием которых f и суперполя духов должны преобразовываться как

$$\begin{aligned} f &\rightarrow e^A f e^{-A} = (e^A)_{\text{Adj}} f; & c &\rightarrow (e^A)_{\text{Adj}} c; \\ \bar{c} &\rightarrow (e^A)_{\text{Adj}} \bar{c}; & b &\rightarrow (e^A)_{\text{Adj}} b. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Действие (1.40) не является инвариантным под действием квантовых калибровочных преобразований (1.17). Вместо этого полное действие становится инвариантным при BRST - преобразованиях:

$$\begin{aligned} \delta V &= -\varepsilon \left\{ \left(\frac{V}{1 - e^{2V}} \right)_{\text{Adj}} \left(e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{V}{1 - e^{-2V}} \right)_{\text{Adj}} \left(e^{\Omega} c e^{-\Omega} \right) \right\}; \\ \delta \phi &= \varepsilon c \phi; & \delta \bar{c} &= \varepsilon \bar{D}^2 (e^{-2V} f^+ e^{2V}); \\ \delta \bar{c}^+ &= \varepsilon D^2 (e^{2V} f e^{-2V}); & \delta c &= \varepsilon c^2; & \delta c^+ &= \varepsilon (c^+)^2; \\ \delta f &= \delta f^+ = 0; & \delta b &= \delta b^+ = 0; & \delta \Omega &= \delta \Omega^+ = 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ - антикоммутирующий действительный параметр. В первых двух из этих уравнений параметр \mathcal{A} дается выражением (1.43).

$$\mathcal{A} = \varepsilon e^{\Omega} c e^{-\Omega}; \quad \mathcal{A}^+ = -\varepsilon e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+}. \quad (1.43)$$

Исходя из приведенных выше формул, можно проверить нильпотентность BRST - преобразования. Действительно, равенства $\delta_1 \delta_2 c = 0$ и $\delta_1 \delta_2 \bar{c} = 0$ - очевидны, и

$$\delta_1 \delta_2 e^{2V} = \delta_1 \left(\varepsilon_2 e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+} e^{2V} - e^{2V} \varepsilon_2 e^{\Omega} c e^{-\Omega} \right) = 0. \quad (1.44)$$

Соответственно, мы получаем $\delta_1 \delta_2 V = 0$ и видим, что BRST - преобразования нильпотенты. Используя член, фиксирующий калибровку в виде (1.37) и это свойство, можно легко проверить BRST-инвариантность действия (1.40).

1.3.2. Поля Паули-Вилларса

При вычислении квантовых поправок с использованием регуляризации высшими ковариантными производными остаются расходимости в однопетлевом приближении [77]. Для того чтобы избавиться от оставшихся однопетлевых расходимостей, необходимо в производящий функционал добавить детерминанты Паули-Вилларса [37]. Возможно использовать следующие детерминанты Паули-Вилларса в рассматриваемой теории при использовании BRST инвариантной регуляризации

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{V}, \text{Sources}] &= \\ &= \int DV D\phi Db D\bar{c} Dc \text{Det}(PV, M_\Phi) \text{Det}(PV, M_\varphi)^{-1} \times \\ &\quad \times \exp \left(iS + iS_\Lambda + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{FP}} + iS_{\text{NK}} + iS_{\text{source}} \right), \end{aligned} \quad (1.45)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Det}(PV, M_\Phi) &= \int D\Phi \exp(iS_\Phi), \\ \text{Det}(PV, M_\varphi)^{-1} &= \int D\varphi \exp(iS_\varphi). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Здесь Φ_i - антикоммутирующее поле в том же представлении, что и ϕ_i , три коммутирующих поля φ_f находятся в присоединенном представлении калибровочной группы и действия для полей Паули-Вилларса представлены следующими выражениями

$$\begin{aligned}
S_\Phi &= \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Phi^{*i} \left[e^{\Omega^+} e^{\Omega^+} F \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^\Omega e^\Omega \right]_i^j \Phi_j + \\
&\quad + \left(\frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta (M_\Phi)^{ij} \Phi_i \Phi_j + \text{c.c.} \right); \\
S_\varphi &= \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left\{ \varphi_1^+ \left[e^{\Omega^+} e^{\Omega^+} R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^\Omega e^\Omega \right]_{Adj} \varphi_{1+} \right. \\
&\quad \left. + \varphi_2^+ \left[e^{\Omega^+} e^{2V} e^\Omega \right]_{Adj} \varphi_2 + \varphi_3^+ \left[e^{\Omega^+} e^{2V} e^\Omega \right]_{Adj} \varphi_3 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \left(\int d^4x d^2\theta M_\varphi (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \text{c.c.} \right). \tag{1.47}
\end{aligned}$$

Мы также считаем, что

$$(M_\Phi)^{ji} (M_\Phi^*)_{kj} = M_\Phi^2 \delta_k^i. \tag{1.48}$$

Действия Паули-Вилларса (1.3.2) инвариантны под действием квантовых калибровочных преобразований (1.17), если выполняются соотношения (1.49).

$$\begin{aligned}
\Phi &\rightarrow e^{-\Omega} e^{\mathcal{A}} e^\Omega \Phi; \\
\varphi_f &\rightarrow e^{-\Omega} e^{\mathcal{A}} e^\Omega \varphi_f e^{-\Omega} e^{-\mathcal{A}} e^\Omega = \\
&= (e^{-\Omega} e^{\mathcal{A}} e^\Omega)_{Adj} \varphi_f. \tag{1.49}
\end{aligned}$$

Поэтому они являются также BRST-инвариантными.

Если поле \mathcal{A} взять в виде (1.43), то мы получим BRST-преобразования. Для вычисления трехпетлевого вклада в β -функцию, пропорционального четвертой степени по юкавским константам, достаточно рассматривать только часть регуляризованного действия, включающего в себя слагаемые с суперполями материи.

1.4. Производящий функционал

В общем случае производящий функционал может представлен в виде

$$Z = \int D\mu \exp(iS_{tot} + iS_J), \quad (1.50)$$

при этом S_J - действие для источников и следует иметь в виду, что $\int D\mu$ подразумевает под собой интегрирование по всем суперполям рассматриваемой теории, а выражение для S_{tot} имеет вид

$$S_{tot} = S + S_\Lambda + S_{gf} + S_{FP} + S_{NK} + S_\Phi + S_\phi \quad (1.51)$$

Производящий функционал для связанных функции Грина определяется стандартным способом:

$$W[\mathbf{V}, J] = -i \ln Z[\mathbf{V}, J], \quad (1.52)$$

где J - источники. Эффективное действие $\Gamma[\mathbf{V}, V, \phi, \Phi, \dots]$ получается стандартным способом из производящего функционала для связанных функции путем преобразования Лежандра.

1.5. Ренормгрупповые функции

Известно, что $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса является перенормируемой [78, 79, 80, 81] и расходимости могут быть спрятаны в переопределения констант и суперполей. Согласно теореме о неперенормировке суперпотенциал данной теории не является расходящимся. Учитывая это, мы можем выбрать константы перенормировки в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_0} &= \frac{Z_\alpha}{\alpha}; & \frac{1}{\xi_0} &= \frac{Z_\xi}{\xi}; \\
\mathbf{V} &= \mathbf{V}_R; & V &= Z_V Z_\alpha^{-1/2} V_R; \\
\bar{c}c &= Z_c Z_\alpha^{-1} \bar{c}_R c_R; & \phi_i &= (\sqrt{Z_\phi})_i^j (\phi_R)_j; \\
\lambda^{ijk} &= \lambda_0^{mnp} (\sqrt{Z_\phi})_m^i (\sqrt{Z_\phi})_n^j (\sqrt{Z_\phi})_p^k; & b &= \sqrt{Z_b} b_R,
\end{aligned} \tag{1.53}$$

где α и λ^{ijk} - перенормированные константы связи и юкавские константы соответственно. Перенормированные поля обозначены индексом R . В равенствах (1.53) выше определены константа перенормировки Z_c для духов Фаддеева-Попова, Z_V для квантового калибровочного поля, а Z_α скрывает в себе перенормировку заряда. Фоновое калибровочное поле не перенормируется из-за фоновой калибровочной инвариантности.

В следствии того, что действие для духов Нильсена-Каллош не перенормируется, а также поперечности функции Грина квантового калибровочного поля в следствии тождеств Славнова-Тейлора, мы получаем дополнительные тождества для констант перенормировки $Z_\alpha, Z_b, Z_\xi, Z_V$:

$$Z_\alpha Z_b = 1, \quad Z_\xi Z_V^2 = 1. \tag{1.54}$$

В этой работе мы проверяем соотношение (3) для полной двухпетлевой двухточечной функции Грина фонового калибровочного поля и однопетлевых функции Грина для остальных полей, а также для трехпетлевых вкладов, пропорциональным четвертой или второй степени юкавских констант. Для этой проверки нужно вычислить соответствующие функции Грина. Вычислить их можно через соответствующие вклады (1.55) в эффективное действие.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} &= -\frac{1}{8\pi} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \mathbf{V}(\theta, -p) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(\theta, p) d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) + \\
&+ \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi^{*i}(\theta, -p) \phi_j(\theta, p) G_\phi(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p)_i^j,
\end{aligned} \tag{1.55}$$

где мы обозначаем под $\partial\Pi_{1/2} = -D^a\bar{D}^2D_a/8$ суперсимметричный поперечный проекционный оператор. Перенормированная константа связи $\alpha(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/\mu)$ и константа перенормировки $(Z_\phi)_m^i$ определены требованием конечности выражения

$$\begin{aligned} & d^{-1}\left(\alpha_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \lambda_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \Lambda/p\right); \\ & (Z_\phi)_i^j (G_\phi)_j^k \left(\alpha_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \lambda_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \Lambda/p\right), \end{aligned} \quad (1.56)$$

которые рассматриваются как функции от α , λ , μ/p и Λ/p при пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Тогда константа перенормировки получается из определения

$$Z_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0}. \quad (1.57)$$

Выражения для функции Грина квантового калибровочного поля и функции Грина духов Фаддеева-Попова мы можем получить, рассматривая соответствующие вклады (1.58) в эффективное действие. При этом согласно тождеству Славнова-Тейлора вклад от квантового калибровочного поля должен быть поперечным:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} = \\ & -\frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4\theta V(q, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(-q, \theta) G_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) + \\ & + \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4\theta \left(-\bar{c}(q, \theta) c^+(-q, \theta) + \right. \\ & \left. + \bar{c}^+(q, \theta) c(-q, \theta) \right) G_c(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Константы перенормировки Z_V и Z_c могут быть получены, если мы потребуем конечность следующих выражений при $\Lambda \rightarrow \infty$.

$$Z_V^2 G_V \left(\alpha_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \lambda_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \Lambda/p \right) \quad \text{и} \\ Z_c G_c \left(\alpha_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \lambda_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu), \Lambda/p \right) \quad (1.59)$$

1.5.1. Определения ренормгрупповых функции

Приведем используемые в этой работе определения для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи. Изначально β -функция определяется в терминах голых констант связи согласно следующей процедуре

$$\beta(\alpha_0, \lambda_0) = \left. \frac{d\alpha_0(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \lambda = \text{const}}, \quad (1.60)$$

где производная вычисляется при фиксированных значениях перенормированных константы связи α и юкавских констант λ . Эту величину можно также выразить через константу перенормировки константы связи равенством

$$\beta(\alpha_0, \lambda_0) = -\alpha_0 \left. \frac{d \ln Z_\alpha}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \lambda = \text{const}}. \quad (1.61)$$

Для вычисления такой β -функции удобно использовать выражение

$$\left. \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \right|_{p=0} = -\frac{d\alpha_0^{-1}(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} = \frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2}. \quad (1.62)$$

Аномальные размерности мы определим в терминах голых констант связи следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
(\gamma_\phi)_i^j(\alpha_0, \lambda_0) &\equiv - \frac{d \ln(Z_\phi)_i^j(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}} = & (1.63) \\
&= \frac{d \ln(G_\phi)_i^j(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p=0}, \\
\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0) &\equiv - \frac{d \ln Z_c(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}} = \\
&= \frac{d \ln G_c(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p=0}, \\
\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) &\equiv - \frac{d \ln Z_V(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{d \ln G_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p=0}.
\end{aligned}$$

Известно, что такие ренормгрупповые функции являются схемнонезависимыми. С другой стороны, они зависят от типа используемой регуляризации.

Глава 2

NSVZ соотношение для двухпетлевой β -функции при использовании BRST-неинвариантной регуляризации

2.1. Двухпетлевая двухточечная функция Грина фонового калибровочного поля

Проверим NSVZ соотношение в виде (3) для функции Грина, вычисленных с использованием BRST-неинвариантной регуляризации высшими ковариантными производными. Для начала возьмем уже полученный в [56, 57] результат для двухпетлевой двухточечной функции Грина фонового калибровочного поля. В силу ненарушенной фоновой калибровочной инвариантности соответствующая часть эффективного действия может быть представлена в виде

$$\Gamma_{\mathbf{V}}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \mathbf{V}(p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(-p, \theta) d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p). \quad (2.1)$$

В этом уравнении коэффициент выбран таким образом, чтобы функция $d(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p)$ совпадала с $\alpha_0 = e_0^2/4\pi$ в древесном приближении. Тогда в двухпетлевом приближении упомянутый выше результат выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p \rightarrow 0} = \\
& = C_2 (I_{\text{FP}} + I_{\text{NK}}) + T(R) I_0 + \alpha_0 (C_2)^2 I_1 + \\
& + \frac{\alpha_0}{r} \text{tr} (C(R)^2) I_2 + \alpha_0 C_2 T(R) I_3 + C(R)_i^j \frac{\lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^*}{4\pi r} I_4 + \\
& + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2, \lambda_0^4). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Мы будем записывать интегралы в евклидовом пространстве, используя обозначения

$$F_q \equiv 1 + \frac{q^{2m}}{\Lambda^{2m}}; \quad R(q) \equiv 1 + \frac{q^{2n}}{\Lambda^{2n}}. \tag{2.3}$$

Однопетлевые вклады I_{FP} , I_{NK} , и I_0 получаются из супердиаграмм с петлей духов или материальных суперполей и могут быть легко посчитаны

$$I_{\text{FP}} = 2\pi \sum_{I=1}^K c_I \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\frac{1}{q^2} \ln \left(1 + \frac{m_{C,I}^2}{q^2} \right) \right] = -\frac{1}{\pi}; \tag{2.4}$$

$$I_{\text{NK}} = -\pi \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\frac{1}{q^2} \ln \left(1 + \frac{m_B^2}{q^2} \right) \right] = -\frac{1}{2\pi}; \tag{2.5}$$

$$I_0 = \pi \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\frac{1}{q^2} \ln \left(1 + \frac{M^2}{q^2 F_q^2} \right) \right] = \frac{1}{2\pi}. \tag{2.6}$$

Эти вклады дают первое слагаемое в правой части уравнения (3).

Двухпетлевые вклады в β - функцию даются интегралами

$$I_1 = -12\pi^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\frac{1}{k^2 R_k q^2 R_q (q+k)^2 R_{q+k}} \right]; \quad (2.7)$$

$$I_2 = 8\pi^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\frac{1}{k^2 R_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k}} - \frac{F_q F_{q+k}}{k^2 R_k (q^2 F_q^2 + M^2) ((q+k)^2 F_{q+k}^2 + M^2)} \right]; \quad (2.8)$$

$$I_3 = 8\pi^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{(k+q)^2 R_{k+q} q^2 F_q k^2 F_k} - \frac{F_q F_k}{(k+q)^2 R_{k+q} (q^2 F_q^2 + M^2) (k^2 F_k^2 + M^2)} \right]; \quad (2.9)$$

$$I_4 = -8\pi^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\frac{1}{k^2 F_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k}} \right]. \quad (2.10)$$

Все они являются интегралами от двойных полных производных. Это позволяет взять один из петлевых интегралов в импульсном пространстве, так что мы можем переписать их в виде

$$I_1 = -6 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^4 R_k^2}; \quad (2.11)$$

$$I_2 = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^4 F_k R_k}; \quad (2.12)$$

$$I_3 = 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{1}{k^4 F_k^2} - \frac{F_k^2}{(k^2 F_k^2 + M^2)^2} \right]; \quad (2.13)$$

$$I_4 = -4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^4 F_k^2}. \quad (2.14)$$

Эти интегралы могут быть легко подсчитаны (см. [57]), но мы не будем делать этого, потому что мы хотели бы проверить соотношение (3) на уровне интегралов. Используя выражения (2.11)-(2.14) и (2.2) левая часть уравнения (3) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \right|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p \rightarrow 0} = -\frac{3C_2 - T(R)}{2\pi} + \\
& + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[- (C_2)^2 \frac{6\alpha}{R_k^2} + \text{tr} \left(C(R)^2 \right) \frac{4\alpha}{r F_k R_k} + \right. \\
& + 2\alpha C_2 T(R) \left(\frac{1}{F_k^2} - \frac{k^4 F_k^2}{(k^2 F_k^2 + M^2)^2} \right) - C(R)_i^j \frac{\lambda^{imn} \lambda_{jmn}^*}{\pi r F_k^2} \left. \right] \\
& + O(\alpha^2, \alpha \lambda^2, \lambda^4), \tag{2.15}
\end{aligned}$$

где мы учли, что $\alpha_0 = \alpha + O(\alpha^2)$ и $\lambda_0^{ijk} = \lambda^{ijk} + O(\alpha \lambda, \lambda^3)$.

Сравним это выражение с однопетлевыми двухточечными функциями Грина квантового калибровочного поля, духов Фаддеева-Попова и суперполей материи. Функции G_V , G_c , и $(G_\phi)_j^i$ связаны с соответствующими вкладами в эффективное действие следующим выражением

$$\begin{aligned}
& \Gamma^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} = \\
& = -\frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta V(q, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(-q, \theta) G_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) + \\
& + \frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left(-\bar{c}(q, \theta) c^+(-q, \theta) + \bar{c}^+(q, \theta) c(-q, \theta) \right) G_c(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) + \\
& + \frac{1}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi^{*j}(q, \theta) \phi_i(-q, \theta) (G_\phi)_j^i(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) + \dots, \tag{2.16}
\end{aligned}$$

где многоточие обозначает другие части в эффективном действии, квадратичные по полям. Согласно этому определению, в древесном приближении

$$G_V = 1 + O(\alpha_0); \quad G_c = 1 + O(\alpha_0); \quad (G_\phi)_i^j = \delta_i^j + O(\alpha_0, \lambda_0^2). \tag{2.17}$$

Заметим, что двухточечная функция Грина квантового калибровочного поля является поперечной. Это следует из тождеств Славнова-Тейлора [62, 63] и уравнении Швингера-Дайсона для духов Фаддеева-Попова. Однако регуляризация, используемая здесь для вычисления двухпетлевой функции Грина фонового калибровочного поля и однопетлевых функции Грина, нарушает BRST

инвариантность полного действия. Поэтому тождества Славнова-Тейлора выполняются только после специальной процедуры перенормировки, сделанной согласно предписанию, предложенному в работе [67]. В частности, двухточечная функция Грина квантового калибровочного суперполя будет поперечной только после этой процедуры. Ниже мы продемонстрируем это явными вычислениями.

2.2. Однопетлевые двухточечные функции Грина

Вычислим для рассматриваемого варианта регуляризации высшими ковариантными производными производные функции $(G_\phi)_j^i$, G_c , и G_V по $\ln \Lambda$ в пределе нулевого внешнего импульса. Ранее такое вычисление для одного порядка по теории возмущения было проделано с BRST-инвариантной регуляризацией высшими ковариантными производными в работе [59], но здесь важно, что различные функции Грина были получены с тем же методом регуляризации, что использовался ранее в работе [56, 57], результатами которой мы воспользовались в нашей работе.

2.2.1. Однопетлевая двухточечная функция Грина суперполей материи

Однопетлевая двухточечная функция Грина суперполей материи получается вычислением супердиаграмм, представленных на Рис. 2.1. Это вычисление дает следующее выражение

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \ln \Lambda} \ln(G_\phi)_j^i \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; q \rightarrow 0} = \\
& = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-C(R)_j^i \frac{8\pi\alpha_0}{k^4 F_k R_k} + \lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^* \frac{2}{k^4 F_k^2} \right) + \\
& \quad + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2, \lambda_0^4). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

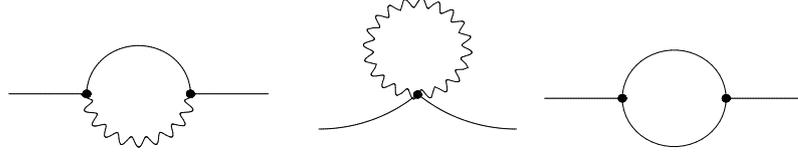


Рис. 2.1. Супердиаграммы, дающие вклады в однопетлевом приближении в двухточечные функции Грина суперполей материи.

2.2.2. Двухточечная функция Грина духов Фаддеева-Попова в однопетлевом приближении

Супердиаграммы, дающие ненулевой вклад в однопетлевую двухточечную функцию Грина духов Фаддеева-Попова, представлены на Рис. 2.2. В фейнмановской калибровке $\xi = 1$, которая используется для вычисления в этой работе, их сумма равна нулю в пределе нулевого внешнего импульса в рассматриваемом приближении.

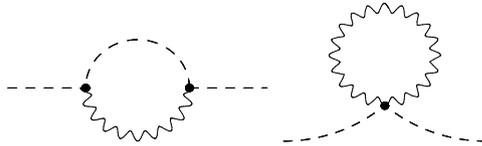


Рис. 2.2. Супердиаграммы, дающие вклад в однопетлевую двухточечную функцию Грина духов Фаддеева-Попова.

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \ln G_c \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; q \rightarrow 0} = O(\alpha_0^2). \tag{2.19}$$

2.2.3. Однопетлевая двухточечная функция Грина квантового калибровочного поля

Супердиаграммы, представленные на Рис. 2.3, дают вклад в двухточечную функцию Грина квантового калибровочного поля в однопетлевом приближении. Результат для них записывается в виде двух частей в соответствующем вкладе в эффективное действие

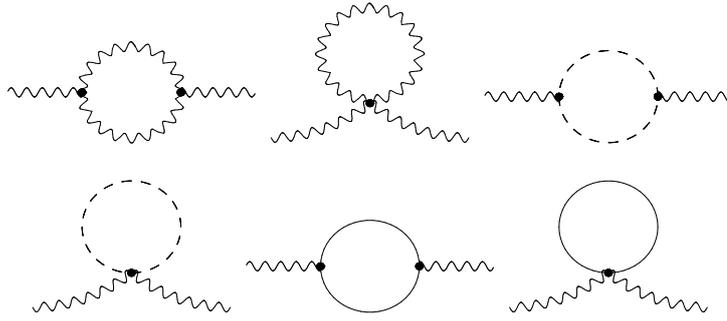


Рис. 2.3. Супердиаграммы, дающие вклад в функцию Грина квантового калибровочного поля V в однопетлевом приближении.

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_V^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} = \\
 & = -\frac{1}{2e_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4\theta \left(V(q, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(-q, \theta) G_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) + \right. \\
 & \quad \left. + V(q, \theta) V(-q, \theta) \tilde{G}_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) \right). \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

В отличие от уравнения (2.16), полученная из этого соотношения функция Грина не является поперечной. Это является следствием нарушения BRST инвариантности используемой для данных вычисления регуляризации. Следовательно, тождества Славнова-Тейлора также нарушены и двухточечная функция Грина квантового калибровочного суперполя более не является поперечной. Явно вычисляя супердиаграммы, представленные на Рис. 2.3, мы получим то, что неинвариантная часть двухточечной функции (2.20) в пределе нулевого внешнего импульса записывается в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_V \Big|_{q \rightarrow 0} &= -8\pi\alpha_0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{6} C_2 \left(\frac{1}{k^2} + \right. \right. \\
&+ \sum_{I=1}^K c_I \frac{1}{k^2 + m_{C,I}^2} - \frac{1}{k^2 R_k} \Big) + T(R) \frac{(F_k - 1)M^2}{k^2 F_k^2 (k^2 F_k^2 + M^2)} \Big] + \\
&+ O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2) \equiv e_0^2 \Lambda^2 g_V + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Для $m \geq 1$ и $n > 1$ этот интеграл является сходящимся в следствии условия (1.31), поэтому (для конечного Λ) g_V - конечная числовая константа.

Согласно работам [64, 65] можно построить из результата, полученного с неинвариантной регуляризацией, функции Грина, удовлетворяющие тождествам Славнова-Тейлора с помощью специального алгоритма. В суперсимметричном случае такой алгоритм описан в работе [66] для абелева случая и в работе [67] для неабелева случая. Первый шаг этого алгоритма заключается в удалении неинвариантных слагаемых, пропорциональных $V(q, \theta)V(-q, \theta)$ из двухточечной функции Грина квантового калибровочного суперполя и в сохранении только инвариантных слагаемых, пропорциональных $V(q, \theta)\partial^2\Pi_{1/2}V(-q, \theta)$. Следовательно, тождества Славнова-Тейлора (в этом случае, поперечность рассматриваемой функции Грина) удовлетворяются перенормированной функцией Грина. Легко продемонстрировать, что такая процедура эквивалентна добавлению следующего неинвариантного контрчлена

$$\Delta S = \frac{1}{2} g_V \Lambda^2 \text{tr} \int d^4x d^4\theta V^2, \tag{2.22}$$

который появляется благодаря использованию неинвариантной регуляризации.

Инвариантная часть функции (2.20) является логарифмически расходящейся в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. После вычисления супердиаграмм, представленных на Рис. 2.3, мы получим для инвариантной части двухточечной функции Грина квантового калибровочного поля

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \ln G_V \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; q \rightarrow 0} &= \pi \alpha_0 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[-\frac{12C_2}{k^4 R_k^2} + \right. \\ &\left. + T(R) \left(\frac{4}{k^4 F_k^2} - \frac{4F_k^2}{(k^2 F_k^2 + M^2)^2} \right) \right] + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3. Соотношение между двухточечными функциями

Грина

Таким образом, слагаемые, содержащие различные $\ln G$ в правой части уравнения (3), могут быть записаны как

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-2C_2 \ln G_c - C_2 \ln G_V + C(R)_i^j \ln(G_\phi)_j^i / r \right) \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; q \rightarrow 0} = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[- (C_2)^2 \frac{6\alpha}{R_k^2} + 2\alpha C_2 T(R) \left(\frac{1}{F_k^2} - \frac{k^4 F_k^2}{(k^2 F_k^2 + M^2)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} (C(R)^2) \frac{4\alpha}{r F_k R_k} - C(R)_i^j \frac{\lambda^{imn} \lambda_{jmn}^*}{\pi r F_k^2} \right] + O(\alpha^2, \alpha \lambda^2, \lambda^4). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (2.15), мы видим, что NSVZ-подобное уравнение (3), связывающее двухточечные функции, действительно выполняется в рассматриваемом приближении при использовании рассматриваемого варианта регуляризации высшими ковариантными производными. Заметим, что равенство выполняется для петлевых интегралов в случае использования произвольных параметров m и $n > 1$. Таким образом, предположение, сделанное в работе [54], в данном случае действительно верно и может быть использовано для вывода NSVZ соотношения и построения NSVZ схемы в неабелевом случае.

Мы проверили соотношение (3) для наиболее общей $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной перенормируемой калибровочной теории, сравнивая двухпетлевую двухточечную функцию Грина фонового калибровочного суперполя с однопетлевыми двухточечными функциями Грина квантового калибровочного поля, духов

Фаддеева-Попова и суперполей материи. Для того чтобы проверить это, мы использовали BRST неинвариантный вариант регуляризации высшими ковариантными производными, дополненный схемой вычитания, которая восстанавливает тождества Славнова-Тейлора. Эта регуляризация была выбрана, потому что в этом случае все интегралы, определяющие бегущую константу связи, были подсчитаны ранее. После вычисления однопетлевых двухточечных функции Грина квантовых полей, перечисленных выше, мы проверили то, что соотношение (3) действительно выполняется. Это говорит в пользу предположения, сделанного в работе [54], о том, что это соотношение выполняется во всех порядках и может быть использовано как стартовая точка для вывода NSVZ соотношения (1) вычислением суммы супердиаграмм. Тем не менее, крайне желательно проверить соотношение (3) в случае использования BRST инвариантной версии регуляризации высшими ковариантными производными. Такая проблема является более сложной с технической точки зрения из-за более сложных структур, возникающих при вычислении диаграмм. Это существенно усложнит вычисления даже двухпетлевой β -функции. Однако, мы далее в этой работе проведем проверку соотношения (3) для слагаемых, дающих вклад в трехпетлевом приближении, пропорциональный четвертой степени юкавских констант и вычисленных с использованием BRST инвариантного варианта регуляризации высшими ковариантными производными. Также мы проверим NSVZ соотношение для некоторых вкладов, пропорциональных второй степени юкавских констант, в ренормгрупповые функции, определенных в терминах голых констант, которые соответствуют некоторому специальному выбору топологии суперграфов.

Глава 3

Проверка NSVZ соотношения для слагаемых, пропорциональных четвертой степени юкавских констант

Проверим NSVZ соотношение в виде (2) в трехпетлевом приближении для вкладов в ренормгрупповые функции, вычисленных с использованием BRST-инвариантного варианта регуляризации высшими ковариантными производными и пропорциональных четвертой степени юкавских констант. Таким образом регуляризованное действие $\mathcal{N} = 1$ SYM записывается в виде (1.32). Вклады в β -функцию и аномальные размерности суперполей материй вычисляются в трехпетлевом и двухпетлевом приближениях соответственно.

3.1. Структура NSVZ соотношения, пропорциональная четвертой степени по юкавским константам

3.1.1. Суперграфы рассматриваемой структуры

В этой работе мы исследуем слагаемые в NSVZ соотношении, пропорциональные четвертой степени по юкавским константам связи (без калибровочной константы связи). Ниже мы покажем, что для вычисления их также необходимо знать двухпетлевые слагаемые, квадратичные по юкавским константам и не содержащие в себе калибровочную константу связи. Все слагаемые, упомянутые выше, относятся к одному двухпетлевому суперграфу и к двух трехпетлевым

суперграфам, представленных на Рис. 3.1.

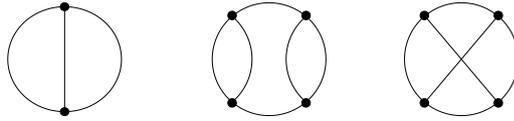


Рис. 3.1. Искомые супердиаграммы получаются добавлением двух внешних линии фонового калибровочного поля к двум первым суперграфам. Последний суперграф дает нулевой вклад в безмассовом пределе.

Однако, в безмассовом пределе последний суперграф дает нулевой вклад. Действительно, в безмассовом пределе каждый пропагатор должен получаться из кирального поля на одном конце и в то же время из антикирального поля на другом. Пропагатор в такой теории, получающийся из полей одинаковой киральности на концах, равен нулю. Каждая вершина в последнем суперграфе соединена с тремя другими вершинами тремя пропагаторами. Легко увидеть, что для этого суперграфа обеспечить соединение всех вершин только ненулевыми пропагаторами невозможно. Расположение киральных и антикиральных вершин для других суперграфов показано на Рис. 3.2. Эти два суперграфа дают нетривиальный вклад в безмассовом пределе для суперполей материи.

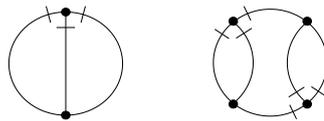


Рис. 3.2. Здесь мы отметили киральные концы пропагаторов для суперграфов, дающих ненулевой вклад в безмассовом пределе.

3.1.2. Супердиаграммы для рассматриваемых вкладов в ренормгрупповые функции

Для того чтобы получить супердиаграммы, дающие рассматриваемый вклад в β -функцию, как было объяснено выше, необходимо присоединить две внешние линии фонового калибровочного поля V к суперграфам, представленным

на Рис. 3.2, всеми возможными способами. Это даст нам три двухпетлевые супердиаграммы, представленные на Рис. 3.3 и восемь трехпетлевых супердиаграмм, представленных на Рис. 3.4.

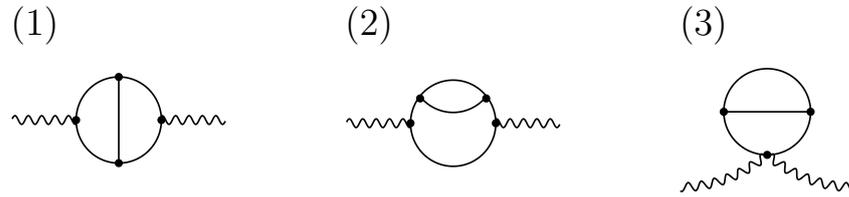


Рис. 3.3. Супердиаграммы, дающие двухпетлевой квадратичный по юкавским константам вклад в β -функцию. Внешние волнистые линии относятся к фоновому калибровочному полю V .

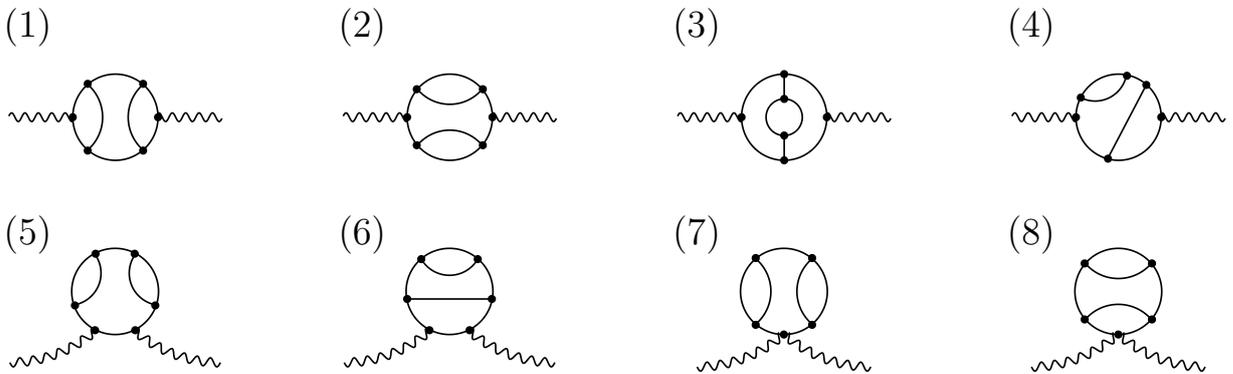


Рис. 3.4. Эти супердиаграммы дают трехпетлевой вклад, пропорциональный четвертой степени по юкавским константам, в β -функцию.

Их вклад нужно сравнить с вкладом в аномальную размерность суперполей материи, который получается из супердиаграмм, полученных всеми возможными разрезами графов, представленных на Рис. 3.3. Естественно, необходимо учесть вклад только от одночастичнонеприводимых диаграмм, которые представлены на Рис. 3.5, потому что только такие супердиаграммы дают вклад в эффективное действие.

Заметим, что разрез линии материи в третьем суперграфе (нулевом в безмассовом пределе) дает только одну представленную на Рис. 3.6 супердиаграмму.

Можно достаточно легко проверить, что в безмассовом пределе выражение для

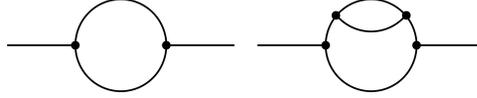


Рис. 3.5. Эти диграммы дают однопетлевой и двухпетлевой вклады в аномальную размерность суперполей материи, квадратичные и пропорциональные четвертой степени по юкавским константам связи

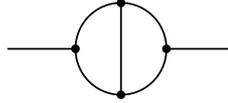


Рис. 3.6. Данная супердиаграмма получается путем разрезания линии материи в последнем суперграфе на Рис. 3.1. Легко видеть, что эта супердиаграмма дает нулевой вклад в аномальную размерность по тем же причинам, по которым изначальный суперграф является нулевым.

этой супердиаграммы равно нулю, и таким образом она не дает вклад в аномальную размерность.

Начнем рассмотрение квантовых поправок с супердиаграмм, представленных на Рис. 3.3 и Рис. 3.4. Вычислим их вклад в β -функцию, определенную в терминах голой константы связи,

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2}. \quad (3.1)$$

Дифференцирование по $\ln \Lambda$ в этом выражении должно быть сделано при фиксированных значениях перенормированных юкавских констант и констант связи. В то же самое время результат должен быть выражен через голые константы связи. Заметим, что также необходимо взять предел при $p \rightarrow 0$, где p - внешний импульс. Для того чтобы избавиться от конечных слагаемых, пропорциональных $(p/\Lambda)^k$, где k - натуральное число.

3.1.3. Вклад в β -функцию

Результаты для вкладов от всех супердиаграмм, представленных на Рис. 3.3 и Рис. 3.4, в эффективное действие в пределе нулевого внешнего импульса собраны в приложении А. Их сумма является поперечной, как должно быть в следствии сохранения фоновой калибровочной инвариантности. Также оказывается, что сумма выражении для этих супердиаграмм представляет собой интеграл от двойной полной производной в импульсном пространстве. В частности, вклад рассматриваемых суперграфов в выражение (3.1) может быть записан в следующем виде ¹

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} &= -\frac{2\pi}{r} C(R)_{i^j} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^* \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{1}{k^2 F_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k}} \right) + \\ &+ \frac{4\pi}{r} C(R)_{i^j} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k^\mu} - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) + \right. \\ &\left. + 2\lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \frac{1}{k^2 F_k^2 q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k} l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где производная по $\ln \Lambda$ вычисляется при фиксированных значениях перенормированных юкавских констант. ² Для того чтобы записать полную β -функцию, необходимо добавить однопетлевой вклад и вклады от других суперграфов, которые не были рассмотрены в этой работе. Результат может быть представлен в виде

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) + \frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6), \quad (3.3)$$

где $O(\alpha_0)$ обозначает члены, пропорциональные α_0 (включая те, которые появляются в двухпетлевом приближении), и $O(\lambda_0^6)$ обозначает слагаемые высших порядков, пропорциональные юкавским константам выше шестой степени.

¹ Для простоты, мы не включаем однопетлевой вклад в это выражение.

² Заметим, что в выражении (3.2) нет вкладов от полей Паули-Вилларса, потому что для рассматриваемой регуляризации [59] нет тройных вершин, которые содержат в себе суперполя Паули-Вилларса.

Двухпетлевая часть результата совпадает с выражением, полученным в работах [82, 55] для частного выбора $F(x) = 1 + x^m$ и для другого варианта регуляризации высшими производными³, которое было записано как интеграл от двойной полной производной в [57].

Выражение (3.2) не является нулевым из-за сингулярностей интегрируемой функции. Простым примером это может быть проиллюстрировано следующим образом

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{q^\mu}{q^4} f(q^2) \right) = -\frac{1}{8\pi^2} f(0), \quad (3.4)$$

где мы предполагаем то, что функция $f(q^2)$ не является сингулярной и стремится к нулю на бесконечности. Вычисляя один из петлевых интегралов в формуле (3.2) с помощью подобного способа, мы получим, что рассматриваемая часть β -функции может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = & \frac{1}{\pi r} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[-\lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} + \right. \\ & + \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2 l^4 F_l^2} + \\ & \left. + 4 \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^3 l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} \right]. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Заметим, что этот интеграл является хорошо определенным в следствии взятия производной по $\ln \Lambda$, которое производится перед интегрированием. Ниже это будет продемонстрировано.

3.1.4. Вклад в двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи и NSVZ соотношение

Сравним теперь выражение (3.5) с соответствующим вкладом в аномальную размерность, который получается от супердиаграмм, представленных на

³ Для рассматриваемых слагаемых различие в регуляризациях несущественно.

Рис. 3.5. После вычисления супердиаграмм на Рис. 3.5 было получено следующее выражение для вклада в двухточечную функцию Грина для суперполей материи:

$$\begin{aligned}
& G_\phi(\alpha_0, \lambda_0, p/\Lambda)_j^i = \\
& = \delta_j^i + \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^2 F_k (k+p)^2 F_{k+p}} - \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \times \\
& \quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{8}{k^2 F_k^2 (k+p)^2 F_{k+p} l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} + \\
& \quad + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Взяв логарифм данного выражения и продифференцировав по $\ln \Lambda$ в пределе нулевого внешнего импульса, мы получим аномальную размерность, определенную в терминах голых констант,

$$\gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i = - \frac{d(\ln Z_\phi)_j^i}{d \ln \Lambda} = \frac{d(\ln G_\phi)_j^i}{d \ln \Lambda} \Big|_{p=0}. \tag{3.7}$$

С помощью этой формулы мы получаем рассматриваемую часть аномальной размерности в форме суммы всех петлевых супердиаграмм,

$$\begin{aligned}
\Delta \gamma_\phi(\lambda_0)_j^i & = \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^4 F_k^2} - \right. \\
& - \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^4 F_k^2 l^4 F_l^2} - \\
& \left. - \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{8}{k^4 F_k^3 l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} \right). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Полное выражение для аномальной размерности должно включать члены, пропорциональные α_0 , начиная с однопетлевого приближения, и члены, пропорциональные λ_0^6 , начиная с трехпетлевого приближения,

$$\gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_i^j = \Delta \gamma_\phi(\lambda_0)_i^j + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \tag{3.9}$$

Выражение (3.8) нужно сравнить с уравнением (3.5). Точно также, как в (3.5), производная по $\ln \Lambda$ должна быть вычислена при фиксированных значениях перенормированных юкавских констант λ . Более того, легко увидеть, что интегралы совпадают вплоть до некоторого множителя,

$$\frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi r} C(R)_{i^j} \Delta\gamma_\phi(\lambda_0)_{j^i}. \quad (3.10)$$

Это означает, что NSVZ соотношение (2), и, следовательно, (1), действительно выполняется для вкладов в ренормгрупповые функции, определенных в терминах голой констант, для рассматриваемых групп супердиаграмм в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными.

3.1.5. Явные выражения для вкладов в ренормгрупповые функции

Вычислим рассматриваемый вклад в аномальную размерность для простейшей регуляризующей функции

$$F(k^2/\Lambda^2) = 1 + k^2/\Lambda^2. \quad (3.11)$$

Согласно (3.10) мы также вычислим и явное выражение для рассматриваемого вклада в β - функцию, определенную в терминах голых констант. Более того, это вычисление позволит продемонстрировать, что мы выше действительно имеем дело с хорошо определенными выражениями.

Во-первых, мы выразим голые юкавские константы в терминах перенормированных констант. Вследствие отсутствия расходящихся квантовых поправок к суперпотенциалу [1] перенормировка юкавских констант связана с перенормировкой суперполей материи. Следовательно, естественно выбрать схему вычитания, в которой

$$\lambda_0^{ijk} = \lambda^{mnp} (Z_\phi^{-1/2})_m^i (Z_\phi^{-1/2})_n^j (Z_\phi^{-1/2})_p^k. \quad (3.12)$$

В этой работе вычисляется часть аномальной размерности, которая не содержит в себе калибровочную константу. Поэтому мы заинтересованы только в слагаемых, независимых от α . В однопетлевом приближении такие слагаемые в константе перенормировки суперполя материи имеют вид

$$(Z_\phi)_j^i = \delta_j^i - \frac{1}{4\pi^2} \lambda^{imn} \lambda_{jmn}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + O(\alpha) + O(\lambda^4). \quad (3.13)$$

Конечная константа g_1 появляется благодаря произвольности выбора схемы вычитания в рассматриваемом приближении. Подставляя равенство (3.13) в (3.12) мы связываем голые юкавские константы с перенормированными,

$$\begin{aligned} \lambda_0^{ijk} = & \lambda^{ijk} + \frac{1}{8\pi^2} \left(\lambda^{ijm} \lambda_{mab}^* \lambda^{kab} + \lambda^{imk} \lambda_{mab}^* \lambda^{jab} + \right. \\ & \left. + \lambda^{mjk} \lambda_{mab}^* \lambda^{iab} \right) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + O(\alpha\lambda) + O(\lambda^5). \end{aligned} \quad (3.14)$$

С помощью этого соотношения мы выразим аномальную размерность (3.8) в терминах перенормированных юкавских констант, на которые производная по $\ln \Lambda$ не действует,

$$\begin{aligned} \gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i = & \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\lambda^{iab} \lambda_{jab}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^4 F_k^2} - \right. \\ & - 2\lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} - \frac{1}{4\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\} - \\ & - 8\lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{F_k l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\} \right) + O(\alpha) + O(\lambda^6). \end{aligned} \quad (3.15)$$

В этом выражение слагаемое, пропорциональное $\lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^*$, может быть вычислено для произвольной функции $F(k^2/\Lambda^2)$, для которой $F(0) = 1$ и $F^{-1}(\infty) = 0$. Для этого мы заметим, что соответствующий интеграл может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} - \frac{1}{4\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\} = \\
& = -\frac{1}{64\pi^4} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right)^2 + \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right]^2. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в (3.16) независимо от Λ . Для того чтобы увидеть это, мы примем во внимание то, что функция F_k зависит от k^2/Λ^2 , так что производная по $\ln \Lambda$ может быть преобразована в производную по $\ln k$ с противоположным знаком. Поэтому

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right] = \\
& = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{d}{d \ln k} \left(\frac{1}{F_k^2} \right) - \frac{1}{8\pi^2} = 0. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Следовательно, выражение (3.15) для рассматриваемого вклада в аномальную размерность может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
\gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* + \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) - \\
& - 8 \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{F_k l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\} + O(\alpha) + O(\lambda^6), \quad (3.18)
\end{aligned}$$

где мы приняли во внимание то, что производная по $\ln \Lambda$ не действует на перенормированные юкавские константы,

Для функции $F(k^2/\Lambda^2) = 1 + k^2/\Lambda^2$ оставшийся интеграл вычислен в приложении Б. Полученный результат имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{F_k l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\} = \\
& = \frac{1}{64\pi^4} \left[\frac{1}{2} - \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right]. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Поэтому аномальная размерность, определенная в терминах голой константы связи дается следующим выражением

$$\begin{aligned} \gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* + \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \left[-1 + 2 \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right] + O(\alpha) + O(\lambda^6). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Правая сторона этого равенства зависит от перенормированных констант связи λ и $\ln \Lambda/\mu$. Это равенство должно быть выражено в голых юкавских константах λ_0 с помощью (3.14). Это дает окончательный результат для рассматриваемой части аномальной размерности.

$$\gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i = \frac{1}{4\pi^2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* - \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \quad (3.21)$$

Мы видим, что $\ln \Lambda/\mu$ уже не входит в выражение (3.21). Это можно рассматривать как проверку корректности вычисления. Более того, конечная константа g_1 , которая (частично) определяет схему вычитания в однопетлевом приближении, не входит в выражение для $\gamma_\phi(\alpha_0, \lambda_0)_j^i$. Это является следствием того, что ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых констант связи, схемно независимы при фиксированной регуляризации [38].

Результат для β -функции, определенной в терминах голых констант, может быть легко вычислен с помощью формул (3.3), (3.10), и (3.21). Для выбранной регуляризующей функции (3.11) в рассматриваемом приближении мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} &= -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) - \\ &- \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \left(\frac{1}{4\pi^2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* - \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \right) + \\ &+ O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Также следует упомянуть то, что явный результат, полученный для рассматриваемой части аномальной размерности демонстрирует, что мы действительно имеем дело с хорошо определенными выражениями.

3.2. NSVZ схема

В этом параграфе вычисляются ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, предполагая то, что регуляризирующая функция выбрана в виде (3.11). Такие ренормгрупповые функции являются схемнозависимыми, причем и само NSVZ соотношение также является схемнозависимым. Поэтому NSVZ соотношение выполняется только в специальных схемах вычитания. Предположительно эти схемы включают в себя также одну схему, определенную специальными граничными условиями (4), (5). Тем не менее, цель этой работы проверить это утверждение явными вычислениями.

3.2.1. Вклад в аномальную размерность суперполей материи

Начнем с того, что проинтегрируем ренормгрупповое уравнение (3.7). Результат будет иметь вид

$$\begin{aligned}
(\ln Z_\phi)_j^i &= -\frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) - \\
&- \frac{1}{32\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* \left(\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \tilde{g}_2 \right) - \\
&- \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \left(-\ln \frac{\Lambda}{\mu} + \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_2 \right) + \\
&+ O(\alpha) + O(\lambda^6),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где g_1 , g_2 , и \tilde{g}_2 - конечные константы. Фиксируя эти константы, мы фиксируем схему вычитания в рассматриваемом приближении. Для того чтобы полу-

чить вклад в аномальную размерность, определенную через перенормированные юкавские константы, изначально нужно выразить $\ln Z_\phi$ в терминах голых юкавских констант λ_0 с помощью равенства (3.14),

$$\begin{aligned} (\ln Z_\phi)_j^i &= -\frac{1}{4\pi^2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{32\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \left(\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1^2 - \tilde{g}_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1^2 - g_2 \right) + \\ &+ O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тогда вклад в аномальную размерность

$$\tilde{\gamma}_\phi(\alpha, \lambda)_j^i = \frac{d(\ln Z_\phi)_j^i}{d \ln \mu} \quad (3.25)$$

вычисляется дифференцированием логарифма константы перенормировки суперполя материи (3.24) по $\ln \mu$ при фиксированных значениях голых констант связи λ_0 . Это нам дает

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\phi(\alpha, \lambda)_j^i &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* - \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \left(-1 - 2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} - 2g_1 \right) + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Правая сторона этого равенства должна быть выражена в терминах перенормированных юкавских констант, используя переопределение юкавских констант (3.14),

$$\tilde{\gamma}_\phi(\alpha, \lambda)_j^i = \frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* - \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* + O(\alpha) + O(\lambda^6). \quad (3.27)$$

Мы видим, что выражение явно не зависит от $\ln \Lambda/\mu$, что подтверждает корректность вычисления. Заметим также, что выражение (3.27) независимо от

конечной константы g_1 , которая определяет схему вычитания в низшем приближении. Это означает, что слагаемые рассматриваемой структуры аномальной размерности схемнонезависимы. Следовательно, равенство (3.27) должно совпадать с соответствующим результатом, полученным в $\overline{\text{DR}}$ схеме ([28] и ссылки в этой работе). Наши обозначения λ^{ijk} , α , $\tilde{\gamma}_\phi(\alpha, \lambda)$, $\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)$ связаны с соответствующими обозначениями в работе [28] Y^{ijk} , g , $\gamma(g, Y)$, and $\beta_g(g, Y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda^{ijk} &= \frac{1}{2} Y^{ijk}; & \alpha &= \frac{g^2}{4\pi}; \\ \tilde{\gamma}_\phi(\alpha, \lambda) &= 2\gamma(g, Y); & \tilde{\beta}(\alpha, \lambda) &= \frac{g\beta_g(g, Y)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Используя эти равенства, можно легко проверить то, что слагаемые рассматриваемой структуры в работе [28] согласуются с формулой (3.27).

3.2.2. β -функция определенная в терминах перенормированных констант

Вычислим теперь β -функцию, определенную в терминах перенормированных констант. Начнем с интегрирования ренормгруппового уравнения

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\frac{1}{\alpha_0} \right) = -\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2}, \quad (3.29)$$

принимая во внимание однопетлевой результат (полученный в работе [59]), двухпетлевые слагаемые, квадратичные по юкавским константам, и трехпетлевые слагаемые, пропорциональные четвертой степени юкавских констант. Тогда мы получим уравнение, связывающее голую константу связи с перенормированной,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_0} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_1 \right) + \\
&+ \frac{1}{2\pi r} C(R)_i{}^j \left[\frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 \right) + \right. \\
&+ \frac{1}{32\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* \left(\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \tilde{b}_3 \right) + \\
&+ \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \left(- \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \right. \\
&\left. \left. + \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_3 \right) \right] + O(\alpha) + O(\lambda^6), \tag{3.30}
\end{aligned}$$

где b_1 , b_2 , b_3 , и \tilde{b}_3 - произвольные конечные константы, определяющие схему вычитания в рассматриваемом приближении. Конечно, в трехпетлевом приближении также есть слагаемые, пропорциональные α (как часть двухпетлевого приближения), α^2 и $\alpha\lambda^2$. Однако, в этой работе мы не рассматриваем их.

Следующим шагом мы решаем уравнение (3.30) относительно перенормированной константы связи α и выражаем ее в терминах голых калибровочных и юкавских констант с помощью уравнения (3.14). В рассматриваемом приближении результат записывается в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_1 \right) - \\
&- \frac{1}{2\pi r} C(R)_i{}^j \left[\frac{1}{4\pi^2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 \right) - \right. \\
&- \frac{1}{32\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \left(\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_2 g_1 - \tilde{b}_3 \right) - \\
&- \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \times \\
&\left. \times \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_2 g_1 - b_3 \right) \right] + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Дифференцируя $1/\alpha$ по $\ln \mu$ при фиксированных значениях голой калибровочной и юкавских констант, мы получим β -функцию, определенную в терминах перенормированных констант,

$$\frac{\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = -\frac{d}{d \ln \mu} \left(\frac{1}{\alpha} \right). \quad (3.32)$$

Часть этой β -функции, соответствующая рассматриваемой структуре, которая получается при дифференцировании (3.31), имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = & -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi r} C(R)_i{}^j \left[-\frac{1}{4\pi^2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* + \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \times \right. \\ & \times \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 \right) + \frac{1}{16\pi^4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \left(1 + 2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + 2b_2 \right) \left. \right] + \\ & + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^6). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Как обычно, правая часть должна быть выражена в терминах перенормированных юкавских констант с помощью уравнения (3.14). Это дает окончательный результат для рассматриваемой части β -функции

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = & -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi r} C(R)_i{}^j \left[-\frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* + \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* \times \right. \\ & \times \left(b_2 - g_1 \right) + \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \left(1 + 2b_2 - 2g_1 \right) \left. \right] + \\ & + O(\alpha) + O(\lambda^6). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Мы видим, что это выражение содержит константы b_2 и g_1 и поэтому является схемнозависимым. Заметим, что оно записано в произвольной схеме, так что результат, полученный $\overline{\text{DR}}$ схеме должен быть частным случаем для выражения (3.34). (Результаты, полученные с использованием различных регуляризации могут быть связаны конечной перенормировкой или, что эквивалентно, специальным выбором конечных констант, определяющих схему вычитания.) Результат для $\overline{\text{DR}}$ схемы был получен в работе [28]. Он может быть записан в обозначениях этой работы с помощью формул (3.28) следующим образом

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_{\overline{DR}}(\alpha, \lambda) = & -\frac{\alpha^2}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) + \\
& + \frac{\alpha^2}{2\pi r} C(R)_{i^j} \left[-\frac{1}{4\pi^2} \lambda_{jab}^* \lambda^{iab} + \frac{1}{64\pi^4} \left(\lambda^{iab} \lambda_{kab}^* \lambda^{kcd} \lambda_{jcd}^* + \right. \right. \\
& \left. \left. + 6\lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \right) \right] + O(\alpha^3) + O(\alpha^2 \lambda^6).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Сравнивая выражения (3.34) и (3.35), мы увидим, что они совпадают при

$$b_2 - g_1 = \frac{1}{4}. \tag{3.36}$$

Это означает, что наши результаты согласуются с результатами работы [28], конечно, принимая во внимание то, что регуляризации и схемы вычитания разные. При этом легко видеть, что результаты работы [28], полученные в \overline{DR} -схеме, не удовлетворяют NSVZ соотношению.

3.2.3. Граничные условия

Следующим шагом проверим то, что предписание (4), (5), предложенное в [54], действительно дает NSVZ схему. Во-первых, мы сравним выражения (3.27) и (3.34) и заметим, что NSVZ соотношение не выполняется для произвольной схемы вычитания (которая определяется коэффициентами b и g).

Затем, наложим граничное условие $Z_\phi(\alpha, \lambda, x_0)_{i^j} = \delta_i^j$. Заменяя $\ln \Lambda/\mu$ на фиксированное значение x_0 в выражении $(Z_\phi)_{i^j}$, мы решим уравнение выше относительно конечных констант g_1 . В низшем порядке это даст нам значение $g_1 = -x_0$. Подобным же образом найдем константы b_1, b_2 из граничного условия $Z_\alpha(\alpha, \lambda, x_0) = \alpha/\alpha_0 = 1$. А именно, решим уравнение $1/\alpha = 1/\alpha_0$ с $\ln \Lambda/\mu = x_0$ для констант b . Результат имеет вид $b_1 = b_2 = -x_0$. Это означает то, что в схеме, определенной предписанием (4), (5)

$$b_2 - g_1 = 0. \tag{3.37}$$

Следовательно, в схеме (4), (5)

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} &= -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) + \\
&+ \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \left[-\frac{1}{4\pi^2} \lambda^{iab} \lambda_{jab}^* + \frac{1}{16\pi^4} \lambda^{iab} \lambda_{jac}^* \lambda^{cde} \lambda_{bde}^* \right] + \\
&+ O(\alpha) + O(\lambda^6) = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \tilde{\gamma}_\phi(\alpha, \lambda)_i^j + O(\alpha) + O(\lambda^6). \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Таким образом, при соблюдении условия (4), (5) NSVZ соотношение выполняется для слагаемых рассматриваемой структуры. Это подтверждает предположение, сделанное в работе [54].

Итак, мы проверили соотношение между двухточечными функциями Грина на $\mathcal{N} = 1$ SYM для вкладов, пропорциональных четвертой степени по юкавским константам, в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными. Для этой регуляризации было продемонстрировано то, что (для рассматриваемого приближения и для членов рассматриваемой структуры) NSVZ соотношение выполняется для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант, как и было предположено в работе [54]. Точно также, как в абелевом случае, это следует из факторизации петлевых интегралов в интегралы от двойных полных производных в импульсном пространстве. Такая закономерность позволяет вычислить один из этих петлевых интегралов и связать трехпетлевой вклад в β -функцию с двухпетлевым вкладом в аномальную размерность. Для ренормгрупповых функции, определенных в терминах перенормированных констант, было проверено то, что предписание, предложенное в работе [54], действительно дает NSVZ схему. Следует отметить, что данная проверка нетривиальна из-за того, что рассматриваемые слагаемые являются схемнозависимыми. Таким образом, мы подтвердили предложения, сделанные в работе [54], путем явных вычислений.

Глава 4

NSVZ соотношение для слагаемых второй степени по юкавским константам

Рассмотрим трехпетлевой вклад в двухточечную функцию Грина фонового калибровочного поля $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, пропорциональный второй степени юкавских констант, при использовании BRST-инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными. В данной работе мы рассмотрим вклад, имеющий специальную топологию в графической интерпретации в виде суперграфов, которую мы описываем ниже. При вычислениях регуляризованное действие возьмем в виде (1.32), а слагаемое, фиксирующее калибровку, в виде (1.36), причем положим $K(x) = \xi_0 R(x)$, что соответствует выбору калибровки Фейнмана.

4.1. Суперграфы

Полный трехпетлевой вклад в β -функцию, пропорциональный второй степени юкавских констант дают супердиаграммы, получающиеся из суперграфов, представленных на Рис. 4.1 и на Рис. 4.2, путем присоединения к ним двух линии фонового калибровочного поля всеми возможными способами. Вычисление вклада от супердиаграмм, которые получаются из суперграфа (4), было рассмотрено в предыдущей главе.

В данной главе исследуется часть вклада, пропорционального второй степени юкавских констант, а именно трехпетлевой вклад в функцию Грина $d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda, \alpha_0^{-1})$, получающийся путем вычисления супердиаграмм, соответствующим показанному на Рис. 4.2 суперграфу (5) с одной петлей квантового калибровочного

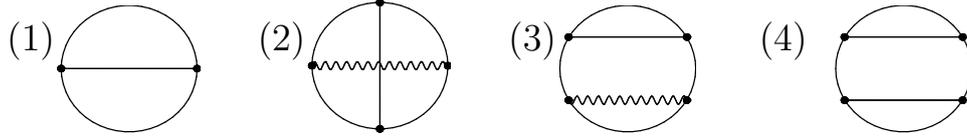


Рис. 4.1. Суперграфы с вершинами юкавского взаимодействия для вычисления трехпетлевого вклада в β -функцию

поля.

Таким образом мы рассматриваем в данной главе только одну топологию, соответствующую суперграфу (5). Все супердиаграммы для этой топологии приведены на Рис. 4.3. Во всех супердиаграммах внешними волнистыми линиями мы обозначаем фоновое калибровочное поле.

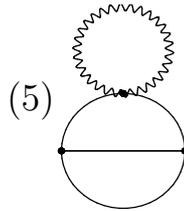


Рис. 4.2. Рассматриваемый нами суперграф с двумя вершинами юкавского взаимодействия и одной тройной вершиной взаимодействия с квантовым калибровочным полем для вычисления трехпетлевого вклада в β -функцию

Вычислим для этих диаграмм вклад в функцию Грина фонового калибровочного поля, которая связана с β -функцией, определенной в терминах голой константы связи формулой

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2}.$$

Также, как в предыдущей главе, необходимо взять производную по $\ln \Lambda$ этого выражения при фиксированных значениях перенормированных юкавских констант и константы связи. При этом необходимо взять предел при $p \rightarrow 0$, где

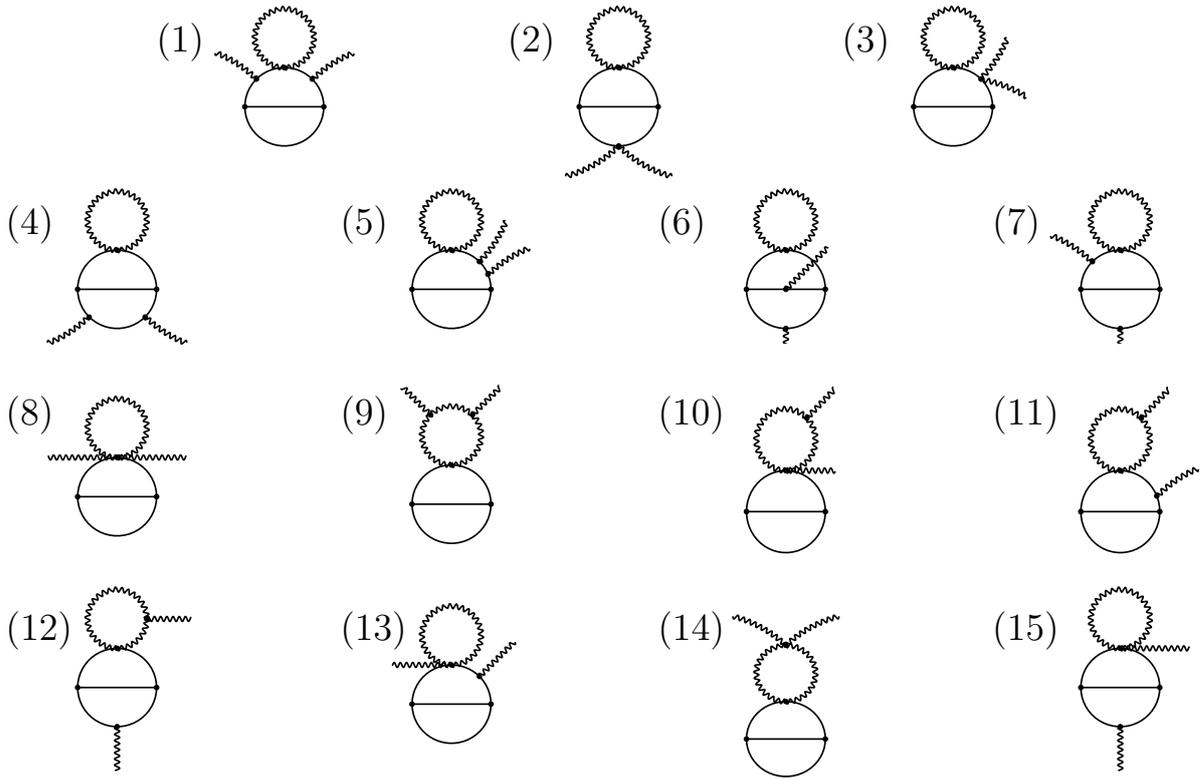


Рис. 4.3. Эти супердиаграммы дают трехпетлевой вклад, пропорциональный второй степени по юкавским константам, соответствующий топологии (5).

p - внешний импульс. Для того чтобы избавиться от конечных слагаемых пропорциональных $(p/\Lambda)^k$, и результат выразить через голые константы связи. Явные выражения вкладов в эффективное действие от каждой супердиаграммы, представленной на Рис. (4.3), в пределе нулевого внешнего импульса выписаны в приложении В.

4.2. Вклад в функцию Грина фонового калибровочного поля для рассматриваемой структуры

Выпишем результат для вклада в функцию $d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1}$ (1.62), который получается после взятия суммы выражений для супердиаграмм, представленных на Рис. 4.3. Диаграммы (1) - (7) вычислены в этой работе, а диаграммы (8) - (15) - в работе [83]. Выражение для каждой из супердиаграмм

(1)-(15) в импульсном пространстве дано в приложении В. Заметим также, что соответствующая сумма этих выражений является поперечной согласно (A.2) из приложения А в следствии фоновой калибровочной инвариантности теории. Для того чтобы прежде выписать результат, введем используемые далее обозначения для следующих выражений

$$F(k) \equiv F\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right), \quad (4.1)$$

$$X \equiv \frac{1}{r} \lambda_{naf}^* \lambda^{afc} [C(R)^2]_c^n, \quad (4.2)$$

$$Y \equiv \frac{1}{r} \lambda_{naf}^* \lambda^{bcf} C(R)_b^n C(R)_c^a, \quad (4.3)$$

$$Z \equiv \frac{1}{2r} C_2 C(R)_i^j \lambda_{0lkj}^* \lambda_0^{lki}. \quad (4.4)$$

Используя эти обозначения, выпишем вклад в функцию Грина фонового калибровочного поля, соответствующий суперграфу (5), представленному на Рис. 4.2. Соответствующее выражение равно

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} &= \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta\left(d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1}\right)\Big|_{p=0} = \\ &= 8\pi \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} e_0^2 \left(2Z \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} - \frac{\partial}{\partial k_\mu} \right) + \right. \\ &+ X \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} - \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) + Y \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \left. \right) \left\{ \frac{(k+q)^2 + k^2}{((k+q)^2 - k^2)^2} [F(k+q) - \right. \\ &- F(k)] - \frac{2k^2/\Lambda^2}{(k+q)^2 - k^2} F' \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \left. \right\} \times \\ &\times \frac{k^2}{q^2 R(q) (k^2 F(k))^2 (k+l)^2 F(k+l) l^2 F(l)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Рассмотрим структуру этого результата. Мы видим, что выражение состоит из трех частей. Каждая часть результата представлена в виде трехпетлевого

интеграла в импульсном пространстве от двойной полной производной. Это позволяет нам взять по одному интегралу для каждого вклада с двойной полной производной в этом выражении и получить уже результат в виде двухпетлевого интеграла.

Заметим, что взять данные интегралы по одному петлевому импульсу возможно благодаря сингулярностям вида $1/k^2$, которые они содержат. Известно следующее равенство для дельта-функции

$$\frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{k^2} = -4\pi^2 \delta^4(k). \quad (4.6)$$

Введем новое обозначение, используемое ниже

$$A(k, q) \equiv \left\{ \frac{(k+q)^2 + k^2}{((k+q)^2 - k^2)^2} [F(k+q) - F(k)] - \frac{2k^2/\Lambda^2}{(k+q)^2 - k^2} F' \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \right\}. \quad (4.7)$$

После взятия интегралов от двойных полных производных получаем результат для функции $d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1}$ в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta \left(d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \\ & = \frac{4e_0^2 Z}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \lim_{q \rightarrow 0} A(k, q) \frac{1}{k^2 F^2(k) (k+l)^2 F(k+l) l^2 F(l)} + \\ & + \frac{2e_0^2 X}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \lim_{k \rightarrow 0} A(k, q) \frac{1}{q^2 R(q) (l^2 F(l))^2} + \\ & + \frac{4e_0^2 Y}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{k^2 A(k, q)}{q^2 R(q) (k^2 F(k))^3}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Вычислим пределы, входящие в (4.8):

$$\lim_{q \rightarrow 0} A(k, q) = \frac{k^2}{\Lambda^4} F''(k) + \frac{1}{\Lambda^2} F'(k), \quad (4.9)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} A(k, q) = \frac{F(q) - 1}{q^2}, \quad (4.10)$$

где знак производной означает дифференцирование по полному аргументу функции.

Таким образом в этом параграфе мы получили выражение (4.8), которое находится слева в NSVZ соотношении (3). Для того чтобы проверить это соотношение, нам нужно также получить и его правую часть в виде двухпетлевых вкладов в функции Грина суперполей материи и квантового калибровочного поля, которые соответствуют суперграфу (5) на Рис. 4.2.

4.3. Вклады в функции Грина суперполей материи и квантового калибровочного поля рассматриваемой структуры

Получим двухпетлевые вклады в двухточечные функции Грина суперполей материи и квантового калибровочного поля, пропорциональные второй степени юкавских констант и соответствующих суперграфу, представленному на Рис. 4.2.

Согласно описанной ранее процедуре для того, чтобы получить супердиаграммы, выражения для которых входят в функции Грина, нам нужно разрезать внутренние линии рассматриваемого суперграфа всеми возможными способами и выделить одночастичнонеприводимые диаграммы. Полученные таким образом супердиаграммы представлены на Рис. 4.4.

Заметим, что супердиаграммы (1), (2), (3) дают вклад в функцию Грина суперполей материи, а (4) в функцию Грина квантового калибровочного поля, либо в соответствующие аномальные размерности согласно их определениям (1.63).

Вычисления супердиаграмм, отображенных на Рис. 4.4, дают следующие выражения для вкладов в эффективное действие:

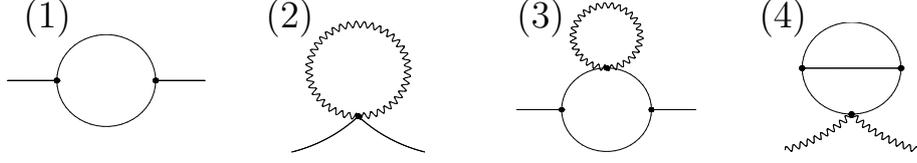


Рис. 4.4. Супердиаграммы, дающие вклад в двухточечную функции квантового калибровочного суперполя и суперполей материи, полученные путем разреза внутренних линий суперграфа (5), изображенного на Рис. 4.2.

$$(1) = \frac{1}{2} \lambda_0^{ijk} \lambda_{0mjk}^* \int \frac{d^4 p d^4 \theta}{(2\pi)^4} \phi^{*m}(p, \theta) \phi_i(-p, \theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F^2(k)}, \quad (4.11)$$

$$(2) = \frac{e_0^2}{2} (C(R))_m^i \int \frac{d^4 p d^4 \theta}{(2\pi)^4} \phi^{*m}(p, \theta) \phi_i(-p, \theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{F(k) - 1}{k^4 R(k)}, \quad (4.12)$$

$$(3) = -2e_0^2 \lambda_0^{ijk} \lambda_{0lmk}^* (C(R))_j^m \int \frac{d^4 p d^4 \theta}{(2\pi)^4} \phi^{*l}(p, \theta) \phi_i(-p, \theta) \times \int \frac{d^4 k d^4 q}{(2\pi)^8} \frac{k^2 A(k, q)}{[k^2 F(k)]^3 q^2 R(q)}, \quad (4.13)$$

$$(4) = -\lambda_0^{ijk} \lambda_{0mjk}^* \int \frac{d^4 p d^4 \theta}{(2\pi)^4} (V(p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(-p, \theta))_l^i \times \int \frac{d^4 k d^4 l}{(2\pi)^8} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{A(k, q)}{k^2 F^2(k) l^2 F(l) (k+l)^2 F(k+l)}. \quad (4.14)$$

Соответствующие вклады в логарифмы от функции Грина будут равны:

$$\ln(G_\phi)_j^i \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p \rightarrow 0} = -4e_0^2 \lambda_0^{imk} \lambda_{0lmk}^* C(R)_j^l \int \frac{d^4 k d^4 l}{(2\pi)^8} \frac{F(l) - 1}{k^4 F^2(k) l^4 R(l)} - 8e_0^2 \lambda_0^{ilk} \lambda_{0jmk}^* C(R)_l^m \int \frac{d^4 k d^4 q}{(2\pi)^8} \frac{k^2 A(k, q)}{[k^2 F(k)]^3 q^2 R(q)}, \quad (4.15)$$

$$\ln G_V \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p \rightarrow 0} = \frac{4e_0^2}{r} C(R)_l^i \lambda_0^{ljk} \lambda_{0ijk}^* \times \int \frac{d^4 k d^4 l}{(2\pi)^8} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{A(k, q)}{k^2 F^2(k) l^2 F(l) (k+l)^2 F(k+l)}. \quad (4.16)$$

4.4. NSVZ соотношение для рассматриваемых вкладов в функции Грина

Проверим NSVZ соотношение в виде (3). Выпишем соответствующую его правую часть, используя выражения (4.15) для рассматриваемых функции Грина и введенные ранее обозначения (4.2), (4.3), (4.4). Результат имеет вид

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-C_2 \ln G_V + C(R)_{i^j} \ln(G_\phi)_{j^i}/r \right) \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}; p \rightarrow 0} = \quad (4.17) \\
& = \frac{4e_0^2 Z}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{A(k, q)}{k^2 F^2(k) (k+l)^2 F(k+l) l^2 F(l)} + \\
& + \frac{2e_0^2 X}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{F(l) - 1}{l^4 R(l) (k^2 F(k))^2} + \\
& + \frac{4e_0^2 Y}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{k^2 A(k, q)}{q^2 R(q) (k^2 F(k))^3}.
\end{aligned}$$

Мы видим, что это выражение полностью совпадает с (4.8) с учетом (4.9). Таким образом мы проверили NSVZ соотношение для вкладов в двухточечные функции Грина от топологии, представленной в виде суперграфа на Рис. 4.2, в виде (3) или эквивалентно для соответствующих ренормгрупповых функции, определенных в терминах голых констант, в виде (2).

Заключение

Представим основные результаты, полученные в диссертации:

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с суперполями материи при использовании BRST-неинвариантной регуляризации высшими ковариантными производными, дополненной специальной схемой перенормировки, восстанавливающей справедливость тождества Славнова—Тейлора, вычислены однопетлевые двухточечные функции Грина всех полей рассматриваемой теории.

После сравнения результатов с вычисленной ранее полной двухпетлевой двухточечной функции Грина фонового калибровочного поля была продемонстрирована справедливость NSVZ-подобного соотношения для функций Грина в рассматриваемом приближении. Как следствие, для рассматриваемой теории было проверено выполнение новой формы NSVZ соотношения для ренормгрупповых функций до двухпетлевого порядка включительно.

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса были вычислены вклады в бета-функцию, пропорциональные четвертой степени юкавских констант, а также часть вкладов в бета-функцию, пропорциональных второй степени юкавских констант, при использовании BRST инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными.

Показано, что выражения для данных вкладов могут быть представлены в виде интегралов от двойной полной производной в импульсном пространстве. Это позволило сравнить их с соответствующими выражениями для петлевых интегралов, определяющих вклады в аномальные размерности суперполей материи. Таким образом, проведена проверка справедливости NSVZ соотношения для ренормгрупповых функции, определенных в терминах голых констант, для рассматриваемой регуляризации.

Для простейшего примера регуляризующей функции были вычислены вкла-

ды в ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи. Было доказано, что такие функции не удовлетворяют NSVZ соотношению в общем случае. Проведена проверка того, что предложенная в работе [54] процедура перенормировки действительно определяет NSVZ схему. Данная процедура перенормировки состоит в использовании регуляризации высшими ковариантными производными и наложении определенных граничных условия на константы перенормировки.

Работа была выполнена на кафедре теоретической физики Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова.

Благодарности

В заключение автор хотел бы выразить благодарность научному руководителю доценту Пронину Петру Ивановичу и доценту Степаньянцу Константину Викторовичу (кафедра теоретической физики физического факультета МГУ) за внимание и помощь в разборе технических вопросов при выполнении данной работы, а также соавтору Казанцеву Александру Евгеньевичу за многочисленные полезные обсуждения и сотрудничество. Автор хотел бы также выразить искреннюю благодарность своим близким за понимание и поддержку.

Приложение А

Явные выражения для супердиаграмм, пропорциональных четвертой степени юкавских констант

Выпишем выражения для вкладов в эффективное действие от каждой из супердиаграмм, представленных на Рис. 3.3 и Рис. 3.4 в пределе нулевого внешнего импульса.

В пространстве Минковского результат для любой супердиаграммы, дающую вклад в двухточечную функцию Грина фонового калибровочного поля может быть записан в виде

$$\Delta\Gamma = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta \left[\mathbf{V}(p, \theta)_i{}^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(-p, \theta)_k{}^l I_{\text{inv}}(p)_{jl}{}^{ik} + \right. \\ \left. + \mathbf{V}(p, \theta)_i{}^j \mathbf{V}(-p, \theta)_k{}^l I_{\text{non-inv}}(p)_{jl}{}^{ik} \right], \quad (\text{A.1})$$

где под $\Delta\Gamma$ мы обозначаем соответствующий вклад в эффективное действие. Вследствие фоновой калибровочной инвариантности неинвариантные слагаемые сокращают друг друга при взятии суммы всех супердиаграмм,

$$\sum_{\text{все суперграфы}} (T^A)_i{}^j (T^B)_k{}^l I_{\text{non-inv}}(p)_{jl}{}^{ik} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Сумма всех инвариантных членов дает согласно формуле (1.55) функцию $d^{-1} - \alpha_0^{-1}$. Для того чтобы записать результат в наиболее удобном виде, мы заметим, что величина $(T^A)_i{}^j (T^B)_k{}^l (I_{\text{inv}})_{jl}{}^{ik}$ является инвариантным тензором. Этот инвариантный тензор должен быть пропорциональным δ^{AB} , так как мы считаем калибровочную группу простой. Поэтому

$$(T^A)_i{}^j (T^B)_k{}^l (I_{\text{inv}})_{jl}{}^{ik} = \frac{1}{r} \delta^{AB} (T^C)_i{}^j (T^C)_k{}^l (I_{\text{inv}})_{jl}{}^{ik}. \quad (\text{A.3})$$

Таким образом из (1.55) мы получим

$$d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} = -\frac{16\pi}{r} (T^C)_i{}^j (T^C)_k{}^l \sum_{\text{все суперграфы}} I_{\text{inv}}(p)_{jl}{}^{ik}. \quad (\text{A.4})$$

Нам необходима производная данной функции по $\ln \Lambda$ в пределе нулевого внешнего импульса, так как основной целью является проверка NSVZ соотношения. Поэтому мы вычислим функции $(I_{\text{inv}})_{jl}{}^{ik}$ и $(I_{\text{non-inv}})_{jl}{}^{ik}$ в пределе $p \rightarrow 0$. Конечно, в этом случае выражения для конкретных супердиаграмм не являются хорошо определенными выражениями. Однако, сумма инвариантных вкладов, продифференцированных по $\ln \Lambda$, хорошо определена в следствии уравнения (3.1).

Ниже мы представим выражения для функции $(I_{\text{inv}})_{jl}{}^{ik}$ и $(I_{\text{non-inv}})_{jl}{}^{ik}$ в пределе $p \rightarrow 0$ для всех супердиаграмм на Рис. 3.3 и на Рис. 3.4 в форме

$$\text{Суперграф} = \mathbf{V}_i{}^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_k{}^l I_{\text{inv}}(p=0)_{jl}{}^{ik} + \mathbf{V}_i{}^j \mathbf{V}_k{}^l I_{\text{non-inv}}(p=0)_{jl}{}^{ik}, \quad (\text{A.5})$$

где коэффициенты $I_{jl}{}^{ik}$ записаны в виде интегралов в евклидовом импульсном пространстве, которые можно получить из выражении, изначально записанных в пространстве Минковского, после поворота Вика. Используя эти выражения, можно проверить формулу (A.2) в пределе $p \rightarrow 0$ и получить функцию (A.4), из которой после дифференцирования по $\ln \Lambda$ мы получим β -функцию, определенную в терминах голых констант. В уравнениях ниже штрих обозначает производную по квадрату импульса,

$$F'_k \equiv \frac{d}{dk^2} F(k^2/\Lambda^2). \quad (\text{A.6})$$

Выпишем для начала вклады от супердиаграмм, представленных на Рис. 3.3. Они даются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
(1) &= \lambda_0^{ika} \lambda_{0jla}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 F_q^2 k^4 F_k^2 (q+k)^2 F_{q+k}} \times \\
&\times \left[\left((q+k)^2 F_k F_q + 2k^2 (2q_\mu k^\mu + q^2) F_q F'_k + 2k^2 q^2 q_\mu k^\mu F'_k F'_q \right) \times \right. \\
&\times \left. \mathbf{V}_i^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_k^l + 2q^2 F_q k^2 F_k \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l \right]; \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 F_q^3 k^2 F_k (q+k)^2 F_{q+k}} \times \\
&\times \left[\left(F_q^2 + 2q^2 F'_q F_q + 2q^4 (F'_q)^2 \right) (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j + 2q^2 F_q^2 (\mathbf{V}^2)_i^j \right]; \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &= -\lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 F_q^2 k^2 F_k (q+k)^2 F_{q+k}} \times \\
&\times \left[(q^2 F_q'' + F_q') (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j + F_q (\mathbf{V}^2)_i^j \right]. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить сумму этих супердиаграмм, необходимо принять во внимание тождество

$$\lambda_{0jla}^* \lambda_0^{ika} (T^A)_k^l = -\frac{1}{2} \lambda_{0jab}^* \lambda_0^{kab} (T^A)_k^i = -\frac{1}{2} (T^A)_j^k \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{iab}, \tag{A.10}$$

которое следует из тождества (1.2). Переписав выражения для супердиаграмм (1)-(3) с помощью (A.10), мы получим то, что неинвариантные слагаемые сокращают друг друга, а сумма инвариантных слагаемых равна

$$\frac{1}{8} \lambda_0^{iab} \lambda_{0jab}^* (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{k^2 F_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k}} \right). \tag{A.11}$$

Соответственно, вклад в функцию $d^{-1} - \alpha_0^{-1}$ с рассмотренных двухпетлевых супердиаграмм может быть записан, как интеграл от двойной полной производной

$$-\frac{2\pi}{r} C(R)_i^j \lambda_{0jab}^* \lambda_0^{iab} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{k^2 F_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k}} \right). \tag{A.12}$$

Супердиаграммы, представленные на Рис. 3.4, даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
(1) &= \lambda_0^{iab} \lambda_{0jad}^* \lambda_0^{dek} \lambda_{0bel}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \times \\
&\quad \times \frac{4}{q^4 F_q^2 k^4 F_k^2 l^4 F_l^2 (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \times \\
&\quad \times \left[\left(-2q^2 k^2 l^2 q_\mu l^\mu F_q F_l' + 2l^2 F_q F_l' (-q^2 (k+l)^2 + q^2 l^2 - 2k^2 q_\mu l^\mu) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + F_q F_l (-2q^2 (k+l)^2 + q^2 l^2 - 2k^2 q_\mu l^\mu) \right) \mathbf{V}_i^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_k^l - \right. \\
&\quad \left. - 2q^2 F_q k^2 l^2 F_l \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l \right]; \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= -\lambda_0^{iab} \lambda_{0lab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \times \\
&\quad \times \frac{1}{q^2 F_q k^4 F_k^4 l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \times \\
&\quad \times \left[\left(F_k^2 + 2k^2 F_k' F_k + 2k^4 (F_k')^2 \right) \mathbf{V}_i^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_k^l + 2k^2 F_k^2 \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l \right]; \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &= -\lambda_0^{ika} \lambda_{0jlb}^* \lambda_0^{bcd} \lambda_{0acd}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \times \\
&\quad \times \frac{2}{q^4 F_q^2 k^2 F_k^2 l^2 F_l (q+k)^4 F_{q+k}^2 (k+l)^2 F_{k+l}} \times \\
&\quad \times \left[\left(k^2 F_q F_{q+k} + 2q^2 (k^2 - q^2) F_q' F_{q+k} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q^2 (q+k)^2 (k^2 - 2q^2) F_q' F_{q+k}' \right) \mathbf{V}_i^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_k^l + \right. \\
&\quad \left. + 2q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k} \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l \right]; \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) &= \lambda_0^{ikb} \lambda_{0alb}^* \lambda_0^{acd} \lambda_{0jcd}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \times \\
&\quad \times \frac{8}{q^4 F_q^2 k^4 F_k^3 l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \times \\
&\quad \times \left[\left(-2q^2 k^2 q_\mu k^\mu F'_q F'_k - k^2 F'_k F_q ((k+q)^2 - k^2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -q^2 F'_q F_k ((k+q)^2 - q^2) - (k+q)^2 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times F_q F_k \right) \mathbf{V}_i^j \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_k^l - 2q^2 F_q k^2 F_k \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l \right]; \tag{A.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) &= -\lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \times \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2}{q^2 F_q k^4 F_k^4 l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \\
&\quad \times \left[\left(F_k^2 + 2k^2 F'_k F_k + 2k^4 (F'_k)^2 \right) (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j + 2k^2 F_k^2 (\mathbf{V}^2)_i^j \right]; \tag{A.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) &= -\lambda_0^{iac} \lambda_{0jad}^* \lambda_0^{def} \lambda_{0cef}^* \times \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4}{q^4 F_q^3 k^2 F_k^2 l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \\
&\quad \times \left[\left(F_q^2 + 2q^2 F'_q F_q + 2q^4 (F'_q)^2 \right) (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j + 2q^2 F_q^2 (\mathbf{V}^2)_i^j \right]; \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) &= \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \times \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2}{q^2 F_q k^2 F_k^3 l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \\
&\quad \times \left[\left(k^2 F_k'' + F'_k \right) (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j + F_k (\mathbf{V}^2)_i^j \right]; \tag{A.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8) &= \lambda_0^{iac} \lambda_{0jad}^* \lambda_0^{def} \lambda_{0cef}^* \times \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4}{q^2 F_q^2 k^2 F_k^2 l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k} (k+l)^2 F_{k+l}} \\
&\quad \times \left[\left(q^2 F_q'' + F'_q \right) (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_i^j + F_q (\mathbf{V}^2)_i^j \right]. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Формируемые юкавскими константами различные структуры в этих выражениях могут быть редуцированы в две основные комбинации с помощью тождества (1.2). Например, инвариантные слагаемые пропорциональны

$$(1) \rightarrow \lambda_0^{iab} \lambda_{0jad}^* \lambda_0^{dek} \lambda_{0bel}^* \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l = \frac{1}{4} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* (\mathbf{V}^2)_{i^j}; \quad (\text{A.21})$$

$$(2) \rightarrow \lambda_0^{iab} \lambda_{0lab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l = \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* (\mathbf{V}^2)_{i^j}; \quad (\text{A.22})$$

$$(3) \rightarrow \lambda_0^{ika} \lambda_{0jlb}^* \lambda_0^{bcd} \lambda_{0acd}^* \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l = \\ = \left(\frac{1}{2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* - \lambda_0^{iac} \lambda_{0jad}^* \lambda_0^{def} \lambda_{0cef}^* \right) (\mathbf{V}^2)_{i^j}; \quad (\text{A.23})$$

$$(4) \rightarrow \lambda_0^{ikb} \lambda_{0alb}^* \lambda_0^{acd} \lambda_{0jcd}^* \mathbf{V}_i^j \mathbf{V}_k^l = -\frac{1}{2} \lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* (\mathbf{V}^2)_{i^j}, \quad (\text{A.24})$$

где мы принимаем во внимание то, что $\mathbf{V}_i^j = e_0 \mathbf{V}^A (T^A)_i^j$.

Используя эти тождества, можно проверить, что все неинвариантные слагаемые в рассматриваемых трехпетлевых супердиаграммах сокращают друг друга. Этот факт может рассматриваться как проверка правильности вычислений, потому что неинвариантные слагаемые должны исчезать в следствии фоновой калибровочной инвариантности эффективного действия.

Используя тождества, подобные (A.21)–(A.24), для инвариантных слагаемых после некоторых преобразований сумма выражений (A.13) – (A.20) может быть представлена как следующий интеграл от двойной полной производной:

$$-\frac{1}{4} (\mathbf{V} \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V})_{i^j} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\ \times \left[\lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k^\mu} - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) + 2 \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right] \times \\ \times \frac{1}{k^2 F_k^2 q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k} l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}}. \quad (\text{A.25})$$

Из этого выражения мы получим то, что вклад супердиаграмм, показанных на Рис. 3.4 в функцию $d^{-1} - \alpha_0^{-1}$ равен

$$\frac{4\pi}{r} C(R)_{i^j} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\lambda_0^{iab} \lambda_{0kab}^* \lambda_0^{kcd} \lambda_{0jcd}^* \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k^\mu} - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) + \right. \\ \left. + 2 \lambda_0^{iab} \lambda_{0jac}^* \lambda_0^{cde} \lambda_{0bde}^* \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right] \frac{1}{k^2 F_k^2 q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k} l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}}. \quad (\text{A.26})$$

Дифференцируя результат после взятия сумм выражении (A.12) и (A.26) по $\ln \Lambda$, мы получим (3.2).

Приложение Б

Вычисления петлевых интегралов, регуляризованных высшими ковариантными производными

Вычислим в этом приложении следующее выражение

$$I \equiv \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^2} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{F_k l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\}, \quad (\text{Б.1})$$

входящее в формулу (3.18) при использовании регуляризующей функции $F(k^2/\Lambda^2) = 1 + k^2/\Lambda^2$. Тогда интеграл по $d^4 l$ может быть записан, как

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l (k+l)^2 F_{k+l}} = \\ & = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l^2 + \Lambda^2} \right) \left(\frac{1}{(k+l)^2} - \frac{1}{(k+l)^2 + \Lambda^2} \right) = 2I_1 - I_2, \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где мы вводим обозначения

$$I_1 \equiv \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l^2 + \Lambda^2} \right) \frac{1}{(k+l)^2}; \quad (\text{Б.3})$$

$$I_2 \equiv \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2 (k+l)^2} - \frac{1}{(l^2 + \Lambda^2)((k+l)^2 + \Lambda^2)} \right). \quad (\text{Б.4})$$

Интеграл I_2 вычисляется стандартными методами (смотрите, например, [84]).

Результат записывается в виде

$$I_2 = \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{k} + \sqrt{1 + \frac{4\Lambda^2}{k^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + 4\Lambda^2}} \right). \quad (\text{Б.5})$$

Интеграл I_1 может быть вычислен методом, аналогичным рассматриваемому в работах [84, 85]. А именно, мы используем четырехмерные сферические координаты

$$\begin{aligned} l_1 &= l \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1; & l_2 &= l \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1; \\ l_3 &= l \sin \theta_3 \cos \theta_2; & l_4 &= l \cos \theta_3, \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

в котором мера интегрирования равна

$$\int d^4l = \int_0^\infty dl l^3 \int_0^\pi d\theta_3 \sin^2 \theta_3 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1. \quad (\text{Б.7})$$

Если четвертая ось направлена вдоль вектора k_μ , то тогда $(k+l)^2 = k^2 + 2kl \cos \theta_3 + l^2$ и интегрируемая функция в (Б.3) зависит только от θ_3 . В этом случае, после замены $x \equiv \cos \theta_3$, мера интегрирования может быть записана в форме

$$\int d^4l \rightarrow 4\pi \int_0^\infty dl l^3 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2}. \quad (\text{Б.8})$$

Соответственно, интеграл I_1 может быть представлен, как

$$I_1 = \frac{1}{16\pi^3} \int_0^\infty dl^2 \frac{\Lambda^2}{l^2 + \Lambda^2} \oint_{\mathcal{C}} dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2klx + l^2}, \quad (\text{Б.9})$$

где \mathcal{C} - контур в комплексной x -плоскости, показанной на Рис. Б.1.

Контурный интеграл может быть найден путем вычисления вычетов на бесконечности и в точке $x_0 = -(k^2 + l^2)/2kl$. Подробности можно увидеть в работах [84, 85]. Результат записывается в виде

$$\oint_{\mathcal{C}} dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2klx + l^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{k^2} & \text{for } k \geq l \\ \frac{\pi}{l^2} & \text{for } l \geq k. \end{cases} \quad (\text{Б.10})$$

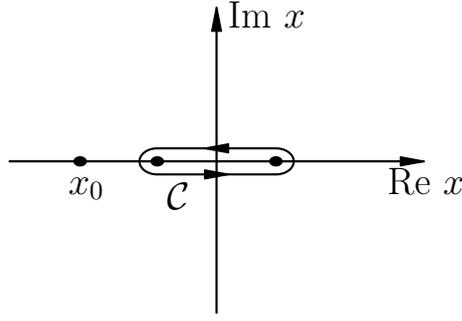


Рис. Б.1. Контур C в x комплексной плоскости, который используется для интегрирования по углу θ_3 .

Используя это уравнение, возможно вычислить угловую часть интеграла I_1 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{k^2} dl^2 \frac{\Lambda^2}{k^2(l^2 + \Lambda^2)} + \frac{1}{16\pi^2} \int_{k^2}^{\infty} dl^2 \frac{\Lambda^2}{l^2(l^2 + \Lambda^2)} = \\ &= \frac{\Lambda^2}{16\pi^2 k^2} \ln \left(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Из равенств (Б.5) и (Б.11) мы получим

$$\begin{aligned} 2I_1 - I_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{k} + \frac{1}{8\pi^2} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{k^2} \right) \ln \left(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2} \right) - \\ &- \frac{1}{8\pi^2} \sqrt{1 + \frac{4\Lambda^2}{k^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + 4\Lambda^2}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Таким образом, выражение (Б.1) может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^3} \left\{ \ln \frac{\Lambda}{k} - F_k \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + \right. \\ &+ \left. \left(1 + \frac{\Lambda^2}{k^2} \right) \ln \left(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2} \right) - \sqrt{1 + \frac{4\Lambda^2}{k^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + 4\Lambda^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Заметим, что последние два слагаемых в скобках дают нулевой вклад,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^3} \left\{ \left(1 + \frac{\Lambda^2}{k^2}\right) \ln \left(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2}\right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 + \frac{4\Lambda^2}{k^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + 4\Lambda^2}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Действительно, выражение в последних скобках быстро стремится к нулю в пределе $k \rightarrow 0$, в то время как функция F_k быстро растет на бесконечности. Из этого следует то, что интеграл в (Б.14) сходящийся. Следовательно, зависимость от Λ может быть нивелирована заменой $k_\mu = \Lambda K_\mu$. Поэтому, рассматриваемый интеграл является независимым от Λ , и его производная по $\ln \Lambda$ стремится к нулю.

Продолжим вычислять оставшуюся часть выражения (Б.13). Нужно заметить, что интеграл первых двух слагаемых не является хорошо определенным, так как он расходится при $k = 0$. Однако, производная по $\ln \Lambda$ нивелирует эту проблему, если мы произведем интегрирование по $d^4 k$ после дифференцирования. После дифференцирования по $\ln \Lambda$ мы получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 F_k^3} \left\{ \ln \frac{\Lambda}{k} - F_k \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{(1 - F_k)}{F_k^3} - \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\frac{1}{F_k^2} \right) + \right. \\ & \left. + \ln \frac{\Lambda}{k} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\frac{1}{F_k^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Соответствующий первому члену в скобках интеграл может быть вычислен в четырехмерных сферических координатах, принимая во внимание то, что объем единичной сферы S^3 равен $2\pi^2$,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1 - F_k)}{k^4 F_k^3} = -\frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk^2}{(k^2 + \Lambda^2)^3} = -\frac{1}{32\pi^2}. \quad (\text{Б.16})$$

Для того чтобы найти вклад второго слагаемого в (Б.15), мы заметим то, что

функция F_k зависит от k/Λ , так что производная по $\ln \Lambda$ может быть преобразована в производную по $\ln k$,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\frac{1}{F_k^2} \right) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{F_k^2} \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2 F_k^2(k=0)} = \frac{1}{8\pi^2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Вклад последнего слагаемого в (Б.15) в четырехмерных сферических координатах принимает следующий вид

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \ln \frac{\Lambda}{k} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\frac{1}{F_k^3} \right) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \ln \frac{\Lambda}{k} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{F_k^3} \right). \quad (\text{Б.18})$$

Легко видеть то, что этот интеграл сходится на бесконечности и при $k=0$. (Производная F_k по $\ln \Lambda$ пропорциональна k^2 в пределе $k \rightarrow 0$.) Поэтому, возможно заменить нижний предел интегрирования на $\varepsilon \rightarrow 0$. После этого, интегрирование по частям даст

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{8\pi^2 F_k^3} \ln \frac{\Lambda}{k} \Big|_\varepsilon^\infty - \frac{1}{8\pi^2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dk}{k F_k^3} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\varepsilon} - \frac{\Lambda^6}{16\pi^2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dk^2}{k^2 (k^2 + \Lambda^2)^3} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\varepsilon} - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{2(k^2 + \Lambda^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda^2}{k^2 + \Lambda^2} - \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{k^2} \right) \right) \Big|_\varepsilon^\infty = \frac{3}{32\pi^2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Используя равенства (Б.16), (Б.17), и (Б.18) мы найдем результат для интеграла (Б.1),

$$I = \frac{1}{64\pi^4} \left[\frac{1}{2} - \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \right]. \quad (\text{Б.20})$$

Приложение В

Супердиаграммы, пропорциональные второй степени юкавских констант

Выпишем выражения для вкладов в эффективное действие от каждой супердиаграммы на Рис. 4.3 в пределе нулевого внешнего импульса. Результат для любой из выше упомянутых супердиаграмм может быть записан в виде (A.1). После взятия суммы всех рассматриваемых супердиаграмм неинвариантные слагаемые сокращают друг друга согласно (A.2). Сумма же инвариантных членов даст вклад в функцию $d^{-1} - \alpha_0^{-1}$ согласно (1.55).

Для записи выражений для супердиаграмм воспользуемся обозначениями (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.7), а также введем используемые далее в формулах новые обозначения:

$$B \equiv B(k, q) \equiv \Lambda^2 \frac{F(k+q) - F(k)}{(k+q)^2 - k^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$B_k \equiv \frac{dB}{d(k^2/\Lambda^2)}, \quad (\text{B.2})$$

$$A \equiv A(k, q) \equiv -\frac{1}{\Lambda^2} \left[\frac{2k^2}{\Lambda^2} B_k + B \right], \quad (\text{B.3})$$

Раскрывая скобки и проводя дифференцирование в формуле B.3, мы видим, что это определение эквивалентно данному ранее (4.7).

Сначала выпишем выражения для половины из супердиаграмм, представленных на Рис. 4.3, а именно для (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), которые были вычислены в данной работе.

$$(1) = -2e_0^2 X \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[\frac{1}{k^2} + 2 \frac{1}{F(k) \Lambda^2} F'(k) + \right. \right. \quad (B.4)$$

$$\left. \left. + 2 \frac{k^2}{\Lambda^4 F^2(k)} F'^2(k) \right] + 2 \right\} V_\phi^A \times$$

$$\times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$(2) = 4e_0^2 Y \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[F'(l) + \frac{l^2}{\Lambda^2} F''(l) \right] \frac{1}{F(l) \Lambda^2} + 1 \right\} V_\phi^A \times \quad (B.5)$$

$$\times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$(3) = 4e_0^2 X \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \frac{[F'(k) + \frac{k^2}{\Lambda^2} F''(k)]}{F(k)} \frac{1}{\Lambda^2} + 1 \right\} V_\phi^A \times \quad (B.6)$$

$$\times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$(4) = -4e_0^2 Y \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[\frac{1}{l^2} + 2 \frac{1}{F(l) \Lambda^2} F'(l) + \right. \right. \quad (B.7)$$

$$\left. \left. + 2 \frac{l^2}{F^2(l) \Lambda^4} F'^2(l) \right] + 2 \right\} V_\phi^A \times$$

$$\times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$(5) = -4e_0^2 X \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[\frac{1}{k^2} + 2 \frac{1}{F(k) \Lambda^2} F'(k) + \right. \right. \quad (B.8)$$

$$\left. \left. + 2 \frac{k^2}{\Lambda^4 F^2(k)} F'^2(k) \right] + 2 \right\} V_\phi^A \times$$

$$\times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$\begin{aligned}
(6) = & -2e_0^2 \left(\frac{1}{2}X - Y \right) \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[\frac{k^2}{l^2(k+l)^2} + \right. \right. \\
& + \frac{(k^2 - l^2) F'(l)}{(k+l)^2 \Lambda^2 F(l)} + \frac{k^2 - (k+l)^2 F'(k+l)}{l^2 \Lambda^2 F(k+l)} + \\
& \left. \left. + \frac{k^2 - l^2 - (k+l)^2 F'(l)F'(k+l)}{\Lambda^4 F(l)F(k+l)} \right] + 2 \right\} V_\phi^A \times \\
& \times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)}, \tag{B.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) = & 4e_0^2 X \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \times \\
& \times \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[\frac{(k+l)^2}{k^2 l^2} + \frac{(k+l)^2 - k^2 F'(k)}{l^2 \Lambda^2 F(k)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(k+l)^2 - l^2 F'(l)}{k^2 \Lambda^2 F(l)} + 2 \frac{(kl) F'(k)F'(l)}{\Lambda^4 F(k)F(l)} \right] + 2 \right\} V_\phi^A \times \\
& \times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)}. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Для полноты изложения приведем также выражения для следующей половины из супердиаграмм, представленных на Рис. 4.3, а именно для (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), которые были вычислены в работе [83]:

$$\begin{aligned}
(8) = & -2e_0^2 \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \frac{1}{\Lambda^2} \left[X A_k + \frac{k^2}{\Lambda^2} X A_{k,k} + 2X A_{k+q} + \right. \right. \\
& + X \frac{(k+q)^2}{\Lambda^2} A_{k+q, k+q} - (X - Z) \frac{2(k, k+q)}{\Lambda^2} A_{k, k+q} + \\
& \left. \left. (X - Z) \frac{2(k, k+q)}{\Lambda^4} B_{k, k+q} + (X - Z) \frac{2B_{k+q}}{\Lambda^2} \right] + X A \right\} V_\phi^A \times \\
& \times \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)}, \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$(9) = -8e_0^2 Z \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right)^2 \frac{1}{q^2} \right\} V_\phi^A \times \tag{B.12}$$

$$\times A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)}, \quad (\text{B.13})$$

$$(10) = +e_0^2 Z \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A(\partial^2 \Pi_{1/2}) \left\{ -\frac{4}{\Lambda^2 q^4 R(q)} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) B_+ \right. \\ \left. + \frac{4(k, q) + 16k^2}{\Lambda^4 q^4 R(q)} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) B_{k-} \right. \\ \left. - \frac{2}{\Lambda^4 q^2 R(q)} \left(1 + \frac{2(k, q)}{q^2} \right) \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \left(1 - \frac{1}{R(q)} \right) + \frac{R'(q)}{R(q)} \right) B_+ \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{1}{q^2 R(q)} \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} - 2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) A \right] \right\} V_\phi^A \times$$

$$\times \frac{1}{k^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l)}, \\ (11) = 8e_0^2 Z \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A(\partial^2 \Pi_{1/2}) \left\{ \frac{1}{q^2 \Lambda^2} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) B_+ \right. \quad (\text{B.15})$$

$$+ \frac{(k, q)}{k^2 q^2} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) \left(1 + \frac{k^2 F'(k)}{\Lambda^2 F(k)} \right) A_-$$

$$- \frac{(k, q)}{q^2 \Lambda^4} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) B_{k+}$$

$$- \frac{q^2 + 2(k, q)}{2q^2 \Lambda^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \left(1 - \frac{1}{R(q)} \right) + \frac{R'(q)}{R(q)} \right) \left. \right\} V_\phi^A \times$$

$$\times \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$(12) = 8e_0^2 Z \int \frac{d^4 k d^4 q d^4 l}{(2\pi)^3} V_\phi^A(\partial^2 \Pi_{1/2}) \left\{ -\frac{k^2 + (k, q)}{k^2 q^2 \Lambda^2} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) B_- \right. \quad (\text{B.16})$$

$$- \frac{(k, l)}{l^2 q^2} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) \left(1 + \frac{l^2 F'(l)}{\Lambda^2 F(l)} \right) A_-$$

$$- \frac{(k, q)}{q^2 \Lambda^4} \left(1 + \frac{q^2 R'(q)}{\Lambda^2 R(q)} \right) B_{k+}$$

$$+ \frac{(k+q)^2 - k^2}{2\Lambda^2 q^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \left(1 - \frac{1}{R(q)} \right) + \frac{R'(q)}{R(q)} \right) \left. \right\} V_\phi^A \times$$

$$\times \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},$$

$$\begin{aligned}
(13) &= 4e_0^2 \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[X \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{k^2 F'(k)}{\Lambda^2 F(k)} \right) A_+ \right. \right. \\
&\quad + 2(X - Z) \frac{(k, k+q)}{k^2 \Lambda^2} \left(1 + \frac{k^2 F'(k)}{\Lambda^2 F(k)} \right) A_{k+q} + \\
&\quad + \frac{1}{\Lambda^2} \left(1 + 2 \frac{k^2 F'(k)}{\Lambda^2 F(k)} \right) A_k + (X - Z) \frac{1}{\Lambda^4} B_{k+q} - \\
&\quad \left. \left. - 2(X - Z) \frac{k(k+q)}{\Lambda^6} B_{k,k+q} \right] + 2X A(k, q) \right\} V_\phi^A \times \\
&\quad \times \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
(14) &= 8e_0^2 Z \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{\Lambda^2 R(q)} \left(\frac{q^2}{\Lambda^2} R''(q) + R'(q) \right) \right\} \times \\
&\quad \times V_\phi^A (\partial^2 \Pi_{1/2}) V_\phi^A A(k, q) \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)},
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
(15) &= 2e_0^2 \int \frac{d^4k d^4q d^4l}{(2\pi)^3} V_\phi^A \left\{ -2X A(k, q) + \right. \\
&\quad + (\partial^2 \Pi_{1/2}) \left[\left(-\frac{2X(k, l)}{l^2} \left(1 + \frac{l^2 F'(l)}{\Lambda^2 F(l)} \right) + 1 \right) A_{k-} \right. \\
&\quad - X \left(\frac{1}{k^2} + \frac{k^2 + 2(k, l)}{k^2 l^2} \right) \left(1 + \frac{l^2 F'(l)}{\Lambda^2 F(l)} \right) X A + \\
&\quad + \left. \left[\frac{l(k+q)}{l^2} \left(1 + \frac{l^2 F'(l)}{\Lambda^2 F(l)} \right) + (Z - X) \frac{k^2 + (k, q)}{k^2 \Lambda^4} \right] B_{k+q} - \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(Z - X) \frac{1}{\Lambda^6} \left[k^2 + (k, q) - 2 \frac{k^2(l, k+q)}{l^2} \left(1 + \frac{l^2 F'(l)}{\Lambda^2 F(l)} \right) \right] B_{k,k+q} \right] \right\} V_\phi^A \times \\
&\quad \times \frac{1}{k^2 q^2 l^2 (k+l)^2 F^2(k) F(l) F(k+l) R(q)}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Таким образом, в этом приложении выписаны все необходимые слагаемые для того, чтобы получить после их суммирования выражение (4.5).

Список литературы

1. Grisaru M. T., Siegel W., Rocek M. Improved Methods for Supergraphs // *Nucl. Phys.* — 1979. — Vol. B159. — P. 429.
2. Grisaru M. T., Siegel W. Supergraphity. 2. Manifestly Covariant Rules and Higher Loop Finiteness // *Nucl. Phys.* — 1982. — Vol. B201. — P. 292.
3. Howe P. S., Stelle K. S., Townsend P. K. Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B236. — P. 125–166.
4. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Ovrut B. A. On the $D = 4$, $N=2$ nonrenormalization theorem // *Phys. Lett.* — 1998. — Vol. B433. — P. 335–345.
5. Mandelstam S. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the $N=4$ Model // *Nucl. Phys.* — 1983. — Vol. B213. — P. 149–168.
6. Brink L., Lindgren O., Nilsson B. E. W. $N=4$ Yang-Mills Theory on the Light Cone // *Nucl. Phys.* — 1983. — Vol. B212. — P. 401–412.
7. Golfand Yu. A., Likhtman E. P. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance // *JETP Lett.* — 1971. — Vol. 13. — P. 323–326.
8. Volkov D. V., Akulov V. P. Is the Neutrino a Goldstone Particle? // *Phys. Lett.* — 1973. — Vol. 46B. — P. 109–110.
9. Wess J., Zumino B. Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamics // *Nucl. Phys.* — 1974. — Vol. B78. — P. 1.
10. 't Hooft G., Veltman M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields // *Nucl. Phys.* — 1972. — Vol. B44. — P. 189–213.
11. Bollini C. G., Giambiagi J. J. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter // *Nuovo Cim.* — 1972. — Vol. B12. — P. 20–26.
12. Ashmore J. F. A Method of Gauge Invariant Regularization // *Lett. Nuovo Cim.* — 1972. — Vol. 4. — P. 289–290.

13. Cicuta G. M., Montaldi E. Analytic renormalization via continuous space dimension // *Lett. Nuovo Cim.* — 1972. — Vol. 4. — P. 329–332.
14. Siegel W. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction // *Phys. Lett.* — 1979. — Vol. 84B. — P. 193–196.
15. Siegel W. Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization // *Phys. Lett.* — 1980. — Vol. 94B. — P. 37–40.
16. Avdeev L. V. Noninvariance of Regularization by Dimensional Reduction: An Explicit Example of Supersymmetry Breaking // *Phys. Lett.* — 1982. — Vol. 117B. — P. 317–320.
17. Avdeev L. V., Vladimirov A. A. Dimensional Regularization and Supersymmetry // *Nucl. Phys.* — 1983. — Vol. B219. — P. 262–276.
18. Velizhanin V. N. Three-loop renormalization of the N=1, N=2, N=4 supersymmetric Yang-Mills theories // *Nucl. Phys.* — 2009. — Vol. B818. — P. 95–100.
19. Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories // *Nucl. Phys.* — 1971. — Vol. B31. — P. 301–315.
20. Slavnov A. A. Invariant regularization of gauge theories // *Teor. Mat. Fiz.* — 1972. — Vol. 13. — P. 174–177.
21. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus // *Nucl. Phys.* — 1983. — Vol. B229. — P. 381–393.
22. Jones D. R. T. More on the Axial Anomaly in Supersymmetric Yang-Mills Theory // *Phys. Lett.* — 1983. — Vol. 123B. — P. 45–46.
23. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Beta Function in Supersymmetric Gauge Theories: Instantons Versus Traditional Approach // *Phys. Lett.* — 1986. — Vol. 166B. — P. 329–333.
24. Shifman M. A., Vainshtein A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion // *Nucl. Phys.* — 1986. — Vol. B277. — P. 456.

25. Shifman M. A., Vainshtein A. I. Instantons versus supersymmetry: Fifteen years later // In *Shifman, M.A.: ITEP lectures on particle physics and field theory, vol. 2* 485-647. — 1999.
26. Kraus E., Rupp C., Sibold K. Supersymmetric Yang-Mills theories with local coupling: The Supersymmetric gauge // *Nucl. Phys.* — 2003. — Vol. B661. — P. 83–98.
27. Arkani-Hamed N., Murayama H. Holomorphy, rescaling anomalies and exact beta functions in supersymmetric gauge theories // *JHEP.* — 2000. — Vol. 06. — P. 030.
28. Jack I., Jones D. R. T., North C. G. N=1 supersymmetry and the three loop gauge Beta function // *Phys. Lett.* — 1996. — Vol. B386. — P. 138–140.
29. Jack I., Jones D. R. T., North C. G. Scheme dependence and the NSVZ Beta function // *Nucl. Phys.* — 1997. — Vol. B486. — P. 479–499.
30. Jack I., Jones D. R. T., Pickering A. The Connection between DRED and NSVZ // *Phys. Lett.* — 1998. — Vol. B435. — P. 61–66.
31. Harlander R. V., Jones D. R. T., Kant et al. P. Four-loop beta function and mass anomalous dimension in dimensional reduction // *JHEP.* — 2006. — Vol. 12. — P. 024.
32. Mihaila L. Precision Calculations in Supersymmetric Theories // *Adv. High Energy Phys.* — 2013. — Vol. 2013. — P. 607807.
33. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. Scheme independent consequence of the NSVZ relation for N=1 SQED with N_f flavors // *Phys. Lett.* — 2014. — Vol. B730. — P. 184–189.
34. Kutasov D., Schwimmer A. Lagrange multipliers and couplings in supersymmetric field theory // *Nucl. Phys.* — 2004. — Vol. B702. — P. 369–379.
35. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. The NSVZ beta-function in supersymmetric theories with different regularizations and renormalization prescriptions // *Theor. Math. Phys.* — 2014. — Vol. 181. — P. 1531–1540.
36. Aleshin S. S., Goriachuk I. O., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. The NSVZ

- scheme for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by the dimensional reduction, in the three-loop approximation // *Phys. Lett.* — 2017. — Vol. B764. — P. 222–227.
37. Slavnov A. A. The Pauli-Villars Regularization for Nonabelian Gauge Theories // *Teor. Mat. Fiz.* — 1977. — Vol. 33. — P. 210–217.
 38. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED // *Nucl. Phys.* — 2013. — Vol. B875. — P. 459–482.
 39. Krivoshchekov V. K. Invariant Regularizations for Supersymmetric Gauge Theories // *Teor. Mat. Fiz.* — 1978. — Vol. 36. — P. 291–302.
 40. West P. C. Higher Derivative Regulation of Supersymmetric Theories // *Nucl. Phys.* — 1986. — Vol. B268. — P. 113–124.
 41. Krivoshchekov V. K. Invariant regularization for n=2 superfield perturbation theory // *Phys. Lett.* — 1984. — Vol. 149B. — P. 128–130.
 42. Buchbinder I. L., Stepanyantz K. V. The higher derivative regularization and quantum corrections in N=2 supersymmetric theories // *Nucl. Phys.* — 2014. — Vol. B883. — P. 20–44.
 43. Buchbinder I. L., Pletnev N. G., Stepanyantz K. V. Manifestly N=2 supersymmetric regularization for N=2 supersymmetric field theories // *Phys. Lett.* — 2015. — Vol. B751. — P. 434–441.
 44. Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ β -function in N=1 SQED, regularized by higher derivatives, by direct summation of Feynman diagrams // *Nucl. Phys.* — 2011. — Vol. B852. — P. 71–107.
 45. Stepanyantz K. V. The NSVZ β -function and the Schwinger-Dyson equations for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by higher derivatives // *JHEP*. — 2014. — Vol. 08. — P. 096.
 46. Kazantsev A. E., Stepanyantz K. V. Relation between two-point Green's functions of $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by higher derivatives, in the three-loop approximation // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2015. — Vol. 120,

- no. 4. — P. 618–631.
47. Soloshenko A. A., Stepanyantz K. V. Three loop beta function for N=1 supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives // *Theor. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 140. — P. 1264–1282.
 48. Smilga A. V., Vainshtein A. Background field calculations and nonrenormalization theorems in 4-D supersymmetric gauge theories and their low-dimensional descendants // *Nucl. Phys.* — 2005. — Vol. B704. — P. 445–474.
 49. Adler S. L. Some Simple Vacuum Polarization Phenomenology: $e^+e^- \rightarrow$ Hadrons: The μ - Mesic Atom x-Ray Discrepancy and g_μ^{-2} // *Phys. Rev.* — 1974. — Vol. D10. — P. 3714.
 50. Shifman M., Stepanyantz K. Exact Adler Function in Supersymmetric QCD // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114, no. 5. — P. 051601.
 51. Shifman M., Stepanyantz K. V. Derivation of the exact expression for the D function in N=1 SQCD // *Phys. Rev.* — 2015. — Vol. D91. — P. 105008.
 52. Nartsev I. V., Stepanyantz K. V. Exact renormalization of the photino mass in softly broken $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors regularized by higher derivatives // *JHEP*. — 2017. — Vol. 04. — P. 047.
 53. Pimenov A. B., Stepanyantz K. V. Four-loop verification of algorithm for Feynman diagrams summation in N=1 supersymmetric electrodynamics // *Theor. Math. Phys.* — 2006. — Vol. 147. — P. 687–697.
 54. Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the $V\bar{c}c$ -vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories // *Nucl. Phys.* — 2016. — Vol. B909. — P. 316–335.
 55. Pimenov A. B., Shevtsova E. S., Stepanyantz K. V. Calculation of two-loop beta-function for general N=1 supersymmetric Yang–Mills theory with the higher covariant derivative regularization // *Phys. Lett.* — 2010. — Vol. B686. — P. 293–297.
 56. Stepanyantz K. V. Higher covariant derivative regularization for calculations in supersymmetric theories // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. — 2011. — Vol. 272, no. 1. — P. 256.

57. Stepanyantz K. V. Factorization of integrals defining the two-loop β -function for the general renormalizable N=1 SYM theory, regularized by the higher covariant derivatives, into integrals of double total derivatives // arXiv:1108.1491 [hep-th]. — 2011.
58. Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ beta-function in N=1 SQED regularized by higher derivatives by summation of Feynman diagrams // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2012. — Vol. 343. — P. 012115.
59. Aleshin S. S., Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop divergences in non-Abelian supersymmetric theories regularized by BRST-invariant version of the higher derivative regularization // *JHEP*. — 2016. — Vol. 05. — P. 014.
60. Shakhmanov V. Yu., Stepanyantz K. V. Three-loop NSVZ relation for terms quartic in the Yukawa couplings with the higher covariant derivative regularization // *Nucl. Phys.* — 2017. — Vol. B920. — P. 345–367.
61. Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for $\mathcal{N} = 1$ SYM regularized by higher derivatives // *Mod. Phys. Lett.* — 2017. — Vol. A32, no. 36. — P. 1750194.
62. Taylor J. C. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field // *Nucl. Phys.* — 1971. — Vol. B33. — P. 436–444.
63. Slavnov A. A. Ward Identities in Gauge Theories // *Theor. Math. Phys.* — 1972. — Vol. 10. — P. 99–107.
64. Slavnov A. A. Universal gauge invariant renormalization // *Phys. Lett.* — 2001. — Vol. B518. — P. 195–200.
65. Slavnov A. A. Regularization-independent gauge-invariant renormalization of the Yang-Mills theory // *Theor. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 130. — P. 1–10.
66. Slavnov A. A., Stepanyantz K. V. Universal invariant renormalization for supersymmetric theories // *Theor. Math. Phys.* — 2003. — Vol. 135. — P. 673–684.

67. Slavnov A. A., Stepanyantz K. V. Universal invariant renormalization of supersymmetric Yang-Mills theory // *Theor. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 139. — P. 599–608.
68. Stepanyantz K. V. Multiloop calculations in supersymmetric theories with the higher covariant derivative regularization // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2012. — Vol. 368. — P. 012052.
69. Shakhmanov V. Yu., Stepanyantz K. V. New form of the NSVZ relation at the two-loop level // *Phys. Lett.* — 2018. — Vol. B776. — P. 417–423.
70. Bogolyubov N. N., Shirkov D. V. Introduction to the theory of quantized fields // *Intersci. Monogr. Phys. Astron.* — 1959. — Vol. 3. — P. 1–720.
71. Nartsev I. V., Stepanyantz K. V. NSVZ-like scheme for the photino mass in softly broken $\mathcal{N} = 1$ SQED regularized by higher derivatives // *JETP Lett.* — 2017. — Vol. 105, no. 2. — P. 69–73.
72. West P. C. Introduction to supersymmetry and supergravity. — 1990.
73. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace. — 1998.
74. DeWitt B. S. Dynamical theory of groups and fields // *Conf. Proc.* — 1964. — Vol. C630701. — P. 585–820.
75. Abbott L. F. The Background Field Method Beyond One Loop // *Nucl. Phys.* — 1981. — Vol. B185. — P. 189–203.
76. Abbott L. F. Introduction to the Background Field Method // *Acta Phys. Polon.* — 1982. — Vol. B13. — P. 33.
77. Faddeev L. D., Slavnov A. A. Gauge fields. Introduction to quantum theory // *Front. Phys.* — 1980. — Vol. 50. — P. 1–232.
78. Slavnov A. A. Renormalization of Supersymmetric Gauge Theories. 2. Non-abelian Case // *Nucl. Phys.* — 1975. — Vol. B97. — P. 155–164.
79. Ferrara S., Piguet O. Perturbation theory and renormalization of supersymmetric yang-mills theories // *Nuclear Physics B.* — 1975. — Vol. 93, no. 2. — P. 261 – 302.

80. Piguet O., Rouet A. Supersymmetric BPHZ Renormalization. 2. Supersymmetric Extension of Pure Yang-Mills Model // *Nucl. Phys.* — 1976. — Vol. B108. — P. 265–274.
81. Piguet O., Sibold K. Renormalization of $N = 1$ Supersymmetrical Yang-Mills Theories. 2. The Radiative Corrections // *Nucl. Phys.* — 1982. — Vol. B197. — P. 272–289.
82. Shevtsova E. S., Stepanyantz K. V. Structure of the two-point green function of the gauge field for $n=1$ supersymmetric yang-mills theory regularized by higher covariant derivatives // *Moscow University Physics Bulletin.* — 2009. — Vol. 64, no. 5. — P. 485–487.
83. Казанцев А. Е. Многопетлевые вычисления и точные результаты в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 // <https://istina.msu.ru/dissertations/105381024> — Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018.
84. Soloshenko A., Stepanyantz K. Two loop renormalization of $N=1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives // arXiv:hep-th/0203118. — 2002.
85. Soloshenko A. A., Stepanyants K. V. Two-loop anomalous dimension of $N = 1$ supersymmetric quantum electrodynamics regularized using higher covariant derivatives // *Theor. Math. Phys.* — 2003. — Vol. 134. — P. 377–391.