МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

ТЛЮСТАНГЕЛОВ ГАЛИМ СУЛТАНОВИЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ РАДИАЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО РАСТЕКАНИЯ-СТОКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Георгиевский Дмитрий Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Кадымов Вагид Ахмедович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный
гуманитарно-экономический университет,
факультет прикладной математики и информатики

Саурин Василий Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Чечкин Григорий Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Защита диссертации состоится 12 октября 2018 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.14 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.
E-mail: msu.01.14@mech.math.msu.su
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/118827388/
Автореферат разослан « » июня 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета МГУ.01.14, кандидат физ.-мат. наук — П.В. Чистяков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию эволюции во времени картины малых возмущений кинематических и силовых величин, налагаемых на радиальное растекание либо сток цилиндрических слоёв под действием внешней нагрузки. Эти слои могут состоять из материала, определяющие соотношения которого соответствуют либо ньютоновской вязкой среде, либо идеально жесткопластическому телу, подчиняющемуся критерию пластичности Мизеса-Генки. На основе метода интегральных соотношений, примененного к линеаризованной задаче в возмущениях, выводятся достаточные оценки экспоненциальной устойчивости основного движения. Задача исследуется как в случае плоской, так и трёхмерной картин возмущений, налагаемых на радиально-вращательное растекание либо сток цилиндрического слоя. Также в работе рассматривается задача развития малых возмущений в системе, состоящей в первом случае из двух тяжелых несжимаемых невязких сред с различными плотностями, а во втором из слоя вязкой несжимаемой среды, покрывающего полупространство идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что гравитационная устойчивость зависит от условий на границах слоёв – наличия свободной поверхности либо непротекания сквозь прямолинейную границу.

Актуальность темы.
Вопросы устойчивости растекания-стока вязких и пластических цилиндрических слоёв имеют приложения в задачах, связанных с обработкой материалов давлением, вытяжкой, ковкой и другими технологическими процессами. Актуально получение режимов растекания-стока, при которых основное одномерное по радиусу течение не претерпевает существенных изменений при введении в систему возмущений.

Цель работы.
Получение достаточных интегральных оценок устойчивости, наиболее часто встречающихся в приложениях радиально-вращательных режимов движения цилиндрического слоя.

Научная новизна.

1. Для идеально жесткопластических сред развит и апробирован метод интегральных соотношений, применявшийся ранее в исследованиях устойчивости в основном для ньютоновских вязких жидкостей.

2. Впервые аналитически получены интегральные оценки устойчивости, включающие параметры основного растекания-стока, которые допустимо определить экспериментально.

3. Явно показана зависимость оценок гравитационной устойчивости в двухслойных тяжелых системах от граничных условий на внешних границах.

Обоснованность и достоверность.
Обоснованность и достоверность результатов вытекает из классического аппарата механики сплошной среды, аналитической динамики, математического и функционального анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Положения и качественные выводы работы выдерживают тесты на сравнение с признанными результатами других авторов.

Теоретическая и практическая значимость работы.
Результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение.

1. Полученные в работе достаточные экспоненциальные оценки устойчивости имеют практическую значимость при выборе оптимальных режимов обработки давлением цилиндрических слоёв в процессе их комбинированного растекания-стока – осесимметричного вращения – осевого сдвига. Важное теоретическое значение имеет предпринятый в работе анализ взаимного влияния на устойчивость вязких и пластических свойств материала.

2. Результаты в задаче гравитационной устойчивости двухслойных систем могут иметь практическое применение при масштабном и натурном моделировании процессов, протекающих в системе литосфера-астеносфера.

На защиту выносятся следующие положения:

1. В линеаризованной теории устойчивости развит метод интегральных соотношений для трёхмерных нестационарных течений в областях со сложной геометрией.

2. С помощью этого метода получены достаточные интегральные оценки устойчивости движения вязких либо идеально жесткопластических цилиндрических слоев.

Апробация работы.

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри (2015, 2016 г.г.), д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева (2017 г.)

- научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского (2017 г.)

- научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина (2017 г.)

- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2017 г.)

- научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского, д.ф.-м.н., проф. М.В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова (2017 г.)

- научно-исследовательский семинар «Современные проблемы механики сплошной среды» Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН под руководством д.ф.-м.н., проф. С.В. Нестерова и д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского (2016 г.)

- XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2017»

- Международная научная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», посвященная 110-летию со дня рождения академика А.Н.Тихонова (2016 г.)

- Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (2016 г.)

- Первая международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» (2016 г.)

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (2013 г.)

Личный вклад автора.
Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

Публикации по теме диссертации.
Основные результаты диссертационного исследования представлены в пяти научных публикациях, в том числе в четырех статьях рецензируемых научных изданий, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus и RSCI. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.
Диссертация состоит из оглавления, введения, трёх глав, формулировки основных результатов и списка литературы. В работе содержится 2 рисунка, 103 библиографические ссылки. Общий объем диссертации составляет 103 страницы.

Содержание диссертации.
Во введении проводится обоснование актуальности и практической значимости тем диссертационного исследования. Выполнен обзор литературы по исследуемым задачам. Сформулированы основные цели работы. Представлена структура диссертации и краткое содержание глав.
В первой главе *"Задачи устойчивости растекания-стока вязких сред"* в первом параграфе рассматривается задача развития малых возмущений, налагаемых на радиальное растекание либо сток плоского кольца, заполненного однородной несжимаемой вязкой средой либо идеальной жидкостью. При задании расхода как функции времени основное течение полностью определяется условием несжимаемости вне зависимости от свойств среды.

Плоское течение ньютоновской вязкой среды с плотностью ρ и динамической вязкостью μ осуществляется при $t \geq 0$ в кольце $\Omega_t = \{a(t) < r < b(t),\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$, где (r, θ) – полярная система координат с началом, совпадающим с центром кольца. Функции времени $a(t)$ и $b(t)$ известны, в силу несжимаемости среды они связаны условием

$$b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2 = S/\pi, \quad a_0 = a(0), \quad b_0 = b(0), \tag{1}$$

включающим постоянную площадь кольца S. Радиальное растекание-сток характеризуется следующими компонентами вектора скорости $\mathbf{v}^\circ$ и тензора скоростей деформаций $\tilde{v}^\circ$:

$$v_r^\circ = \frac{C(t)}{r}, \quad v_\theta^\circ \equiv 0; \quad v_{rr}^\circ = -v_{\theta\theta}^\circ = -\frac{C(t)}{r^2}, \quad v_{r\theta}^\circ \equiv 0, \tag{2}$$

где $2\pi C(t)$ – заданный расход через окружность любого радиуса от $a(t)$ до $b(t)$. Функции $a(t)$ и $b(t)$, очевидно, выражаются через $C(t)$:

$$a\dot{a} = b\dot{b} = C; \quad a^2 = a_0^2 + 2\int\limits_0^t C(\tau)\,d\tau, \quad b^2 = b_0^2 + 2\int\limits_0^t C(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

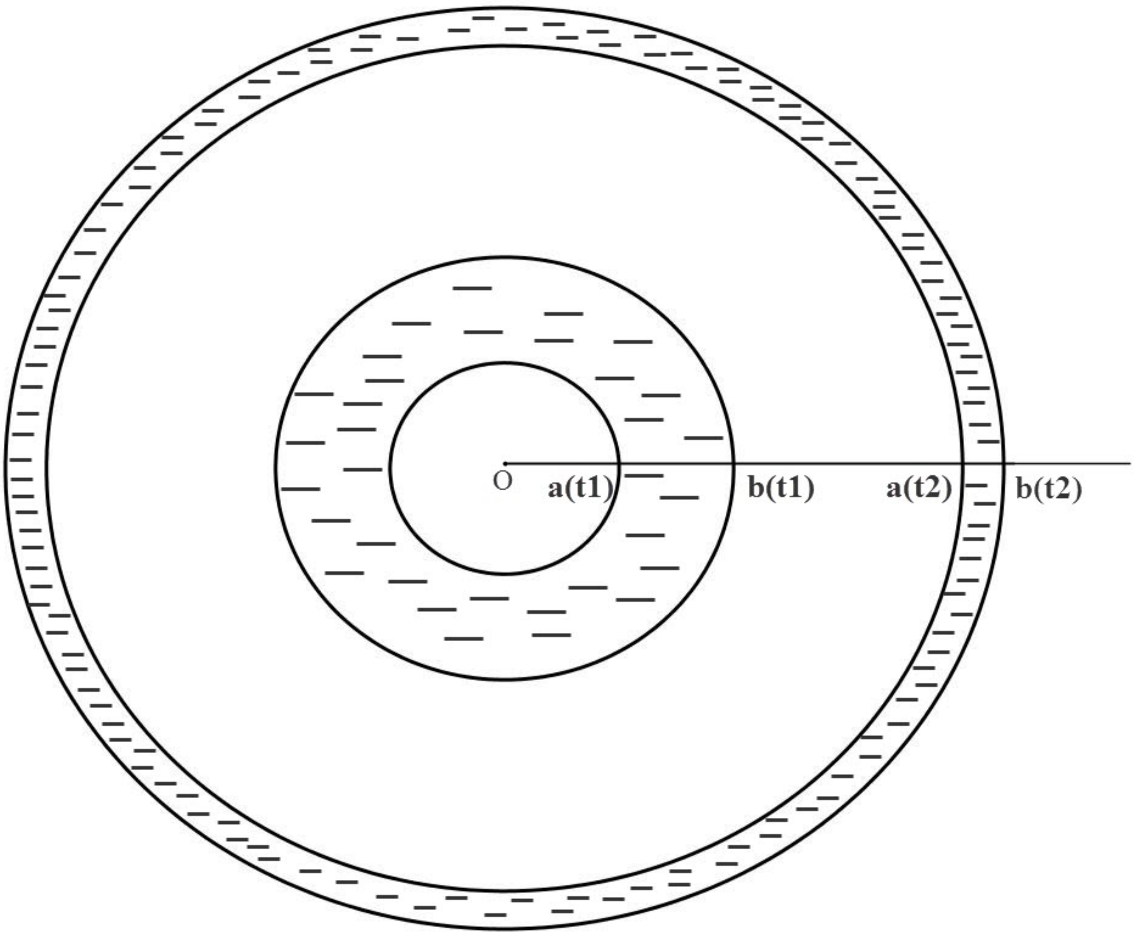

Рис.1 C>0 - случай растекания кольца (две конфигурации в разные моменты времени)

Определяющие соотношения $\tilde{s}^\circ = 2\mu\tilde{v}^\circ$ ньютоновской среды дают выражения для компонент девиатора $\tilde{s}^\circ$ тензора напряжений $\tilde{\sigma}^\circ = \tilde{s}^\circ - p^\circ\tilde{I}$:

$$s_{rr}^\circ = -s_{\theta\theta}^\circ = -\frac{2\mu C(t)}{r^2}, \quad s_{r\theta}^\circ \equiv 0. \tag{4}$$

В результате интегрирования уравнения движения в проекции на радиус находится не зависящее от μ распределение давления $p^\circ(r,t)$:

$$p^\circ = p_a^\circ(t) + \frac{\rho C^2}{2}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + \rho \dot{C} \ln\frac{a}{r}, \quad p_a^\circ(t) = p^\circ(a(t),t). \tag{5}$$

Также отметим, что рассматриваемое течение существенно нестационарно, даже если $C = \mathrm{const}$, так как область, занимаемая средой, меняется со временем на плоскости. Верхним индексом "$\circ$" помечены кинематические и силовые величины, которые относятся к невозмущённому (чисто радиальному) течению в области Ω_t. Наложим на это течение малые плоские возмущения скорости δv_r, δv_θ, а также скорости деформации δv_{rr}, $\delta v_{\theta\theta}$, $\delta v_{r\theta}$, девиатора напряжений δs_{rr}, $\delta s_{\theta\theta}$, $\delta s_{r\theta}$ и давления δp , и для краткости опустим знак δ в обозначениях возмущений.

Получив линеаризованные относительно малых возмущений уравнения движения и условие несжимаемости замкнем их двумя определяющими соотношениями:

$$\rho(v_{r,t} + v_r^\circ v_{r,r} + v_{r,r}^\circ v_r) = -p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{1}{r}\, s_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}\,(s_{rr} - s_{\theta\theta}), \tag{6}$$

$$\rho(v_{\theta,t} + v_r^\circ v_{\theta,r} + \frac{1}{r}\, v_r^\circ v_\theta) = -\frac{1}{r}\, p_{,\theta} + s_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\, s_{\theta\theta,\theta} + \frac{2}{r}\, s_{r\theta}, \tag{7}$$

$$v_{r,r} + \frac{1}{r}\,(v_r + v_{\theta,\theta}) = 0. \tag{8}$$

$$s_{rr} = 2\mu v_{r,r}, \quad s_{r\theta} = \mu\Big(\frac{1}{r}\, v_{r,\theta} + v_{\theta,r} - \frac{1}{r}\, v_\theta\Big) \tag{9}$$

Положим, что в возмущённом движении границами области течения по-прежнему являются окружности $r = a(t)$ и $r = b(t)$ (т. е. движение происходит в кольце Ω_t), на которых возмущения скорости отсутствуют:

$$r = a(t) \ \text{ и } \ r = b(t): \quad v_r = v_\theta = 0. \tag{10}$$

В терминах функции тока ($v_r = \psi_{,\theta}/r, \quad v_\theta = -\psi_{,r}$) система (6) – (9) представляется в следующем виде:

$$(\Delta\psi)_{,t} + \frac{C}{r}(\Delta\psi)_{,r} = \nu\Delta\Delta\psi\,, \tag{11}$$

где ν – кинематическая вязкость, и четыре условия на известных подвижных границах:

$$r = a(t) \ \text{ и } \ r = b(t): \quad \psi = 0, \quad \psi_{,r} = 0. \tag{12}$$

Так как в коэффициенты линейного уравнения (11) входят функции от r и t, но не от θ, то переменную θ можно отделить, переходя к анализу отдельных гармоник угловых возмущений:

$$\psi(r,\theta,t) = \Psi_n(r,t)\,\mathrm{e}^{in\theta}, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{13}$$

Для краткости в дальнейшем будем опускать у комплекснозначных амплитуд Ψ_n нижний индекс n. Подставляя (13) в (11) и (12), получим однородную задачу для Ψ:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{C}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big(\frac{1}{r}(r\Psi_{,r})_{,r} - \frac{n^2\Psi}{r^2}\Big) = \frac{1}{r}\Big\{r\Big[\frac{1}{r}(r\Psi_{,r})_{,r}\Big]_{,r}\Big\}_{,r} - \\ -\frac{n^2}{r}\Big[r\Big(\frac{\Psi}{r^2}\Big)_{,r}\Big]_{,r} - \frac{n^2}{r^3}(r\Psi_{,r})_{,r} + \frac{n^4\Psi}{r^4}\end{gathered} \tag{14}$$

$$r = a(t) \ \text{ и } \ r = b(t): \quad \Psi = 0, \quad \Psi_{,r} = 0. \tag{15}$$

Далее, применяя метод интегральных соотношений, подробно описанный в диссертации, мы получаем интегральное следствие уравнения (14):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2 + n^2 I_0^2) = -\nu J_2^2 - (2\nu n^2 + \nu + C)J_1^2 - n^2(\nu n^2 - 4\nu - C)J_0^2. \tag{16}$$

где используются следующие квадратичные функционалы

$$I_k^2(t) = \int\limits_a^b r^{2k-1}\left|\frac{\partial^k\Psi}{\partial r^k}\right|^2 dr, \quad J_l^2(t) = \int\limits_a^b r^{2l-3}\left|\frac{\partial^l\Psi}{\partial r^l}\right|^2 dr, \tag{17}$$

где $k = 0,1$; $l = 0,1,2$.

Пусть существуют такие функции времени $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, что

$$J_2^2 \geq \lambda_1^2 J_1^2, \quad J_2^2 \geq \lambda_2^4 J_0^2. \tag{18}$$

Тогда для любого $\gamma \in [0;1]$

$$J_2^2 \geq \gamma\lambda_1^2 J_1^2 + (1-\gamma)\lambda_2^4 J_0^2 \tag{19}$$

и справедлива верхняя оценка левой части (16):

$$\frac{d}{dt}(I_1^2 + n^2 I_0^2) \leq -2(2\nu n^2 + \nu + \gamma\nu\lambda_1^2 + C)J_1^2 - 2n^2\Big(\nu n^2 - 4\nu + \frac{(1-\gamma)\nu\lambda_2^4}{n^2} - C\Big)J_0^2. \tag{20}$$

Далее получим экспоненциальные оценки затухания или роста возмущений по интегральной мере. Заметим, что основной целью при исследовании на устойчивость различных режимов течений здесь и в последующих разделах диссертации является получение экспоненциальных оценок либо затухания возмущений, либо оценок не превышения их роста.

Обозначим выражения, стоящие в скобках в правой части (20), через $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$:

$$\Phi_1(t) = \nu(2n^2 + 1 + \gamma\lambda_1^2) + C, \quad \Phi_2(t) = \nu\Big(n^2 - 4 + \frac{(1-\gamma)\lambda_2^4}{n^2}\Big) - C \tag{21}$$

и рассмотрим четыре возможных случая.

а) $\Phi_1 \geq 0$ и $\Phi_2 \geq 0$ на интервале времени $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$, т. е.

$$-(2n^2 + 1 + \gamma\lambda_1^2) \leq \frac{C(t)}{\nu} \leq n^2 - 4 + \frac{(1-\gamma)\lambda_2^4}{n^2}. \tag{22}$$

Тогда после проведенных преобразований получить окончательную верхнюю оценку квадратичного функционала $(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t)$:

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \leq (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Big(-2\int\limits_{t_0}^{t} Q(\tau)\,d\tau\Big), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{23}$$

где $Q(t) = \min\Big\{\Phi_1/b^2; a\Phi_2/b^3\Big\} \geq 0$.

Таким образом, при условиях (22) n-ая гармоника возмущения (13) по углу θ убывает не медленнее экспоненты в (23), что говорит об экспоненциальной устойчивости (в интегральном смысле) при $t_0 \leq t \leq t_1$ развития возмущений, накопленных к моменту t_0. Безразмерное отношение $C(t)/\nu$ играет в данной задаче роль числа Рейнольдса, зависящего от времени.

б) $\Phi_1 \geq 0$ и $\Phi_2 < 0$ на интервале $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$. Тогда будем иметь

$$Q(t) = \min\Big\{\frac{1}{b^2}\,\Phi_1; \frac{b}{a^3}\,\Phi_2\Big\} = \frac{b}{a^3}\,\Phi_2 < 0. \tag{24}$$

Отрицательность оценивающей функции $Q(t)$ (24) говорит о том, что механический смысл оценки (23) по сравнению с предыдущим случаем изменился. Теперь это верхняя оценка на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ роста (а не затухания) возмущений, накопленных в системе к моменту t_0. Об устойчивости здесь вести речь уже нельзя. Аналогичная картина будет наблюдаться и в двух оставшихся случаях, в которых $Q(t) < 0$.

в) $\Phi_1 < 0$ и $\Phi_2 \geq 0$, $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$.

г) $\Phi_1 < 0$ и $\Phi_2 < 0$, $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$.

В случае, когда кольцо заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, мы получаем следующий вид итогового интегрального соотношения (16):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2 + n^2 I_0^2) = -C(J_1^2 - n^2 J_0^2). \tag{25}$$

Теперь из (21) следует, что

$$\Phi_1(t) = -\Phi_2(t) = C, \tag{26}$$

поэтому могут быть реализованы лишь случаи б) (растекание кольца Ω_t) и в) (сток). В них в отличие от случая а) описываются верхние оценки роста (а не затухания) возмущений. Если $C(t) \geq 0$, то

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \leq (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Bigl(2\int\limits_{t_0}^{t} \frac{bC}{a^3}(\tau)\,d\tau\Bigr). \tag{27}$$

Если же $C(t) < 0$, то

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \leq (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Bigl(-2\int\limits_{t_0}^{t} \frac{C}{a^2}(\tau)\,d\tau\Bigr) = \frac{a^2(t_0)}{a^2(t)}(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0), \tag{28}$$

причём $a(t)$ – монотонно убывающая функция.

Отсутствие в правой части (25) квадратичного функционала J_2^2 позволяет в невязком пределе предъявить не только верхние, но и нижние оценки развития возмущений. В случае когда $C(t) \geq 0$,

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \geq (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Bigl(-2\int\limits_{t_0}^{t} \frac{C}{a^2}(\tau)\,d\tau\Bigr) = \frac{a^2(t_0)}{a^2(t)}(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0), \tag{29}$$

причём $a(t)$ – монотонно возрастающая функция.

В случае же $C(t) < 0$ получаем следующую нижнюю оценку

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \geq (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Bigl(2\int\limits_{t_0}^{t} \frac{Cb}{a^3}(\tau)\,d\tau\Bigr). \tag{30}$$

Во втором параграфе **первой главы** исследуется эволюция во времени трёхмерной картины возмущений, наложенных на радиально-вращательное растекание либо сток подверженного осевому течению вязкого цилиндрического слоя, параметры которого зависят от времени и радиальной координаты. Рассматривается течение ньютоновской вязкой среды с плотностью ρ и динамической вязкостью μ, реализуемое в цилиндрическом слое

$$\Omega_t = \{a(t) < r < b(t),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}, \tag{31}$$

где (r, θ, z) – цилиндрическая система координат. Функции $a(t)$ и $b(t)$ известны и в силу несжимаемости связаны условием $b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2$; $a_0 = a(t_0)$, $b_0 = b(t_0)$. Движение представляет собой комбинацию радиально-вращательного растекания либо стока и осевого течения и характеризуется нестационарными полями скоростей, скоростей деформаций и девиатора тензора напряжений

$$v_r^\circ = \frac{C(t)}{r}, \quad v_\theta^\circ = v_\theta^\circ(r,t), \quad v_z^\circ = v_z^\circ(r,t) \tag{32}$$

$$v_{rr}^\circ = -v_{\theta\theta}^\circ = -\frac{C(t)}{r^2}, \quad v_{r\theta}^\circ = \frac{1}{2}\Big(v_{\theta,r}^\circ - \frac{v_\theta^\circ}{r}\Big), \quad v_{rz}^\circ = \frac{1}{2}v_{z,r}^\circ \tag{33}$$

$$s_{rr}^\circ = -s_{\theta\theta}^\circ = -\frac{2\mu C(t)}{r^2}, \quad s_{r\theta}^\circ = \mu\Big(v_{\theta,r}^\circ - \frac{v_\theta^\circ}{r}\Big), \quad s_{rz}^\circ = \mu v_{z,r}^\circ \tag{34}$$

где $2\pi C(t)$ – заданный расход через окружность любого радиуса от $a(t)$ до $b(t)$, связанный с этими функциями соотношениями

$$a\dot{a} = b\dot{b} = C; \quad a^2 = a_0^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t} C(\tau)\,d\tau, \quad b^2 = b_0^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t} C(\tau)\,d\tau. \tag{35}$$

Аналогично плоской задаче, рассмотренной ранее, наложим на это течение трёхмерную картину возмущений δv_α, $\delta v_{\alpha\beta}$, $\delta s_{\alpha\beta}$, δp. Так как выбранное основное движение не зависит от угловой и осевой координат θ и z, отделим множители с этими переменными

$$\begin{gathered}\delta v_\alpha(r,\theta,z,t) = V_{\alpha(ns)}(r,t)\,\mathrm{e}^{i(n\theta+sz)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad s > 0\\ \delta s_{\alpha\beta}(r,\theta,z,t) = S_{\alpha\beta(ns)}(r,t)\,\mathrm{e}^{i(n\theta+sz)}, \quad (\alpha,\beta) = (r,\theta,z)\\ \delta p(r,\theta,z,t) = P_{(ns)}(r,t)\,\mathrm{e}^{i(n\theta+sz)},\end{gathered} \tag{36}$$

рассматривая отдельные гармоники неизвестных величин по θ и z. Подставляя (36) в линеаризованные уравнения движения, условие несжимаемости и определяющие соотношения вязкой среды, получим замкнутую систему четырёх уравнений относительно четырёх комплекснозначных функций V_r, V_θ, V_z и P:

$$
\begin{gathered}
\rho\Big(V_{r,t} + \frac{C}{r}\,V_{r,r} - \frac{C}{r^2}\,V_r + \frac{in}{r}\,v^\circ_\theta V_r + isv^\circ_z V_r - \frac{2}{r}\,v^\circ_\theta V_\theta\Big) = \\
= -P_{,r} + 2\mu V_{r,rr} + \mu\Big(-\frac{n^2}{r^2}V_r + \frac{in}{r}V_{\theta,r} - \frac{in}{r^2}V_\theta\Big) + \\
+ is\mu\Big(V_{z,r} + isV_r\Big) + \frac{2\mu}{r}\Big(V_{r,r} - \frac{in}{r}V_\theta - \frac{1}{r}V_r\Big)
\end{gathered} \tag{37}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho\Big(V_{\theta,t} + \frac{C}{r}\,V_{\theta,r} + \frac{C}{r^2}V_\theta + v^\circ_{\theta,r}V_r + \frac{in}{r}\,v^\circ_\theta V_\theta + \frac{1}{r}\,v^\circ_\theta V_r + isv^\circ_z V_\theta\Big) = \\
= -\frac{in}{r}\,P + \mu\Big(-\frac{in}{r^2}V_r + \frac{in}{r}V_{r,r} + V_{\theta,rr} + \frac{1}{r^2}V_\theta - \frac{1}{r}V_{\theta,r}\Big) + \\
+ \frac{2\mu in}{r^2}\Big(inV_\theta + V_r\Big) - s\mu\Big(sV_\theta + \frac{n}{r}V_z\Big) + \frac{2\mu}{r}\Big(\frac{in}{r}V_r + V_{\theta,r} - \frac{1}{r}V_\theta\Big)
\end{gathered} \tag{38}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho\Big(V_{z,t} + \frac{C}{r}\,V_{z,r} + v^\circ_{z,r}V_r + \frac{in}{r}\,v^\circ_\theta V_z + isv^\circ_z V_z\Big) = -isP + \mu\Big(V_{z,rr} + isV_{r,r}\Big) - \\
-\frac{n\mu}{r}\Big(sV_\theta + \frac{n}{r}V_z\Big) - 2\mu s^2 V_z + \frac{\mu}{r}\Big(V_{z,r} + isV_r\Big)
\end{gathered} \tag{39}
$$

$$
V_{r,r} + \frac{1}{r}\,V_r + \frac{in}{r}\,V_\theta + isV_z = 0 \tag{40}
$$

Положим, что в возмущённом течении границы слоя Ω_t движутся так же, как и в основном, и на них сохраняются условия прилипания

$$
r = a(t) \ \text{ и } \ r = b(t): \quad V_r = V_\theta = V_z = 0. \tag{41}
$$

Применяя метод интегральных соотношений, подробно описанный в тексте диссертации, сведем эту систему к равенству для действительных частей квадратичных функционалов:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|V|^2\,dr = -\nu\int\limits_a^b r\big(2|V_{r,r}|^2 + |V_{\theta,r}|^2 + |V_{z,r}|^2\big)\,dr + \\
+ \int\limits_a^b \Big[\frac{C}{r} - \nu\Big(\frac{n^2+2}{r} + s^2 r\Big)\Big]|V_r|^2\,dr - \int\limits_a^b \Big[\frac{C}{r} + \nu\Big(\frac{1}{r} + s^2 r\Big)\Big]|V_\theta|^2\,dr - \\
-\nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r}\,|V_z|^2\,dr + \int\limits_a^b \Big[2\nu ns(V_\theta\bar{V}_z)_* + \frac{4\nu n}{r}(V_\theta\bar{V}_r)_{**} - \\
-(rv^\circ_{\theta,r} - v^\circ_\theta)(V_r\bar{V}_\theta)_* - rv^\circ_{z,r}(V_r\bar{V}_z)_*\Big]\,dr\,,
\end{gathered} \tag{42}
$$

где $|V|^2 = |V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2$; нижние индексы $*$ и $**$ означают действительную и мнимую части.

Воспользовавшись интегральными неравенствами Фридрихса и Коши-Буняковского сведем (42) к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|V|^2\,dr \le \int\limits_a^b r\big(\Phi_r|V_r|^2 + \Phi_\theta|V_\theta|^2 + \Phi_z|V_z|^2\big)\,dr \tag{43}$$

$$\Phi_r(r,t) = \frac{1}{r^2}\Big(C + \frac{qr}{2} + \frac{mr}{2} - \frac{2\pi^2 a\nu r}{(b-a)^2} - \nu(n^2+2) - \nu s^2 r^2 + \frac{2\nu n r}{a}\Big) \tag{44}$$

$$\Phi_\theta(r,t) = \frac{1}{r^2}\Big(-C + \frac{qr}{2} - \frac{\pi^2 a\nu r}{(b-a)^2} - \nu - \nu s^2 r^2 + \nu s n r + \frac{2\nu n r}{a}\Big) \tag{46}$$

$$\Phi_z(r,t) = \frac{1}{r^2}\Big(\frac{mr}{2} - \frac{\pi^2 a\nu r}{(b-a)^2} - \nu n^2 + \nu n s r\Big), \tag{47}$$

где $q(t) = \sup\limits_{a<r<b} |r v^\circ_{\theta,r} - v^\circ_\theta|$, а $m(t) = \sup\limits_{a<r<b} |r v^\circ_{z,r}|$.

Перейдем теперь непосредственно к оценке затухания возмущений. Пусть на интервале времени $t_0 \le t \le t_1 \le \infty$ для всех $r \in [a(t); b(t)]$ верны три неравенства

$$\Phi_r(r,t) < 0, \quad \Phi_\theta(r,t) < 0, \quad \Phi_z(r,t) < 0. \tag{48}$$

Тогда окончательная верхняя интегральная оценка экспоненциального затухания функционала $\int_a^b r|V|^2\,dr$ на интервале $t_0 \le t \le t_1$ имеет следующий вид:

$$\int\limits_a^b r|V|^2\,dr \le \int\limits_{a_0}^{b_0} r|V|^2_{t=t_0}\,dr \cdot \exp\Bigg(2\int\limits_{t_0}^{t} Q(\tau)\,d\tau\Bigg), \tag{49}$$

где $\Phi^0_\alpha(t) = \sup\limits_{a<r<b} \Phi_\alpha(r,t) < 0, \quad Q(t) = \max\limits_{\alpha=r,\theta,z} \Phi^0_\alpha(t) < 0$. Достаточным условием ее удовлетворения будет являться следующая система неравенств:

$$\begin{gathered}\sup_{a<r<b}\Big[\frac{qr}{2} - \nu\Big(1 + \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r - nsr - \frac{2n}{a}\,r + s^2 r^2\Big)\Big] < C(t) < \\ < \inf_{a<r<b}\Big[-\frac{r(q+m)}{2} + \nu\Big(n^2 + 2 + \frac{2\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r - \frac{2n}{a}\,r + s^2 r^2\Big)\Big]\end{gathered} \tag{50}$$

$$s < \frac{1}{n}\Big(-\frac{m}{2\nu} + \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2} + \frac{n^2}{b}\Big), \tag{51}$$

предъявляемых к расходу $2\pi C(t)$ и волновым числам n и s возмущений вдоль угловой координаты и оси цилиндрического слоя Ω_t.

В случае, когда движение цилиндрического слоя представляет собой радиальное растекание-сток с учётом осевого сдвига, достаточные условия выполнения оценки (49) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\sup_{a<r<b}\Big[-\nu\Big(1+\frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r-nsr-\frac{2n}{a}\,r+s^2r^2\Big)\Big]<C(t)<\\ <\inf_{a<r<b}\Big[-\frac{rm}{2}+\nu\Big(n^2+2+\frac{2\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r-\frac{2n}{a}\,r+s^2r^2\Big)\Big]\end{gathered}\tag{52}$$

$$s<\frac{1}{n}\Big(-\frac{m}{2\nu}+\frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}+\frac{n^2}{b}\Big),\tag{53}$$

А в случае, когда движение цилиндрического слоя представляет собой радиальное-вращательное растекание-сток в отсутствии осевого сдвига, достаточные условия выполнения оценки (49) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\sup_{a<r<b}\Big[\frac{qr}{2}-\nu\Big(1+\frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r-nsr-\frac{2n}{a}\,r+s^2r^2\Big)\Big]<C(t)<\\ <\inf_{a<r<b}\Big[-\frac{qr}{2}+\nu\Big(n^2+2+\frac{2\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r-\frac{2n}{a}\,r+s^2r^2\Big)\Big]\end{gathered}\tag{54}$$

$$s<\frac{1}{n}\Big(\frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}+\frac{n^2}{b}\Big).\tag{55}$$

Вторая глава *"Оценки возмущений жесткопластического растекания-стока кольца"* посвящена исследованию развития во времени плоской картины возмущений, налагаемых на радиальное растекание-сток кольца из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса-Генки. Радиальное растекание кольца ($\Omega_t=\{a(t)<r<b(t),\ 0\le\theta<2\pi\},\quad t\ge t_0$) характеризуется следующими ненулевыми компонентами вектора скорости $\mathbf{v}^\circ$ и тензора скоростей деформаций $\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ$:

$$v_r^\circ=\frac{C(t)}{r},\quad v_{rr}^\circ=-v_{\theta\theta}^\circ=-\frac{C(t)}{r^2}\tag{56}$$

$$v_u^\circ=\big(\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{\mathbf{v}}^{\circ 2})\big)^{1/2}=(\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ:\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}\,|C(t)|}{r^2}\tag{57}$$

Из (56), (57) и векторных определяющих соотношений идеально жесткопластической среды $\underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ=\frac{\sigma_s}{v_u^\circ}\underset{\sim}{\mathbf{v}}^\circ$ находим две ненулевые компоненты девиатора $\underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ$ тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}^\circ=-p^\circ\underset{\sim}{\mathbf{I}}+\underset{\sim}{\mathbf{s}}^\circ$:

$$s_{rr}^\circ=-s_{\theta\theta}^\circ=-\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sign}\,C\tag{58}$$

удовлетворяющие критерию Мизеса – Генки $(s^{\circ}_{rr})^2 + (s^{\circ}_{\theta\theta})^2 = \sigma_s^2$. Распределение давления по всей области кольца представляется в следующем виде:

$$p^{\circ}(r,t) = -\rho\dot{C}\ln r - \frac{\rho C^2}{2r^2} - \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}(1+2\ln r)\operatorname{sign} C + p^{\circ}_0 \tag{59}$$

Заметим, что выбранное основное течение, помечаемое верхним индексом “$\circ$”, существенно нестационарно, даже если $C(t) = \text{const}$, так как область Ω_t изменяет свое положение на плоскости с течением времени.

Наложим на исследованное растекание-сток малые возмущения вектора скорости δv_r, δv_θ, тензора скоростей деформаций δv_{rr}, $\delta v_{\theta\theta}$, $\delta v_{r\theta}$, девиатора напряжений δs_{rr}, $\delta s_{\theta\theta}$, $\delta s_{r\theta}$ и давления δp. Будем для краткости опускать знак δ в вариациях, оставляя верхний индекс “$\circ$” в обозначениях для величин невозмущенного растекания. Поскольку основное движение не зависит от θ, отделим во всех неизвестных величинах множитель с этой переменной, рассматривая динамику отдельных гармоник по θ:

$$\begin{gathered} v_\alpha(r,\theta,t) = V_{\alpha(n)}(r,t)\,\mathrm{e}^{in\theta}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (\alpha,\beta) = (r,\theta) \\ s_{\alpha\beta}(r,\theta,t) = S_{\alpha\beta(n)}(r,t)\,\mathrm{e}^{in\theta}, \quad p(r,\theta,t) = P_{(n)}(r,t)\,\mathrm{e}^{in\theta}, \end{gathered} \tag{60}$$

Из соображений краткости далее будем опускать у комплекснозначных функций $V_{\alpha(n)}$, $S_{\alpha\beta(n)}$, $P_{(n)}$ нижний индекс n в скобках. Тогда после линеаризации задачи движения в возмущениях мы получим следующую замкнутую систему:

$$\rho\Big(V_{r,t} + \frac{C}{r}\,V_{r,r} - \frac{C}{r^2}\,V_r\Big) = -P_{,r} + \frac{in}{r}\,S_{r\theta} \tag{61}$$

$$\rho\Big(V_{\theta,t} + \frac{C}{r}\,V_{\theta,r} + \frac{C}{r^2}\,V_\theta\Big) = -\frac{in}{r}\,P + \frac{1}{r^2}(r^2 S_{r\theta})_{,r} \tag{62}$$

$$V_{r,r} + \frac{1}{r}\,V_r + \frac{in}{r}V_\theta = 0 \tag{63}$$

$$S_{r\theta} = \frac{\sigma_s r^2}{2\sqrt{2}\,|C|}\Big(\frac{in}{r}\,V_r + V_{\theta,r} - \frac{V_\theta}{r}\Big) \tag{64}$$

Условия прилипания распространяем и на функции V_r и V_θ:

$$r = a \;\text{ и }\; r = b: \quad V_r = V_\theta = 0 \tag{65}$$

Применяя метод интегральных соотношений, подробно описанный в тексте диссертации, сведем эту систему к равенству для действительных частей квадратичных функционалов:

$$\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|V|^2\,dr = \rho C\int\limits_a^b \frac{1}{r}\big(|V_r|^2-|V_\theta|^2\big)\,dr + \frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}\,|C|}\Bigg[-\int\limits_a^b r^3|V_{\theta,r}|^2\,dr+ \\ +\int\limits_a^b r\big((2n^2-3)|V_\theta|^2-n^2|V_r|^2\big)\,dr + 4n\int\limits_a^b r(V_\theta\bar V_r)_{**}dr\Bigg], \tag{66}$$

где $|V|^2=|V_r|^2+|V_\theta|^2$. Нижними индексами * и ** помечаются соответственно действительная и мнимая части.

Цель исследования состоит в оценке сверху с помощью различных интегральных (вариационных) неравенств в комплекснозначном гильбертовом пространстве $H_2[a;b]$ левой части ключевого равенства (66), описывающей развитие во времени кинематических возмущений по норме $\int_a^b r|V|^2\,dr$. Так, в случае растекания ($C>0$) получаем следующую верхнюю оценку левой части (66):

$$\int\limits_a^b r|V|^2\,dr \le \int\limits_{a_0}^{b_0} r|V|^2_{t=t_0}\,dr\cdot\exp\Bigg(2\int\limits_{t_0}^t Q^+(\tau)\,d\tau\Bigg) \tag{67}$$

$$\rho Q^+(t)=\max\{\Phi_r^+(t),\Phi_\theta^+(t)\} \tag{68}$$

$$\Phi_r^+(t)=\frac{\rho C}{a^2}-n(n-2)\frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}\,C} \tag{69}$$

$$\Phi_\theta^+(t)=-\frac{\rho C}{b^2}-\frac{\pi^2a^3\sigma_s}{2\sqrt{2}\,b(b-a)^2C}+(2n^2+2n-3)\frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}\,C} \tag{70}$$

Функция времени Q^+ , как и $\Phi_r^+(t)$, $\Phi_\theta^+(t)$, зависит от параметров основного движения растекающегося жесткопластического кольца, а следовательно, известна в любой момент времени $t\ge t_0$.

В случае стока ($C<0$) получаем следующую оценку:

$$\int\limits_a^b r|V|^2\,dr \le \int\limits_{a_0}^{b_0} r|V|^2_{t=t_0}\,dr\cdot\exp\Bigg(2\int\limits_{t_0}^t Q^-(\tau)\,d\tau\Bigg) \tag{71}$$

$$\rho Q^-(t)=\max\{\Phi_r^-(t),\Phi_\theta^-(t)\} \tag{72}$$

$$\Phi_r^-(t)=\frac{\rho C}{b^2}+n(n-2)\frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}\,C} \tag{73}$$

$$\Phi_\theta^-(t) = -\frac{\rho C}{a^2} + \frac{\pi^2 a^3 \sigma_s}{2\sqrt{2}\, b(b-a)^2 C} - (2n^2 + 2n - 3)\frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}\, C} \tag{74}$$

Исследуем далее картину возмущений, налагаемых на растекание либо сток кольца с постоянным расходом C. В случае растекания ($C > 0$) вычисления приводят к следующему результату:

$$\int\limits_a^b r|V|^2\,dr \leq \int\limits_{a_1}^{b_1} r|V|^2_{t=t_1}\,dr \cdot \Big(1 + \frac{2C}{a_1^2}(t - t_1)\Big)\exp\Big(-n(n-2)\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}\rho C}(t - t_1)\Big) \tag{75}$$

Для значений $n = 0, 1, 2$ мажорирующая функция времени в (75) при $t \to \infty$ возрастает экспоненциально при $n = 1$ и линейно при $n = 0$ и $n = 2$. Начиная же с $n = 3$ и далее, она стремится к нулю при $t \to \infty$. Это говорит об экспоненциально устойчивом развитии (затухании до нуля) угловых гармоник возмущений (60) с номерами $n = 3, 4, \dots$, накопленных к моменту t_1. Для первых трех гармоник — осесимметричной ($n = 0$) и соответствующих номерам $n = 1, 2$ — неравенство (75) носит характер верхней оценки роста возмущений, что, хотя напрямую и не связано с устойчивостью, также представляет теоретический интерес.

Сток кольца с постоянным параметром $C < 0$ отличается тем, что течение вплоть до схлопывания в точку внутренней границы осуществляется на конечном интервале времени $t_0 \leq t < t_0 + t_*$, где $t_* = a_0^2/(2|C|)$.Интеграл в (71) при стремлении верхнего предела к $t_0 + t_*$ расходится, что не позволяет дать конечную оценку развития возмущений вплоть до момента схлопывания внутренней границы. Однако для любого момента, предшествующего $t_0 + t_*$, такие оценки роста возмущений имеют механическое содержание.

Для осуществления необходимых аналитических выкладок рассмотрены условия отсутствия возмущений на границах цилиндрического слоя при разных режимах течения. Заметим, что выбор граничных условий качественно влияет на вид оценок устойчивости возмущенной задачи, что и продемонстрировано в следующей главе диссертации, посвященной гравитационной устойчивости двухслойных систем.

В третьей главе *"Гравитационная устойчивость вертикально перемещаемых двухслойных систем"* , в первом параграфе исследуется развитие малых колебаний в системе, состоящей из тяжелого слоя идеальной несжимаемой жидкости, покрывающего слой идеальной жидкости с другой плотностью.

Рассмотрим движение в поле силы тяжести $\mathbf{g} = g\mathbf{e_2}$ горизонтального слоя толщины h_1 невязкой несжимаемой среды плотности ρ_1, покрывающего слой другой невязкой несжимаемой среды толщины h_2 плотности ρ_2. Вся система поступательно перемещается вдоль оси x_2 неподвижной декартовой системы координат с заданной скоростью $V(t)$, так что уравнения границ слоев известны (Рис.2) :

$x_2 = x_2^\circ(t)$, $x_2 = h_1 + x_2^\circ(t)$ и $x_2 = h_1 + h_2 + x_2^\circ(t)$, причем $\dot{x_2}^\circ(t) = V(t), x_2^\circ(0) = 0$

Включим в безразмерный базис тройку величин $\{\rho_1, g, h_1\}$ и будем проводить весь дальнейший анализ в безразмерных координатах и переменных. Для простоты не будем изменять обозначения для уже введенных величин t, x_i, x_2°, V. В системе присутствуют два безразмерных параметра:

1) разуплотнение $\delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, меняющееся в пределах $-1 < \delta < \infty$

2) отношение толщин $\gamma = h_2/h_1, \gamma > 0$.

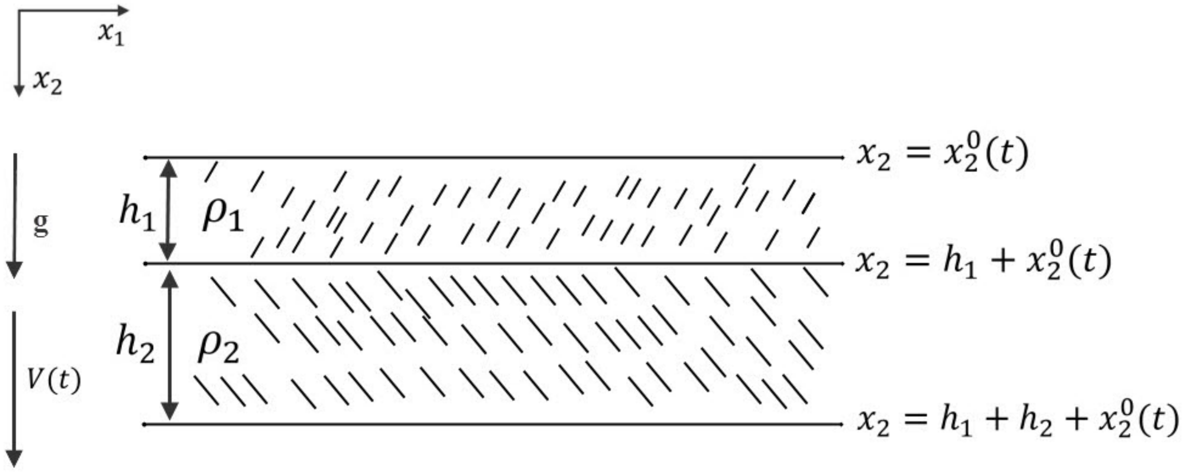

Рис.2 Двухслойная система тяжелых идеальных сред

Кинематика невозмущенного движения всей системы соответствует поступательному перемещению как абсолютно твердого тела:

$$v_1^{o\{1\}} = v_1^{o\{2\}} \equiv 0, \quad v_2^{o\{1\}} = v_2^{o\{2\}} = V(t) \tag{76}$$

Верхние индексы $\{1\}$ и $\{2\}$ означают, что величина относится к верхнему либо нижнему слою соответственно; верхний индекс "о"приписывается к величине в невозмущенном состоянии. Линеаризованная задача устойчивости поступательного движения относительно малых возмущений давления $p^{\{\nu\}}$, вектора скорости $v^{\{\nu\}} (\nu = 1, 2)$, их градиентов, а также геометрии областей, занимаемых обеими средами выглядит следующим образом:

$\mathbf{X} \in \Omega^{\{1\}} = \{x_2^\circ + \eta^1 < x_2 < 1 + x_2^\circ + \eta^2\}$:

$$-p^{\{1\}}_{,i} = v^{\{1\}}_{i,t} + Vv^{\{1\}}_{i,2} \equiv D_t v^{\{1\}}_i, \quad v^{\{1\}}_{i,i} = 0$$

$\mathbf{X} \in \Omega^{\{2\}} = \{1 + x_2^\circ + \eta^2 < x_2 < 1 + \gamma + \eta^3\} :$

$$-p^{\{2\}}_{,i} = (1+\delta)\Big(v^{\{2\}}_{i,t} + Vv^{\{2\}}_{i,2}\Big) \equiv (1+\delta) D_t v^{\{2\}}_i, \quad v^{\{2\}}_{i,i} = 0 \tag{77}$$

где D_t - так называемая линеаризованная производная по времени,
$\eta^1(x_1, t)$ – неизвестное возмущение верхней границы слоя,
$\eta^2(x_1, t)$ – неизвестное возмущение границы раздела слоев,
$\eta^3(x_1, t)$ – неизвестное возмущение нижней границы нижнего слоя.

В терминах функции тока $\Big(\psi^{\{\nu\}}_{,2} = v^{\{\nu\}}_1; \quad \psi^{\{\nu\}}_{,1} = -v^{\{\nu\}}_2\Big)$, система (77) представляется в следующем ввиде:

$$D_t\Big(\Delta\psi^{\{\nu\}}\Big) = 0, \quad \nu = 1, 2\,. \tag{78}$$

Поскольку основное движение не зависит от координаты x_1, решение уравнений (78) естественно искать в виде гармоник вдоль оси (Ox_1)

$$\begin{aligned} \psi^{\{1\}}(x_1, x_2, t) &= \Big(A_1(t)\operatorname{ch} s(x_2 - x_2^\circ) + A_2(t)\operatorname{sh} s(x_2 - x_2^\circ)\Big)e^{isx_1} \\ \psi^{\{2\}}(x_1, x_2, t) &= \Big(B_1(t)\operatorname{ch} s(x_2 - x_2^\circ) + B_2(t)\operatorname{sh} s(x_2 - x_2^\circ)\Big)e^{isx_1}\,, \end{aligned} \tag{79}$$

с различными волновыми числами $s > 0$. Функции η^1, η^2, η^3 представляются в сходной с (79) форме

$$\begin{aligned} \eta^1(x_1, t) &= iC_1(t)e^{isx_1}\,, \\ \eta^2(x_1, t) &= iC_2(t)e^{isx_1}\,, \\ \eta^3(x_1, t) &= iC_3(t)e^{isx_1}\,, \end{aligned} \tag{80}$$

Положим, что все семь амплитуд $A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t), C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ имеют одну и ту же логарифмическую производную по времени $\alpha(t)$, т.е. удовлетворяют эволюционным уравнениям:

$$\begin{gathered} \dot{A}_1 = \alpha A_1\,, \quad \dot{A}_2 = \alpha A_2\,, \quad \dot{B}_1 = \alpha B_1\,, \quad \dot{B}_2 = \alpha B_2\,, \\ \dot{C}_1 = \alpha C_1\,, \quad \dot{C}_2 = \alpha C_2\,, \quad \dot{C}_3 = \alpha C_3 \end{gathered} \tag{81}$$

Величина $\alpha(t)$ заранее неизвестна и представляет основной интерес для исследования устойчивости. На верхней границе верхнего слоя и на нижней границе нижнего слоя возможны два механических вида условий соответственно - непротекание сквозь прямолинейную границу и наличие свободной границы. В связи с этим возникает 4 варианта развития событий.

В первом случае имеем непротекание сквозь прямолинейную верхнюю и нижнюю границы слоев.

Если $(1-\dot{V}_0)\delta > 0$, то возмущенный процесс следует считать устойчивым в классическом смысле устойчивости по Ляпунову. Затухание колебаний (асимптотическая устойчивость) в невязкой среде, как известно, реализоваться не может. Если $(1-\dot{V}_0)\delta = 0$, то возмущенное состояние статично при любом $t > 0$ ("колебания с нулевой частотой"). Это может происходить, когда либо $\rho_1 = \rho_2$, либо вся система движется вниз с ускорением силы тяжести ($\dot{V}_0 = 1$; невесомость). Случай $(1-\dot{V}_0)\delta < 0$ соответствует экспоненциальному нарастанию возмущений (неустойчивости). Тот факт, что разуплотнение δ и так называемое "реальное ускорение" $(1-\dot{V})$ входят в выражение для частоты в виде произведения, говорит о том, что стабилизировать/дестабилизировать гравитационно неустойчивую/устойчивую в состоянии покоя систему можно, перемещая ее вниз с ускорением, большим g, тем самым фактически переворачивая направление силы тяжести. Этот результат представляется вполне естественным.

В случае неравноускоренного движения двухслойной системы ($\dot{V} \neq const$) критерий устойчивости представляется в следующем виде:

существует такое $T > 0$, что $(1-\dot{V})\delta \geq 0$ при $t > T$.

Во втором случае имеем свободную верхнюю границу и прямолинейную нижнюю. Тогда:

1)$\dot{V} = \dot{V}_0 = const$

Условие устойчивости: $\begin{cases} \delta \geq 0\,, \\ 1 \geq \dot{V}_0 \end{cases}$

2)$\dot{V} \neq const$

Условие устойчивости: $\delta \geq 0$, существует такое $T > 0$, что $\dot{V}(t) \leq 1$ при $t \geq T$.

В третьем случае рассматриваем прямолинейную верхнюю границу и свободную нижнюю. Тогда:

1)$\dot{V} = \dot{V}_0 = const$

Условие устойчивости: $\begin{cases} \delta \leq 0\,, \\ 1 \leq \dot{V}_0 \end{cases}$

2)$\dot{V} \neq const$

Условие устойчивости: $\delta \leq 0$, существует такое $T > 0$, что $\dot{V}(t) \geq 1$ при $t \geq T$.

В четвертом случае имеем свободные верхнюю и нижнюю границы. Тогда условиями устойчивости будут следующие:

1)$\dot{V} = 1$

Здесь наблюдается статичность возмущенного состояния при любом $t > 0$ ("колебания с нулевой частотой").

2)$\dot{V} \neq 1$

Возмущения границ слоев будут экспоненциально возрастать.

Во втором параграфе **третьей главы** в отличие от первого тяжелый вязкий слой покрывает полупространство идеальной жидкости. Вся система как жесткое целое движется в вертикальном направлении по некоторому заданному закону. На основе техники линеаризации уравнений и граничных условий выведено характеристическое уравнение и аналитически рассмотрен предел большой вязкости. В этом случае двумя определяющими устойчивость параметрами являются разуплотнение и перегрузка. Так, в случае равноускоренного движения экспоненциальному затуханию всех возмущений, налагаемых на основной процесс, т.е. гравитационной устойчивости всей системы, отвечает следующий набор требований: $\delta > 0\,, \dot{V}_0 < 1$.

В заключении работы приведены основные результаты диссертации.

Основные результаты и выводы работы.

1. На основе исследования развития во времени малых возмущений кинематических и силовых величин, налагаемых на радиальное растекание либо сток несжимаемого вязкого кольца, с помощью метода интегральных соотношений для квадратичных функционалов найдены верхние оценки развития возмущений. Обоснована допустимость в данной задаче невязкого предела, в котором выведены как верхние, так и нижние оценки.

2. На основе исследования развития во времени трёхмерной картины малых возмущений, наложенных на комбинированный режим течения в трёх направлениях (радиальное растекание-сток – осесимметричное вращение – осевой сдвиг) несжимаемого вязкого цилиндрического слоя, с помощью метода интегральных соотношений, примененного к линеаризованной задаче в возмущениях, получены достаточные оценки экспоненциальной устойчивости основного движения.

3. Найдены параметры развития во времени плоской картины малых возмущений, налагаемых на радиальное растекание либо сток кольца из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса-Генки. С помощью метода интегральных соотно-

шений получены верхние экспоненциальные оценки роста либо затухания кинематических возмущений. Показано, что угловые гармоники с разными номерами эволюционируют качественно неодинаково.

4. Описана эволюция развития малых возмущений в системе, состоящей из двух тяжелых слоев несжимаемых невязких сред с разными плотностями. Получено, что факт гравитационной устойчивости существенно зависит от условий на границах слоев – наличия свободной поверхности либо непротекания сквозь прямолинейную границу. Аналитически получены количественные оценки роста либо затухания начальных возмущений. В случае когда в системе тяжелый вязкий слой покрывает полупространство невязкой среды, выведено характеритическое уравнение и аналитически рассмотрен предел большой вязкости.

Публикации по теме диссертации.

1. **Georgievskii D.V., Tlyustangelov G.S. Stability of Low Oscillations in a Two-Layer Inviscid Fluid by Vertical Moving in Gravity // Russian Journal of Mathematical Physics, 17, №4, pp. 448–453, 2010.**

2. **Георгиевский Д.В., Тлюстангелов Г.С. Экспоненциальные оценки возмущений жёсткопластического растекания-стока кольца // Известия РАН. Механика твёрдого тела, №4, с. 135–144, 2017.**

3. **Георгиевский Д.В., Путкарадзе В.Г., Тлюстангелов Г.С. Трёхмерные возмущения радиально-вращательного растекания-стока вязкого цилиндрического слоя // Доклады Академии наук, 473, №6, с. 655–658, 2017.**

4. **Георгиевский Д.В., Тлюстангелов Г.С. Оценки развития малых возмущений при радиальном растекании (стоке) вязкого кольца // Прикладная механика и техническая физика, 58, №4, с. 46–55, 2017.**

5. Тлюстангелов Г.С. Развитие возмущений в растекающемся вязком цилиндрическом слое с учетом вращения и осевого движения // Вестник ЧГПУ им И.Я.Яковлева. Сер. Механика предельного состояния, **30**, №4, с. 12–23, 2016.