

Л.С. Файнзильберг

Эффективная процедура подавления сосредоточенных гармонических помех при цифровой обработке сигналов сложной формы

Рассмотрен подход к построению узкополосного режекторного фильтра, основанный на прямом и обратном дискретном преобразовании Фурье. Отличительной особенностью предложенного алгоритма является применение дополнительной поисковой процедуры, обеспечивающей уменьшение эффекта «растекания» спектра. Приведены результаты тестирования разработанного алгоритма на реальных и модельных примерах.

An approach to construction of narrowband harmonic filter based on the direct and inverse discrete Fourier transformation is considered. A distinctive feature of the suggested algorithm is the use of the additional search procedure providing the reduction of the spectrum leakage effect. The results of testing of the developed algorithm on real and modeling examples are given.

Розглянуто підхід до побудови вузькосмугового режекторного фільтра, заснованого на прямому та зворотному дискретному перетворенні Фур'є. Особливістю запропонованого алгоритму є використання додаткової пошукової процедури, що забезпечує зменшення ефекту «розмивання» спектру. Наведено результати тестування створеного алгоритму на реальних та модельних прикладах.

Введение. Цифровая фильтрация – одна из центральных задач компьютерных технологий обработки сигналов [1]. Существуют различные подходы к решению этой задачи [2, 3]. Когда модель полезного сигнала может быть описана аналитической функцией, задача фильтрации сводится к оптимальной оценке неизвестных параметров этой функции по наблюдаемой реализации [4, 5].

Однако на практике часто приходится фильтровать сигналы сложной формы, которые невозможно описать аналитической функцией, заданной с точностью до небольшого числа параметров. К таким сигналам в первую очередь относятся электрокардиограммы (ЭКГ), магнитокardiограммы (МКГ), реограммы и другие физиологические сигналы, порождаемые живым организмом. Проблема фильтрации этих сигналов состоит в том, что ценная информация о состоянии объекта сосредоточена на небольших фрагментах области определения сигнала. Поэтому, если в результате фильтрации происходят даже незначительные искажения формы информативных фрагментов, то такие искажения могут привести к ошибочной диагностике [6, 7].

В статье описано развитие одного из возможных подходов к эффективной фильтрации стационарных гармонических помех при компьютерной обработке сигналов сложной формы.

Постановка задачи

Пусть наблюдаемый сигнал задан последовательностью дискретных значений $y[k] \equiv y(t_k)$ в равноотстоящие моменты времени $t_k \equiv k\Delta$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, где Δ – шаг квантования по времени. Предполагается, что наблюдаемый сигнал $y[k] = y_0[k] + h[k]$ представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала $y_0[k]$ и помехи $h[k]$ в виде суммы стационарных гармонических колебаний

$$h[k] = \sum_{g=1}^G a_g \sin(2\pi f_g k + \varphi_g), \quad (1)$$

где a_g, f_g, φ_g – соответственно амплитуда, частота и начальная фаза g -й гармоники.

Допускается, что величины a_g, φ_g заранее неизвестны, а частоты f_g гармоник известны лишь с точностью до ограничений f_g^{\min}, f_g^{\max} сверху и снизу, т.е.

$$f_g^{\min} \leq f_g \leq f_g^{\max}, \quad (2)$$

причем диапазоны $\Delta_g = f_g^{\max} - f_g^{\min}$ могут совпадать с областями нагруженных частот полезного сигнала $y_0[\cdot]$.

При таких априорных сведениях ставится задача построить режекторный фильтр, обеспечивающий эффективное подавление гармонической помехи (1) при минимальных искажениях формы полезного сигнала $y_0[\cdot]$.

Проблема построения узкополосного режекторного фильтра

Для подавления помехи (1) необходимо воспользоваться каскадом режекторных фильтров, каждый из которых настроен на заграждение g -й гармоники. Алгоритм фильтрации физически реализуем в реальном масштабе времени, если для получения фильтрованного значения $y_{\text{вых}}[k]$ в k -й момент времени используется информация, полученная в моменты времени $k, k-1, k-2$ и т.д. В общем случае [8] цифровой фильтр суммирует (с весовыми коэффициентами a_i, b_i) некоторое количество входных значений сигнала $y_{\text{вх}}[\cdot]$ и некоторое количество предыдущих фильтрованных значений $y_{\text{вых}}[\cdot]$:

$$y_{\text{вых}}[k] = b_0 y_{\text{вх}}[k] + b_1 y_{\text{вх}}[k-1] + \dots + b_m y_{\text{вх}}[k-m] - a_1 y_{\text{вых}}[k-1] - a_2 y_{\text{вых}}[k-2] - \dots - a_n y_{\text{вых}}[k-n]. \quad (3)$$

В частном случае, когда алгоритм не использует предыдущие фильтрованные значения, т.е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, уравнение фильтра сводится к дискретной свертке

$$y_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^m b_i y_{\text{вх}}[k-i]. \quad (4)$$

Фильтр, реализующий алгоритм (4), называют нерекурсивным фильтром m -го порядка, который, в отличие от рекурсивного фильтра (3), всегда устойчив [8].

Известно, что задача синтеза цифрового фильтра сводится к выбору порядка m и определению значений параметров a_i, b_i . В тех случаях, когда фазовые характеристики фильтра не важны, такая задача сводится к аппроксимации желаемой амплитудно-частотной характеристики, обеспечивающей минимум p -нормы отклонения, в частности, среднеквадратической ошибке ($p = 2$) либо максимальному отклонению по модулю ($p \rightarrow \infty$) [8].

Поскольку в общем случае такая задача не имеет аналитического решения [8, с. 319], на практике используют различные численные алгоритмы, в частности, метод, основанный на решении системы уравнений Юла-Уокера, ме-

тод экспоненциального оценивания Прони и ряд других субоптимальных методов синтеза фильтра.

Следует, однако, заметить, что даже при высоком порядке фильтра невозможно получить «идеальную» амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) прямоугольной формы (рис. 1, *a*), обеспечивающую полное подавление частот в полосе заграждения без искажения сигнала в полосе пропускания. Помимо основных параметров (частотных границ полос пропускания f_p и задержания f_s) на практике приходится проектировать режекторный фильтр с учетом дополнительных требований – допустимой неравномерности АЧХ в полосе пропускания R_p и минимально необходимого затухания в полосе заграждения R_s (рис. 1, *б*).

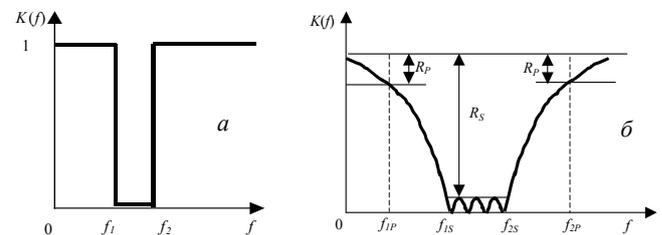


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики «идеального» (*a*) и реального (*б*) режекторного фильтра

Особые трудности синтеза режекторных фильтров возникают в тех случаях, когда необходимо обеспечить заграждение узкополосной помехи, сосредоточенной в полосе нагруженных частот полезного сигнала. При уменьшении интервала режекции $\Delta_f = f_{2s} - f_{1s}$ увеличиваются параметры R_p, R_s , что неизбежно приводит к искажениям формы информативных фрагментов полезного сигнала.

Поэтому для решения поставленной задачи воспользуемся другим известным приемом подавления сосредоточенных гармонических помех, который основан на блочной обработке массива накопленных данных $y[1], \dots, y[K]$ в частотной области на основе прямого и обратного дискретного преобразования Фурье.

Блочный алгоритм фильтрации гармонических помех

Прежде чем перейти к описанию предлагаемого метода, остановимся кратко на исто-

рии преобразования Фурье, выделив те детали, которые будут нужны в дальнейших исследованиях.

В общем случае преобразование Фурье можно трактовать как взаимно однозначный переход от некоторой функции $y(t)$ действительного аргумента t (не обязательно времени) к другой функции $Y(f)$, аргумент которой $f=1/t$. В частном случае, когда t – время, преобразование Фурье дает частотное представление сигнала $y(t)$.

Теория преобразования Фурье началась еще в 1822 г., когда французский математик Жан Батист Жозеф Фурье заметил, что практически любая периодическая функция $y(t)$ может быть разложена в тригонометрический ряд

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi t}{T} n + b_n \sin \frac{2\pi t}{T} n \right), \quad (5)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ – период функции, ω – круговая частота, а f – частота, измеряемая в герцах. На основании известной формулы Эйлера ряд Фурье (5) может быть представлен в комплексной форме

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{i(2\pi n f)t}, \quad (6)$$

причем комплексные числа Y_n (комплексные амплитуды гармонических составляющих), вычисляются по формуле

$$Y_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-i(2\pi n f)t} dt. \quad (7)$$

Таким образом, частотный спектр периодического сигнала состоит из частот $f_n = nf$, $n=0, 1, 2, \dots$, кратных его основной (базовой) частоте f , причем, если комплексную амплитуду Y_n представить в виде $Y_n = \frac{C_n}{2} e^{i\varphi_n}$, то величина C_n определит амплитуду, а величина φ_n – начальную фазу гармонической составляющей $C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ с частотой $f_n = nf$ [9].

Много лет спустя сформулированное Ж. Фурье свойство периодических функций было обобщено на непериодические функции. Именно это обобщение и принято называть преобразованием Фурье, которое формально определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} Y(f) &= \Phi[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i(2\pi f)t} dt, \\ y(t) &= \Phi^{-1}[Y(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{i(2\pi f)t} df. \end{aligned} \right\} (8)$$

Соотношения (8) называют соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье. Они справедливы, если функция $y(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле – ограничена, кусочно-непрерывна и имеет конечное число экстремумов.

Дальнейшим развитием теории преобразований Фурье явилось его обобщение на важный в практическом плане случай дискретной функции $y(t) \rightarrow y(t_k)$, представленной конечной последовательностью значений $y[k] \equiv y(t_k)$ в равноотстоящие моменты времени $t_k \equiv k\Delta$, $k=0, 1, \dots, K-1$, где Δ – шаг квантования по времени. Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) реализуется на основе соотношений [9]

$$Y_n = \sum_{k=0}^{K-1} y[k] e^{-2\pi i n k / K}, \quad (9)$$

$$y[k] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} Y_n e^{2\pi i n k / K}. \quad (10)$$

Как видно из (9), прямое ДПФ позволяет разложить (декомпозировать) сигнал $y[k]$, зафиксированный с шагом квантования Δ в K точках ограниченного временного интервала $K\Delta$ (в секундах), на K гармонических компонент с частотами (в герцах):

$$f_n = \frac{n}{K\Delta}, \quad n = -K/2, \dots, 0, \dots, K/2. \quad (11)$$

При этом выполняется условие симметрии комплексных амплитуд гармонических компонент, т.е. $Y_{-n} = Y_{K-n}$, $\forall n = 1, \dots, K/2$.

Переломным этапом в развитии преобразований Фурье явилась работа [10], в которой впервые был предложен быстрый алгоритм вычисления ДПФ, впоследствии названный алгоритмом быстрого преобразования Фурье (БПФ). Главная идея БПФ основана на применении рекурсивной процедуры вычисления ДПФ K -точечного сигнала суммой двух ДПФ, вычисленных отдельно для четных и нечетных точек.

Такая процедура позволяет сократить число вычислительных операций с $2K^2$ до $2K \log_2 K$, если K – целая степень числа два. В силу линейности процедуры преобразования Фурье [11] легко показать, что алгоритм БПФ можно использовать при любом числе точек, доопределив нулями недостающие члены временного ряда до ближайшего K , кратного двум.

Поскольку модули $|Y_n|$, $n = -K/2, \dots, 0, \dots, K/2$ ДПФ определяют амплитуды спектральных компонент обрабатываемого сигнала, то на основе процедур FFT и $IFFT$, реализующих прямое и обратное БПФ, можно построить алгоритм блочной фильтрации сигнала, суть которого состоит в следующем.

В силу линейности преобразования Фурье для аддитивной помехи спектр $S\{y\} = S\{y_0\} + S\{h\}$ наблюдаемого сигнала $y[\cdot]$, построенный на основании прямого ДПФ, равен сумме спектров $S\{y_0\}$, $S\{h\}$ полезного сигнала $y_0[\cdot]$ и помехи $h[\cdot]$. Кроме того известно [9], что процедуры FFT и $IFFT$ взаимно обратимы, т.е. для любого вектора $Y = (y[1], \dots, y[K])$ с точностью до малых погрешностей округления справедливо равенство

$$IFFT(FFT(Y)) = Y. \quad (12)$$

Из (12), казалось бы, следует, что для заграждения стационарной гармонической помехи (1), достаточно выполнить последовательность всего лишь трех операций:

- построить спектр $S\{y\} = S\{y_0\} + S\{h\}$ наблюдаемого сигнала на основе FFT ;
- подавить составляющие спектра $S\{h\}$, соответствующие частотам помехи $h(\cdot)$;

– провести обратное преобразование на основе $IFFT$ для восстановления полезного сигнала $y_0[\cdot]$ во временной области (рис. 2).

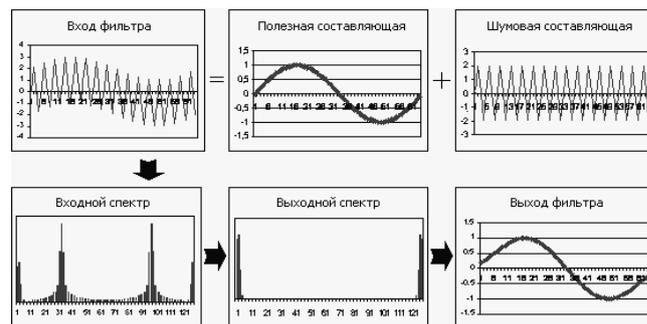


Рис. 2. Идея заградительного фильтра, построенного на основе ДПФ

Однако такой привлекательный прием не всегда эффективен. Дело в том, что спектр дискретного гармонического сигнала

$$h_g[k] = a_g \sin(2\pi f_g k + \varphi_g),$$

построенный на основании прямого ДПФ, «адекватен» истинному спектру помехи $h_g(\cdot)$ только в том случае, когда ее частота f_g совпадает с одной из частот разложения Фурье.

Если же это условие не выполняется, то спектр гармонической помехи будет «распределяться» на целый ряд смежных частот. Такой эффект в научной литературе принято называть *растеканием* спектра (*Spectrum Leakage*) дискретного гармонического сигнала [8, с. 270].

Для иллюстрации этого эффекта рассмотрим спектры двух дискретных гармонических сигналов

$$h_1[k] = \sin(2\pi f_1 \Delta k) \text{ и } h_2[k] = \sin(2\pi f_2 \Delta k), \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (13)$$

с близкими частотами $f_1 = 16,50$ Гц и $f_2 = 16,52$ Гц при шаге квантования по времени $\Delta = 0,001$ с (частоте дискретизации $f_D = 1/\Delta = 1000$ Гц).

На рис. 3 показаны фрагменты спектров этих сигналов, построенные на основе ДПФ по $K = 30000$ точек. Как видно, только в первом случае (рис. 3,а), когда частота сигнала в точности совпала с одной из частот разложения Фурье, построенный спектр адекватен реаль-

ной ситуации. Во втором случае, когда это условие не выполняется, наблюдается эффект растекания спектра (рис. 3,б).

Отсюда следует, что если в общем случае для фильтрации помехи подавлять *все* составляющие ДПФ, на которые в результате растекания спектра распределилась нагрузка помехи, то при близких частотах помехи и сигнала неизбежно придется затронуть составляющие, несущие информацию о полезном сигнале, и в результате после обратного преобразования Фурье полезный сигнал будет искажен.

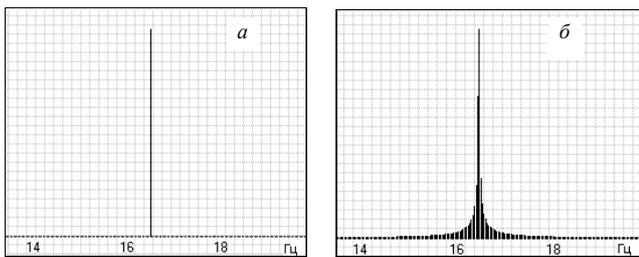


Рис. 3. Спектры дискретных гармонических сигналов (13):
а – кратная частота f_1 ; б – некратная частота f_2

Понятно, что для построения эффективной процедуры подавления сосредоточенных гармонических помех (1) требуется устранить или хотя бы снизить эффект растекания спектра дискретного гармонического сигнала. Поскольку этот эффект вытекает из самой природы ДПФ [8, с. 270], остановимся на нем более подробно.

Рассмотрим дискретный гармонический сигнал

$$h[k] = a \cos(\omega k \Delta + \varphi), \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (14)$$

где a – амплитуда, Δ – шаг квантования по времени, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.

Если конечная последовательность (14) содержит целое число периодов анализируемого сигнала, т.е. если отношение $K\omega\Delta/2\pi$ – целое число, то периодически продолженный сигнал (14) представляет собой гармоническое колебание (без скачков). В этом случае подстановка (14) в формулу (9) показывает, что вычисленное ДПФ содержит всего лишь два спектральных отсчета, отличных от нуля:

$$Y_n = \begin{cases} \frac{aK}{2} e^{i\varphi}, & \text{при } n = \frac{\omega\Delta}{2\pi} K, \\ \frac{aK}{2} e^{-i\varphi}, & \text{при } n = (1 - \frac{\omega\Delta}{2\pi}) K, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, аналогично спектру непрерывного гармонического сигнала, ДПФ отличается от нуля всего для двух значений n . Заметим, что на рис. 3,а показана лишь одна из этих двух составляющих спектра (при положительном значении частоты).

Если же отношение $K\omega\Delta/2\pi$ не является целым числом, то периодически продолженная последовательность (14) уже не соответствует набору дискретных значений непрерывной косинусоиды. Поэтому, в полном соответствии со свойствами ДПФ, спектр оказывается значительно более богатым и в нем появляются дополнительные составляющие (рис. 3,б).

Эффект растекания спектра можно пояснить иначе. ДПФ представляет собой не что иное как тригонометрический полином, который оптимально аппроксимирует входной сигнал. Понятно, что если среди базовых гармоник разложения ДПФ не найдется компонента, частота которой *в точности* совпадает с частотой аппроксимируемого гармонического колебания, то ДПФ аппроксимирует это колебание целым рядом ближайших гармоник.

Известным приемом ослабления эффекта растекания спектра является умножение сигнала на весовую функцию $W(k)$ [12], имеющую максимум в центральной точке сигнала ($k = K/2$) и плавно спадающую к краям ($k = 0$ и $k = K-1$). В этом случае формула ДПФ принимает вид

$$Y_n(W) = \sum_{k=0}^{K-1} W[k] y[k] e^{-i \frac{2\pi nk}{K}}.$$

Считается, что при удачном выборе $W(k)$ можно несколько ослабить эффекты, связанные с возникновением скачков сигнала при периодическом повторении анализируемой конечной последовательности, и, таким образом,

ослабить эффект растекания спектра. Однако неизбежной платой за использование весовой функции $W(k)$ является искажение спектра полезного сигнала, что недопустимо при обработке сигналов с локально сосредоточенными признаками.

В связи с изложенным возникает естественное желание найти способ борьбы собственно с явлением, породившим растекание спектра, а не с его следствием. Другими словами, попытаемся модифицировать массив обрабатываемых данных так, чтобы получить адекватный спектр гармонического колебания на основе традиционного алгоритма ДПФ без использования весовой функции $W(k)$.

Предлагаемый алгоритм

Для достижения цели предлагается процедура автоматического подбора оптимального числа $K_{\text{opt}} \leq K$ элементов массива, при обработке которого эффект растекания спектра сосредоточенной гармонической помехи будет устранен или, по крайней мере, ослаблен.

Понятно, что при неизвестной частоте ω помехи невозможно аналитически определить оптимальное значение K_{opt} , при котором отношение $K_{\text{opt}} \omega \Delta_v / 2\pi$ будет целым числом. Более того, для любого значения ω всегда можно указать такой шаг квантования по времени Δ , при котором периодическое продолжение конечной последовательности дискретных значений гармонического сигнала $h[k] = a \sin(\omega \Delta k + \varphi)$, $k = 0, \dots, K-1$ не будет соот-

ветствовать дискретным значениям непрерывной синусоиды $h(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$.

Поэтому для определения K_{opt} предлагается поисковая процедура, идея построения которой состоит в следующем.

Поскольку предполагается, что помеха $h_g[\cdot]$ сосредоточена на некоторой фиксированной частоте f_g , но в результате растекания спектра ее мощность распределена на целый ряд смежных частот, то при ослаблении эффекта растекания неизбежно происходит увеличение амплитуды спектральной компоненты ДПФ, частота которой близка к f_g .

Отсюда следует, что если построить семейство спектральных плотностей $S_K\{\}, S_{K-1}\{\}, S_{K-2}\{\}, \dots$ при постепенно уменьшающейся длине K обрабатываемого массива, то среди $S_K\{\}, S_{K-1}\{\}, S_{K-2}\{\}, \dots$ найдется такая спектральная плотность, при которой спектральная составляющая, соответствующая частоте f_g помехи, будет иметь наибольшее значение. Найденная таким образом спектральная плотность и определит оптимальное значение K_{opt} .

На рис. 4 показаны примеры спектральных плотностей, построенные на основе ДПФ для гармонического колебания $h[k] = \sin(2\pi f_g k)$, $k = 0, \dots, K-1$ с частотой $f_g = 20,127$ Гц ($\Delta = 0,001$ с) при различных значениях длины K обрабатываемого массива. Видно, что при постепенном уменьшении числа обрабатываемых точек от значения $K = 3000$ до $K = 2970$

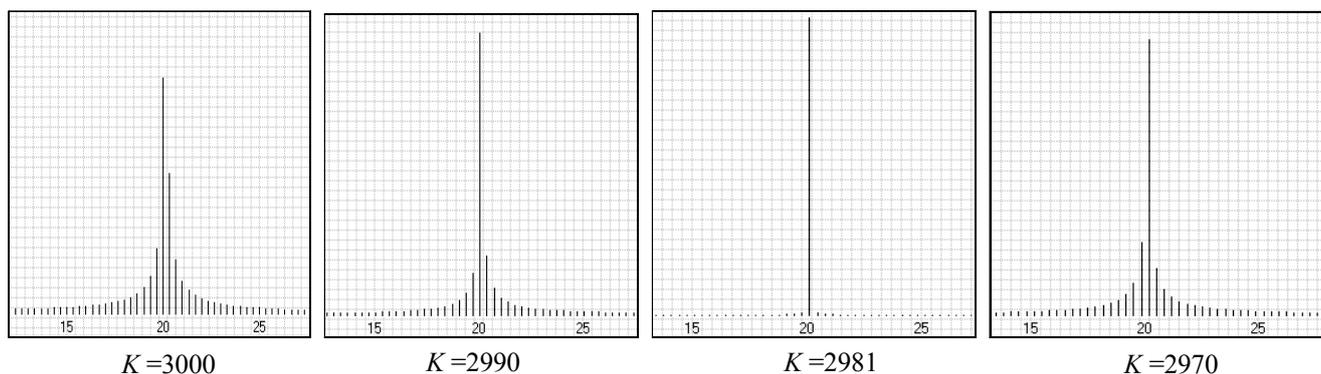


Рис. 4. Спектральные плотности сигнала $h[n] = \sin(2\pi f_g \Delta k)$, $f_g = 20,127$ Гц, $\Delta = 0,001$ с при различных значениях длины K обрабатываемого массива

эффект растекания спектра вначале ослабевает, а затем снова усиливается. При этом наибольшее значение амплитуда спектральной плотности приобретает при оптимальном значении $K_{\text{opt}} = 2981$.

Для ускорения поиска K_{opt} следует учесть ограничения f_g^{\min}, f_g^{\max} интервала частот, на котором предположительно сосредоточена гармоническая помеха, а также задать некоторое допустимое уменьшение числа точек δ_K в обрабатываемом массиве. В результате приходим к следующему алгоритму.

Шаг 1. Последовательно сокращаем длину массива, уменьшая число K_j обрабатываемых точек от начального значения K до $K - \delta_K$.

Шаг 2. Используя процедуру *FFT*, строим семейство спектров $S_K \{\}, S_{K-1} \{\}, S_{K-2} \{\}, \dots$ для различных значений K_j , т.е. вычисляем спектральные компоненты $C_n(K_j)$, $n = -K_j/2, \dots, 0, \dots, K_j/2$ для каждого $K_j \in [K - \delta_K, K]$.

Шаг 3. По семейству построенных спектральных плотностей определяем оптимальное значение K_{opt} , удовлетворяющее условию

$$K_{\text{opt}} = \arg \max_{K_j \in [K - \delta_K, K]} \left\{ \frac{\max_{n \in \Omega_h} C_n(K_j)}{\sum_{n \in \Omega_h} C_n(K_j)} \right\},$$

где Ω_h – множество номеров спектральных компонент с частотами, принадлежащими интервалу $[f_g^{\min}, f_g^{\max}]$.

Шаг 4. В качестве оценки частоты f_g гармонической помехи принимаем значение максимальной спектральной компоненты на интервале $[f_g^{\min}, f_g^{\max}]$, вычисленную при K_{opt} .

Шаг 5. Модифицируем спектр, обнуляя компоненты, соответствующие найденной частоте f_g и «отрицательной» частоте $-f_g$.

Шаг 6. Используя процедуру *IFFT*, по модифицированному спектру восстанавливаем полезный сигнал во временной области.

Заметим, что рассмотренный алгоритм подавления сосредоточенной гармонической по-

мехи может быть реализован иным путем, когда проводится доопределение нулями исходного K -точечного массива данных до некоторого большего числа $K + \delta_K$ и соответствующий анализ семейства спектральных плотностей $S_K \{\}, S_{K+1} \{\}, S_{K+2} \{\}, \dots, S_{K+\delta_K} \{\}$.

Продемонстрируем эффективность предложенного алгоритма на примере фильтрации реальной ЭКГ.

Известно, что обработка ЭКГ (рис. 5,а) основана на анализе формы информативных фрагментов, отражающих стадии возбуждения отдельных участков сердечной мышцы [13]. Однако в результате наложения гармонической помехи с частотой 16,68 Гц, амплитуда которой составляла 50% диапазона изменения полезного сигнала, наблюдаемый сигнал (рис. 5,б) существенно искажен и провести детальный анализ формы его фрагментов невозможно. Тем не менее, предложенный алгоритм фильтрации позволил подавить частотную помеху, полностью сохранив форму полезного сигнала (рис. 5,в).

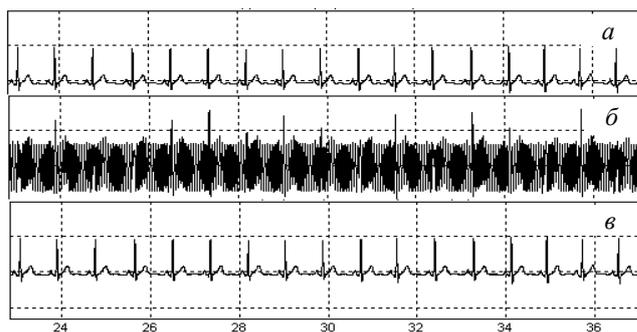


Рис. 5. Частотная фильтрация ЭКГ (модельный пример): а – полезный сигнал, б – зашумленный сигнал, в – результат фильтрации

Отметим, что в данном случае частота 16,68 Гц помехи расположена в области 0–85 Гц нагруженных частот полезного сигнала (рис. 6), причем вследствие эффекта растекания спектра основная мощность помехи распределена на интервале 13–19 Гц.

Поясним еще раз детали предложенного алгоритма, используя результаты приведенного эксперимента. Исходная длина обрабатываемого массива составляла $K = 30000$ точек. Согласно выражению (11) уменьшение длины об-

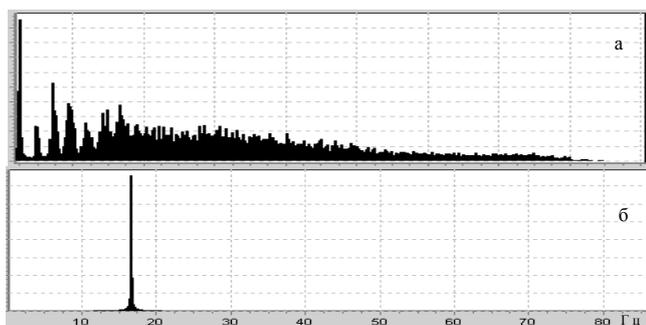


Рис. 6. Спектры: *a* – полезного сигнала, *б* – гармонической помехи 16,48 Гц

рабатываемого массива от K до $K - \delta_K$ точек приводит к изменению шага Δ_f базовых частот f_n спектральных компонент ДПФ, которые аппроксимируют обрабатываемый сигнал.

Поскольку, как отмечалось, гармоническая помеха аддитивна, а преобразование Фурье – линейно, можно отдельно рассматривать спектры полезного сигнала и помехи. При постепенном уменьшении длины обрабатываемого массива происходит перераспределение нагруженных частот как помехи, так и полезного сигнала (рис. 7).

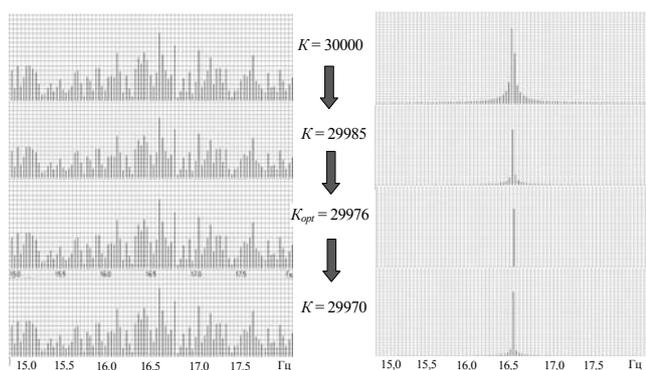


Рис. 7. Семейства спектров полезного сигнала (левая часть) и аддитивной помехи (правая часть) при различном числе K точек

Перераспределение нагруженных частот спектра полезного сигнала (рис. 7, левая часть) не приводит к каким-либо нежелательным последствиям, поскольку в силу свойства (12) всегда можно точно восстановить полезный сигнал по сокращенному массиву. Главный же эффект предложенного алгоритма сводится к уменьшению растекания спектра гармонической помехи. Как только длина массива умень-

шилась до значения $K_{opt} = 29976$ точек, эффект растекания оказался минимальным (рис. 7, правая часть). Это дает возможность сократить полосу режекции вплоть до подавления всего лишь одной спектральной компоненты ДПФ, в точности совпадающей с частотой помехи. Остальные гармоники не затрагиваются, что и обеспечивает сохранение формы полезного сигнала.

Напомним, что для использования предложенного фильтра достаточно указать лишь интервал (2) поиска гармонической помехи, а частота помехи определяется автоматически.

На основе предлагаемого подхода разработан программный вычислительный модуль узкополосного режекторного фильтра (рис. 8). При его реализации использована процедура Матео Фридо и Стевена Джонсона [14], в настоящее время признанная одной из лучших процедур БПФ.

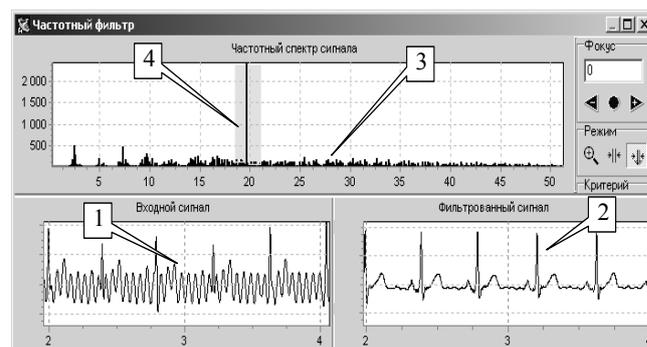


Рис. 8. Графический интерфейс вычислительного модуля: 1 – входной сигнал; 2 – фильтрованный сигнал; 3 – частотный спектр входного сигнала; 4 – интервал поиска гармонической помехи

Графический интерфейс модуля дает возможность мышью отметить на экране монитора интервал $[f_g^{min}, f_g^{max}]$ частот, в котором предположительно находится гармоническая помеха. Все остальные операции выполняются автоматически с отображением результата фильтрации сигнала.

Численные эксперименты

Численная оценка эффективности предложенного алгоритма проводилась на модельных данных. В качестве эталонов генерирова-

лись различные сигналы стандартной формы в 30 тыс. точек при частоте дискретизации $F_D = 1000$ Гц. На сигнал накладывалась гармоническая помеха в области низких и высоких частот, причем частота помехи выбиралась некратной частотам базовых гармоник разложения ДПФ.

Приведем некоторые результаты этих экспериментов. На рис. 9 представлены результаты фильтрации меандра, искаженного гармонической помехой с частотой 18,1 Гц и различными уровнями – 20%, 50% и 100% от диапазона изменения полезного сигнала.

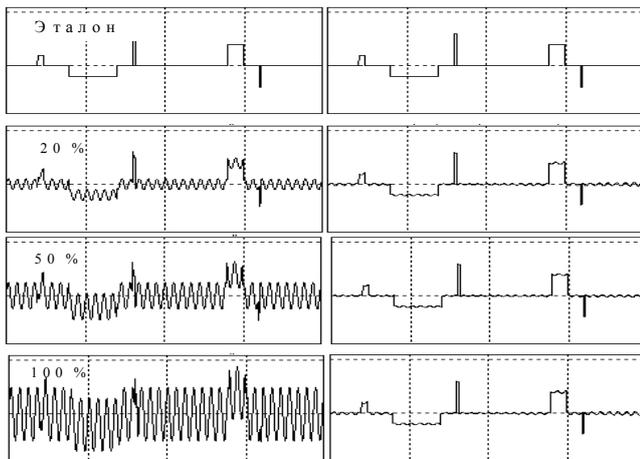


Рис. 9. Результаты фильтрации меандра, искаженного низкочастотной помехой: слева – до фильтрации, справа – после фильтрации

Видно, что даже при существенном уровне помехи, расположенной в области «полезных» частот, удалось провести эффективную фильтрацию сигнала столь сложной формы. После фильтрации сигнала, искаженного помехой 100% уровня, среднеквадратичная ошибка (по отношению к эталону) уменьшилась в 5,8 раза, а наибольшее отклонение сократилось в 13,8 раза. На всей области определения расхождение фильтрованного сигнала по отношению к эталону не превышало 3,6%.

Еще более впечатляющими были результаты фильтрации высокочастотных помех. В результате фильтрации помехи с частотой 479,22 Гц (рис. 10), приближающейся к частоте Найквиста, среднеквадратичная ошибка уменьшилась в 172 раза, а максимальное рас-

хождение – в 122 раза. На всей области определения расхождение фильтрованного сигнала по отношению к эталону не превышало 1,03%.

Аналогичные результаты получены при фильтрации других сигналов стандартной формы.

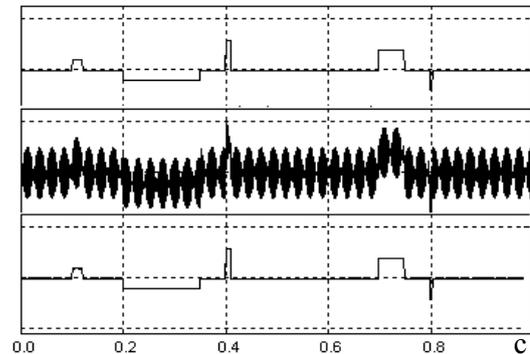


Рис. 10. Результаты фильтрации меандра, искаженного высокочастотной помехой: сверху – эталон, посередине – искаженный сигнал, внизу – фильтрованный сигнал

Разработанный вычислительный модуль узкополосного режекторного фильтра включен в состав инструментальной системы предварительной обработки сигналов сложной формы [15], с помощью которой реализован ряд прикладных систем, в частности, система ФАЗА-ГРАФ для оперативной оценки функционального состояния сердечно-сосудистой системы человека по фазовому портрету ЭКГ [16].

Заключение. Таким образом показано, что эффективность известного подхода к блочной фильтрации сосредоточенных гармонических помех на основе прямого и обратного ДПФ может быть существенно повышена. Усовершенствование состоит в использовании дополнительной поисковой процедуры, позволяющей ослабить эффект растекания спектра (*Spectrum Leakage*) гармонической помехи. Эксперименты на модельных и реальных данных подтвердили, что такая процедура позволяет эффективно подавлять сосредоточенные частотные помехи без существенных искажений информативных фрагментов полезного сигнала даже в тех случаях, когда частота помехи сосредоточена в интервале нагруженных частот полезного сигнала сложной формы.

Окончание на стр. 67

1. *Oppenheim A.V., Schaffer R.W.* Discrete-Time Signal Processing, Upper Saddle River. – NJ: Prentice-Hall, 1999. – P. 468–471.
2. *Antoniou A.* Digital Filters: Analysis, Design, and Applications. – NY: McGraw-Hill, 1993. – 320 p.
3. *Milstein L.* Interference rejection techniques in spread spectrum communications // Proc. of the IEEE. – 1988. – **76**. – P. 657–671.
4. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Transactions of the ASME // J. of Basic Engin. – 1961. – **83**. – P. 95–107.
5. *Harvey A.C.* Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter. – Cambridge: University Press, 1989. – 412 p.
6. *Malik M., Camm A.J.* Components of heart rate variability: what they really mean and what we really measure // American J. of Cardiology. – 1993. – N 72. – P. 821–822.
7. *Srikanth T., Napper S.A., Gu H.* Bottom-up approach to uniform feature extraction in time and frequency domains for single-lead ECG signal // Intern. J. of Bioelectromagnetism. – 2002. – **4**. – P. 21–29.
8. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. – СПб: Питер, 2003. – 608 с.
9. *Fourier Transform of Discretely Sampled Data* / W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, et al // Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. – Cambridge, England: Cambridge Univ. Press. – 1989. – P. 494–498.
10. *Cooley J.W., Tukey O.W.* An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series // Math. Comput. – 1965. – № 19. – P. 297–301.
11. *Ramirez R.W.* The FFT: Fundamentals and Concepts. Englewood Cliffs. – NJ: Prentice-Hall. – 1985. – P. 29.
12. *Хэррис Ф.Дж.* Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР. – 1978. – **6**, № 1. – С. 60–96.
13. *Файнзильберг Л.С.* Компьютерный анализ и интерпретация электрокардиограмм в фазовом пространстве // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 1. – С. 32–46.
14. *Frijo M., Johnson S.G.* FFTW: An adaptive software architecture for the FFT // Proc. of the IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Seattle, 1998: WA. – **3**. – P. 1381–1384.
15. *Файнзильберг Л.С.* Инструментальная система для экспериментальной оценки эффективности алгоритмов предварительной обработки сигналов сложной формы // УСиМ. – 2008. – № 2. – С. 3–12, 53.
16. *Fainzilberg L.S.* Nowa metoda interpretacji zapisu EKG w balaniach skriningowych oraz w opiece domowej // Zdrowie publiczne (Public health). – 2005. – **115**, N 4. – P. 458–464.

Поступила 29.04.2008
Тел. для справок: (044) 411-6904 (Киев)
© Л.С. Файнзильберг, 2008

