Analysis Mathematica, **30**(2004), 259–287

Об одной задаче Лузина

А. В. БОРОВСКИХ

Резюме. В работе предлагается решение одной задачи, принадлежащей Н. Н. Лузину, о выделении максимальных коэффициентов в ряде Фурье. Ключевое соображение состоит в использовании итерированных сверток, в который максимальные коэффициенты Фурье играют ведущую роль. Результат доведен до формул, содержащих предельный переход по номеру свертки. Предельные значения оказываются априори целыми числами, так что приближенные вычисления с последующим обычным округлением дают абсолютно точный результат.

В работе предлагается решение одной задачи, принадлежащей Н. Н. Лузину — о выделении максимальных коэффициентов в ряде Фурье. По существу ключевое соображение состоит в том, что при использовании операции свертки коэффициенты Фурье функции возводятся в квадрат. Если же использовать итерированные свертки (т.е. сворачивать функцию с собой несколько раз), то у них коэффициенты Фурье будут соответственно n-ми степенями коэффициентов исходной функции. Понятно поэтому, что у высоких итераций «ведущими» окажутся члены с максимальными коэффициентами. Ну, а как выделить эти члены — уже вопрос техники, которая как раз и обсуждается в предлагаемой работе.

Результат доведен до формул, пусть и несколько громоздких, но вычисляемых. Любопытной особенностью этих формул является то, что фигурирующие в них пределы являются априори целыми числами, поэтому для нахождения точного значения предела достаточно взять достаточно большой номер, вычислить соответствующий член последовательности и просто округлить.

Автор чрезвычайно тронут вниманием и поддержкой, оказанной ему П. Л. Ульяновым, за что приносит ему глубокую благодарность.

Автор также чрезвычайно признателен рецензентам, осуществившим тщательнейший анализ первых вариантов статьи.

Поступило 12 августа 1997 г, переработанные варианты 12 января 1999, 15 сентября 2000 и 21 мая 2001 гг.

0133–3852/04/$ 20.00

1. Постановка задачи

Процитируем постановку задачи, приведенную в [1, с. 376 (проблема 30)].

«Пусть $f(x)$ измерима и ограничена. Тогда коэффициенты Фурье для $f(x)$ стремятся с ростом n к 0. Поэтому среди этих коэффициентов есть наибольший по абсолютной величине. Существует ли формула для определения этой величины? Или, может быть, формула для длины того наименьшего интервала, который содержит все коэффициенты Фурье для $f(x)$, отмеченные как точки на шкале?»

2. Простейшие формулы

Пусть, функция $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ (вообще говоря, комплекснозначная), c_k — ее комплексные коэффициенты Фурье, т.е.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,dx, \tag{1}$$

и

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{2}$$

(ряд сходится в смысле L_2).

Обозначим

$$\rho = \max_k |c_k|$$

(максимум, конечно, достигается, т.к. $c_k \to 0$ при $k \to \pm\infty$). Предполагая $f(x)$ нетривиальной, получаем, что $\rho > 0$.

Через $f^{\{n\}}(x)$ будем обозначать n-кратную свертку функции $f(x)$ с собой:

$$f^{\{1\}}(x) \equiv f(x), \qquad f^{\{n+1\}}(x) = (f * f^{\{n\}})(x),$$

где

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(x-s)\,ds.$$

Тогда

$$f^{\{n\}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c_k)^n e^{ikx}, \tag{3}$$

причем, поскольку $f(x) \in L_2$ равносильно сходимости ряда $\sum |c_k|^2$, ряд (3) для $n \geq 2$ будет сходится уже абсолютно и равномерно.

Лемма 1. *Абсолютная величина ρ максимального (максимальных) коэффициента может быть вычислена по формулам*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \|f^{\{n\}}\|_{L_2}^{1/n} \tag{4}$$

либо

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f^{\{n+1\}}\|_{L_2}}{\|f^{\{n\}}\|_{L_2}}, \tag{5}$$

а число N коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho$ — по формуле

$$N = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f^{\{n\}}\|^2}{\rho^{2n}}. \tag{6}$$

Замечание. Формулы (4) и (5) не могут не вызывать естественных ассоциаций. По существу они являются формулами спектрального радиуса оператора свертки с функцией $f(x)$ (чьи коэффициенты Фурье являются собственными значениями этого оператора).

Теорема 1 (случай $N = 1$). *Пусть максимальный коэффициент единственен, т.е. существует единственное число k_0 такое, что $|c_{k_0}| = \rho$, а для $k \neq k_0$ всегда $|c_k| < \rho$. Тогда коэффициент c_{k_0} и соответствующее слагаемое в ряде Фурье (2) могут быть вычислены по формулам*

$$c_{k_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n+1\}}(x)}{f^{\{n\}}(x)} \tag{7}$$

где x — произвольное число из $[0, 2\pi]$,

$$c_{k_0} e^{ik_0x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^{n-1}}. \tag{8}$$

Сам номер k_0 может определяться либо по гармонике e^{ik_0x} логарифмированием соотношения

$$e^{ik_0x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^{n}} \tag{9}$$

(экспоненциальная формула), либо, если свертки функции $f(x)$ непрерывно дифференцируемы, начиная с некоторого номера (это имеет место, например, если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию), по формуле

$$k_0 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{(f^{\{n\}}(x))'}{f^{\{n\}}(x)} \tag{10}$$

(дифференциальная формула), либо, если среднее значение функции $f(x)$ (т.е. коэффициент c_0) равно нулю, по формуле

$$k_0 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{Jf^{\{n\}}(x)} \tag{11}$$

(интегральная формула), где J обозначает оператор интегрирования

$$Jf(x) = \int_0^x f(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sf(s)\,ds, \tag{12}$$

который, как нетрудно проверить, определен и действует в подпространстве функций с нулевым средним значением. При этом пределы во всех формулах (7)–(11) существуют в смысле равномерной сходимости, а в формулах (7), (10)–(11) — еще и не зависят от x.

Последние три формулы, определяющие k_0, как легко видеть, не покрывают друг друга, а, скорее, дополняют одна другую. Экспоненциальная формула является «локальной» (в ней требуется лишь значение сверток в точке), но «неявной» (нахождение из нее номера k_0 требует логарифмирования, которое в области комплексных чисел является достаточно деликатной процедурой). Дифференциальная формула – «явная», тоже «локальная», но имеет ограничения на сферу ее действия. Интегральная формула, «явная», справедлива для практически всех (ибо за счет сдвига на константу — среднее значение — функцию всегда можно привести к требуемому виду) функций и имеет естественные обобщения для функций, являющихся обобщенными производными от обычных функций, но она «нелокальная» (т.к. требует вычисления интеграла с переменным верхним пределом).

Особо отметим, что дифференциальная и интегральная формулы обладают удивительным свойством: в них заранее известно, что вычисляемый предел последовательности — целое число. Это позволяет, оценив скорость сходимости, находить точное значение предела по конечному, заранее известному числу итераций.

3. Формулы для нескольких максимальных коэффициентов

Номера максимальных коэффициентов, сами коэффициенты и соответствующие слагаемые в ряде Фурье могут быть вычислены и в случае, когда максимальны по абсолютной величине не один, а несколько коэффициентов.

Как и в случае $N = 1$, здесь можно предложить три типа формул — экспоненциальные, дифференциальные и интегральные. Мы обсудим все три типа, однако подробные доказательства будем рассматривать только для одного из них, ограничиваясь для других приведением соответствующих «опорных» формул и небольшими комментариями. В разделе 5 мы поясним происхождение столь громоздких формул.

В формулах используются традиционные обозначения

$$\Delta\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

для определителя, построенного для системы функций f_1, f_2, $\dots$, f_n по их значениям на сетке точек x_1, x_2, $\dots$, x_n (т.е. определителя $\det\|f_i(x_j)\|_{i,j=1}^n$), $V(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ для определителя Вандермонда чисел β_k и $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ для определителя Вронского функций f_1, f_2, $\dots$, f_n. Мы также будем использовать обозначение

$$V\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

для определителя Вандермонда, построенного по степеням i_1, i_2, $\dots$, i_n и

$$W\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

для вронскиана, построенного по указанной системе функций, но с производными, имеющими номера i_1, i_2, $\dots$, i_n. Кроме того, нам понадобится аналог вронскиана (13) — определитель, построенный не по производным, а по интегралам от набора функций

$$W_J\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \det\|(J^{i_p} f_q)(x)\|_{p,q=1}^n,$$

который в случае $i_p = p$ $(p = 1, \dots, n)$ будем обозначать просто

$$W_J(f_1, f_2, \dots, f_n) = \det\|(J^p f_q)(x)\|_{p,q=1}^n.$$

Через J, как и выше, обозначается интегральный оператор (12), а через $J^n f$ — соответствующий n-кратный «интеграл».

Теорема 2 (случай $N > 1$). *Пусть, как и ранее,*

$$\rho = \max_k |c_k|$$

($\rho > 0$ для нетривиальной $f(x)$), N — число коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho$. Через k_j ($j = 1, \dots, N$) обозначим номера соответствующих коэффициентов, где $f^{\{n\}}(x)$ по-прежнему обозначает n-кратную свертку функции $f(x)$ с собой.

Номера k_j максимальных коэффициентов и сами коэффициенты c_{k_j} могут быть вычислены по следующим формулам:

• экспоненциальные формулы:

Возьмем произвольное τ из $[0, 2\pi]$, несоизмеримое с 2π ($\tau \notin 2\pi\mathbf{Q}$), и обозначим $z_j = e^{ik_j\tau}$ (условие $\tau \notin 2\pi\mathbf{Q}$ гарантирует взаимно однозначное соответствие между z_j и k_j). Тогда z_j являются корнями многочлена

$$z^N + \alpha_{N-1}z^{N-1} + \ldots + \alpha_0 = 0, \tag{14}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\alpha_m = (-1)^{N-m} \times \tag{15}$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Tf^{\{n\}} & & \dots & & T^{N-1}f^{\{n\}} \\ x & \dots & x+(m-1)\tau & x+(m+1)\tau & \dots & x+N\tau \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Tf^{\{n\}} & \dots & T^{N-1}f^{\{n\}} \\ x & x+\tau & \dots & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}},$$

где T обозначает оператор сдвига

$$(Tf)(x) = f(x+\tau).$$

Соответствующие гармоники e^{ik_jx} определяются тогда как

$$e^{ik_jx} = (z_j)^{x/\tau}, \tag{16}$$

а соответствующие коэффициенты Фурье — по формулам

$$c_{k_j} = \tag{17}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n+1\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}}.$$

• дифференциальные формулы:

Если свертки $f^{\{n\}}(x)$ непрерывно дифференцируемы, начиная с некоторого номера n_0, то, начиная с некоторого, вообще говоря, большего номера n_1, они будут N раз непрерывно дифференцируемы, и *тогда номера k_j максимальных коэффициентов оказываются корнями многочлена*

$$z^N + \alpha_{N-1}z^{N-1} + \ldots + \alpha_0 = 0, \tag{18}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\alpha_m = i^{N-m} \lim_{n\to\infty} \frac{W\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Df^{\{n\}} & & \ldots & D^{N-1}f^{\{n\}} \\ 0 & \ldots & m-1 & m+1\ \ldots & N \end{pmatrix}}{W\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Df^{\{n\}} & \ldots & D^{N-1}f^{\{n\}} \\ 0 & 1 & \ldots & N-1 \end{pmatrix}}. \tag{19}$$

(Здесь через D обозначен оператор дифференцирования), а соответствующие коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$c_{k_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{W(e^{ik_1x}, \ldots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n+1\}}, e^{ik_{j+1}x}, \ldots, e^{ik_Nx})}{W(e^{ik_1x}, \ldots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \ldots, e^{ik_Nx})}. \tag{20}$$

- интегральные формулы:

Если среднее значение функции $f(x)$ равно нулю, то номера k_j максимальных коэффициентов оказываются корнями многочлена

$$\alpha_N z^N + \alpha_{N-1}z^{N-1} + \ldots + 1 = 0, \tag{21}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\alpha_m = (-i)^m \times \tag{22}$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{W_J\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Jf^{\{n\}} & & \ldots & J^{N-1}f^{\{n\}} \\ 0 & \ldots & N-m-1 & N-m+1\ \ldots & N \end{pmatrix}}{W_J\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Jf^{\{n\}} & \ldots & J^{N-1}f^{\{n\}} \\ 0 & 1 & \ldots & N-1 \end{pmatrix}}$$

где J, как и ранее — оператор интегрирования (12), а соответствующие коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$c_{k_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{W_J(e^{ik_1x}, \ldots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n+1\}}, e^{ik_{j+1}x}, \ldots, e^{ik_Nx})}{W_J(e^{ik_1x}, \ldots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \ldots, e^{ik_Nx})}. \tag{23}$$

Замечание. Конечно, формулы (17), (20) и (23) имеют более теоретический, чем практический интерес, т.к., зная номера k_j, коэффициенты c_{k_j} можно найти просто по формулам Фурье (1). Так что основной вопрос состоит именно в получении формул для k_j, а на формулы для коэффициентов можно смотреть как на красивое и естественное их дополнение.

4. Доказательство простейших формул

Докажем формулы леммы 1 и теоремы 1. В силу равенства Парсеваля для итерированной свертки имеем

$$\|f^{\{n\}}\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^{2n}. \tag{24}$$

Выделим в сумме слагаемые, для которых $|c_k| = \rho$, и вынесем множитель ρ^{2n} за знак суммы (как уже говорилось, мы предполагаем $f(x)$ нетривиальной, а значит, $\rho > 0$). Получим

$$\|f^{\{n\}}\|^2 = \rho^{2n}\Big(N + \sum_{|c_k|<\rho} \Big(\frac{|c_k|}{\rho}\Big)^{2n}\Big).$$

Здесь N — количество тех c_k, для которых $|c_k| = \rho$, это число нам пока что не известно, но априори известно, что оно конечно, а этого нам, как мы увидим ниже, вполне достаточно.

Покажем, что «остаточная» сумма убывает к нулю как геометрическая прогрессия. Действительно, обозначим

$$q = \max_{|c_k|<\rho} \frac{|c_k|}{\rho}$$

(максимум достигается в силу $c_k \to 0$ при $k \to \pm\infty$). Очевидно, что $0 \le q < 1$. Тогда

$$0 \le \sum_{|c_k|<\rho} \Big(\frac{|c_k|}{\rho}\Big)^{2n} \le q^{2n-2} \sum_{|c_k|<\rho} \Big(\frac{|c_k|}{\rho}\Big)^{2} < q^{2n-2}\frac{S}{\rho^2},$$

где через S обозначена

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2_{L_2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\|f^{\{n\}}\|^2 = \rho^{2n}(N + O(q^{2n})). \tag{25}$$

Теперь с помощью (25) можно доказывать формулы леммы 1. Формулы (5) и (6) получаются из (25) простым делением и тривиальным предельным переходом. Чуть сложнее доказательство формулы (4). Из (25) получаем:

$$\|f^{\{n\}}\|^{1/n} = \rho(N + O(q^{2n}))^{1/2n}.$$

Первый множитель постоянный, а второй стремится к единице при $n \to \infty$ в силу конечности N: это степень, в которой основание стремится к N, а показатель — к нулю. Таким образом, наш предел в точности равен ρ. Все три формулы леммы 1 доказаны.

Для доказательства формул теоремы 1, покажем уже в предположении $N = 1$, что гармоника, соответствующая максимальному коэффициенту, является равномерным пределом «пронормированных» кратных сверток, т.е.

$$\frac{f^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^n} \Longrightarrow e^{ik_0x}. \tag{26}$$

Действительно,

$$\frac{f^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c_k}{c_{k_0}}\right)^n e^{ikx} = e^{ik_0x} + \sum_{k\neq k_0} \left(\frac{c_k}{c_{k_0}}\right)^n e^{ikx}$$

и второе слагаемое равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$: обозначая, как и ранее,

$$q = \max_{k\neq k_0} \frac{|c_k|}{\rho}, \qquad S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|f\|_{L_2}^2,$$

получим

$$\Big|\sum_{k\neq k_0} \left(\frac{c_k}{c_{k_0}}\right)^n e^{ikx}\Big| \leq \sum_{k\neq k_0} \Big|\frac{c_k}{c_{k_0}}\Big|^n \leq q^{n-2} \sum_{k\neq k_0} \Big|\frac{c_k}{c_{k_0}}\Big|^2 \leq q^{n-2}\frac{S}{\rho^2} \to 0.$$

Итак, имеет место (26). Нетрудно заметить, что (9) в точности совпадает с этой формулой, а (7) и (8) являются ее очевидными следствиями.

Для обоснования интегральной формулы (11) достаточно заметить, что из (26) интегрированием получается аналогичная формула для интеграла

$$\frac{Jf^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^n} \Longrightarrow \frac{e^{ik_0x}}{ik_0}, \tag{27}$$

а для дифференциальной формулы (10) — указать на аналогичную формулу для производной

$$\frac{(f^{\{n\}}(x))'}{c_{k_0}^n} \Longrightarrow ik_0e^{ik_0x}, \tag{28}$$

вывод которой, впрочем, требует дополнительных комментариев.

Во-первых, она имеет место не для всех функций $f \in L_2$. Более того, она, вообще говоря, применима даже не ко всем непрерывным функциям. Хорошо известно, что, если функция имеет хоть какую-то гладкость (не обязательно целую, пусть даже типа Lip_α), то при кратном свертывании эта гладкость увеличивается. По существу здесь срабатывает тот эффект, что,

$$\text{если} \quad c_k = o\Big(\frac{1}{k^\alpha}\Big), \quad \text{то} \quad c_k^n = o\Big(\frac{1}{k^{\alpha n}}\Big).$$

Однако, существуют непрерывные функции, для которых никакие свертки не являются дифференцируемыми. Это — функции с редкими коэффициентами. Возьмем, например, последовательность индексов $k_j = 2^j$ $(j \geq 1)$, положим

$$c_{k_j} = \frac{1}{j^2} \quad \text{и} \quad c_k = 0 \ \text{ при } k \neq 2^j.$$

Рассмотрим

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Ряд в правой части сходится равномерно и абсолютно (по построению

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty),$$

поэтому $f(x)$ непрерывна. С другой стороны, ни для одной ее итерированной свертки $f^{\{n\}}(x)$ не выполнено необходимое условие (коэффициенты убывают быстрее $1/k$) дифференцируемости:

$$\limsup_{k\to\infty} kc_k^n = \limsup_{j\to+\infty} \frac{2^j}{j^{2n}} = +\infty.$$

Поэтому в предположениях теоремы явно указано, что формула (10) имеет место, если итерированные свертки, начиная с некоторого номера, непрерывно дифференцируемы.

Во вторых, даже в предположении непрерывной дифференцируемости свертки, формула (28) в отличие от (29) не является просто следствием (26), а выводится независимо. Именно, если при $n = n^*$ свертка $f^{\{n^*\}}(x)$ будет непрерывно дифференцируемой, то при $n > n^* + 2$ можно гарантировать равномерную сходимость ряда для $(f^{\{n\}}(x))'$: этот ряд

$$(f^{\{n\}}(x))' \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik(c_k)^n e^{ikx}$$

мажорируется числовым рядом

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k||c_k|^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|k||c_k|^{n^*})|c_k^2||c_k|^{n-n^*-2} \leq$$

$$\leq \sup_k(|k||c_k|^{n^*}) \sup_k(|c_k|^{n-n^*-2}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^2| < \infty,$$

т.к. первый множитель конечен в силу непрерывной дифференцируемости $f^{\{n^*\}}$, второй — в силу ограниченности c_k, а третий — в силу сходимости ряда из квадратов модулей коэффициентов Фурье к квадрату нормы в L_2 соответствующей функции. Соответственно при тех же n имеем:

$$\left|\frac{(f^{\{n\}}(x))'}{c_{k_0}^n} - ik_0 e^{ik_0 x}\right| = \Big|\sum_{k\neq k_0} ik\Big(\frac{c_k}{c_{k_0}}\Big)^n e^{ikx}\Big| \leq \sum_{k\neq k_0} |k|\Big|\frac{c_k}{c_{k_0}}\Big|^n \leq$$

$$\leq \frac{\sup\limits_k |k||c_k|^{n^*}}{|c_{k_0}|^{n^*}} \sup_{k\neq k_0}\Big|\frac{c_k}{c_{k_0}}\Big|^{n-n^*-2} \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k^2|}{|c_{k_0}|^2} \leq \frac{Mq^{n-n^*-2}S}{\rho^{n^*+2}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Здесь, как и ранее, используются обозначения

$$\rho = |c_{k_0}| \ (\rho > 0), \quad q = \max_{k\neq k_0} \frac{|c_k|}{|c_{k_0}|} \ (0 \leq q < 1), \quad S = \sum_k |c_k|^2 = \|f\|_{L_2}^2,$$

а через M обозначено такое положительное число, что

$$|c_k|^{n^*} \leq \frac{M}{|k|}$$

(оно существует и конечно в силу непрерывной дифференцируемости n^*-кратной свертки). Таким образом, формула (28) в условиях теоремы полностью обоснована.

На этом доказательство теоремы 1 полностью завершено.

5. Пояснение происхождения формул из раздела 3

Данный раздел несколько специфичен. Он не имеет целью привести доказательства описанных выше формул — доказательства будут даны в следующем разделе. Здесь же мы просто постараемся пояснить, откуда и как берутся столь сложные формулы. На самом деле происхождение их достаточно естественное и громоздкость определяется только природой задачи — найти сразу много неизвестных.

Собственно, основной рабочей формулой является

$$f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N}(c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \sum_{k\neq k_j}(c_k)^n e^{ikx}. \tag{29}$$

Если учесть, что второе слагаемое в правой части мало (сравнительно с первым) и перенести его в другую сторону, то получится уравнение относительно c_{k_j} и k_j:

$$\sum_{j=1}^{N}(c_{k_j})^n e^{ik_jx} = f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n), \tag{30}$$

где, как и ранее, ρ — максимум модулей коэффициентов c_k, q — «зазор» между максимальными и остальными коэффициентами:

$$q = \max_{|c_k|<\rho} \frac{|c_k|}{\rho}.$$

На самом деле, это не одно уравнение, а бесконечная система уравнений, выполненных при каждом n. Более того, у нас есть еще одна очевидная возможность «размножения» таких уравнений — произвол в выборе x. И еще одна возможность, менее очевидная, состоит в том, что мы можем помимо функции использовать также ее производные и интегралы, для которых соответствующие разложения Фурье имеют соответственно вид

$$D^l f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N}(ik_j)^l (c_{k_j})^n e^{ik_jx} + O(\rho^n q^n), \tag{31}$$

$$J^l f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{ik_j}\right)^l (c_{k_j})^n e^{ik_jx} + O(\rho^n q^n). \tag{32}$$

Пользуясь таким «арсеналом», удается «решить» уравнения (т.е. найти c_{k_j} и k_j, избавившись от «довесков» за счет операции предельного (при $n \to \infty$) перехода.

Покажем, как это можно сделать на примере производных. Для других формул подход аналогичен.

Запишем формулу (31) для $l = 0, 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N}(c_{k_j})^n e^{ik_jx} &= f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n), \\ \sum_{j=1}^{N} k_j (c_{k_j})^n e^{ik_jx} &= \frac{1}{i} D f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n), \\ \sum_{j=1}^{N} k_j^2 (c_{k_j})^n e^{ik_jx} &= \frac{1}{i^2} D^2 f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_j^{N-1}(c_{k_j})^n e^{ik_jx} = \frac{1}{i^{N-1}} D^{N-1} f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n),$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_j^{N}(c_{k_j})^n e^{ik_jx} = \frac{1}{i^{N}} D^{N} f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n).$$

На нее можно посмотреть как на систему линейных алгебраических уравнений относительно $c_{k_j}^n$. Первые N уравнений этой системы (т.е. без последнего уравнения) образуют нормальную систему, определитель которой есть определитель Вандермонда, умноженный на произведение экспонент. Если из этой системы по формулам Крамера выразить $c_{k_j}^n$, разделить затем формулу для $c_{k_j}^{n+1}$ на формулу для $c_{k_j}^n$ и, отбросив «добавки» $O(\cdot)$, перейти к пределу, мы получим как раз формулу (20).

Для того, чтобы определить k_j, заметим, что последнее $(N+1)$ уравнение в системе (33) должно являться комбинацией предыдущих (иначе система будет несовместной). Т.е. существует набор α_m таких, что

$$k_j^N + \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m k_j^m = 0 \tag{34}$$

(если коэффициент при $c_{k_j}^n$ в последнем уравнении представить как соответствующую комбинацию коэффициентов в предыдущих уравнениях) и

$$\left(\frac{1}{i^N} D^N f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n)\right) + \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \left(\frac{1}{i^m} D^m f^{\{n\}}(x) - O(\rho^n q^n)\right) = 0, \tag{35}$$

если точно также представить правую часть последнего уравнения.

Формула (34) означает, что α_m есть просто коэффициенты того многочлена, который имеет своими корнями k_j. Или, что то же самое, k_j являются корнями многочлена с коэффициентами α_m (о чем и идет речь в формуле (18)).

Для определения же самих α_m заметим, что мы можем написать аналог системы (33), взяв вместо функции $f^{\{n\}}(x)$ ее производную первого, второго и т.д. порядка, т.е. написать систему

$$\sum_{j=1}^{N}(k_j^s(c_{k_j})^n)e^{ik_jx} = \frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x) - O(\rho^n q^n), \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_j(k_j^s(c_{k_j})^n)e^{ik_jx} = \frac{1}{i}D\Big(\frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x)\Big) - O(\rho^n q^n),$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_j^2(k_j^s(c_{k_j})^n)e^{ik_jx} = \frac{1}{i^2}D^2\Big(\frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x)\Big) - O(\rho^n q^n),$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_j^{N-1}(k_j^s(c_{k_j})^n)e^{ik_jx} = \frac{1}{i^{N-1}}D^{N-1}\Big(\frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x)\Big) - O(\rho^n q^n),$$

$$\sum_{j=1}^{N} k_j^{N}(k_j^s(c_{k_j})^n)e^{ik_jx} = \frac{1}{i^{N}}D^{N}\Big(\frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x)\Big) - O(\rho^n q^n).$$

Здесь скобки расставлены так, чтобы ясно увидеть, что в этой системе левая часть $(N+1)$ уравнения является комбинацией предыдущих с теми же самыми коэффициентами α_m, которые фигурировали в формуле (34) и которые просто являются коэффициентами того многочлена, который имеет нулями все k_j. Поскольку тем самым коэффициенты α_m не зависят от номера s «начальной» производной, равенство (35), причем с теми же коэффициентами, выполнено для любой производной:

$$\Big(\frac{1}{i^N}D^N\Big(\frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x)\Big) - O(\rho^n q^n)\Big) + \tag{37}$$
$$+\sum_{m=0}^{N-1}\alpha_m\Big(\frac{1}{i^m}D^m\Big(\frac{1}{i^s}D^s f^{(n)}(x)\Big) - O(\rho^n q^n)\Big) = 0$$

Осталось записать N таких уравнений и найти из них α_m по формулам Крамера. При этом, опять же, отбрасывание «довесков» компенсируется предельным переходом. Так мы получаем формулу (19).

6. Доказательство формул из раздела 3

Перейдем теперь к точным доказательствам. Прежде всего, обоснуем выделение главной части у итерированных сверток $f^{\{n\}}(x)$ и у их производных $D^l f^{\{n\}}(x)$ и интегралов $J^l f^{\{n\}}(x)$ (через D обозначен оператор дифференцирования, через J — оператор интегрирования (12)).

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$. Тогда*

$$f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N} (c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \rho^n O(q^n), \tag{38}$$

где по-прежнему $\rho = \max_k |c_k|$, N — число максимальных коэффициентов (и ρ, и N определяются по формулам леммы 1), k_j — номера максимальных коэффициентов, $0 \le q < 1$ — зазор между максимальными и остальными коэффициентами:

$$q = \max_{|c_k| < \rho} \frac{|c_k|}{\rho}.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением $f^{\{n\}}$ в ряд Фурье (как уже доказывалось, оно является равномерно и абсолютно сходящимся при $n \ge 2$).

$$f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N} (c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \sum_{k \ne k_j} (c_k)^n e^{ikx}, \tag{39}$$

Покажем, что второе слагаемое есть $\rho^n O(q^n)$. Для этого оценим

$$\frac{1}{\rho^n}\Big| f^{\{n\}}(x) - \sum_{j=1}^{N} (c_{k_j})^n e^{ik_j x} \Big| = \Big| \sum_{k \ne k_j} \Big(\frac{c_k}{\rho}\Big)^n e^{ikx} \Big| \le$$

$$\le \sum_{k \ne k_j} \Big|\frac{c_k}{\rho}\Big|^n \le q^{n-2} \sum_{k \ne k_j} \Big|\frac{c_k}{\rho}\Big|^2 \le \frac{q^{n-2}}{\rho^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{S}{q^2 \rho^2} q^n,$$

где

$$S = \sum |c_k|^2 = \|f\|^2_{L_2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ и ее свертки $f^{\{n\}}$, начиная с некоторого номера n_0, непрерывно дифференцируемы. Тогда для любого целого положительного числа p ее свертки с номерами $n \ge n_0(p+2)$, будут p раз непрерывно дифференцируемы и при всех $0 \le l \le p$*

$$D^l f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N} (ik_j)^l (c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \rho^n O(q^n), \tag{40}$$

где $O(q^n)$ является равномерной по x и по l $(0 \le l \le p)$.

Доказательство. Докажем сначала, что для любого $0 < l \le p$ формальный ряд Фурье для $D^l f^{\{n\}}$ сходится равномерно и абсолютно, начиная с некоторого n. Поскольку при $n \geq n_0$ свертки $f^{\{n\}}$ непрерывно дифференцируемы, имеем

$$c_k^{n_0} = o(1/k).$$

Отсюда, очевидно, при $n > (p+2)n_0$ будем иметь

$$c_k^n = o(1/k^{p+2}).$$

Поэтому для коэффициентов формального ряда для $D^l f^{\{n\}}$ получаем

$$(ik)^l c_k^n = o(1/k^{p+2-l}),$$

так что ряд сходится абсолютно и равномерно при $l \leq p$.

Докажем теперь (40). Произведем оценку, используя разложение

$$D^l f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N} (ik_j)^l (c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \sum_{k \neq k_j} (ik)^l (c_k)^n e^{ikx}. \tag{41}$$

Имеем:

$$\frac{1}{\rho^n}\Big|D^l f^{\{n\}}(x) - \sum_{j=1}^{N} (ik_j)^l (c_{k_j})^n e^{ik_j x}\Big| = \Big|\sum_{k \neq k_j} (ik)^l \Big(\frac{c_k}{\rho}\Big)^n e^{ikx}\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k \neq k_j} |k|^l \Big|\frac{c_k}{\rho}\Big|^n \leq q^{n-2-n_0 l} \frac{\max_k |k c_k^{n_0}|^l}{\rho^{n_0 l}} \sum_{k \neq k_j} \Big|\frac{c_k}{\rho}\Big|^2 \leq$$

$$\leq \frac{q^{n-2-n_0 l} M^l}{\rho^{2+n_0 l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{S M^l}{q^{2+n_0 l} \rho^{2+n_0 l}} q^n$$

где по-прежнему

$$S = \sum |c_k|^2 = \|f\|_{L_2}^2,$$

а M — константа, оценивающая $c_k^{n_0}$ через $1/k$:

$$|c_k|^{n_0} \leq \frac{M}{|k|}.$$

Остается заметить, что оценку можно сделать равномерной по l при $0 \leq l \leq p$, заменив правую часть величиной

$$q^n \max_{0 \leq l \leq p} \frac{S M^l}{q^{2+n_0 l} \rho^{2+n_0 l}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ с нулевым средним*

$$\int_0^{2\pi} f(s)\, ds = 0.$$

Тогда

$$J^l f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(ik_j)^l} (c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \rho^n O(q^n). \tag{42}$$

Заметим, что формула корректна: в силу условия леммы $c_0 = 0$ и не может попасть в число c_{k_j}, а поэтому $k_j \neq 0$.

Доказательство. Здесь достаточно заметить, что для любого $l > 0$ формальный ряд Фурье для $J^l f^{\{n\}}$ сходится равномерно и абсолютно — это в силу теоремы о почленном интегрировании рядов, вытекает из сходимости разложения для $f^{\{n\}}$. Поэтому имеет место формула

$$J^l f^{\{n\}}(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(ik_j)^l} (c_{k_j})^n e^{ik_j x} + \sum_{\substack{k \neq k_j \\ k \neq 0}} \frac{1}{(ik)^l} (c_k)^n e^{ikx}. \tag{43}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям формула (42) получается с помощью оценки

$$\frac{1}{\rho^n} \Big| J^l f^{\{n\}}(x) - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(ik_j)^l} (c_{k_j})^n e^{ik_j x} \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{k \neq k_j} \frac{1}{(ik)^l} \Big(\frac{c_k}{\rho}\Big)^n e^{ikx} \Big| \leq \sum_{\substack{k \neq k_j \\ k \neq 0}} \frac{1}{|k|^l} \Big|\frac{c_k}{\rho}\Big|^n \leq$$

$$\leq q^{n-3} \max_k \Big|\frac{c_k}{\rho k^l}\Big| \sum_{\substack{k \neq k_j \\ k \neq 0}} \Big|\frac{c_k}{\rho}\Big|^2 \leq \frac{q^{n-3} H}{\rho^3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{SH}{q^3 \rho^3} q^n,$$

где все так же

$$S = \sum |c_k|^2 = \|f\|^2_{L_2},$$

а H — константа, оценивающая c_k через k^l: $|c_k| \leq H|k|^l$. Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что использование оценки вида

$$|c_k| \leq H|k|^l,$$

на первый взгляд явно избыточной (слева априори стремящаяся к нулю, а справа — к бесконечности последовательность) позволяет на самом деле распространять лемму и на обобщенные производные от обычных функций (для которых коэффициенты Фурье уже растут, но не слишком быстро).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству формул раздела 3. Проще всего доказательство формул для c_{k_j} — формул (17), (20), (23). Например, из (38) получаем, что

$$\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix} =$$
$$= c_{k_j}^n \Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & e^{ik_jx} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix} + \rho^n O(q^n)$$

и поэтому

(44)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_{k_j}^n} \Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix} =$$
$$= \Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & e^{ik_jx} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}.$$

Формула (17) получается с помощью формулы (44) уже совсем просто:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n+1\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} c_{k_j} \frac{\frac{1}{c_{k_j}^{n+1}}\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n+1\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}}{\frac{1}{c_{k_j}^{n}}\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & f^{\{n\}} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}}$$
$$= c_{k_j} \frac{\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & e^{ik_jx} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & \dots & e^{ik_{j-1}x} & e^{ik_jx} & e^{ik_{j+1}x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & & \dots & & & x+(N-1)\tau \end{pmatrix}} = c_{k_j}.$$

Единственный тонкий момент здесь — не равенство нулю определителя

$$\Delta\begin{pmatrix} e^{ik_1x} & e^{ik_2x} & \dots & e^{ik_Nx} \\ x & x+\tau & \dots & x+(N-1)\tau \end{pmatrix} =$$
$$= e^{i(k_1+k_2+\ldots+k_N)x} V(e^{ik_1\tau}, e^{ik_2\tau}, \ldots, e^{ik_N\tau}).$$

Определитель Вандермонда в правой части не равен нулю тогда и только тогда, когда $e^{ik_j\tau}$ попарно различны. Для произвольного τ это, вообще говоря, неверно (достаточно взять для примера e^{ikx} и e^{-ikx} и $\tau = 2\pi/k$). Однако, поскольку из $e^{ik\tau} = e^{im\tau}$ следует $(m-k)\tau = 2\pi s$, $(s \in \mathbf{Z})$,то при выборе τ несоизмеримым с 2π получим, что $m = k$ и экспоненты будут попарно различны. Остается заметить, что необходимое нам предположение отражено в условиях теоремы.

Аналогично доказывается формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_{k_j}^n} W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx}) = \tag{45}$$

$$= W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, e^{ik_jx}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx}),$$

где вронскиан в правой части уже заведомо ненулевой, ибо он равен произведению всех экспонент e^{ik_jx} на определитель Вандермонда заведомо различных чисел ik_j. Поэтому формула (20) получается уже без всяких дополнительных оговорок:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n+1\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}{W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})} =$$

$$= c_{k_j} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{c_{k_j}^{n+1}} W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n+1\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}{\frac{1}{c_{k_j}^{n}} W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})} =$$

$$= c_{k_j} \frac{W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, e^{ik_jx}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}{W(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, e^{ik_jx}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})} = c_{k_j}.$$

То же и для формулы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_{k_j}^n} W_J(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx}) = \tag{46}$$

$$= W_J(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, e^{ik_jx}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx}),$$

в которой определитель в правой части опять же есть произведение экспонент на определитель Вандермонда, но только для чисел $1/ik_j$.

Обсудим теперь основной момент — формулы для k_j. Нам будет удобно провести доказательство в общих терминах. Пусть H — N-мерное пространство функций с базисом $\{F_k(x)\}_{k=1}^N$, P и Q — два линейных оператора таких, что

$$PF_k = \lambda_k F_k \quad \text{и} \quad QF_k = \mu_k F_k$$

(заметим при этом, что P коммутирует с Q). Через $W_Q(G_1, G_2, \dots, G_N)$ будем обозначать определитель типа Вронского, в котором дифференцирование заменено оператором Q, т.е. определитель

$$\begin{vmatrix} G_1(x) & G_2(x) & \dots & G_N(x) \\ (QG_1)(x) & (QG_2)(x) & \dots & (QG_N)(x) \\ \dots & \dots & & \\ (Q^{N-1}G_1)(x) & (Q^{N-1}G_2)(x) & \dots & (Q^{N-1}G_N)(x) \end{vmatrix}. \tag{47}$$

Лемма 5 (Лемма о двух операторах). *Для любой функции*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k F_k(x)$$

имеют место равенства

$$W_Q(F, PF, \dots, P^{N-1}F) = \tag{48}$$

$$= \prod_{k=1}^{N} c_k \prod_{k=1}^{N} F_k(x) V(\lambda_1, \dots, \lambda_N) V(\mu_1, \dots, \mu_N),$$

$$W_Q(F, PF, \dots, P^{m-1}F, P^{m+1}F, \dots, P^N F) = \tag{49}$$

$$= \prod_{k=1}^{N} c_k \prod_{k=1}^{N} F_k(x) V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \dots & & & \lambda_N \\ 0 & 1 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N \end{pmatrix} V(\mu_1, \dots, \mu_N)$$

где $V(\dots)$ обозначает определитель Вандермонда.

Доказательство. Проведем для формулы (48) — для другой формулы оно полностью аналогично. Пользуясь тем, что $QF_k = \mu_k F_k$, представим интересующую нас матрицу в виде произведения:

$$\begin{pmatrix} F(x) & PF(x) & \dots & P^{N-1}F(x) \\ QF(x) & QPF(x) & \dots & QP^{N-1}F(x) \\ \dots & & \dots & \\ Q^{N-1}F(x) & Q^{N-1}PF(x) & \dots & Q^{N-1}P^{N-1}F(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{N} c_k F_k(x) & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k P F_k(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k P^{N-1} F_k(x) \\ \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mu_k F_k(x) & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mu_k P F_k(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mu_k P^{N-1} F_k(x) \\ \dots & & \dots & \\ \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mu_k^{N-1} F_k(x) & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mu_k^{N-1} P F_k(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mu_k^{N-1} P^{N-1} F_k(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_N \\ \ldots & & \ldots & \\ \mu_1^{N-1} & \mu_2^{N-1} & \ldots & \mu_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1F_1(x) & c_1PF_1(x) & \ldots & c_1P^{N-1}F_1(x) \\ c_2F_2(x) & c_2PF_2(x) & \ldots & c_2P^{N-1}F_2(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ c_NF_N(x) & c_NPF_N(x) & \ldots & c_NP^{N-1}F_N(x) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$W_Q(F, PF, \ldots, P^{N-1}F) =$$

$$= \Big(\prod_{k=1}^{N} c_k\Big) V(\mu_1, \ldots, \mu_N) \begin{vmatrix} F_1(x) & PF_1(x) & \ldots & P^{N-1}F_1(x) \\ F_2(x) & PF_2(x) & \ldots & P^{N-1}F_2(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ F_N(x) & PF_N(x) & \ldots & P^{N-1}F_N(x) \end{vmatrix},$$

где последний определитель в силу $PF_k = \lambda_k F_k$ равен

$$\Big(\prod_{k=1}^{N} F_k(x)\Big) V(\lambda_1, \ldots, \lambda_N),$$

что и доказывает лемму.

Пользуясь леммой о двух операторах, можно уже доказывать формулы для нахождения k_j. Как нетрудно видеть, в соответствующих формулах (15), (19), (22) фигурируют как раз определители типа (48) и (49), причем в них в роли $P = Q$ выступает в экспоненциальных формулах — оператор сдвига (соответствующие коэффициенты λ_j и μ_j есть $e^{ik_j\tau}$), в дифференциальных — оператор дифференцирования ($\lambda_j = \mu_j = ik_j$), в интегральных — оператор интегрирования J ($\lambda_j = \mu_j = 1/ik_j$). Более точно, в силу (38)

$$(50) \quad \Delta \begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Tf^{\{n\}} & & \ldots & & T^{N-1}f^{\{n\}} \\ x & \ldots & x+(m-1)\tau & x+(m+1)\tau & \ldots & x+N\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{j=1}^{N} c_{k_j}^n \cdot e^{i(k_1+k_2+\ldots+k_N)\tau} V(e^{ik_1\tau}, e^{ik_2\tau}, \ldots, e^{ik_N\tau}) \times$$

$$\times V \begin{pmatrix} e^{ik_1\tau} & e^{ik_2\tau} & & \ldots & & e^{ik_N\tau} \\ x_0 & \ldots & x_{m-1} & x_{m+1} & \ldots & x_N \end{pmatrix} + \rho^{nN} O(q^n),$$

откуда по формулам (15) получаем

$$(51) \quad \alpha_m = (-1)^{N-m} \frac{V \begin{pmatrix} e^{ik_1\tau} & & \ldots & & \ldots & e^{ik_N\tau} \\ 0 & \ldots & m-1 & m+1 & \ldots & N \end{pmatrix}}{V \begin{pmatrix} e^{ik_1\tau} & \ldots & e^{ik_N\tau} \\ 0 & \ldots & N-1 \end{pmatrix}}$$

(при этом знаменатель не обращается в нуль, т.к. в силу $\tau \notin 2\pi\mathbf{Q}$

из попарного различия k_j следует попарное различие $e^{ik_j\tau}$). Остается заметить, что при таких α_m уравнение (14) оказывается, после естественный операции свертывания суммы в определитель, уравнением

$$\frac{V(e^{ik_1\tau},\dots,e^{ik_N\tau},z)}{V(e^{ik_1\tau},,e^{ik_2\tau},\dots,e^{ik_N\tau})}=0, \tag{52}$$

т.е. алгебраическим уравнением n-го порядка с очевидными корнями $e^{ik_j\tau}$. Или, что то же самое, $z_j=e^{ik_j\tau}$ образуют полную систему корней уравнения с полученными нами коэффициентами α_m. Что и утверждается в теореме.

Аналогично и с двумя другими случаями. В случае дифференциальных формул получаем

$$W\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Df^{\{n\}} & & \dots & & D^{N-1}f^{\{n\}} \\ 0 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N\end{pmatrix}= \tag{53}$$

$$=\prod_{j=1}^{N}c_{k_j}^{n}e^{i(k_1+k_2+\ldots+k_N)x}V(ik_1,ik_2,\dots,ik_N)\times$$

$$\times V\begin{pmatrix} ik_1 & ik_2 & & \dots & & ik_N \\ 0 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N\end{pmatrix}+\rho^{nN}O(q^n),$$

откуда

$$\alpha_m=i^{N-m}\frac{V\begin{pmatrix} ik_1 & & & \dots & & \dots\ ik_N \\ 0 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N\end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} ik_1 & \dots & ik_N \\ 0 & \dots & N-1\end{pmatrix}} \tag{54}$$

и уравнение (19) имеет вид

$$i^N\frac{V(iz,ik_1,\dots,ik_N)}{V(ik_1,,ik_2,\dots,ik_N)}=0. \tag{55}$$

Соответственно в случае интегральных формул

$$W_J\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & Jf^{\{n\}} & & \dots & & J^{N-1}f^{\{n\}} \\ 0 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N\end{pmatrix}= \tag{56}$$

$$=\prod_{j=1}^{N}c_{k_j}^{n}e^{i(k_1+k_2+\ldots+k_N)x}V\Big(\frac{1}{ik_1},\frac{1}{ik_2},\dots,\frac{1}{ik_N}\Big)\times$$

$$\times V\begin{pmatrix} \frac{1}{ik_1} & \frac{1}{ik_2} & & \dots & & \frac{1}{ik_N} \\ 0 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N\end{pmatrix}+\rho^{nN}O(q^n),$$

$$\alpha_m = (-i)^m \frac{V\begin{pmatrix} \frac{1}{ik_1} & & \dots & & \dots & \frac{1}{ik_N} \\ 0 & \dots & N-m-1 & N-m+1 & \dots & N \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} \frac{1}{ik_1} & \dots & \frac{1}{ik_N} \\ 0 & \dots & N-1 \end{pmatrix}}, \tag{57}$$

а уравнение (22) имеет вид

$$(-i)^N \frac{z^N V(\frac{1}{iz}, \frac{1}{ik_1}, \dots, \frac{1}{ik_N})}{V(\frac{1}{ik_1}, \dots, \frac{1}{ik_N})} = 0. \tag{58}$$

Таким образом, формулы раздела 3 полностью обоснованы.

7. Дальнейшее вычисление коэффициентов в порядке убывания

Обсудим естественный вопрос: пусть максимальные коэффициенты и их номера уже найдены, можно ли продолжать нахождение коэффициентов в порядке их убывания (по модулю)?

Нетрудно понять, что ответ здесь положительный. Достаточно формально вместо $f(x)$ рассмотреть $f_1(x) = f(x) - \sum c_{k_j} e^{ik_j x}$, где сумма берется по найденным уже номерам k_j максимальных коэффициентов. При этом можно заметить, что заново вычислять свертки новой функции не требуется, т.к.

$$f_1^{\{n\}}(x) = f^{\{n\}}(x) - \sum c_{k_j}^n e^{ik_j x},$$

аналогично с производными и интегралами.

Для законченности изложения сформулируем алгоритм последовательного вычисления коэффициентов в порядке убывания абсолютной величины в виде теоремы. Пусть

$$R = \{|c_k|,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

понимаемое не как последовательность, а как множество в классическом смысле, в котором каждый элемент берется по одному разу. Занумеруем элементы из R в порядке убывания:

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_m > \dots$$

(ρ_1 есть ρ в прежних обозначениях). Полученная последовательность может быть конечной, а может быть бесконечной. Обозначим N_m число коэффициентов c_k, модуль которых равен ρ_m. Обозначим

$$\phi_m(x) = \sum_{k:|c_k| \geq \rho_m} c_k e^{ikx}$$

(это по существу приближение $f(x)$ с точностью до коэффициентов, меньших ρ_m), а через

$$f_m(x) = f(x) - \phi_m(x),$$

считаем $f_0(x) \equiv f(x)$.

Теорема 3. *Пусть уже известно m-тое приближение $\phi_m(x)$ функции $f(x)$. Если $\phi_m(x)$ не совпадает тождественно с $f(x)$, то $\rho_{m+1} > 0$ и вычисляется по формулам*

$$\rho_{m+1} = \lim_{n\to\infty} \|f_m^{\{n\}}\|_{L_2}^{1/n} \tag{59}$$

либо

$$\rho_{m+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f_m^{\{n+1\}}\|_{L_2}}{\|f_m^{\{n\}}\|_{L_2}}, \tag{60}$$

число N_{m+1} коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho_{m+1}$ вычисляем по формуле

$$N_{m+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f_m^{\{n\}}\|^2}{\rho_{m+1}^{2n}}, \tag{61}$$

а номера k_j тех коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho_{m+1}$ и сами эти коэффициенты вычисляются в случае $N_{m+1} = 1$ по формулам (7)–(11), *а в случае $N_{m+1} > 1$ по формулам* (14)–(17), (18)–(20) (*при выполнении предположения непрерывной дифференцируемости сверток $f^{\{n\}}(x)$, начиная с некоторого номера*), (21)–(23), *в которых вместо $f(x)$ фигурирует $f_m(x)$.*

8. Функции двух и более переменных

В заключение обсудим возможность обобщения полученных результатов на функции нескольких переменных. Сразу отметим, что ответ на основной вопрос Лузина — об абсолютной величине наибольшего (наибольших) коэффициента Фурье здесь дается теми же самыми формулами, что и в одномерном случае. Более того, в случае $N = 1$ (максимальный коэффициент единственен) удается получить и аналоги формул (7)–(11). Что же касается случая нескольких максимальных коэффициентов — тут дело оказалось гораздо сложнее и однозначного ответа на вопрос у автора пока нет.

Тем не менее, одна несложная хитрость позволяет все-таки реализовать результат «в полном объеме» для случая функции двух переменных. Хитрость состоит в использовании вместо пары индексов (k^1, k^2) одного целокомплексного числа k^1+ik^2 и практически дословном повторении рассуждений одномерного случая.

Пусть $x = (x^1, x^2)$ — двумерный вектор из области

$$\mathcal{D} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbf{R}^2,$$

мультиномер $k = (k^1, k^2)$ — из $\mathbf{Z}^2$, функция $f(x) \in L_2[\mathcal{D}]$, c_k — ее комплексные коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{D}} f(x) e^{ikx}\, dx, \qquad f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^2} c_k e^{ikx},$$

(ряд сходится в $L_2[\mathcal{D}]$).

Как и прежде, $f^{\{n\}}(x)$ — n-кратная свертка функции $f(x)$ с собой

$$f^{\{1\}}(x) \equiv f(x), \qquad f^{\{n+1\}}(x) = (f * f^{\{n\}})(x),$$

где

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{D}} f(s) g(x-s)\, ds,$$

разложение которой имеет вид

$$f^{\{n\}}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^2} (c_k)^n e^{ikx},$$

и которое при $n \geq 2$ сходится уже абсолютно и равномерно (напомним, $f(x) \in L_2$ равносильно сходимости ряда $\sum |c_k|^2$).

Далее, обозначаем $\rho = \max_k |c_k|$, которое, в предположении нетривиальности $f(x)$, будет наверняка положительным, N — число коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho$. Мультиномера этих коэффициентов обозначаем k_j $(k_j = (k_j^1, k_j^2))$.

Теорема 4. *Абсолютная величина ρ максимального (максимальных) коэффициента может быть вычислена по формулам*

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \|f^{\{n\}}\|_{L_2}^{1/n} \tag{62}$$

либо

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{\|f^{\{n+1\}}\|_{L_2}}{\|f^{\{n\}}\|_{L_2}}, \tag{63}$$

а число N коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho$, — по формуле

$$N = \lim_{n \to \infty} \frac{\|f^{\{n\}}\|^2}{\rho^{2n}}. \tag{64}$$

В случае $N = 1$ максимальный коэффициент c_{k_1} может быть вычислен по формуле

$$c_{k_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n+1\}}(x)}{f^{\{n\}}(x)}, \tag{65}$$

где x — произвольный вектор из $\mathcal{D}$, а соответствующий мультиномер k_1 может определяться либо, если свертки функции $f(x)$ непрерывно дифференцируемы, начиная с некоторого номера, — по формулам

$$k_1^1 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{D_{x^1} f^{\{n\}}(x)}{f^{\{n\}}(x)}, \tag{66}$$

$$k_1^2 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{D_{x^2} f^{\{n\}}(x)}{f^{\{n\}}(x)}, \tag{67}$$

где D_{x^1} и D_{x^2} — операторы дифференцирования по переменным x^1 и x^2 соответственно, либо, если среднее значение функции $f(x)$ по каждой из переменных x^1, x^2 равно нулю, т.е.

$$\int_0^{2\pi} f(x^1, x^2)\, dx^1 = \int_0^{2\pi} f(x^1, x^2)\, dx^2 = 0, \tag{68}$$

по формулам

$$k_1^1 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{J_{x^1} f^{\{n\}}(x)}, \tag{69}$$

$$k_1^2 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{J_{x^2} f^{\{n\}}(x)}, \tag{70}$$

где через J_{x^1}, J_{x^2} обозначены операторы частного интегрирования

$$J_{x^1} f(x) = \int_0^{x^1} f(s, x^2)\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s f(s, x^2)\, ds, \tag{71}$$

$$J_{x^2} f(x) = \int_0^{x^2} f(x^1, s)\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s f(x^1, s)\, ds. \tag{72}$$

В случае $N > 1$ номера k_j максимальных коэффициентов и сами коэффициенты c_{k_j} могут быть вычислены следующим образом:

- дифференциальные формулы:

Если свертки $f^{\{n\}}(x)$ непрерывно дифференцируемы, начиная с некоторого номера, то целокомплексные числа $z_j = k_j^1 + ik_j^2$, определяющие мультиномера $k_j = (k_j^1, k_j^2)$ максимальных коэффициентов являются корнями многочлена

$$z^N + \alpha_{N-1} z^{N-1} + \cdots + \alpha_0 = 0,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\alpha_m = i^{N-m} \lim_{n\to\infty} \frac{W_z\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & D_z f^{\{n\}} & & \dots & & D_z^{N-1} f^{\{n\}} \\ 0 & \dots & m-1 & m+1 & \dots & N \end{pmatrix}}{W_z\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & D_z f^{\{n\}} & \dots & D_z^{N-1} f^{\{n\}} \\ 0 & 1 & \dots & N-1 \end{pmatrix}}.$$

Здесь через D_z обозначен оператор $D_z = D_{x^1} + iD_{x^2}$, через W_z — вронскиан, построенный на основе дифференциального оператора D_z. Соответствующие коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$c_{k_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{W_z(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n+1\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}{W_z(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}.$$

- интегральные формулы:

Если среднее значение функции $f(x)$ по каждой из переменных x^1, x^2 равно нулю (т.е. выполнено (68)), то рационально-комплексные числа

$$\theta_j = \frac{1}{k_j^1} + i\frac{1}{k_j^2},$$

определяющие мультиномера $k_j = (k_j^1, k_j^2)$ максимальных коэффициентов являются корнями многочлена

$$\alpha_N + \alpha_{N-1}z + \dots + z^N = 0,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\alpha_m = (-i)^m \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{W_{J_\theta}\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & J_\theta f^{\{n\}} & & \dots & & J_\theta^{N-1} f^{\{n\}} \\ 0 & \dots & N-m-1 & N-m+1 & \dots & N \end{pmatrix}}{W_{J_\theta}\begin{pmatrix} f^{\{n\}} & J_\theta f^{\{n\}} & \dots & J_\theta^{N-1} f^{\{n\}} \\ 0 & 1 & \dots & N-1 \end{pmatrix}}$$

(J_θ — оператор интегрирования $J_\theta = J_{x^1} + iJ_{x^2}$, где J_{x_i} определяются формулами (71)–(72)). Соответствующие коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$c_{k_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{W_{J_\theta}(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n+1\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}{W_{J_\theta}(e^{ik_1x}, \dots, e^{ik_{j-1}x}, f^{\{n\}}, e^{ik_{j+1}x}, \dots, e^{ik_Nx})}.$$

Пределы во всех формулах существуют в смысле равномерной сходимости и не зависят от выбора x.

Замечание 1. Как видно из формулировки, экспоненциальные формулы «исчезли». Дело в том, что в дифференциальных и интегральных формулах нам удалось по существу использовать вещественность номеров k_j^1, k_j^2, образовав из них целокомплексное число. Для экспоненты $e^{ik\tau}$ формальная возможность, адекватная переходу к целокомплексным числам z_j в дифференциальных или к числам θ_j в интегральных формулах, тоже существует, однако, она, задействуя сдвиг одного из аргументов с вещественной оси в комплексную плоскость, означает, по большому счету, аналитическое продолжение исходной функции в комплексную область. Понятно, что для вычисления коэффициентов Фурье это не самый подходящий способ, хотя его, возможно, и стоило бы обсудить. Другой вариант работы с экспонентами в многомерном случае — использование, для определения k из уравнения $e^{ikx} = y$, линейно независимого над $\mathbf{Q}$ набора $(\tau^1, \tau^2, 2\pi)$, что приводит к решению уравнений в целых числах с иррациональными коэффициентами, что с точки зрения приближенных методов является крайне неустойчивой процедурой. Поэтому и этот метод вряд ли можно считать удовлетворительным.

Замечание 2. Как видно из формулировки, для применения интегральных формул требуется равенство нулю среднего значения по каждой переменной. Это несколько усложняет процесс нахождения коэффициентов для произвольной функции $f(x^1, x^2)$: сначала ее надо разложить на три составляющие:

$$g_1(x^1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x^1, s)\,ds, \qquad g_2(x^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s, x^2)\,ds,$$

$$g(x^1, x^2) = f(x^1, x^2) - g_1(x^1) - g_2(x^2) + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathcal{D}} f(x^1, x^2)\,dx^1 dx^2$$

(нетрудно проверить, что $g(x)$ имеет нулевые средние по каждой переменной), применить процедуру поиска максимальных коэффициентов к функциям g_1 и g_2 как к функциям одной переменной, к функции g как к функции двух переменных, а потом собрать результаты воедино.

Замечание 3. Для функции двух переменных имеет место и аналог теоремы 3. Мы его не приводим в силу, с одной стороны, очевидности формулировок, а с другой стороны — их громоздкости.

Замечание 4. Формулы (62)–(64) для вычисления ρ и N, а также формулы (65)-(70) для случая единственного максимального коэффициента очевидным образом переносятся на случай функции любого числа переменных. Однако, как уже говорилось, ввиду отсутствия пока подходящего метода для определения максимальных коэффициентов в случае $N > 1$, этот результат можно считать лишь частичным решением задачи для функций многих переменных.

Литература

[1] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, Гостехиздат (Москва, 1951).

On a certain problem of Lusin

A. V. BOROVSKIKH

The solution of the problem of Luzin concerning the extraction of the maximal Fourier coefficients of a given function is presented. The key concept consists in the use of iterated convolutions in which the maximal Fourier coefficients play a decisive role. The result is presented in formulas containing the limit values with respect to the number of convolutions. These limit values appear to be integer a priori, so that the approximate calculations together with an ordinary rounding-off error give the absolutely exact result.

РОССИЯ
ВОРОНЕЖ 394 006
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ПЛ. 1
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
e-mail: bor.bor@mail.ru