

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Боровских Алексей Владиславович

УДК 517.958

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Н.Х.Розов

Москва 2006

# Введение

## 1 Постановка задачи и описание проблемы

Основная цель настоящей работы – описать в адекватных математических терминах процесс переноса волн в неоднородной среде и установить связи между различными математическими формами описания переноса волн и различными математическими формами описания эволюции среды.

Здесь необходимо сразу уточнить, что имеется в виду, поскольку в существующей литературе понятие "волна" является чрезвычайно расплывчатым. Суммируя все употребляемые смыслы, можно прийти к заключению, что волной называется "все, что движется". Это, вообще говоря, не вполне оправдано. Отметим, кстати, что понятие "волна" не фигурирует ни в математических энциклопедиях, ни в математических справочниках. Что же касается физической справочной литературы, то в ней понятие волны автору удалось найти только в физической энциклопедии [59].

Для уточнения смыслов приведем следующую табличку:

	Волны в среде	Эволюция среды	Колебания в среде
Дифф. форма	Уравнения переноса	Уравнения сплошной среды	Уравнения геометрической оптики
Интегр. форма	Формула распр. волн	Формула Римана	Формулы контурного интегрирования

В ней "переносу волн" (т.е. процессу преобразования движущихся форм) соответствует левая колонка, средняя колонка отвечает за "эволюцию среды" в динамической системе представлений (как процесс преобразования с течением времени "фазовых" характеристик – состояния среды и скорости изменения этого состояния), правая – за "колебания в среде", т.е. изменение состояния среды, являющееся синусоидальным по времени и сохраняющим свою форму в пространстве.

Конечно, поскольку речь идет по существу об одном и том же процессе, лишь описываемом разными способами, между этими колонками не может быть принципиальной разницы. Однако для того, чтобы ясно представить

и точно описать переход одного смысла в другой, необходимо четко зафиксировать разделение этих смыслов.

К дифференциальной форме описания состояния среды можно отнести практически все уравнения, называемые сейчас "волновыми" – уравнения акустики, систему Максвелла, уравнения упругого тела, уравнения гидродинамики и газовой динамики.

К интегральной форме описания состояния среды можно отнести интегральные формулы решения этих уравнений (таких, как формулы Даламбера, Римана, Пуассона, Кирхгофа). Несколько промежуточное положение здесь занимают интегральные уравнения (например, известная формула С.Л.Соболева [146], распространенная затем В.Г.Гоголадзе [63] на анизотропный случай), которые являются важным средством установления эквивалентности дифференциальной и интегральной формы описания одного и того же явления. Такого рода эквивалентность на самом деле чрезвычайно важна как *математическая* связь между представлениями о близко- и дальнодействии (см., напр., [108, Гл. IV, п. 95а]).

Уравнения геометрической оптики – это уравнения, получающиеся из уравнений состояния среды при подстановке в них решения вида

$$u(t, x, \omega) = A(x, \omega)e^{i(\omega t - \psi(x, \omega))}, \quad (1.1)$$

общее же решение уравнений состояния получают интегрированием решений (1.1), причем, поскольку параметр  $\omega$  обычно допускается не только вещественным, но и комплексным, это интегрирование происходит в комплексной области по некоторому контуру:

$$u(t, x) = \int_{\Gamma} u(t, x, \omega) d\omega. \quad (1.2)$$

Хотя в формуле (1.1) не написано ничего более чем "рассматриваются гармонические колебания среды с фазой и амплитудой, зависящей от точки этой среды", эти решения часто называют, следуя Уизему [160], "дисперсионными волнами". В целях разделения смыслов мы будем эту систему представлений называть "колебаниями в среде", чтобы рельефнее выделить основной смысл понятия "волна", который идет от непосредственных наблюдений за волнами, например, на воде и который состоит в том, что *волна – это некоторое поле, скалярное или векторное, которое изменяется с течением времени путем переноса его, в силу связанности среды, из одних точек пространства в другие*.носителем волны является фронт, а направление переноса определяется *лучами*. Под фронтом понимается набор линий уровня решения уравнения характеристик (уравнения эйконала)

соответствующего волнового уравнения, а под лучами – интегральные линии поля коградиентов этого решения уравнения эйконала (или, другими словами, бихарактеристики волнового уравнения).

Обоснованность такой дискриминации по отношению к "дисперсионным волнам" мы хотели бы проиллюстрировать на двух совершенно тривиальных примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим одномерное уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} - a^2 u,$$

где  $a$  – константа. Решениями этого уравнения являются, очевидно, функции  $u = \sin(\omega t - kx)$ , где  $k = \sqrt{\omega^2 - a^2}$ . Можно ли эти решения считать "волнами"?

На первый взгляд – да, поскольку налицо некая движущаяся форма (синус). Однако в полученной формуле скрыт хорошо известный парадокс *фазовой скорости*. Он состоит в том, что скорость движения этой формы (которая и называется "фазовой")  $\omega/k = \omega/\sqrt{\omega^2 - a^2}$  больше единицы, т.е. характеристической скорости распространения конечных возмущений, и поэтому получается, что наша синусоидальная форма, рассматриваемая как целое, двигается с большей скоростью, чем та же самая синусоидальная форма, мысленно разбитая на конечные фрагменты (например, по полпериода).

Парадокс этот не только обнаруживается, но и разрешается мысленным экспериментом: выделим в некоторый момент времени одну из полуволн ("горбик"), отметим его точку максимума (пусть это будет точка  $A$ ), затем посмотрим, куда этот максимум переместился за время  $\Delta t$  и обозначим эту точку через  $B$ . Теперь вернемся назад, к начальному моменту времени, удалим полуволну, содержащую точку  $A$  (т.е. заменим на полупериоде синус нулем), и посмотрим, что будет происходить с такой испорченной движущейся формой дальше. Элементарные рассуждения, основанные на линейности дифференциального уравнения, показывают, что созданный нами дефект будет распространяться с единичной скоростью, поэтому он будет отставать от синусоидальной формы, и в результате через время  $\Delta t$  в точке  $B$ , как ни в чем не бывало, появится максимум синусоидальной формы.

Проведенные рассуждения показывают, что в нашем примере в точке  $B$  форма синуса из точки  $A$  *не переносится*, она в этой точке *воспроизводится* на основе предшествующего состояния среды в пределах области влияния точки  $B$ , в которую точка  $A$ , естественно, не попадает.

**Пример 2.** Усугубим ситуацию, удалив из уравнения производную по

$x$  и рассмотрим для функции  $u(t, x)$  уравнение

$$u_{tt} = -a^2 u.$$

У этого уравнения, как и в предыдущем примере, имеется решение вида  $z = \sin(\omega t - kx)$ , только здесь  $\omega = a$ , а  $k$  может быть любое. Значит ли это, что мы получаем волны с различной скоростью распространения?

Оказывается, что нет. Считать полученные решения волнами абсурдно, ибо написанное уравнение описывает континуум никак не связанных с собой гармонических осцилляторов. И поэтому наличие "волны" является здесь иллюзией, следствием случайного согласования фаз колебаний этих осцилляторов.

Второй пример делает несомненным заключение, которым мы завершили первый пример, и которое хотели бы рафинированно выразить в следующей форме: *гармонические колебания среды, вообще говоря, не совпадают с волнами, так как форма колебаний в них не переносится, а воспроизводится*. Несомненно, что этот эффект носит совершенно общий характер и не связан с постоянством коэффициентов рассматриваемых уравнений. Совпадение гармонических решений с волнами – эффект, возникающий только в однородной среде.

Возвращаясь к основной задаче настоящей работы, мы теперь можем сказать, что основной целью является получение для неоднородной среды описания переноса волн в дифференциальной и интегральной форме, т.е. уравнений переноса (аналогичных уравнениям  $v_t^\pm \mp v_x^\pm = 0$ , на которые, как известно, распадается классическое одномерное волновое уравнение  $u_{tt} = u_{xx}$ ) и формулы распространяющихся волн (аналогичных формуле  $u(t, x) = f(x - t) + g(x + t)$  для того же уравнения) и установление связи такого описания с уравнениями состояния среды (также и в дифференциальной и в интегральной форме).

Основная проблема здесь состоит в том, что несмотря на базовый, для всей теории гиперболических уравнений и систем, характер математического представления о том, что волны (некоторые величины) переносятся фронтами (линиями уровня решений уравнения характеристик) вдоль лучей (бихарактеристик), оказывается, что уже в хоть сколько-нибудь неоднородной среде эти представление оказывается несколько "дефектным". Уже в случае кусочно-однородной среды исходная движущаяся форма начинает дробиться с течением времени, "перемешиваться", так что возмущение, пришедшее в одну точку из другой, при этом проходит довольно извилистый путь. Ситуация усугубляется в среде более высокой размерности: хотя вроде бы для однородной среды формулы плоской и сферической волны во всем пространстве соответствуют представлениям о переносе волн,

появление в этом пространстве препятствий (т.е. с математической точки зрения – появление граничных условий) немедленно приводит к появлению эффекта дифракции, разрушающего эти представления.

Единственным объектом, который действительно отвечает представлениям о переносе волн, является разрыв решения, и именно эта интерпретация (разрывы распространяются вдоль характеристик) обычно цитируется во всех учебниках.

Таким образом, вдоль бихарактеристик, изначально возникших из представлений о переносе волн, переносятся только разрывы, которые являются "волнами" только в очень сильно обобщенном смысле.

Решение проблемы здесь связано с коррекцией исходной системы представлений и введением в него явления дисперсии (рассеивания) волн: в каждой точке волна, пришедшая в эту точку, распространяется из нее не только по тому направлению, по которому она пришла, а по всем направлениям (этот эффект становится особенно очевидным при изучении распространения волн на сетях – см. [176], [132]). В одномерной среде таких направлений два, и наличие неискажающегося движения вправо или влево в случае уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  связано с чисто случайным фактом аннуляции соответствующего коэффициента. В среде более высокой размерности волна, т.е. ориентированное возмущение  $V(t, x, \theta)$  ( $t$  – момент времени,  $x$  – точка среды,  $\theta$  – единичный вектор направления распространения волны) должно в каждой точке подчиняться уравнению вида

$$V_t(t, x, \theta) + \theta V_x(t, x, \theta) = \frac{1}{s_n} \int_{S_{\theta'}} \sigma(t, x, \theta, \theta') V(t, x, \theta') dS_{\theta'} \quad (1.3)$$

где  $s_n$  – площадь единичной сферы в пространстве размерности  $n$ ,  $S_{\theta'}$  – сфера (для переменной  $\theta'$ ), по которой происходит интегрирование,  $dS_{\theta'}$  – элемент площади этой сферы. Коэффициент  $\sigma$  описывает собственно перераспределение волн по направлению (он называется *индикатрисой рассеяния*) и может быть как обычной функцией, так и обобщенной (что может приводить к появлению внеинтегральных членов).

Уравнение (1.3) известно, и носит название *линейного уравнения переноса излучения* (см., напр., [8], [122]), однако связь его, например, с классическим уравнением  $u_{tt} = \Delta u$  до сих пор не установлена: не ясны ни условия на  $\sigma$ , при которых решение волнового уравнения представляется в виде интеграла по сфере  $S_{\theta}$  от  $V(t, x, \theta)$ , ни условия на сами волны, ни связь их с начальными условиями. Единственное, что можно предполагать, исходя из общих соображений – что в случае стационарной однородной среды  $\sigma$  не зависит ни от  $t$ , ни от  $x$  и что для изотропной среды она зависит только от угла между  $\theta$  и  $\theta'$ .

Уравнение (1.3) является локальной формой описания волн. Интегральная форма, естественно, должна выражаться через решения уравнения эйконала и связанные с ним величины. В случае неоднородной среды здесь возникает еще одна проблема: уравнение эйконала, широко известное [97] и, как считается, "решенное" (алгоритм решения этого уравнения методом характеристик изложен, наверное, во всех книжках по распространению волн в неоднородной среде), на самом деле решено только в случае среды однородной. Желая попытаться решить это уравнение в соответствии с вышеупомянутым алгоритмом в лучшем случае получает пару квадратур, из которых надо исключить константы, находящиеся где-то под знаком радикала от функции общего вида, который подвергается интегрированию.

Известные попытки решения уравнения эйконала или уравнения лучей в каких-то частных случаях не имеют систематического характера. Остается только удивляться, насколько мал тот зазор, который отделял их авторов (см., напр. [17], [8]) от эффектных и ярких геометрических представлений с которыми оказываются связанными решения уравнений эйконала. Единственными, пожалуй, примерами, когда исследование уравнений эйконала и лучей дало геометрический результат, являются работы [3], где получено уравнение лучей для среды с линейно меняющейся скоростью распространения возмущений (там же построен головной фронт волны с учетом отражений от границы полупространства, хотя и не указано, что часть этого фронта, отвечающая за волну, прошедшую без отражений, является просто дугой окружности), и [111], где для функции скорости типа квадратного корня из линейной функции удалось описать лучи в виде дуг циклоид. Ближе всех к описанию наиболее типичных решений удалось приблизиться в [8], и, видимо, только отсутствие уверенности в том, что найденные случаи – наиболее рафинированные, остановило авторов в двух шагах от геометрических образов.

Проблемы, связанные с уравнением эйконала, конечно, исчезают в случае среды одномерной. В этом случае  $\theta$  принимает всего два значения ( $\pm 1$ ), интеграл в уравнении (1.3) превращается в сумму двух слагаемых, само уравнение (1.3) превращается в систему

$$\begin{aligned} V_t^+(t, x) - V_x^+(t, x) &= \sigma_+^+(x)V^+(t, x) + \sigma_-^+(x)V^-(t, x), \\ V_t^-(t, x) + V_x^-(t, x) &= \sigma_+^-(x)V^+(t, x) + \sigma_-^-(x)V^-(t, x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

и вопрос о связи между этой системой и, например, уравнением

$$a(x)u_{tt} = (b(x)u_x)_x$$

существенно упрощается и сводится к вопросу об их эквивалентности в том или ином смысле.

Именно для одномерной среды вопрос о волновых представлениях понимался более-менее регулярно и как-то решался, пусть и даже частично, в рамках того или иного класса задач. Наиболее рафинированным образом вопрос об эквивалентности волнового уравнения и системы (1.4) выражен, например, в [121], однако там речь идет только о взаимном отношении дифференциальных (локальных) форм, вопрос об интегральном представлении решений (1.4) и связи этого представления с интегральным представлением решения волнового уравнения (формулой Римана) не обсуждался.

Уравнение (1.4) с  $\sigma_+^+ = \sigma_-^- = 0$  под названием "двухкомпонентной системы Дирака" достаточно подробно изучалось в [122] с точки зрения теории рассеяния, там же в контексте теории рассеяния изучалось и уравнение (1.3), но зато вне связи с волновыми уравнениями.

Значительное внимание системам вида (1.4) уделяется в теории обратных задач (там переход от волнового уравнения к системе носит название "волнового расщепления", или "wave splitting") [179, 187, 202]. Однако и здесь полноценная связь между уравнениями состояния среды и уравнениями переноса волн происходит "на решении" (как правило, удовлетворяющем нулевым начальным условиям), а не в целом. Отметим, что и сама идея "волнового расщепления" несколько отлична от представлений о распространяющихся волнах: "волновое расщепление" производится по двум направлениям времени, а когда мы говорим о распространяющихся волнах – то расщепление происходит по направлениям пространства. В одномерных задачах это различие практически неощутимо, а в многомерных – дает совершенно разные формы уравнений.

Таким образом, для решения сформулированной задачи – создания полноценной системы математически выраженных представлений о переносе волн необходимо сделать как минимум три вещи. Во-первых, получить интегральное представление для распространяющихся волн хотя бы для одномерной среды и связать его как с дифференциальными уравнениями переноса, так и с интегральным описанием состояния среды (с помощью функции Римана, например); развить технику перехода от одних представлений к другим и оперирования внутри самих представлений (например, с помощью тех или иных принципов композиции отображений данных); разработать технику решения наиболее типичных задач. Во-вторых, по возможности максимально исследовать геометрию уравнения эйконала и уравнения лучей, получить какой-то хотя бы минимальный запас явных примеров решений для случая неоднородной среды; изучить уравнение переноса волн (1.3) в многомерном случае и установить его связь с волновыми уравнениями. Наконец, в-третьих, – перенести на многомерный случай всю систему связей между дифференциальными и интегральными представле-



ниями в терминах переноса волн и в терминах изменения состояния среды.

Конечно, все перечисленное в несколько раз превосходит по своему объему то, что может представлять из себя докторская диссертация. В представляемую работу включены результаты, которые удалось получить к настоящему времени: это полностью сделанный метод распространяющихся волн для одномерной среды и детальное исследование геометрии уравнения эйконала для двумерной и трехмерной сред.

## 2 Актуальность темы

Представления, связанные с волновыми процессами, встречаются в природе повсеместно, и в человеческом мышлении они отражены не только на уровне сознания, но и на уровне подсознания, благодаря чему и оказывается столь богатой различными продуктивными идеями.

Даже такие базовые геометрические объекты как прямая линия и окружность есть не более чем идеализированные образы луча света и кругов на воде. Теория характеристик нелинейных уравнений первого порядка – это абстрагированная теория взаимного отношения фронтов и лучей. Классическое вариационное исчисление – сплав оптико-механических аналогий. Развитие математических представлений о волновых процессах важно не только для естествознания, но и для самой математики, так как именно волновые процессы являются одним из основных поставщиков математических идей, понятий, представлений.

Первые математические формулировки, отражающие человеческие представления о волнах, принадлежат Ферма и Гюйгенсу, которые в геометрических терминах охарактеризовали базовые свойства *лучей* и *фронт**ов*. В XIX веке, который по праву можно считать "веком формул", получены формулы Даламбера и Фурье, Пуассона и Кирхгофа, Вольтерра и Дюамеля, введены функция Грина и функция Римана, проведены исследования Гурса и Дарбу. Все они создали классическую систему представлений о волне как о *поле* некоторой величины, которая *переносится* фронтами вдоль лучей.

В XIX веке были написаны и основные уравнения, описывающие волновые поля – уравнения Максвелла, газовой и гидродинамики, теории упругости. В XIX же веке установлена связь между уравнениями лучей, фронтов и волнового поля в терминах характеристик. К концу этого века исследование простейших уравнений было в основном завершено. В какой-то мере "рубежной" можно считать монографию Адамара [2].

XX век, помимо новых классов волновых уравнений, возникающих в квантовой механике и теории относительности, породил, в связи с интен-

сивным темпом развития техники, многочисленные классы уравнений, уточняющих классические модели и учитывающие большее или меньшее количество разнообразных факторов. Именно в XX веке приобретает особую роль *проблема общности* получаемых математических результатов. Дело здесь не только в том, что когда речь идет о реальных процессах, то описывающие их уравнения могут, в зависимости от конкретных условий, иметь тот или иной вид. Проблема состоит в том, что эти уравнения пишутся нередко исходя из тех или иных предположений, не имеющих абсолютного обоснования.

Так, в теории деформаций упругих сред переход к упруго-пластическим деформациям связан уже с гипотезами о природе пластичности, для которых до настоящего времени нет ни безусловных экспериментальных подтверждений, ни безусловных экспериментальных опровержений. Гипотетическими, по большому счету, являются и модели детонационных процессов в газовой динамике, и модели глубинной структуры Земли, и модели плазменных процессов в звездах. Пользующаяся всемирной популярностью система уравнений Навье-Стокса для течения вязкой жидкости выведена в предположении ламинарности и плоско-параллельного характера течения. Она адекватно не описывает даже течение в искривленной трубе, а в общих постановках вообще неясна ее корректность (см., напр., [138]). Точно так же лишь модельный характер носят многие уравнения квантовой механики.

Поэтому приобретает особую роль вопрос о том, какие свойства тех или иных классических уравнений и в какой форме сохраняются для всех уравнений некоторого класса, независимо от конкретных деталей устройства этих уравнений (которые, как мы уже отметили, основываются на гипотезах, не всегда допускающих проверку как по ограничениям технических возможностей, так и по ограничениям доступных для этого ресурсов).

Среди достижений волновой теории XX века, прежде всего, следует отметить исследование вопроса об уникальном свойстве волнового уравнения в трехмерном пространстве, которое Ж.Адамаром [2] было названо "принципом Гюйгенса". Изучение степени общности этого свойства было начато И.Г.Петровским в его известной работе о лагунах [131] и опиралось на ставшее теперь каноническим понятие *гиперболичности*; это направление было затем продолжено работами [186, 65], [68], [33], [61], [107], [27], [77].

Представление о волне как о движущейся форме дало толчок целой серии исследований, в которой среди решений того или иного класса уравнений отыскивались решения вида  $A(x)F(t - \psi(x))$  с произвольной функцией  $F$  и фиксированными функциями  $A$ ,  $\psi$ , которые должны удовлетворять соответствующим уравнениям. Такие решения получили назва-

ние *функционально-инвариантных*, впервые вопрос был поставлен в работе С.Л.Соболева [148], и исследовался в [72], [182], [85, 86].

Отметим работу [181], в которой была сделана попытка распространить идею волны как величины, переносимой по характеристикам, на случай неоднородной среды (изначально понятие функционально-инвариантного решения вводилось для уравнений, описывающих однородные среды). Поскольку на всех характеристиках одновременно решение сохраняться не может, здесь был поставлен и исследован вопрос о существовании решений, которые сохраняют свое значение на одной характеристике.

Хотя, конечно, представление о волне, как о величине, которая переносится без изменений, для неоднородной среды некорректно и должно быть заменено на представление о волне, как о величине, которая переносится с изменениями, и эти изменения описываются теми или иными формулами (здесь есть аналогия с понятием скорости: для равномерного прямолинейного движения скорость есть постоянная характеристика, для неравномерного – переменная, и закон ее изменения описывается уравнениями Ньютона), указанная работа, на наш взгляд, является важной хотя бы просто в связи с самой постановкой вопроса.

Существенно было расширено представление о лучах и фронтах, начатое работами [6] (где была обнаружена некорректность геометро-оптического подхода в случае неоднородной среды), [3] (где получены уравнения лучей и описан головной фронт волны для полупространства с линейно меняющейся скоростью распространения волн), [12] (где был сформулирован результат о неуничтожимости особенности волнового фронта). Переход к изучению нестационарных волновых процессов привел к *пространственно-лучевому методу* [14], в основе которого лежит представление о фронтах и лучах как проекциях гладких гиперповерхностей и кривых на пространство "пространственных переменных", так что все особенности возникают только как результат проектирования. Это позволило подключить к волновой теории мощнейший аппарат *теории особенностей* [9]-[10],[153].

Чрезвычайно важным оказался вопрос об обобщении понятия решения, также восходящий к работе Адамара [2] в связи с изучением структуры фундаментального решения. Здесь, безусловно, величайшим открытием XX века стало введение Соболевым пространств обобщенных функций [149, 151]. Использование этих пространств, несомненно, избавляет нас от необходимости изучать, какие несущественные особенности решений как себя ведут, что с ними происходит, как они взаимодействуют. Докторская диссертация О.А.Ладыженской, опубликованная в виде монографии [101], положила начало целому направлению, связанному с исследованием условий корректности краевых задач для гиперболических уравнений в обоб-

щенной постановке. Следует правда, отметить, что соболевские пространства далеко не исчерпали полностью ту степень обобщения понятия решения, которая требуется для решения физических задач, так что исследования в этом направлении продолжают до сих пор. Из работ в этом направлении отметим, напр., [119], [139], [127], [69].

Примечательным является то, что введение обобщенных решений отнюдь не решило проблем с решениями классическими, так что исследование условий классической разрешимости продолжается до сих пор. Отметим в связи с этим совсем недавнюю работу [171], где почти 200 лет спустя после Фурье удалось применением метода Фурье получить необходимые и достаточные условия классической разрешимости одномерного волнового уравнения.

Распространению метода Римана [198] на более широкие классы уравнений, начатому еще в XIX веке [197], посвящены работы [106], [142], [144]-[145], причем в первой из них интегральное представление Римана само эффективно используется для анализа решений.

В XX веке появился и ряд новых направлений, связанных с распространением волн. Прежде всего – это *теория дифракции*, начатая в [105, 166, 167, 168] и развивавшаяся настолько бурно, что одно перечисление работ здесь, наверное, заняло бы несколько сот страниц. Упомяну лишь те, которые, скажем так, "держал в руках" (в основном – отечественных авторов) и которые, на мой личный взгляд, являются наиболее значимыми. Это, безусловно, работы [11, 13], [6, 7, 3], [91], [55], [52, 53], [183, 184, 185], [162]-[164], [128], из более современных отметим [14, 15], [34], [129, 130], [66], [60].

В связи с практическими нуждами геофизики, радиотехники, радиолокации оформилась в чрезвычайно мощное направление *теория обратных задач* – спектральных [110], [62, 104], [92]-[96], [4], [175], динамических [29]-[32], [3], [22]-[25], [1, 26], [100], [140, 141], [99], интегральной геометрии [190], [8], [112], [172]. Отчасти связано с этим кругом вопросов и исследование условий разрешимости задачи Дирихле, которая для гиперболических уравнений является *некорректной* [150], [188], [177], [189], [56], [135], [98].

Началось исследование *задач управления* для гиперболических уравнений и систем [54], [191], [193], [199]-[200], [87], [1], [78]-[81], [156]-[157], [73].

Невозможно не упомянуть возникшую из задач квантовой механики *теорию рассеяния* [161], [102], [67], [122] также, как и теория дифракции, опирающуюся на асимптотические методы.

Исследование *нелинейных уравнений* асимптотическими методами как в "волновой" интерпретации (см., напр., [116, 117]), так и с точки зрения теории колебаний (см., напр., [113, 89, 114, 90]) сейчас является, пожалуй, одним из наиболее бурно развивающихся направлений в теории волн.

Правда, переход к нелинейным уравнениям оказывается связан с рядом достаточно тонких вопросов понятийного характера, так как здесь многие представления начинают "расплываться". Так, представление о волнах традиционно связано с конечностью скорости распространения возмущения, и это свойство традиционно считается следствием гиперболичности "главной части" уравнения. Однако открытый А.С. Калашниковым эффект конечной скорости распространения в нелинейном параболическом уравнении [82] показывает, что наличие нелинейных членов может, грубо говоря, превращать параболическое уравнение в гиперболическое. Этому же вопросу посвящены работы [20], [88], в которых изучается уже "тепловая волна" (хотя с точки зрения исходных представлений о разграничении тепловых и волновых свойств это словосочетание звучит абсурдно).

Вопрос о балансе влияний на характер уравнения составляющих его слагаемых оказался нетривиальным не только для нелинейных, но и для линейных уравнений, и исследовался в терминах вопроса об *иерархии волн*. Термин, наверное, не самый удачный, поскольку иерархизации подлежат не волны, а слагаемые, составляющие уравнение – так же, как в методе диаграмм Ньютона решения алгебраических уравнений в виде степенных рядов, когда главный член ряда определяется только несколькими членами уравнения. Нетривиальность вопроса об иерархии волн показывает тот факт, что перенос базового принципа ("правильная" перемежаемость корней соответствующих полиномов или символов) на уравнения для многомерной среды был сделан совсем недавно в работе [16].

Наконец, отметим возникшие в последние 20 лет совсем новые направления в теории гиперболических (особенно волновых) уравнений и систем – *теория усреднения* [21], [155] и исследование *нелокальных задач* [83], [64], [58], [136]-[137].

Возвращаясь к вопросу об актуальности темы нашей работы, нужно, наверное, указать только два аспекта. Первый – что во всех перечисленных направлениях содержательное исследование опирается на разнообразные математические формы представления волновых процессов, и среди этих форм те, которые связаны с идеей переноса волн, играют, как правило, решающую роль. Второй – что связь форм, описывающих перенос волн, с другими формами изучена еще мало, так что создание более-менее цельной системы таких связей даже для простейших, скажем так, "модельных" уравнений представляет интерес и в плане дальнейшего обобщения, и в плане использования такой системы для анализа конкретных проблем волновой теории.

### 3 Новизна полученных результатов

Результаты, представленные в диссертации, являются новыми, хотя, как было уже указано в предыдущих параграфах, основываются на идеях, неоднократно возникавших то в том, то в другом контексте.

Перечислим эти результаты. Это формула распространяющихся волн, метод распространяющихся волн, позволяющий выписывать формулы решения различных краевых задач, формулы, выражающие через коэффициенты переноса волн функцию Римана и ее производные, формулы свертки для функции Римана, условия граничной управляемости и формулы граничного управления для неоднородной струны.

Групповая классификация трехмерных и двумерных уравнений эйконала, использование для классификации свойств *конуса касательных эквивалентностей*, условия редукции трехмерных уравнений эйконала к двумерным, условия принадлежности уравнения эйконала тому или другому классу и условия эквивалентности двух разных уравнений (теорема о семи инвариантах).

Довольно большой комплект решенных уравнений эйконала (получены решения, описывающие фронт волны точечного источника и уравнения лучей).

Формулы, выражающие скорость движения центра кривизны фронта через радиус кривизны, иллюзия движущегося источника. Явление локализации фронта в отсутствие волноводов.

### 4 Используемые методы и подходы

Результаты получены с помощью методов как классического анализа, так и современных (главным образом – группового анализа).

От классики (классический подход используется в первой и второй главах) взят принцип выражать исследуемые свойства формулами и находить законы, связывающие эти формулы друг с другом, устанавливать эквивалентность различных форм выражения тех или иных свойств, создавая тем самым аппарат для исследования более тонких и сложных вопросов. В этом смысле наша техника ближе всего к работам С.Л. Соболева ([146, 147] и др.) и В.Г. Гоголадзе ([63] и др.), в которых строятся те или иные интегральные представления для решения волнового уравнения в неоднородной, а затем – анизотропной среде. Методы, развитые в самой диссертации (метод распространяющихся волн для решения краевых задач, формулы свертки для коэффициентов переноса и функции Римана) использованы для получения различных новых представлений решений. В диссертации не стави-

лась цель изобретения каких-то новых задач, поэтому большинство задач – известные (начальная, начально-краевая, Гурса, и т.п.), нас интересовала именно техника преобразования друг в друга различных представлений.

Что же касается третьей и четвертой глав, то в них основной упор делается на методы группового анализа, о которых хотелось бы сказать особо. На взгляд автора, групповой анализ для получения различных форм представления решений дифференциальных уравнений играет такую же роль, как классический анализ – для вывода этих дифференциальных уравнений, а функциональный – для исследования их разрешимости и корректности постановок соответствующих задач.

Будучи заложен еще в конце XIX века в работах С.Ли [192], и ставший достаточно широко известным благодаря работам [173], [170], [133], он по-настоящему получил свое развитие только во второй половине XX века благодаря работам Л.В.Овсянникова (см. [124, 123, 125] и другие работы), его учеников и последователей (среди которых, в первую очередь, следует упомянуть работы Н.Х.Ибрагимова [74, 75]). В нашей стране также известна монография П.Олвера [126] и практически недоступна другая, более современная монография того же автора [195].

Для автора диссертации образцом группового анализа уравнений механики, непревзойденным до сих пор, является работа [123], посвященная уравнению Чаплыгина.

Дело в том, что в механике дифференциальные уравнения являются не самостоятельной сущностью, как в математике, а скорее обозначением тех или иных идеализированных свойств изучаемых механиками объектов (в нашем случае – движений сплошных сред: газообразных, жидких, упругих). В зависимости от условий наблюдения и изучения получаются разные уравнения. Одним из основных фактов, делающих механику сплошных сред теорией, является наличие некоторых общих уравнений, из которых все остальные получаются как частные случаи при тех или иных предположениях.

Эти предположения, как правило, формулируются в чисто механических или даже физических терминах (например, одно- или двух-атомный газ, идеальная или неидеальная жидкость и пр.), которые невозможно использовать в математике. В работе же [123] было показано, что эта же связь между общими и частными уравнениями может быть выражена и в чисто математических терминах – посредством отношений эквивалентности и вложения для тех групп симметрий, которыми обладают соответствующие уравнения. То, что в этой работе автор ни на минуту не отрывался от механического понимания изучаемых уравнений, сыграло, на мой взгляд, решающую роль, поскольку удалось *установить математическую связь*

*между различными физическими смыслами.*

Несмотря на многочисленность работ по групповому анализу, подобного рода результаты в них встречаются довольно редко (в качестве такого исключения необходимо, конечно, упомянуть работы команды Л.В. Овсянникова по исследованию уравнений газовой динамики и работы Н.Х. Ибрагимова, в том числе посвященные волновым уравнениям [75, 76, 77], [118]) по причине их огромной трудоемкости. К сожалению, ни вычисление групп симметрий самых разных конкретных уравнений, ни нахождение всех уравнений, которые обладают заданной группой симметрий не дает какого-то ощутимого полезного для науки эффекта, поскольку при этом теряется основное – связь между физическими смыслами. Групповой анализ оказывается эффективным и полезным только в применении к целому семейству физически осмысленных уравнений, связанных физически осмысленными связями.

Несмотря на всю свою сложность и громоздкость, методы группового анализа представляются автору диссертации одними из наиболее перспективных, и, по его убеждению, в XXI веке групповой анализ будет играть такую же роль, как функциональный в веке XX-м. По существу исследование уравнений сплошной среды этими методами только начато. Практически не исследованы с точки зрения групповых отношений уравнения теории упругости и пластичности (с произвольными дифференциальными связями между напряжениями и деформациями). Не тронута этими методами и теория обратных задач, где вычисление инвариантов группы, которая "держит" краевые данные, и вычисление инвариантов группы, которая "держит" параметры уравнения могло бы помочь в ключевом для многомерных обратных задач вопросе приведения задачи к нормальной форме, допускающей установление взаимно-однозначного соответствия между той информацией, которую нужно взять от граничных данных и той информацией, которую мы можем получить относительно параметров уравнения. Не исследован с групповой точки зрения и переход от "микромоделей" (например, от уравнения Больцмана) к "макромоделям", осуществляемый путем усечения бесконечной системы уравнений относительно моментов распределения: связь известных принципов усечения [138] с групповыми отношениями совершенно не изучена.

В контексте всего многообразия нерешенных задач применение групповых методов для изучения уравнений эйконала, на наш взгляд, способствует распространению этих методов хотя бы как эффективный пример их результативности.



## 5 Апробация

Результаты, полученные в диссертации, опубликованы в [35]-[51], они докладывались на семинарах В.А. Кондратьева, Е.В. Радкевича (2003, 2004 г.), В.А. Ильина, Е.И. Моисеева, А.А. Дезина (2002, 2004 г.), В.А. Кондратьева, В.М. Миллионщикова, Н.Х. Розова (2002, 2005 г.), В.М. Бабица (2002, 2003, 2004 г.), Л.В. Овсянникова (2003, 2004 г.), А.С. Алексеева (2004 г.), И.А. Шишмарева (2003, 2004, 2005 г.), А.Д. Мышкиса, А.С. Братуся (2005 г.), А.Г. Свешникова (2005 г.), В.А. Садовниченко (2002 г.), Д.Д. Соколова (2005 г.), А.И. Прилепко, В.А. Садовниченко (2005 г.), А.С. Шамаева, В.В. Жикова, Т.А. Шапошниковой (2002 г.), Е.Л. Тонкова (2003 г.), на семинаре кафедры волновой механики, рук. Е.И. Шемякин в 2003 и 2005 г., на семинаре отдела дифференциальных уравнений МИРАН, рук. Д.В. Аносов, А.А. Болибрух, Ю.С. Ильяшенко в 2003 г., на семинаре отдела прикладной математики ИМ НАН Украины, рук. А.Г. Никитин (Киев, Украина) в 2004 г.; на международном семинаре "Дни Дифракции" (СПБО МИРАН, С.-Петербург) в 2003 и 2004 г., на конференции, посвященной 85-летию академика Л.В. Овсянникова (Ин-т Гидродинамики СО РАН, Новосибирск) в 2004 г., на конференции им. И.Г. Петровского (МГУ, Москва) в 2001 и 2004 г., на международной конференции "Дифференциальные уравнения и динамические системы" (ВлГПУ, Суздаль) в 2002 и 2004 г.

## 6 Краткое содержание диссертации

### 6.1 Структура работы

Диссертация занимает 300 страниц текста и состоит из введения, четырех глав, разбитых на пятнадцать параграфов, и списка литературы, содержащего 202 наименования. Она снабжена тремя приложениями, занимающими еще 37 страниц. Нумерация формул, теорем и лемм тройная – номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 3.2.1 – лемма 1 второго параграфа третьей главы.

В первой главе изложен метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды, во второй – обосновываются формулы граничного управления и условия управляемости для неоднородной струны, в третьей исследуется трехмерное уравнение эйконала для неоднородной среды, в четвертой – двумерное уравнение эйконала для неоднородной среды.

Опишем более подробно содержание каждой главы.

## 6.2 Первая глава

В первом параграфе обосновывается формула распространяющихся волн для уравнений

$$k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s, \quad (1.0.2)$$

и

$$z_{tt} = z_{ss} - [\phi' + \phi^2](s)z, \quad (1.0.4)$$

являющихся каноническими формами (первую из них иногда называют *импедансной*) общего одномерного уравнения для неоднородной среды

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ b(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

Связь между уравнениями (1.0.2) и (1.0.4) устанавливается заменой  $z = \sqrt{k(s)}u$ , при этом  $\phi(s) = k'(s)/[2k(s)]$ .

**Теорема 1.1.1** Пусть  $k(s) > 0$  и дважды непрерывно дифференцируема. Тогда общее классическое решение уравнения (1.0.2) описывается формулой

$$\begin{aligned} u(t, s) = & \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}}V(s-t) + \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}}W(s+t) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)J\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)\tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)\tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где  $V$  и  $W$  – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, связанные с начальными условиями  $u_0(s) = u(0, s)$ ,  $v_0(s) = u_t(0, s)$  соотношениями

$$V(s) + W(s) = u_0(s), \quad -[k(s)V(s)]' + [k(s)W(s)]' = k(s)v_0(s). \quad (1.1.2)$$

Через  $J(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$  обозначены функции, которые являются решением системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, \gamma) &= - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta) \tilde{J}(\sigma, \beta, \gamma) d\sigma, \\ \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) &= \phi(\alpha) + \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau) J(\alpha, \tau, \gamma) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

В доказательстве этой теоремы появляются главные инструменты метода распространяющихся волн – система уравнений переноса волн

$$z_{\eta}^{-} = \frac{1}{2} \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) z^{+}, \quad z_{\xi}^{+} = \frac{1}{2} \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) z^{-}, \quad (1.1.4)$$

сумма компонент решения которой всегда дает решение (1.0.4), и формула дифференцирования коэффициентов переноса  $J$  и  $\tilde{J}$  по третьему аргументу.

**Лемма 1.1.1.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= -\phi(\gamma) \tilde{J}(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma), \\ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= -\phi(\gamma) J(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Формула для решения уравнения (1.0.4) получается из формулы (1.1.1) удалением радикалов.

Поскольку исходные правая и левая волны  $V$  и  $W$  условиями (1.1.2) определяются не однозначно, в этом же параграфе показывается, что эта неоднозначность влияет только на баланс слагаемых в решении (1.1.1), и не вызывает неоднозначности в самом решении. Здесь же показывается, что начальным условиям  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$  соответствует, как и полагается, решение  $u(t, x) \equiv 1$ . Во всех этих обоснованиях важны не столько обосновываемые факты – в них нет ничего неожиданного, сколько используемая в доказательствах техника обоснования, с помощью системы (1.1.4), тех или иных тождеств для коэффициентов переноса волн.

Во **втором параграфе** приводится вывод формулы (1.1.1) с помощью одного из вариантов классического метода дискретизации. Основная нагрузка этого параграфа – установление связи с "физическим" смыслом используемых всюду далее величин. Функция  $\phi(s)$  оказывается аналогом коэффициента отражения, функции  $J$  и  $\tilde{J}$  представляются в виде рядов, каждый элемент которых является суммарным коэффициентом переноса

с заданным количеством отражений, так что в  $J$  собраны коэффициенты, отвечающие за четное количество отражений, а в  $\tilde{J}$  – за нечетное. Система интегральных уравнений (1.1.3) описывает итерирование отражений, а ее решение методом последовательных приближений дает аппроксимацию истинного решения, в которой игнорируются волны, испытавшие большое количество отражений.

В *третьем параграфе* вводится понятие *волнового оператора* – интегрального оператора, преобразующего пару начальных волн  $V, W$  в пару волн  $V^\theta, W^\theta$ , отвечающих моменту времени  $t = \theta$ . В этом параграфе мы начинаем преобразование волн рассматривать как самостоятельный процесс, имеющий дифференциальную (уравнения переноса) и интегральную (волновой оператор) форму описания, и который связан с уравнениями состояния среды только в силу каких-то соотношений между коэффициентами уравнения переноса и коэффициентами уравнения состояния среды. Такое рассмотрение требует независимого обоснования группового свойства волнового оператора, которое и дается в этом параграфе с помощью *формул свертки* для коэффициентов переноса

**Лемма 1.2.2.** *Имеют место следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right), \quad (1.2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - J\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right), \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\beta} \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right) - \\ - 2J\left(\frac{\xi+\beta}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right), \quad (1.2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\xi}^{\beta} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\
 \left. - J\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\
 = 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right), \quad (1.2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\
 \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\
 = 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right), \quad (1.2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\eta} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\
 \left. - J\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\
 = 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\alpha}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right). \quad (1.2.10)
 \end{aligned}$$

В четвертом параграфе изложен собственно метод распространяющихся волн – метод построения решения различных краевых задач. Принцип применения этого метода прост: если данные заданы на какой-то линии, то сначала строится волновой оператор, описывающий перенос правой и левой волн с этой линии в произвольную точку пространства (для этого необходимо только проделать элементарные вычисления по определению аргументов коэффициентов переноса и по выбору промежутка интегрирования). После чего, с помощью (1.1.6) проверяется, что построенные формулы дают решение системы уравнений переноса, сумма компонент которого будет решением уравнения (1.0.4) для любых исходных волн  $V$ ,  $W$ , заданных на линии данных. Остается связать эти исходные волны с теми данными, которые заданы на линии, что приводит либо вообще к локальным соотношениям (как в случае начальной задачи), либо к одномерным интегральным уравнениям с вырожденным ядром. Мы здесь эти формулы не приводим, они аналогичны (1.1.1). Отметим, что мы здесь не занимались выдумыванием каких-то особых задач, все они известны (принцип отражения для задач с закрепленными и свободными концами, начальнo-краевая задача, задач Гурса, один из вариантов задачи Дарбу, который

мы назвали задачей Фридландера). Нас интересовала именно технология построения решений.

**Пятый параграф** является, на наш взгляд, одним из самых существенных: в нем устанавливается связь между интегральными представлениями волнового процесса (которые описываются в терминах волнового оператора) и интегральными представлениями изменения состояния среды (которые описываются известной формулой Римана). Ключевую роль здесь играют формулы выражения через коэффициенты переноса функции Римана эквивалентного (1.0.4) уравнения

$$z_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(\phi' + \phi^2)\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \quad (1.1.5)$$

и производных этой функции Римана.

**Лемма 1.4.2.** *Функция Римана  $R(\xi, \eta; a, b)$  уравнения (1.1.5) может быть выражена одной из четырех следующих формул:*

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{a+\eta}{2})}} + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \left[ \tilde{J}\left(\frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - J\left(\frac{a + \eta}{2}, \frac{a + \eta}{2} - y, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy, \quad (1.4.5)$$

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{\xi+b}{2})}} + \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \left[ J\left(\frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi + b}{2} - y, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{\eta - b}{2} + y, \frac{\eta - b}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy, \quad (1.4.6)$$

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \tilde{J}\left(\frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy - \\ - \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \tilde{J}\left(\frac{\eta - b}{2} + y, \frac{\eta - b}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy,$$

$$\begin{aligned}
 R(\xi, \eta, a, b) &= \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{\xi+b}{2})}} + \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} J\left(\frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi+b}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy - \\
 &- \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} + \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{a+\eta}{2})}} - \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} J\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{a+\eta}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy.
 \end{aligned}$$

**Лемма 1.4.3.** Производные функции Римана  $R(\xi, \eta; a, b)$  уравнения (1.1.5) выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) - \\
 &- \frac{1}{2} \left[ \tilde{J}\left(\frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + J\left(\frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) - \\
 &- \frac{1}{2} \left[ \tilde{J}\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + J\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial a} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{a+b}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ J\left(\frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \tilde{J}\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial b} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{a+b}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ J\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \tilde{J}\left(\frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

**Следствие.**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R(s-t, s+t, a, b)}{\partial t} &= \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{J}\left(\frac{s-t+b}{2}, \frac{s-t-a}{2}, s\right) + \frac{1}{2} J\left(\frac{s-t+b}{2}, \frac{s-t-a}{2}, s\right) -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{J}\left(\frac{s+t+a}{2}, \frac{s+t-b}{2}, s\right) - \frac{1}{2}J\left(\frac{s+t+a}{2}, \frac{s+t-b}{2}, s\right), \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, \sigma - \tau, \sigma + \tau)}{\partial \sigma} &= \phi(\sigma)R(\xi, \eta, \sigma - \tau, \sigma + \tau) - \\ &-\frac{1}{2}\tilde{J}\left(\frac{\xi + \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi - \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) + \frac{1}{2}J\left(\frac{\xi + \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi - \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \\ &-\frac{1}{2}\tilde{J}\left(\frac{\eta + \sigma - \tau}{2}, \frac{\eta - \sigma - \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) + \frac{1}{2}J\left(\frac{\eta + \sigma - \tau}{2}, \frac{\eta - \sigma - \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Полученные формулы позволяют преобразовать формулы решения задач в терминах волн в формулы решения задач в терминах состояния среды, получив чрезвычайно компактные выражения в терминах функции Римана. В качестве примера приведем формулу решения начальной задачи

$$\begin{aligned} z(t, s) &= \frac{z(s-t+\theta) + z(s+t-\theta)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} [z(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) + \zeta(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)] dy, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

для уравнения (1.0.4), формулу для производной этого решения

$$\begin{aligned} z_t(t, s) &= \frac{\zeta(s-t+\theta) + \zeta(s+t-\theta)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} [\zeta(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) + Lz(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)] dy, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

(где  $Lz$  – оператор в правой части (1.0.4)), формулу решения задачи Гурса

$$\begin{aligned} z(t, s) &= \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{A+B}{2}\right) + g\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] R(s-t, s+t, A, B) + \\ &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} f'(\varkappa)R(s-t, s+t, A, 2\varkappa-A) d\varkappa + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s-t+B}{2}} g'(\varkappa)R(s-t, s+t, 2\varkappa-B, B) d\varkappa, \end{aligned} \quad (2.1.13)$$



формулу решения задачи с данными  $z(t, \sigma) = z(t)$ ,  $z_s(t, \sigma) = \zeta(t)$  на вертикальной прямой  $s = \sigma$

$$z(t, s) = \frac{z(t-s) + z(t+s)}{2} + \frac{1}{2} \int_{t-s}^{t+s} [\zeta(\tau)R(s-t, s+t; \sigma-\tau, \sigma+\tau) - z(\tau)R_\sigma(s-t, s+t; \sigma-\tau, \sigma+\tau)] d\tau.$$

### 6.3 Вторая глава

Эта глава посвящена формулам граничного управления и условиям граничной управляемости для задачи граничной управляемости неоднородной струной. Для простоты результаты сформулированы для уравнения (1.0.4), поскольку переход к уравнению (1.0.2) здесь связан только с дописыванием радикалов.

Задача состоит в следующем: определить, при каких условиях для заданных начальных данных  $z_0(s) = z(0, s)$ ,  $\zeta_0(s) = \partial z / \partial t(0, s)$  и конечных данных  $z_T(s) = z(T, s)$ ,  $\zeta_T(s) = \partial z / \partial t(T, s)$ , заданных на  $[0, l]$ , существуют граничные управления  $\nu(t) = z(t, 0)$  и  $\mu(t) = z(t, l)$ , которые позволяют перевести "струну", описываемую уравнением (1.0.4), из заданного начального состояния в заданное конечное. Нашей целью является вывод явных (насколько это вообще возможно) формул как для условий, так и для граничных управлений.

В **первом параграфе** приводятся условия управляемости и формулы граничного управления в случае  $T < l$ .

Через  $\Lambda(y; \xi, \eta; A, B)$  обозначается функция

$$\Lambda(y; \xi, \eta; A, B) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x-A) R_\eta(A, 2x-A; y, y) dx - \frac{1}{2} R(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4} R(\xi, \eta; A, B) R(A, B; y, y), \quad (2.1.1)$$

а через  $\Lambda'(y; \xi, \eta; A, B)$  – ее производная  $\Lambda_\xi - \Lambda_\eta + \Lambda_A - \Lambda_B$ , или, другими словами,

$$\Lambda'(y; \xi, \eta; A, B) = \frac{d}{d\theta} \Lambda(y; \xi + \theta, \eta - \theta; A + \theta, B - \theta) \Big|_{\theta=0}. \quad (2.1.2)$$

Оператор  $R_\alpha^\beta \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}$ , определяемый формулой

$$R_\alpha^\beta \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) = \frac{z(\alpha) + z(\beta)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [z(y)R_t(s-t, s+t; y, y) + \zeta(y)R(s-t, s+t; y, y)] dy, \quad (2.1.3)$$

мы будем называть *оператором Римана*, отображающим начальные данные с отрезка  $[\alpha, \beta]$  в точку  $(t, s)$ , операторы  $R_{(\alpha)}^{\beta} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}$  и  $R_{\alpha}^{(\beta)} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}$ , отличающиеся от (2.1.3) отсутствием члена с  $z(\alpha)$  или  $z(\beta)$  соответственно – *усеченными операторами Римана*, а оператор

$$\Lambda_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) = \frac{z(\beta) - z(\alpha)}{4} R(s-t, s+t; \alpha, \beta) + \int_{\alpha}^{\beta} [z(y)\Lambda'(y; s-t, s+t; \alpha, \beta) - \zeta(y)\Lambda(y; s-t, s+t; \alpha, \beta)] dy \quad (2.1.4)$$

– *оператором коррекции*, также отображающим начальные данные с отрезка  $[\alpha, \beta]$  в точку  $(t, s)$ .

Через  $Lz$  обозначается функция  $Lz = z'' - (\phi' + \phi^2)(s)z$ , т.е. результат применения оператора в правой части (1.0.4) к функции  $z$ .

**Теорема 2.1.1.** *Если  $T \leq l$ , то классическое решение задачи граничной управляемости для уравнения (1.0.4) на отрезке  $[0, l]$  существует тогда и только тогда, когда начальные и конечные данные  $z_0(s), \zeta_0(s), z_T(s), \zeta_T(s)$  удовлетворяют условиям*

$$R_{s-T/2}^{s+T/2} \begin{bmatrix} z_0 - z_T \\ \zeta_0 + \zeta_T \end{bmatrix} (T/2, s) = R_{s-T/2}^{s+T/2} \begin{bmatrix} \zeta_0 - \zeta_T \\ Lz_0 + Lz_T \end{bmatrix} (T/2, s) = 0 \quad (2.1.5)$$

при  $s \in [T/2, l - T/2]$  в случае  $T < l$  и условиям

$$R_0^l \begin{bmatrix} z_0 - z_T \\ \zeta_0 + \zeta_T \end{bmatrix} (l/2, l/2) = 0, \quad (2.1.6)$$

$$\frac{d}{ds} R_{s-l/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} z_0 - z_T \\ \zeta_0 + \zeta_T \end{bmatrix} (l/2, s) \Big|_{s=l/2} = 0, \quad R_0^l \begin{bmatrix} \zeta_0 - \zeta_T \\ Lz_0 + Lz_T \end{bmatrix} (l/2, l/2) = 0, \quad (2.1.7)$$

$$\frac{d}{ds} R_{s-T/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} \zeta_0 - \zeta_T \\ Lz_0 + Lz_T \end{bmatrix} (l/2, s) \Big|_{s=l/2} = 0, \quad R_0^l \begin{bmatrix} Lz_0 - Lz_T \\ L\zeta_0 + L\zeta_T \end{bmatrix} (l/2, l/2) = 0, \quad (2.1.8)$$

в случае  $T = l$ .

При выполнении этих условий граничные управления определяются по  $z_0, \zeta_0, z_T, \zeta_T$  однозначно и даются формулами

$$\nu(t) = \{R_0^t - \Lambda_0^T\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, 0) + \{R_0^{T-t} - \Lambda_0^T\} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (T-t, 0), \quad (2.1.9)$$

$$\mu(t) = \{R_l^{l+t-T} - \Lambda_l^{l-T}\} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t - T, l) + \{R_l^{l-t} - \Lambda_l^{l-T}\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, l). \quad (2.1.10)$$

Основную роль в получении указанных формул играют *формулы свертки* для функции Римана. Мы, для примера, приведем одну из них

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A) R_\eta(A, 2\kappa - A; y - \theta, y + \theta) d\kappa = \\ & = \frac{1}{2} [R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta) - R(\xi, \eta; A, y + \theta)]. \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Во **втором параграфе** условия управляемости из первого параграфа (в случае  $T < l$ ) разрешаются относительно части конечных данных, что позволяет считать, что часть данных является "свободной" (правда, всегда остается несколько скалярных условий, ограничивающих эту свободу), а остальные могут быть по ним вычислены. При этом удается выразить только через "свободные" данные и граничные управления.

Отметим, что здесь появляется некоторое различие между случаями  $T < l/2$  и  $T > l/2$ , в первом из них и конечная скорость, и конечное состояние на промежутке  $[T, l - T]$  просто явно определяются начальными данными, а вне этого промежутка конечная скорость определяется по конечному состоянию и начальным данным. В случае же  $T > l/2$  на промежутке  $[l - T, T]$  все конечные данные являются свободными, а вне этого промежутка конечная скорость определяется по конечному состоянию и начальным данным.

В *третьем параграфе* изучается случай  $T > l$ . Здесь управляемость имеет место для любых начальных и конечных данных, и, даже более того, имеется произвол в выборе граничных управлений, например, на начальном промежутке времени  $(0, T - l)$ . В формулах этот произвол описан явным образом. Поскольку здесь перенос данных происходит не только с горизонтальных, но и с вертикальных прямых, помимо операторов (2.1.3) и (2.1.4), используются также операторы

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\alpha^\beta \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}_\sigma (t, s) = & \frac{z(\alpha) + z(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\zeta(\tau) R(s - t, s + t; \sigma - \tau, \sigma + \tau) - \\ & - z(\tau) R_\sigma(s - t, s + t; \sigma - \tau, \sigma + \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\alpha^\beta \left[ \begin{array}{c} z \\ \zeta \end{array} \right]_\sigma (t, s; A, B) &= \frac{1}{4} [z(\beta) - z(\alpha)] R(s - t, s + t, A, B) - \\ &- \int_\alpha^\beta [\zeta(\tau) \Lambda(\sigma; s - t, s + t; A - \tau, B + \tau) - z(\tau) \Lambda_y(\sigma; s - t, s + t; A - \tau, B + \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

## 6.4 Третья глава

Эта глава посвящена изучению трехмерного уравнения эйконала

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y, z)} \quad (3.1.3)$$

– основного уравнения геометрической оптики и акустики

**Первый параграф** носит вводный характер – в нем излагаются некоторые общие волновые представления и связи между ними.

Во **втором параграфе** основные понятия и формулы группового анализа – группы и алгебры симметрий, группы и алгебры эквивалентности. Здесь же вводятся и новые понятия *конуса касательных эквивалентностей* и *пространства касательных эквивалентностей*. Конус касательных эквивалентностей для фиксированного уравнения – это конус касательных векторов (при значении параметра, равном нулю и отвечающем тождественному оператору) к однопараметрическим семействам операторов, не обязательно образующих группу. Элементы этого конуса удовлетворяют некоторому линейному дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению Ли. Все решения этого уравнения образуют линейное пространство, называемое *пространством касательных эквивалентностей*.

Пространство касательных эквивалентностей наверняка "покрывает" конус касательных эквивалентностей, а с другой стороны – этот конус наверняка содержит сумму алгебры эквивалентности и алгебры симметрий соответствующего уравнения. Идеальный случай (который для уравнений эйконала как раз реализуется) состоит в совпадении пространства касательных эквивалентностей с указанной суммой, откуда немедленно следует, что класс эквивалентности уравнения является орбитой группы эквивалентности семейства.

**Теорема 3.2.1.** *Пусть пространство касательных эквивалентностей некоторого семейства уравнений для любого уравнения из семейства является суммой алгебры Ли группы симметрий этого уравнения и алгебры Ли общей группы эквивалентности, и пусть обе группы (группа эквивалентности и группа симметрий) являются конечномерными. Тогда любая компонента  $C^1$ -связности любого класса эквивалентности этих*

уравнений может быть получена из любого из уравнений этой компоненты действием на него группы эквивалентности.

В основе этой теоремы лежит лемма об аппроксимации неавтономной системы уравнений системами "кусочно-автономными", то есть о возможности аппроксимировать каждый оператор из однопараметрического семейства суперпозициями операторов некоторой группы, откуда и вытекает его принадлежность (при условии замкнутости группы) этой же группе.

В третьем параграфе осуществлена сепарация уравнений эйконала по группам симметрий, явно описаны и сами группы (точнее, их алгебры), и соответствующие семейства. Возможные размерности группы симметрий – это 15, 6, 5, 4, 2 и 1, причем одномерная группа сдвигов переменной  $\psi$  является тривиальной, ею обладают все уравнения, ее наличие связано только с тем, что сама функция  $\psi$  в уравнение не входит, и никакой информации о решении она не дает.

**Теорема 3.3.1.1.** *Группа симметрий уравнения эйконала (3.1.3) является 15-мерной для следующих функций скорости  $v(x, y, z)$  (с точностью до сдвига системы координат): постоянной*

$$v(x, y, z) \equiv \text{const}, \quad (3.3.1)$$

*линейной*

$$v(x, y, z) = Px + Qy + Rz \quad (P^2 + Q^2 + R^2 > 0), \quad (3.3.2)$$

*и квадратичной одного из трех типов*

$$v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2) \quad (\nu > 0), \quad (3.3.3)$$

$$v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2) \quad (\nu > 0), \quad (3.3.4)$$

$$v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.3.5)$$

*Соответствующие алгебры Ли приведены в приложении II.2.*

*II. Группа симметрий уравнения эйконала является 4-мерной для  $v(x, y, z)$ , принадлежащей (с точностью до сдвига системы координат) одному из четырех семейств функций ( $V(\cdot)$  – произвольная функция,  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ ): плоско-слоистых*

$$v(x, y, z) = V(Px + Qy + Rz), \quad (3.3.6)$$

*сферически-слоистых*

$$v(x, y, z) = V(x^2 + y^2 + z^2), \quad (3.3.7)$$

*цилиндрически-слоистых*

$$v(x, y, z) = (-Rx + Pz) \cdot V\left(\frac{Ry - Qz}{-Rx + Pz}\right), \quad (R \neq 0), \quad (3.3.8)$$

и осесимметрично-слоистых

$$v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2) \cdot V \left( \frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2} \right). \quad (3.3.9)$$

Соответствующие алгебры Ли перечислены в таблице II.1 в приложении II.3.

Каждое из указанных семейств содержит по несколько (четыре, шесть, шесть и шестнадцать соответственно) конечномерных подсемейств, для которых группы симметрий уравнения (3.1.3) шестимерны; кроме того, семейство (3.3.6) и семейство (3.3.9) имеют по одному подсемейству, для которых группа симметрий уравнения (3.1.3) пятимерна. Списки этих подсемейств для каждого семейства и соответствующие алгебры Ли приведены в таблицах II.2-II.6 в приложении II.3.

III. Для 11 семейств функций скорости  $v(x, y, z)$ , описываемых произвольными функциями от двух аргументов, группа симметрий уравнения (3.1.3) двумерна. Эти семейства определяются как общие решения уравнений вида

$$\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z = (\xi_x - M)v \quad (3.3.10)$$

(классифицирующих уравнений), где

$$\begin{aligned} \xi &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Gy - Fz + H, \\ \eta &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Gx + Dy + Ez + I, \\ \zeta &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Ey + Dz + J, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

а  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$  и  $M$  – некоторые константы. Для каждого из таких семейств соответствующая алгебра Ли имеет вид

$$\Xi = \Delta[\xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_z - M\psi \partial_\psi] + L\partial_\psi, \quad (3.3.12)$$

где  $\Delta$  и  $L$  – произвольные константы. Формулы решений уравнения (3.3.10) для случая  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  (классифицирующие уравнения с квадратичными коэффициентами) приведены в приложении II.4, а для случая  $A = B = C = 0$  (классифицирующие уравнения с линейными коэффициентами) – в приложении II.5. В обоих приложениях уравнение (3.3.10) приведено сдвигом и поворотом системы координат к нормализованной форме, и формулы решений соответствуют именно этой форме.

IV. Во всех остальных случаях группа симметрий уравнения (3.1.3) одномерна (это – группа сдвигов по  $\psi$  с алгеброй  $L\partial_\psi$ ).

Эта теорема является, наверное, самой сложной во всей диссертации. Огромный объем рутинных вычислений, который пришлось выполнить, вполне оправдался результатом, который дал опору для поиска интегрируемых уравнений (это уравнения с 15-мерной, 6-мерной и отчасти с 5-мерной группой симметрий) и решений. Кроме того, характер найденных

групп (группы размерности 15 оказались просто группами конформных преобразований) оказался тесно связанным с геометрией: соответствующие уравнения порождают римановы метрики постоянной кривизны.

В **четвертом параграфе** находятся группы эквивалентности и исследуется пространство касательных эквивалентностей.

**Теорема 3.4.1.** *Общая группа эквивалентности уравнений (3.1.3) совпадает с прямой суммой группы конформных преобразований пространства переменных  $(x, y, z)$  и группы сдвигов и растяжений переменной  $\psi$ .*

**Теорема 3.4.2.** *Пространство касательных эквивалентностей для всякого уравнения вида (3.1.3), за исключением уравнений (3.3.1) и (3.3.5), является суммой алгебры Ли группы симметрий этого уравнения и алгебры Ли общей группы эквивалентности. Для уравнений вида (3.3.1) и (3.3.5) пространство касательных эквивалентностей является суммой алгебры Ли группы симметрий, алгебры Ли группы эквивалентности и четырехмерного пространства, образованного операторами*

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} = D_0[\psi^2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) + \psi(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}\psi^2)\partial_\psi - v(x^2 + y^2 + z^2)\partial_v] + \\ + \psi^2(H_0\partial_x + I_0\partial_y + J_0\partial_z + 2(H_0x + I_0y + J_0z)\psi\partial_\psi - 2v(H_0x + I_0y + J_0z)\partial_v) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

в случае уравнения (3.3.1) и операторами

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} = D_0[\psi^2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) - D_0\psi \left[ \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{1}{3}\psi^2 \right] \partial_\psi + \\ + D_0 \left[ 2\psi^2 + \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \partial_v + \psi^2 \{ A_0[(x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z] + \\ + B_0[2xy\partial_x + (y^2 - x^2 - z^2)\partial_y + 2yz\partial_z] + C_0[2xz\partial_x + 2yz\partial_y + (z^2 - x^2 - y^2)\partial_z] \} - \\ - 2\psi \frac{A_0x + B_0y + C_0z}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \partial_\psi + 2(A_0x + B_0y + C_0z) \left[ \psi^2 + \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \partial_v \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

в случае уравнения (3.3.5).

В **пятом параграфе** на основе полученных в предыдущем параграфе результатов завершается групповая классификация: осуществляется расщепление всего семейства на классы эквивалентных уравнений. Классификационную теорему мы здесь не приводим, она лишь уточняет результат теоремы 3.3.1.

Наконец, **шестой параграф** этой главы посвящен явным решениям уравнения (3.1.3).

**Теорема 3.6.1.** *Пусть  $v(x, y, z) = Px + Qy + Rz$  (где  $P^2 + Q^2 + R^2 = w^2 > 0$ ). Тогда фронт волны точечного источника, находящегося в точке*

$(x_0, y_0, z_0)$ , является сферическим и определяется соотношением

$$(x - x_0 - P\rho(t))^2 + (y - y_0 - Q\rho(t))^2 + (z - z_0 - R\rho(t))^2 = r^2(t), \quad (3.6.1)$$

в котором

$$\rho(t) = \frac{Px_0 + Qy_0 + Rz_0}{w^2}(\operatorname{ch} wt - 1), \quad r(t) = \frac{Px_0 + Qy_0 + Rz_0}{w} \operatorname{sh} wt. \quad (3.6.2)$$

**Теорема 3.6.2.** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)$ . Тогда фронт волны от точечного источника, расположенного в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , является сферическим и определяется соотношением

$$(x - x_0\rho(t))^2 + (y - y_0\rho(t))^2 + (z - z_0\rho(t))^2 = r^2(t), \quad (3.6.3)$$

где функции  $\rho(t)$  и  $r(t)$  задаются формулами (всюду  $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ ):

$$\rho(t) = \frac{\nu^2(1 + \operatorname{tg}^2 wvt)}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{tg}^2 wvt}, \quad r(t) = \frac{\nu(r_0^2 + \nu^2) \operatorname{tg} wvt}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{tg}^2 wvt} \quad (3.6.4)$$

для  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)$ ,

$$\rho(t) = \frac{\nu^2(1 - \operatorname{th}^2 wvt)}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{th}^2 wvt}, \quad r(t) = \frac{\nu(r_0^2 - \nu^2) \operatorname{th} wvt}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{th}^2 wvt} \quad (3.6.5)$$

для  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)$ ,

$$\rho(t) = \frac{1}{1 - r_0^2 w^2 t^2}, \quad r(t) = \frac{r_0^2 w t}{1 - r_0^2 w^2 t^2} \quad (3.6.6)$$

для  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$ .

**Теорема 3.6.3.** Пусть  $v(x, y, z) = Px + Qy + Rz$  ( $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$ ). Тогда лучи (семейство кривых, ортогональных фронтам) являются полуокружностями, лежащими в плоскостях, ортогональных плоскости горизонта  $Px + Qy + Rz = 0$  и опирающимися на плоскость горизонта.

**Теорема 3.6.4.** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)$  (где  $\nu > 0$ ). Тогда лучи являются дугами окружностей, лежащих в плоскостях, проходящих через начало координат, и эти дуги опираются на сферу горизонта  $x^2 + y^2 + z^2 = \nu^2$ .

**Теорема 3.6.5.** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)$  (где  $\nu > 0$ ). Тогда лучи являются окружностями, проходящими через исходную точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и инверсную ей  $-\nu^2(x_0, y_0, z_0)/(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$ .

**Теорема 3.6.6.** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$ . Тогда лучи являются окружностями, проходящими через исходную точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и начало координат.



Уже сами эти формулы оправдывают весь труд по вычислению групп симметрий. Однако оказалось, что с помощью этих формул удастся увидеть новый факт, который был назван иллюзией движущегося источника.

Дело в том, что во всех формулах, как нетрудно заметить, фронт является сферическим (несмотря на неоднородность среды), но эта сфера – с движущимся центром. В простейшем случае  $v(x, y, z) = x$  ее уравнение имеет вид  $(x - x_0 \operatorname{ch} wt)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x_0 \operatorname{sh} wt)^2$ , из которого легко увидеть, что центр сферы движется со скоростью, пропорциональной радиусу сферы. Проверка показывает, что это имеет место для всех приведенных выше примеров, а естественная ассоциация с законом Хаббла (наблюдаемая скорость движения источника пропорциональна расстоянию до него) порождает вопрос о степени общности этого факта. Оказалось, что факт имеет общий характер и может быть описан как закон движения центра кривизны фронта:

**Теорема 3.6.7.** Пусть  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция на плоскости,  $\nabla v$  – ее градиент,  $D^2v$  – матрица ее вторых производных.

Пусть  $(x, y)$  – некоторая точка плоскости,  $\Gamma$  – проходящая через эту точку вполне регулярная в окрестности этой точки кривая (фронт),  $\tau$  и  $\nu$  – нормальный и касательный к кривой  $\Gamma$  в точке  $(x, y)$  единичные векторы,  $\gamma$  – кривизна  $\Gamma$  в этой точке.

Тогда для точки  $(x, y)$  скорость движения  $\dot{r}^*$  центра кривизны  $r^*$  при сдвиге  $\Gamma$  вдоль лучей (9) определяется формулой

$$\dot{r}^* = \frac{1}{\gamma} \nabla v(x, y) - \frac{1}{\gamma^2} (D^2v(x, y) \cdot \nu, \nu) \tau. \quad (3.6.9)$$

**Теорема 3.6.8.** Пусть  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция,  $\nabla v$  – ее градиент,  $D^2v$  – матрица ее вторых производных.

Пусть  $(x, y, z)$  – некоторая точка в пространстве,  $\Gamma$  – проходящая через эту точку вполне регулярная в окрестности этой точки поверхность (фронт),  $\tau$  и  $h$  – нормальный и некоторый касательный к  $\Gamma$  в точке  $(x, y, z)$  единичные векторы,  $\gamma_h$  и  $\epsilon_h$  – нормальная кривизна и геодезическое кручение фронта в этой точке, отвечающие направлению  $h$ .

Тогда для точки  $(x, y, z)$  скорость движения  $\dot{r}_h^*$  соответствующего центра нормальной кривизны  $r_h^*$  при сдвиге  $\Gamma$  вдоль лучей (3.1.1) определяется формулой

$$\dot{r}_h^* = \frac{1}{\gamma_h} \nabla v(x, y, z) + \frac{\epsilon_h^2 v(x, y, z) - (D^2v(x, y, z) \cdot h, h)}{\gamma_h^2} \tau. \quad (3.6.15)$$

*Иллюзия движущегося источника* возникает, когда наблюдатель, находясь в неоднородной среде, предполагает тем не менее, что она однородна (т.е. что скорость распространения возмущения постоянна) и не имеет в своем распоряжении средств достаточной точности, чтобы погрешность в измерении расстояния удалось соотнести с перемещением, которое можно вычислить по "наблюдаемой скорости".

## 6.5 Четвертая глава

Эта глава посвящена исследованию уже двумерного уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y)}. \quad (3.1.4)$$

Причин интересоваться этим уравнением две: во-первых, к этому уравнению сводятся все трехмерные уравнения с группой симметрий размерности четыре и выше. А во-вторых, как оказывается, двумерное уравнение эйконала оказывается по своим свойствам гораздо ближе к трехмерному анизотропному уравнению, чем к трехмерному изотропному (например, тем, что его группа эквивалентности является бесконечномерной: алгебра конформных преобразований двумерного пространства, в отличие от пространств более высокой размерности, довольно обширна – это алгебра аналитических преобразований комплексной плоскости). Поэтому можно ожидать, что техника, разработанная для двумерного уравнения, окажется полезной и для уравнения анизотропных. Сразу отметим, что это предположение уже подтвердилось, но рассмотрение анизотропных уравнений выходит за рамки нашей диссертации.

В *первом параграфе* этой главы проводится групповой анализ уравнения (3.1.4). В результате этого анализа выделяется два важных семейства уравнений: уравнения с правой частью  $v(x, y) = V(x)$ , зависящей только от одной переменной, которые мы будем называть уравнениями с *плоским слоением* (имеется в виду слоение среды), и уравнения с  $v(x, y) = e^{\varkappa y}V(x)$ , которые мы будем называть уравнениями с *квазиплоским слоением*, предполагая при этом, естественно, что  $\varkappa \neq 0$ . Функцию  $V(x)$  и в том, и в другом случае мы будем называть *функцией слоения*. В роли центральной характеристики, от которой зависят свойства решений уравнения эйконала, оказывается кривизна пространства лучей (риманова пространства с метрикой  $dl^2 = (dx^2 + dy^2)/v^2(x, y)$ , в котором лучи являются геодезическими), вычисляемая по формуле

$$K(x, y) = v(x, y)\Delta v(x, y) - [\nabla v(x, y)]^2. \quad (3.1.10)$$

**Теорема 4.1.1.** *Общая группа эквивалентности уравнения (3.1.4) совпадает с прямой суммой группы конформных преобразований двумерного евклидова пространства, и группы линейных преобразований переменной  $\psi$ . Алгебра Ли этой группы является бесконечномерной и определяется соотношениями*

$$\xi_y + \eta_x = 0, \quad \xi_x = \eta_y, \quad \phi = M\psi + L \quad \omega = v(\xi_x - M). \quad (4.1.4)$$

**Теорема 4.1.2. I.** *Уравнение (3.1.4) имеет 10-мерную группу симметрий тогда и только тогда, когда пространство лучей имеет постоянную кривизну. Любое такое уравнение некоторой заменой переменных  $\hat{x} = \alpha(x, y)$ ,  $\hat{y} = \beta(x, y)$  сводится к некоторому уравнению с плоским слоением.*

*II. Среди уравнений с плоским слоением постоянную кривизну имеют только уравнения с  $V \equiv \text{const}$ ,  $V = we^{kx}$  (для которых кривизна  $K = 0$ ),  $V = wx$  (для которого  $K = -w^2$ ),  $V = w \cos(kx + h)$ ,  $V = w \text{sh}(kx + h)$  (для которых  $K = -k^2w^2$ ) и  $V = w \text{ch}(kx + h)$  (для которого  $K = k^2w^2$ ). Алгебры Ли групп симметрий этих уравнений для  $k = w = 1$ ,  $h = 0$  приведены в приложении II.6.*

*III. Уравнение (3.1.4) с пространством лучей непостоянной кривизны имеет нетривиальную группу симметрий (более широкую, чем группа сдвигов переменной  $\psi$ , порожденная алгеброй  $L\partial_\psi$ ) тогда и только тогда, когда оно некоторой заменой переменных  $\hat{x} = \alpha(x, y)$ ,  $\hat{y} = \beta(x, y)$  сводится к уравнению с плоским или квазиплоским слоением.*

*IV. Среди уравнений с квазиплоским слоением трехмерную группу симметрий имеют только уравнения с  $v(x, y) = w(x+h)^{1+\lambda}$ , алгебра Ли этой группы имеет вид*

$$\Xi = A((x+h)\partial_x + y\partial_y - \lambda\psi\partial_\psi) + B\partial_y + L\partial_\psi, \quad (4.1.6)$$

*и уравнения с  $v(x, y) = we^{\varkappa y} \sin^{1+\varkappa/\lambda}(\lambda x + h)$ , алгебра Ли этой группы имеет вид*

$$\Xi = Ae^{\lambda y}(\cos(\lambda x + h)\partial_x + \sin(\lambda x + h)\partial_y) + B(\partial_y - \varkappa\psi\partial_\psi) + L\partial_\psi. \quad (4.1.7)$$

*Для остальных же уравнений группа симметрий двумерна и ее алгебра Ли имеет вид ( $\varkappa = 0$  для плоского и  $\varkappa \neq 0$  для квазиплоского слоения)*

$$\Xi = B(\partial_y - \varkappa\psi\partial_\psi) + L\partial_\psi. \quad (4.1.8)$$

**Теорема 4.1.3.** *Пространство касательных эквивалентностей для любого уравнения вида (1) является суммой алгебры симметрий этого уравнения и общей алгебры эквивалентности.*

Четвертый результат этого параграфа – классификационная теорема, уточняющая теорему 4.1.2.

Во **втором параграфе**, завершающем диссертационную работу, приводятся условия приводимости уравнения заменой пространственных переменных к уравнению с плоским или квазиплоским слоением, критерий эквивалентности двум уравнение (теорема о семи инвариантах), описаны явные формулы решений достаточно широкого класса уравнений, и, наконец, описан новый *эффект локализации* фронта в некоторой области. Этот эффект не связан с традиционно изучаемыми, в частности, в теории волноводов причинами: с наличием нулей или экстремумов функции скорости  $v(x, y)$ . Причиной появления эффекта является резкий рост функции скорости, в результате чего лучи быстро разворачиваются в сторону ее антиградиента и превращаются в практически параллельный пучок.

**Лемма 4.1.4.** *Для того, чтобы уравнение (3.1.4) было приводимо к уравнению с плоским слоением, необходимо, чтобы функции  $v^2(K_x^2 + K_y^2)$  и  $v^2(K_{xx} + K_{yy})$  были функционально зависимыми с  $K(x, y)$ , т.е. чтобы выполнялись условия*

$$\begin{vmatrix} [v^2(K_x^2 + K_y^2)]_x & [v^2(K_x^2 + K_y^2)]_y \\ K_x & K_y \end{vmatrix} = 0, \quad (4.1.30)$$

$$\begin{vmatrix} [v^2(K_{xx} + K_{yy})]_x & [v^2(K_{xx} + K_{yy})]_y \\ K_x & K_y \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1.31)$$

Эти условия являются и достаточными для существования в окрестности точки  $(x, y)$  замены, приводящей к уравнению с плоским слоением, если либо  $K(x, y) = \text{const}$  в этой окрестности, либо в этой точке  $K_x^2 + K_y^2 \neq 0$ .

В отличие от уравнений с плоским слоением, для уравнений с квазиплоским слоением критерии приводимости используют не столько саму функцию  $K(x, y)$ , сколько вычисляемые по ней величины

$$\sigma^*(x, y) = \frac{v^2(x, y)}{K(x, y)} \left[ \left( \frac{K_x}{K} \right)^2 + \left( \frac{K_y}{K} \right)^2 \right], \quad (4.2.7)$$

$$\sigma^{**}(x, y) = \frac{v^2(x, y)}{K(x, y)} \left[ \left( \frac{K_x}{K} \right)_x + \left( \frac{K_y}{K} \right)_y \right]. \quad (4.2.8)$$

Они, как нетрудно видеть, являются инвариантами (поскольку представляют собой отношение первого и второго параметров Бельтрами для

логарифма кривизны к самой кривизне). Поскольку случай нулевой кривизны сводится к уравнению с плоским слоением, мы будем предполагать здесь, что кривизна ненулевая и даже более того – непостоянная.

**Лемма 4.2.1.** *Для того, чтобы уравнение (3.1.4) с непостоянной кривизной  $K(x, y)$  было приводимо к уравнению с квазиплоским слоением (с  $\varkappa \neq 0$ ), необходимо и достаточно, чтобы для функций  $\sigma^*$ ,  $\sigma^{**}$ , определяемых формулами (4.2.7)-(4.2.8), выполнялись два условия:*

1. *Эти функции должны быть функционально зависимы:*

$$\begin{vmatrix} \sigma_x^* & \sigma_y^* \\ \sigma_x^{**} & \sigma_y^{**} \end{vmatrix} = 0; \quad (4.2.9)$$

2. *Если при этом обе они являются константами, то должно выполняться соотношение  $\sigma^* = 2(\sigma^{**})^2/(2 - \sigma^{**})$ ; в противном случае функции  $\tau$  и  $\theta$ , определяемые по  $\sigma$  (где  $\sigma = \sigma^*$  если  $\sigma^* \neq \text{const}$  и  $\sigma = \sigma^{**}$  если  $\sigma^* = \text{const}$ , но  $\sigma^{**} \neq \text{const}$ ), формулами*

$$\tau = \frac{(v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_y \sigma_x - (v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_x \sigma_y}{v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^2}, \quad (4.2.10)$$

$$\theta = \frac{(v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_y \sigma_y + (v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_x \sigma_x}{v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^2} \quad (4.2.11)$$

*должны быть функционально зависимыми с  $\sigma(x, y)$ , т.е. должны выполняться соотношения*

$$\begin{vmatrix} \tau_x & \tau_y \\ \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_x & \theta_y \\ \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix} = 0, \quad (4.2.12)$$

*причем  $\tau$  должна быть отлична от нуля.*

**Теорема 4.2.1.** *Для того, чтобы уравнение (1) с функцией  $v(x, y)$  некоторой точечной заменой  $\alpha = \alpha(x, y)$ ,  $\beta = \beta(x, y)$  приводилось к уравнению с функцией  $V(\alpha, \beta)$ , необходимо, чтобы семь функций*

$$K(x, y) = v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2),$$

$$S^1(x, y) = v^2(x, y)(K_x^2 + K_y^2), \quad S^2(x, y) = v^2(x, y)(K_{xx} + K_{yy}),$$

$$D^{i+} = v^2(x, y)(S_x^i K_x + S_y^i K_y), \quad D^{i-} = v^2(x, y)(S_y^i K_x - S_x^i K_y)$$

*находились между собой в тех же функциональных зависимостях, что и семь функций*

$$\varkappa(\alpha, \beta) = V(V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta}) - (V_\alpha^2 + V_\beta^2),$$

$$\sigma^1(\alpha, \beta) = V^2(\alpha, \beta)(\varkappa_\alpha^2 + \varkappa_\beta^2), \quad \sigma^2(\alpha, \beta) = V^2(\alpha, \beta)(\varkappa_{\alpha\alpha} + \varkappa_{\beta\beta}),$$

$$\delta^{i+} = V^2(\alpha, \beta)(\sigma_\alpha^i \varkappa_\alpha + \sigma_\beta^i \varkappa_\beta), \quad \delta^{i-} = V^2(\alpha, \beta)(\sigma_\beta^i \varkappa_\alpha - \sigma_\alpha^i \varkappa_\beta).$$

Это условие является и достаточным для существования в окрестности точки  $(x^*, y^*)$  соответствующей замены в случаях, когда

- $S^1(x, y) \equiv 0$  (т.е.  $K(x, y) \equiv \text{const}$ ) в окрестности  $(x^*, y^*)$ ;
- $S^1(x^*, y^*) \neq 0$ , но  $D^{i-}(x, y) \equiv 0$  в окрестности  $(x^*, y^*)$  (т.е.  $S^i$  функционально зависимы с  $K$ ) и  $K(x^*, y^*)$  принадлежит множеству значений  $\varkappa(\alpha, \beta)$ ;
- по крайней мере одна из  $D^{i-}(x^*, y^*)$  отлична от нуля и система  $\varkappa(\alpha, \beta) = K(x^*, y^*)$ ,  $\sigma^i(\alpha, \beta) = S^i(x^*, y^*)$  для соответствующего  $i$  имела хотя бы одно решение.

Формулы решений мы здесь не приводим – их вместе с картинками лучше посмотреть в тексте диссертации.

## 6.6 Приложения

Приложения содержат вспомогательный материал: первое приложение содержит вывод формулы распространяющихся волн, второе – формулы для алгебр Ли групп симметрий уравнений эйконала, третье – решение определяющих уравнений для алгебры Ли группы конформных преобразований трехмерного пространства.

# Глава 1

## Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды

Эта глава посвящена разработке метода распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды. Уравнение

$$a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (x \in R^1), \quad (1.0.1)$$

будет рассматриваться как "волновое", то есть описывающее распространение волн в некоторой неоднородной среде (неоднородность отражается в непостоянстве коэффициентов уравнения). Это уравнение мы, для удобства, приведем к канонической форме

$$k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s. \quad (1.0.2)$$

Приведение осуществляется заменой

$$s = \int_0^x \sqrt{a(\sigma)/b(\sigma)} d\sigma \quad (1.0.3)$$

пространственной переменной, благодаря которой пространственная ось параметризуется так, что расстояние между точками оказывается равным времени распространения возмущения. При этом  $k^2(s) = (ab)(x(s))$ . Мы будем предполагать везде, что коэффициенты  $a(x)$  и  $b(x)$  таковы, что  $k(s)$  оказывается дважды непрерывно дифференцируемой.

Наряду с уравнением (1.0.2) мы будем рассматривать еще одну каноническую форму уравнения (1.0.1)

$$z_{tt} = z_{ss} - [\phi' + \phi^2](s)z, \quad (1.0.4)$$

получаемую из (1.0.2) заменой  $z(t, s) = \sqrt{k(s)}u(t, s)$ , при этом

$$\phi(s) = \frac{1}{2}k'(s)/k(s). \quad (1.0.5)$$

## § 1.1 Формула распространяющихся волн

В этом параграфе мы представляем формулу распространяющихся волн для уравнения (1.0.2). В силу эквивалентности уравнений (1.0.2) и (1.0.4) она может быть использована (после удаления радикалов) и для уравнения (1.0.4). Более того, ее математическое обоснование целиком и полностью проводится в терминах уравнения (1.0.4). Однако мы будем все-таки относить ее к уравнению (1.0.2) в силу двух причин. Во-первых, при описании волнового процесса в неоднородной среде возникает именно уравнение (1.0.2) (а точнее – (1.0.1), но замена переменной  $x$  на  $s$  не меняет физического смысла величин, входящих в уравнение, а только меняет способ параметризации одномерного континуума), переход же к уравнению (1.0.4) связан уже с подменой физических величин, входящих в уравнение, на другие. Во-вторых, сама формула распространяющихся волн была получена именно для уравнения (1.0.2) исходя из кусочно-постоянной аппроксимации этого уравнения (вывод будет приведен в следующем параграфе). Возможно, эти аргументы могут показаться не слишком существенными, но в условиях математической эквивалентности двух уравнений, при которой существенные аргументы для выбора одного из них отсутствуют, приходится пользоваться несущественными, вплоть до личных вкусов автора.

**Теорема 1.1.1** Пусть  $k(s) > 0$  и дважды непрерывно дифференцируема. Тогда общее классическое решение уравнения (1.0.2) описывается формулой

$$\begin{aligned}
 u(t, s) = & \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}} V(s-t) + \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}} W(s+t) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} V(y) J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) J\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) \tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} V(y) \tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy
 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$



где  $V$  и  $W$  – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, связанные с начальными условиями  $u_0(s) = u(0, s)$ ,  $v_0(s) = u_t(0, s)$  соотношениями

$$V(s) + W(s) = u_0(s), \quad -[k(s)V(s)]' + [k(s)W(s)]' = k(s)v_0(s). \quad (1.1.2)$$

Через  $J(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$  обозначены функции, которые являются решением системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, \gamma) &= - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta) \tilde{J}(\sigma, \beta, \gamma) d\sigma, \\ \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) &= \phi(\alpha) + \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau) J(\alpha, \tau, \gamma) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Отметим, что система (1.1.3) является системой интегральных уравнений Вольтерра (третий аргумент  $\gamma$  фигурирует просто как параметр, по нему интегрирование не производится) и имеет единственное решение для любой функции  $\phi(s)$ .

**Доказательство** осуществляется проверкой того, что для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций  $V, W$  пара функций

$$\begin{aligned} z^-(\xi, \eta) &= \sqrt{k(\xi)}V(\xi) + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)} [V(y)J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \\ &\quad + W(y)\tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)] dy \\ z^+(\xi, \eta) &= \sqrt{k(\eta)}W(\eta) - \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)} [W(y)J\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \\ &\quad + V(y)\tilde{J}\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)] dy \end{aligned}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$z_{\eta}^- = \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)z^+, \quad z_{\xi}^+ = \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)z^-, \quad (1.1.4)$$

откуда немедленно следует, что сумма  $z^+ + z^-$  удовлетворяет уравнению

$$z_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(\phi' + \phi^2)\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right), \quad (1.1.5)$$

которое заменой независимых переменных  $\xi = s - t$ ,  $\eta = s + t$  превращается в (1.0.4).

Для проверки же справедливости для наших функций  $z^\pm$  равенств (1.1.4) нам понадобится привести формулы дифференцирования  $J$  и  $\tilde{J}$  по третьему параметру. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.1.1**

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= -\phi(\gamma)\tilde{J}(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma), \\ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= -\phi(\gamma)J(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

**Доказательство леммы** сводится к дифференцированию по  $\gamma$  соотношений (1.1.3), которое дает, с одной стороны,

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = -\phi(\gamma - \beta)\tilde{J}(\gamma, \beta, \gamma) - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta) \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \gamma}(\sigma, \beta, \gamma) d\sigma,$$

где в правой части первое слагаемое равно  $-\phi(\alpha - \beta)\phi(\gamma)$  (из формулы (1.1.3) при  $\alpha = \gamma$  получается  $\tilde{J}(\gamma, \beta, \gamma) = \phi(\gamma)$ ), а с другой стороны –

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau) \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\alpha, \tau, \gamma) d\tau.$$

Эта пара соотношений отличается от системы уравнений, определяющих функции  $\tilde{J}(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma)$ ,  $J(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma)$

$$\tilde{J}(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma) = \phi(\gamma - \beta) + \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\tilde{\sigma} - \beta) J(\gamma - \beta, \tilde{\sigma} - \alpha, \gamma) d\tilde{\sigma},$$

$$J(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma) = \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tilde{\tau}) \tilde{J}(\gamma - \tilde{\tau}, \gamma - \alpha, \gamma) d\tilde{\tau},$$

получаемой из (1.1.3) заменой аргументов, только множителем  $(-\phi(\gamma))$ . Значит, пара функций  $\partial J/\partial \gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\partial \tilde{J}/\partial \gamma(\alpha, \beta, \gamma)$  и пара функций  $-\phi(\gamma)\tilde{J}(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma)$ ,  $-\phi(\gamma)J(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma)$  удовлетворяют одной и той же системе Вольтерра, и поэтому соответственно равны. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что наши функции  $z^\pm$  действительно удовлетворяют (1.1.4), и поэтому для любых  $V(\cdot)$ ,  $W(\cdot)$  функция (1.1.1) является решением (1.0.2). Для завершения доказательства теоремы остается

отметить, что прямой подстановкой проверяется, что связь между  $V$ ,  $W$  и начальными условиями описывается соотношениями (1.1.2), а поскольку, в силу теоремы Римана, начальные условия определяют решение уравнения (1.0.2) взаимно-однозначно, указанная нами формула описывает все решения. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Соотношения (1.1.6) очень важны, они будут постоянно использоваться во всех доказательствах, которые будут основаны на одной и той же схеме: выделения функций  $z^\pm$  которые, собственно, и являются правой и левой волнами и проверки для них, с использованием (1.1.6), соотношений (1.1.4), которые являются системой уравнений для волн.

**Замечание 2.** Как нетрудно видеть, правая и левая волны начальными условиями определяются неоднозначно, а с точностью до добавления к одной функции и вычитания из другой выражения  $C/k(s)$ . Эта неоднозначность на самом деле не является специфичной для неоднородных сред: в случае уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  в формуле его решения  $u = f(x-t) + g(x+t)$  функции  $f$  и  $g$  точно также определяются с точностью до добавления к одной и вычитания из другой некоторой константы. В случае однородной среды очевидно, что это не влияет на результат – сумму функций, в случае неоднородной среды это будет вытекать из следующей леммы.

**Лемма 1.1.2** *Имеют место следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \left[ J \left( \frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) - \tilde{J} \left( \frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) \right] dy - \\ - \frac{1}{\sqrt{k(\eta)}} + \frac{1}{\sqrt{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} = 0, \\ \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \left[ J \left( \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) - \tilde{J} \left( \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) \right] dy + \\ + \frac{1}{\sqrt{k(\xi)}} - \frac{1}{\sqrt{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} = 0. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

**Доказательство** состоит в проверке, с использованием (1.1.6), того, что функции  $z^+(\xi, \eta)$  и  $z^-(\xi, \eta)$ , составляющие левую часть первого и второго равенств, удовлетворяют соотношениям (1.1.4). Эти соотношения, с учетом  $z^+|_{\xi=\eta} = z^-|_{\eta=\xi} = 0$  означают, что функции  $z^\pm$ , являются решением однородной системы интегральных уравнений Вольтерра

$$z^+(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \phi \left( \frac{\sigma + \eta}{2} \right) z^-(\sigma, \eta) d\sigma,$$

$$z^-(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \phi \left( \frac{\xi + \tau}{2} \right) z^+(\xi, \tau) d\tau,$$

и поэтому являются тождественными нулями.

**Следствие.** Если начальные условия нулевые:  $u_0 = u_1 = 0$ , то формула (1.1.1) дает тождественный нуль.

Действительно, в этом случае  $V = -W = C/k(s)$ , и в силу (1.1.7)

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \frac{C}{\sqrt{k(s-t)}} - \frac{C}{\sqrt{k(s+t)}} + \\ &+ \frac{C}{2} \int_{s-t}^{s+t} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \left[ J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) + J\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) \right] dy = 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично лемме 1.1.2 доказывается и

**Лемма 1.1.3** *Имеют место следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)} \left[ J\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \tilde{J}\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy - \\ - \sqrt{k(\eta)} + \sqrt{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} = 0, \\ \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)} \left[ J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy + \\ + \sqrt{k(\xi)} - \sqrt{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} = 0. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

**Следствие.** Если  $u_0 = 1, u_1 = 0$ , то формула (1.1.1) дает  $u(t, s) \equiv 1$ .

Действительно, в этом случае  $V = W = 1/2$  (слагаемые  $\pm C/k(s)$  мы, в силу следствия из предыдущей леммы, можем опустить), и в силу (1.1.8)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{k(s)}u(t, s) &= \sqrt{k(s-t)} + \sqrt{k(s+t)} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{k(y)} \left[ J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) \right] dy = \\ &= 2\sqrt{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} = 2\sqrt{k(s)}. \end{aligned}$$

### 1.1.1 Случай $\phi(s) = \text{const}$

В случае  $\phi(s) \equiv 0$  из уравнений (1.1.3) следует, что  $J = \tilde{J} \equiv 0$ , и мы получаем обычную формулу распространяющихся волн. Если же  $\phi(s) \equiv M \neq 0$  (т.е.  $k(s) = e^{2Ms}$ ), то (1.1.3) дает нам представления  $J, \tilde{J}$  в виде рядов

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, \gamma) &= - \left[ M^2(\gamma - \alpha) + M^4 \frac{(\gamma - \alpha)^2 \beta}{2!} + M^6 \frac{(\gamma - \alpha^3) \beta^2}{3!2!} + \dots \right] = \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} M^{2j} \frac{(\gamma - \alpha)^j \beta^{j-1}}{j!(j-1)!}, \\ \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) &= M + M^3(\gamma - \alpha)\beta + M^5 \frac{(\gamma - \alpha)^2 \beta^2}{2!2!} + M^7 \frac{(\gamma - \alpha^3) \beta^3}{3!3!} + \dots = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} M^{2j+1} \frac{(\gamma - \alpha)^j \beta^j}{j!j!}, \end{aligned}$$

в которых легко узнаются функции Бесселя (см. [154, стр. 180, 195-196]):  $J(\alpha, \beta, \gamma)$  равно  $M\sqrt{(\gamma - \alpha)/\beta} J_1(2M\sqrt{(\gamma - \alpha)\beta})$  при  $(\gamma - \alpha)\beta > 0$  и  $M\sqrt{(\alpha - \gamma)/\beta} I_1(2M\sqrt{(\alpha - \gamma)\beta})$  при  $(\gamma - \alpha)\beta < 0$ , а  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$  – это  $MJ_0(2M\sqrt{(\gamma - \alpha)\beta})$  или  $MI_0(2M\sqrt{(\alpha - \gamma)\beta})$  соответственно. Здесь  $J_\nu$  и  $I_\nu$  – обозначения из [154] для функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя.

### 1.1.2 Смысл величин, фигурирующих в формуле распространяющихся волн

Вывод формулы распространяющихся волн приведен в Приложении I. Он позволяет нам явно увидеть тот смысл, который несет та или иная фигурирующая в формуле величина. Прежде всего,  $V(y)$  и  $W(y)$  – это начальные правая и левая волны. Перенос их из точки  $y$  в точку  $s$  за время  $t$  осуществляется с коэффициентом, равным  $J$  или  $\tilde{J}$  с соответствующим аргументом. Коэффициент  $J$  используется тогда, когда при переносе направление (ориентация) волны сохраняется, а  $\tilde{J}$  – когда она меняется на противоположную.

Система уравнений (1.1.3) описывает закон "итерирования" коэффициентов переноса: поскольку фигурирующая в нем функция  $\phi(s)$  является аналогом коэффициентов (I.1) одинарного отражения, эта система означает, что каждый из двух коэффициентов переноса волны образуется из другого за счет одного "дополнительного" отражения, с интегрированием по всем возможным точкам этого дополнительного отражения.

Важным является и то, что решение системы (1.1.3) методом последовательных приближений даст нам представление коэффициентов  $J$  и  $\tilde{J}$  в виде рядов

$$J = J_2 + J_4 + \dots + J_{2m} + \dots, \quad \tilde{J} = J_1 + J_3 + \dots + J_{2m+1} + \dots,$$

в которых  $J_i$  является коэффициентом переноса волны с  $i$  отражениями, так что решение этой системы методом последовательных приближений означает последовательный учет все большего количества отражений, а замена точного решения приближенным означает "отбрасывание" волн, получившихся в результате большего, чем заданное, количества отражений. Отметим, что, хотя такой способ приближенного вычисления поля и не является столь широко распространенным, как асимптотические методы, он обсуждался, напр, в [130].

Внеинтегральный член отвечает за перенос волн без отражений, и, как мы видим, при таком переносе происходит только умножение волны на соответствующий коэффициент. В принципе можно было бы его присоединить к слагаемым, содержащим  $J$ , положив  $\bar{J}(\alpha, \beta, \gamma) = J(\alpha, \beta, \gamma) + \delta(\alpha)$ , однако это не представляется нам необходимым, поскольку в дальнейших рассматриваниях нас будут интересовать свойства дифференцируемости решений, которое из обобщенных представлений извлечь труднее, чем из классических.

Наконец, из самого процесса вывода нетрудно увидеть, что составляющие формулу (1.1.1) слагаемые можно разбить на две части, представляющие из себя правую и левую волну, но уже в момент времени  $t$ : в правую волну войдут первое, третье и пятое слагаемые, а в левую – второе, четвертое и шестое. Формально они вычленяются по тому, какой аргумент в них фигурирует –  $s - t$  или  $s + t$ . В следующем параграфе мы покажем, что это разбиение естественным образом порождает оператор, который действует на пару волн  $V, W$ , осуществляя преобразование этой пары с течением времени.

## § 1.2 Волновой оператор

**Лемма 1.2.1** *Функции  $V^\theta(\cdot)$  и  $W^\theta(\cdot)$ , определяемые соотношениями*

$$V^\theta(s) = \sqrt{\frac{k(s-\theta)}{k(s)}}V(s-\theta) + \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right)dy + \quad (1.2.1)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)\tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right)dy,$$

$$W^\theta(s) = \sqrt{\frac{k(s+\theta)}{k(s)}}W(s+\theta) - \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)J\left(\frac{s+y+\theta}{2}, \frac{s-y+\theta}{2}, s\right)dy - \quad (1.2.2)$$

$$- \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)\tilde{J}\left(\frac{s+y+\theta}{2}, \frac{s-y+\theta}{2}, s\right)dy,$$

*удовлетворяют равенствам*

$$V^\theta(s) + W^\theta(s) = u(\theta, s), \quad -[k(s)V^\theta(s)]' + [k(s)W^\theta(s)]' = k(s)u_t(\theta, s). \quad (1.2.3)$$

Эта лемма показывает, что рассмотрение функций  $V^\theta(s)$  и  $W^\theta(s)$  как правой и левой волн в момент времени  $t = \theta$  оправдано не только с точки зрения аналогии с дискретной моделью: по отношению к фазовым переменным  $u$ ,  $u_t$  они играют в момент времени  $t = \theta$  ту же роль, что и  $V(s)$  и  $W(s)$  при  $t = 0$ . Так что формулы (1.2.1)-(1.2.2) действительно можно считать декомпозицией решения (1.1.1) на правую и левую волны в каждый момент времени: правая волна в момент времени  $t$  образуется теми слагаемыми в (1.1.1), у которых в аргументе стоит выражение  $(s - t)$ , а левая – теми, у которых в аргументе стоит  $(s + t)$ .

**Доказательство.** Первое из соотношений (1.2.3) следует из формулы (1.1.1) и определения функций  $V^\theta$ ,  $W^\theta$ . Для проверки справедливости второго соотношения сведем его к равенству

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (k(s)V^\theta(s)) + \left[ \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (k(s)W^\theta(s)) = 0, \quad (1.2.4)$$

которое получается вычитанием из второго соотношения (1.2.3) производной по  $\theta$  от первого соотношения, умноженного на  $k(s)$ . Для обоснования

(1.2.4) мы перейдем к переменным  $\xi = s - \theta$ ,  $\eta = s + \theta$ , подставив вместо  $V^\theta$  и  $W^\theta$  их выражения из (1.2.1)-(1.2.2). Получим

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (k(s)V^\theta(s)) = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{k\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)} \left[ \sqrt{k(\xi)}V(\xi) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)}V(y)J\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)}W(y)\tilde{J}\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy \right] = \\
 & = \frac{k'\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)}{2\sqrt{k\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)}} \left[ \sqrt{k(\xi)}V(\xi) + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)}V(y)J\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)}W(y)\tilde{J}\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy \right] + \\
 & + \sqrt{k\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)} \left[ \sqrt{k(\eta)}V(\eta)J\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{k(\eta)}W(\eta)\tilde{J}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] - \\
 & - \sqrt{k\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \left[ \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)}V(y)\tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{k(y)}W(y)\tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy \right]
 \end{aligned}$$

В полученном выражении первая и вторая строки – результат дифференцирования по  $\eta$  общего множителя  $\sqrt{k\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)}$ , что дает, очевидно,  $\phi(s)k(s)V^\theta(s)$ . В третьей и четвертой строке – результат дифференцирования интегралов по верхнему пределу, при этом первое из полученных слагаемых равно нулю, так как  $J$  при совпадающих первом и третьем аргументах равно нулю (см. (1.1.3)), второе же слагаемое (также в силу (1.1.3)) равно



$\sqrt{k(\frac{\xi+\eta}{2})k(\eta)W(\eta)\phi((\xi+\eta)/2)}$ . В пятой-шестой строке – результат дифференцирования под знаком интегралов с учетом формулы (1.1.6), в силу которой аргументы у  $J$  и  $\tilde{J}$  становятся равными  $((\eta+y)/2, (\eta-y)/2, (\eta+\xi)/2)$ . Полученные два слагаемых вместе со вторым слагаемым в третьей строке дают, как нетрудно убедиться,  $\phi(s)k(s)W^\theta(s)$ . Таким образом,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (k(s)V^\theta(s)) = \phi(s)k(s)[V^\theta(s) + W^\theta(s)].$$

Аналогично устанавливается и то, что

$$\left[ \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (k(s)W^\theta(s)) = \phi(s)k(s)[V^\theta(s) + W^\theta(s)],$$

откуда непосредственно следует (1.2.4), а значит, и интересующее нас второе соотношение (1.2.3). Лемма доказана.

Формулы (1.2.1)-(1.2.2) описывают преобразование пары  $[V, W]$  из правой и левой волн с течением времени. Это преобразование естественно называть *волновым оператором*.

В нашем случае волновой оператор порожден начальными данными. В принципе, это не является обязательным. Данные могут быть заданы на любой кривой, и далее мы под волновым оператором будем понимать аналогичное (1.2.1)-(1.2.2) отображение волновых переменных на той кривой, на которой заданы данные, в произвольную точку  $(t, s)$ . Понятие волнового оператора оказывается удобным в том смысле, что получение формул решения практически любой задачи для уравнения (1.0.2) сводится к построению соответствующего волнового оператора, описывающего перенос волн  $V, W$  с кривой, на которой заданы данные, с коэффициентами  $J, \tilde{J}$  (имеющими подходящие аргументы) и к выражению этих волновых переменных через данные задачи.

В качестве одного из важнейших свойств волнового оператора следует указать его *групповое свойство*. Так, если взять начальные данные  $V$  и  $W$  при  $t = 0$ , вычислить по формулам (1.2.1)-(1.2.2) волны  $V^t$  и  $W^t$ , затем взять их снова в качестве начальных данных, и по ним вычислить правую и левую волну еще через промежуток времени  $\tau$ , то это будут в точности  $V^{t+\tau}$  и  $W^{t+\tau}$ , т.е. правая и левая волна, порожденные начальными волнами  $V$  и  $W$ , и вычисленными непосредственно через время  $t + \tau$ . Это свойство, конечно, более чем естественно, и, вообще говоря, оно просто следует из теорем единственности, однако нам представляется важным показать его справедливость непосредственно, поскольку теоремы единственности всегда привязаны к тем или иным функциональным пространствам или классам функций, а *формулы свертки* для коэффициентов переноса  $J, \tilde{J}$

не зависят от того, в какое функциональное пространство мы погружаем нашу задачу.

**Теорема 1.2.1 (Принцип суперпозиции для волнового оператора).** Пусть  $K_\theta[V(s), W(s)]$  – оператор, определяемый формулами (1.2.1)–(1.2.2):

$$K_\theta[V(s), W(s)] \stackrel{def}{=} [V^\theta(s), W^\theta(s)].$$

Тогда

$$K_\theta[K_\tau[V(s), W(s)]] = K_{\theta+\tau}[V(s), W(s)].$$

Для доказательства теоремы нам понадобится

**Лемма 1.2.2** *Имеют место следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \int_\xi^\eta \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \quad (1.2.5) \\ = 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\xi^\eta \left[ \tilde{J}\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - J\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \quad (1.2.6) \\ = 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\xi^\beta \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \quad (1.2.7) \\ = 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right) - \\ - 2J\left(\frac{\xi+\beta}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\xi^\beta \left[ \tilde{J}\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - J\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \quad (1.2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\tilde{J}\left(\frac{\xi + \alpha}{2}, \frac{\xi - \beta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\xi + \alpha}{2}, \frac{\xi - \beta}{2}, \xi\right), \\
 &\int_{\alpha}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy = \quad (1.2.9) \\
 &= 2J\left(\frac{\xi + \alpha}{2}, \frac{\xi - \beta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\alpha}^{\eta} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) J\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - J\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy = \quad (1.2.10) \\
 &= 2\tilde{J}\left(\frac{\xi + \alpha}{2}, \frac{\xi - \beta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\xi + \alpha}{2}, \frac{\xi - \alpha}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Формулы (1.2.5)-(1.2.10) естественно называть *формулами свертки* для коэффициентов переноса, они аналогичны формулам сложения для тригонометрических функций.

**Доказательство леммы.** Будем доказывать равенства попарно. Сначала рассмотрим пару (1.2.5)-(1.2.6). Разности правых и левых частей этих равенств, как функции  $\xi$  и  $\eta$  (при фиксированных  $\alpha, \beta$ ), обозначим через  $F_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$  и  $\tilde{F}_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$  соответственно. Дифференцируя первую функцию по  $\eta$ , получаем, в силу (1.1.6), что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} F_{\alpha\beta}(\xi, \eta) &= J\left(\frac{\eta + \alpha}{2}, \frac{\eta - \beta}{2}, \eta\right) J\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \\
 &\quad - \tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \eta\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \\
 &-\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \int_{\xi}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) J\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy + \\
 &\quad + \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) = \\
 &= \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \left\{ -2\tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \eta\right) + 2\tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\xi}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-\tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right)J\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy \Big\} = -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\tilde{F}_{\beta\alpha}(\eta, \xi),$$

поскольку рокировка аргументов  $\xi$  и  $\eta$  и параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в (1.2.6) дает как раз

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) = & \int_{\xi}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right)\tilde{J}\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right)J\left(\frac{\eta+y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy - \\ & - 2\tilde{J}\left(\frac{\eta+\beta}{2}, \frac{\eta-\alpha}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + 2\tilde{J}\left(\frac{\eta+\beta}{2}, \frac{\eta-\alpha}{2}, \eta\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, дифференцируя  $\tilde{F}_{\beta\alpha}(\eta, \xi)$  по  $\xi$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{F}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) = & -J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right)\tilde{J}\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \\ & + \tilde{J}\left(\frac{\xi+\beta}{2}, \frac{\xi-\alpha}{2}, \xi\right)J\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \\ & - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \int_{\xi}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right)J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right)\tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy + \\ & + \phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) = \\ = & \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right) \left\{ -2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \xi\right) + 2J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ & - \int_{\xi}^{\eta} \left[ J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right)J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ & \left. \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\beta}{2}, \frac{y-\alpha}{2}, y\right)\tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy \right\} = -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)F_{\alpha\beta}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Поскольку, как нетрудно заметить, при  $\xi = \eta$  имеем  $F_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\beta\alpha} = 0$ , наша пара функций удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \phi\left(\frac{\xi+\theta}{2}\right)\tilde{F}_{\beta\alpha}(\theta, \xi) d\theta, \\ \tilde{F}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) &= \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \phi\left(\frac{\eta+\sigma}{2}\right)F_{\alpha\beta}(\sigma, \eta) d\sigma. \end{aligned}$$

Это – однородная система интегральных уравнений Вольтерра, единственным решением которой является тривиальное:

$$F_{\alpha\beta}(\xi, \eta) = 0, \quad \tilde{F}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) \equiv 0.$$

Справедливость (1.2.5)-(1.2.6) доказана.

Докажем теперь (1.2.7) и (1.2.10). Разность между правыми и левыми частями этих формул обозначим через  $G_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$  и  $\tilde{G}_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$  соответственно. Так же, как и в предыдущем случае, дифференцирование  $G$  по  $\eta$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha\beta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \int_{\xi}^{\beta} \left[ J\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) J\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy + \\ &\quad + \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \beta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \left\{ \int_{\xi}^{\beta} \left[ J\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{J}\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) J\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy - 2\tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \beta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right\} = -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \tilde{G}_{\beta\alpha}(\eta, \xi), \end{aligned}$$

так как рокировка аргументов  $\xi$  и  $\eta$  и параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в (1.2.10) приводит к

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) &= \int_{\beta}^{\xi} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) J\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - J\left(\frac{y + \alpha}{2}, \frac{y - \beta}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + y}{2}, \frac{\eta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy - \\ &\quad - 2\tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \alpha}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) + 2\tilde{J}\left(\frac{\eta + \beta}{2}, \frac{\eta - \beta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right). \end{aligned}$$

Ну, а производная по  $\xi$  от  $\tilde{G}_{\beta\alpha}(\eta, \xi)$ , в свою очередь, будет равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{G}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) &= \tilde{J}\left(\frac{\xi + \beta}{2}, \frac{\xi - \alpha}{2}, \xi\right) J\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \\ &\quad - J\left(\frac{\xi + \alpha}{2}, \frac{\xi - \beta}{2}, \xi\right) \tilde{J}\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \int_{\beta}^{\xi} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y + \beta}{2}, \frac{y - \alpha}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -J\left(\frac{y+\alpha}{2}, \frac{y-\beta}{2}, y\right)J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy + \\
 & +\phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \left[ J\left(\frac{\xi+\alpha}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - J\left(\frac{\xi+\beta}{2}, \frac{\xi-\beta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] = \\
 & = -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)G_{\alpha\beta}(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

Остается заметить, что при  $\eta = \beta$  получаем  $G_{\alpha\beta}(\xi, \beta) = F_{\alpha\beta}(\xi, \beta) = 0$ , а при  $\xi = \beta$  — что  $\tilde{G}_{\beta\alpha}(\eta, \beta) = 0$ , так что функции  $G$  и  $\tilde{G}$  также оказались удовлетворяющими однородной системе интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \int_{\beta}^{\eta} \phi\left(\frac{\xi+\theta}{2}\right)\tilde{G}_{\beta\alpha}(\theta, \xi) d\theta, \\
 \tilde{G}_{\beta\alpha}(\eta, \xi) &= -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{\beta} \phi\left(\frac{\sigma+\eta}{2}\right)G_{\alpha\beta}(\sigma, \eta) d\sigma,
 \end{aligned}$$

имеющей только тривиальное решение. Таким образом, (1.2.7) и (1.2.10) также доказаны.

Формулы (1.2.8) и (1.2.9) обосновываются аналогично (1.2.7) и (1.2.10). Таким образом, наша лемма полностью доказана.

**Замечание.** Из (1.1.3) следует, что

$$\frac{\partial J(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = \phi(\alpha - \beta)\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma), \quad \frac{\partial \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} = -\phi(\alpha - \beta)J(\alpha, \beta, \gamma),$$

поэтому соотношения (1.2.8) и (1.2.10) получаются из (1.2.7) и (1.2.9) соответственно дифференцированием по  $\alpha$ , обратный же переход осуществляется дифференцированием по  $\beta$ , при этом и в том, и в другом случае появляется общий множитель  $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ . Хотя деление на этот множитель и является эквивалентным преобразованием только для  $\phi(s) \neq 0$ , тем не менее указанный прием показывает, что на самом деле пара (1.2.7), (1.2.10) и пара (1.2.8), (1.2.9) эквивалентны между собой.

**Доказательство теоремы 1.2.1.** Обозначим результат действия суперпозиции  $K_{\theta}[K_{\tau}[V(s), W(s)]]$  через  $[V^{\theta, \tau}(s), W^{\theta, \tau}(s)]$ . Нам необходимо показать, что эти две функции совпадают с  $V^{\theta+\tau}(s)$  и  $W^{\theta+\tau}(s)$  соответственно. Мы проведем доказательство для  $V$ , для другой компоненты оно аналогично. По определению

$$V^{\theta, \tau}(s) = \sqrt{\frac{k(s-\theta)}{k(s)}}V^{\tau}(s-\theta) + \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V^{\tau}(y)J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right)dy +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W^\tau(y) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) dy,$$

подставляя сюда  $V^\tau$  и  $W^\tau$  из (1.2.1)-(1.2.2), получаем после сокращения  $k(s-\theta)$  во внеинтегральных членах и  $k(y)$  под интегралом:

$$\begin{aligned} V^{\theta,\tau}(s) &= \sqrt{\frac{k(s-\theta-\tau)}{k(s)}} V(s-\theta-\tau) + \\ &+\frac{1}{2} \int_{s-\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} V(y) J\left(\frac{s-\theta+y-\tau}{2}, \frac{s-\theta-y-\tau}{2}, s-\theta\right) dy + \\ &+\frac{1}{2} \int_{s-\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) \tilde{J}\left(\frac{s-\theta+y-\tau}{2}, \frac{s-\theta-y-\tau}{2}, s-\theta\right) dy + \\ &+\frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y-\tau)}{k(s)}} V(y-\tau) J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) dy + \\ &+\frac{1}{4} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) \times \\ &\quad \times J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) d\sigma dy + \\ &+\frac{1}{4} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} W(\sigma) \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) \times \\ &\quad \times J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) d\sigma dy + \\ &+\frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \sqrt{\frac{k(y+\tau)}{k(s)}} W(y+\tau) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) dy - \\ &-\frac{1}{4} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} W(\sigma) J\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \times \\ &\quad \times \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) d\sigma dy - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \times \\ \times \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) d\sigma dy$$

(в двойных интегралах переменная интегрирования внутреннего интеграла обозначена через  $\sigma$ ).

Очевидно, что для того, чтобы  $V^{\theta,\tau}(s) = V^{\theta+\tau}(s)$ , достаточно (а в силу произвола функций  $V(s)$ ,  $W(s)$  и необходимо), чтобы выполнялись равенства

$$\int_{s-\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s-\theta+\sigma-\tau}{2}, \frac{s-\theta-\sigma-\tau}{2}, s-\theta\right) d\sigma + \\ + \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta-\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s+\sigma+\tau-\theta}{2}, \frac{s-\sigma-\tau-\theta}{2}, s\right) d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \left[ J\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) \times \right. \\ \left. \times J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) - \right. \quad (1.2.11) \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) \right] d\sigma dy = \\ = \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s+\sigma-\theta-\tau}{2}, \frac{s-\sigma-\theta-\tau}{2}, s\right) d\sigma$$

и

$$\int_{s-\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} W(\sigma) \tilde{J}\left(\frac{s-\theta+\sigma-\tau}{2}, \frac{s-\theta-\sigma-\tau}{2}, s-\theta\right) d\sigma + \\ + \int_{s-\theta+\tau}^{s+\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} W(\sigma) \tilde{J}\left(\frac{s+\sigma-\tau-\theta}{2}, \frac{s-\sigma+\tau-\theta}{2}, s\right) d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} W(\sigma) \left[ \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) \times \right.$$



$$\begin{aligned} & \times J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) - \quad (1.2.12) \\ & \left. J\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) \right] d\sigma dy = \\ & = \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} W(\sigma) \tilde{J}\left(\frac{s+\sigma-\theta-\tau}{2}, \frac{s-\sigma-\theta-\tau}{2}, s\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Доказательство этих равенств сводится к замене порядка интегрирования и к применению формул (1.2.5)-(1.2.10). Так, в первом равенстве двойной интеграл при замене порядка интегрирования преобразуется в сумму трех:

$$\begin{aligned} & \int_{s-\theta}^{s+\theta} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \dots d\sigma dy = \\ & = \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta-\tau} \int_{s-\theta}^{\sigma+\tau} \dots dy d\sigma + \int_{s+\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \int_{s-\theta}^{s+\theta} \dots dy d\sigma + \int_{s-\theta+\tau}^{s+\theta+\tau} \int_{\sigma-\tau}^{s+\theta} \dots dy d\sigma, \end{aligned}$$

так что этот двойной интеграл оказывается равным

$$\begin{aligned} & \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta-\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \int_{s-\theta}^{\sigma+\tau} \left[ J\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) - \right. \\ & \quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) \right] dy d\sigma + \\ & + \int_{s+\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \int_{s-\theta}^{s+\theta} \left[ J\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) - \right. \\ & \quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) \right] dy d\sigma + \\ & + \int_{s-\theta+\tau}^{s+\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \int_{\sigma-\tau}^{s+\theta} \left[ J\left(\frac{y+\sigma-\tau}{2}, \frac{y-\sigma-\tau}{2}, y\right) J\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) - \right. \\ & \quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{y+\sigma+\tau}{2}, \frac{y-\sigma+\tau}{2}, y\right) \tilde{J}\left(\frac{s+y-\theta}{2}, \frac{s-y-\theta}{2}, s\right) \right] dy d\sigma. \end{aligned}$$

В первом слагаемом мы заменим внутренний интеграл, пользуясь формулой (1.2.7) (при  $\xi = s - \theta, \eta = s + \theta, \alpha = \sigma - \tau, \beta = \sigma + \tau$ ), на

$$2J\left(\frac{s+\sigma-\theta-\tau}{2}, \frac{s-\sigma-\theta-\tau}{2}, s\right) - 2J\left(\frac{s+\sigma-\theta+\tau}{2}, \frac{s-\sigma-\theta-\tau}{2}, s\right) -$$

$$-2J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s - \theta\right),$$

во втором, пользуясь формулой (1.2.5), - на

$$2J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right) - 2J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s - \theta\right),$$

а в третьем, пользуясь формулой (1.2.9), - на

$$2J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right).$$

Таким образом, левая часть (1.2.11) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \int_{s-\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s - \theta + \sigma - \tau}{2}, \frac{s - \theta - \sigma - \tau}{2}, s - \theta\right) d\sigma + \\ & + \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta-\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s + \sigma + \tau - \theta}{2}, \frac{s - \sigma - \tau - \theta}{2}, s\right) d\sigma + \\ & + \int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta-\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \left[ J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right) - \right. \\ & \quad - J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s - \theta\right) - \\ & \quad \left. - J\left(\frac{s + \sigma - \theta + \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right) \right] d\sigma + \\ & + \int_{s+\theta-\tau}^{s-\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) \left[ J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right) - \right. \\ & \quad \left. - J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s - \theta\right) \right] d\sigma + \\ & + \int_{s-\theta+\tau}^{s+\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right) d\sigma, \end{aligned}$$

и в полученном выражении интегралы с ядром

$$J\left(\frac{(s - \theta + \sigma - \tau)}{2}, \frac{(s - \theta - \sigma - \tau)}{2}, s - \theta\right)$$

и интегралы с ядром  $J((s + \sigma - \theta + \tau)/2, (s - \sigma - \theta - \tau)/2, s)$  уничтожаются, а интегралы с ядром  $J((s + \sigma - \theta - \tau)/2, (s - \sigma - \theta - \tau)/2, s)$  складываются в один интеграл по интервалу  $(s - \theta - \tau, s + \theta + \tau)$ , что дает

$$\int_{s-\theta-\tau}^{s+\theta+\tau} \sqrt{\frac{k(\sigma)}{k(s)}} V(\sigma) J\left(\frac{s + \sigma - \theta - \tau}{2}, \frac{s - \sigma - \theta - \tau}{2}, s\right) d\sigma,$$

т.е. правую часть (1.2.11). Таким образом, равенство (1.2.11) доказано. Равенство (1.2.12) обосновывается точно так же: заменой порядка интегрирования в двойном интеграле, что дает сумму трех интегралов, заменой в каждом из них внутреннего интеграла по формулам (1.2.6), (1.2.8) и (1.2.10) на соответствующие выражения с  $\tilde{J}$  и приведением подобных в полученном выражении.

Поскольку равенства (1.2.11) и (1.2.12) полностью обосновывают равенство  $V^{\theta,\tau}(s) = V^{\theta+\tau}(s)$ , принцип суперпозиции для волнового оператора по первой компоненте доказан. Доказательство теоремы мы завершаем напомним о том, что доказательство для второй компоненты ( $W$ ) совершенно аналогично, и использует те же самые формулы (1.2.5)-(1.2.10), только с рокированными ( $\xi \leftrightarrow \eta$  и  $\alpha \leftrightarrow \beta$ ) аргументами.

В заключение этого параграфа отметим два существенных момента. Во-первых, полученные нами формулы свертки для волнового оператора оказываются намного глубже группового свойства, поскольку, как станет видно далее, позволяют вычислять суперпозиции переноса данных с одной линии (совсем необязательно являющейся прямой  $t = \text{const}$ ) на другую, а потому на третью.

Во-вторых, для уравнения  $u_{tt} = u_{xx} - a^2u$  решению  $u(t, x) = \sin(\omega t - \sqrt{\omega^2 - a^2}x)$ , которое обсуждалось в самом начале введения в диссертацию, соответствуют при  $t = \theta$  правая и левая волны

$$V^\theta(x) = -\frac{a}{2\omega} \cos(\omega\theta - \sqrt{\omega^2 - a^2}x) + \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - a^2}}{2\omega} \sin(\omega\theta - \sqrt{\omega^2 - a^2}x),$$

$$W^\theta(x) = \frac{a}{2\omega} \cos(\omega\theta - \sqrt{\omega^2 - a^2}x) + \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - a^2}}{2\omega} \sin(\omega\theta - \sqrt{\omega^2 - a^2}x),$$

так что "видимое" движение синусоидальной формы со скоростью больше единичной оказывается на самом деле результатом встречного движения с рассеиванием двух синусоидальных волн – правой и левой. Собственно, именно рассеивание ответственно за внешний эффект превышения фазовой скорости над характеристической.

## § 1.3 Решение краевых задач методом распространяющихся волн

### 1.3.1 Задача на отрезке. Продолженное уравнение. Отражение волн от концов.

В задачах для волнового уравнения не на оси, а на отрезке, на концах которого заданы те или иные граничные условия, важно уметь описывать отражение волн от этих концов. В случае однородной среды отражения волн описываются в терминах продолжения начальных условий за пределы отрезка из тех или иных соображений симметрии. В случае же неоднородной среды продолжать приходится не только начальные условия, но и само уравнение (то есть его коэффициенты). Ниже описываются связанные с этим свойства коэффициентов переноса.

**Лемма 1.3.1** Пусть  $k(-s) = k(s)$  ( $\phi(-s) = -\phi(s)$ ). Тогда

$$J(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -J(\alpha, \beta, \gamma), \quad \tilde{J}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1.3.1)$$

**Доказательство.** Подставим в (1.1.3) вместо  $\alpha, \beta, \gamma$  противоположные величины и заменим переменные интегрирования на противоположные. Получим

$$J(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(-\sigma + \beta) \tilde{J}(-\sigma, -\beta, -\gamma) d\sigma,$$

$$\tilde{J}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \phi(-\alpha) - \int_{\beta}^0 \phi(-\alpha + \tau) J(-\alpha, -\tau, -\gamma) d\tau,$$

что, в силу  $\phi(-s) = -\phi(s)$ , дает нам систему уравнений Вольтерра для  $J(-\alpha, -\beta, -\gamma)$  и  $\tilde{J}(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ :

$$J(-\alpha, -\beta, -\gamma) = - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta) \tilde{J}(-\sigma, -\beta, -\gamma) d\sigma,$$

$$\tilde{J}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -\phi(\alpha) + \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau) J(-\alpha, -\tau, -\gamma) d\tau,$$

отличающуюся от (1.1.3) только знаком при внеинтегральном члене. Из единственности решения системы уравнений Вольтерра и следует (1.3.1). Лемма доказана.

**Следствие 1.** В условиях леммы 1.3.1

$$\begin{aligned}
 u(t, -s) = & \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}} V(-s-t) + \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}} W(-s+t) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} V(-y) J\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(-y) J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(-y) \tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} V(-y) \tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy.
 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Действительно, формула (1.3.2) получается из (1.1.1) заменой  $s$  на  $-s$  и заменой переменной интегрирования  $y$  на  $-y$  с учетом четности функции  $k(s)$ .

**Следствие 2.** Если начальные данные "нечетные" (то есть  $V(-s) = -W(s)$ ,  $W(-s) = -V(s)$ ), то решение  $u(t, s)$  будет нечетной функцией:  $u(t, -s) = -u(t, s)$ . В частности,  $u(t, 0) \equiv 0$ .

**Следствие 3.** Если начальные данные "четные" (т.е.  $V(-s) = W(s)$ ,  $W(-s) = V(s)$ ), то решение  $u(t, s)$  будет четной функцией:  $u(t, -s) = u(t, s)$ . В частности,  $u_s(t, 0) \equiv 0$ .

Эти два следствия получаются заменой в формуле (1.3.1)  $V(-s)$  и  $W(-s)$  на  $\pm W(s)$  и  $\pm V(s)$  и сравнением полученного результата с (1.1.1).

**Следствие 4.** Если уравнение (1.0.2) задано на отрезке  $[0, l]$  с граничным условием  $u(t, 0) \equiv 0$  (закрепленный конец), то процесс отражения от этого закрепленного конца происходит так, как будто уравнение продолжено на отрезок  $[-l, 0]$  четным образом ( $k(-s) = k(s)$ ), начальные данные - нечетным образом и точка  $s = 0$  оказывается внутренней точкой отрезка  $[-l, l]$ , поведение которой описывается формулой (1.1.1). При этом необходимым и достаточным условием гладкости (классической) коэффициентов для продолженного уравнения является гладкость коэффициентов исходного уравнения и выполнение условия  $k'(0) = 0$ . Для классической гладкости решения при этом требуется дополнительно выполнение условий  $u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = 0$ .

**Следствие 5.** Если уравнение (1.0.2) задано на отрезке  $[0, l]$  с граничным условием  $u_s(t, 0) \equiv 0$  (свободный конец), то процесс отражения от этого конца происходит так, как будто и уравнение, и начальные данные продолжены на отрезок  $[-l, 0]$  четным образом и точка  $s = 0$  оказывается внутренней точкой отрезка  $[-l, l]$ , поведение которой описывается формулой (1.1.1). И здесь необходимым и достаточным условием классической гладкости коэффициентов для продолженного уравнения является гладкость коэффициентов исходного уравнения и выполнение условия  $k'(0) = 0$ . Для классической гладкости решения при этом требуется дополнительно выполнение условий  $u'_0(0) = u'_1(0) = 0$ .

В случае, когда  $k'(0) \neq 0$ , функция  $\phi(s) = k'(s)/2k(s)$  оказывается в точке  $s = 0$  разрывной, этот разрыв наследует и функция  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$  (при  $\alpha = 0$ ), а это приводит к тому, что решение оказывается негладким (обобщенным). Хотя для самих формул безразлично, в каком смысле, классическом или обобщенном, мы понимаем решения, мы, обсуждая в этой работе только классические решения, вынуждены выделять условие  $k'(0) = 0$  как существенное.

Совершенно аналогично лемме 1.3.1 доказывается

**Лемма 1.3.2** Пусть  $k(2l - s) = k(s)$  ( $\phi(2l - s) = -\phi(s)$ ). Тогда

$$J(2l - \alpha, -\beta, 2l - \gamma) = -J(\alpha, \beta, \gamma), \quad \tilde{J}(2l - \alpha, -\beta, 2l - \gamma) = -\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1.3.3)$$

Таким образом, для учета явления отражения волн от правого конца надо продолжить уравнение "четным относительно  $l$ " образом ( $k(l + s) = k(l - s)$ ) (с предположением  $k'(l) = 0$ , необходимым для классической гладкости), а начальные данные – " $l$ -нечетным" образом для закрепленного конца и " $l$ -четным" образом для свободного конца, сведя все опять же к формуле (1.1.1).

И, наконец, приведем еще один результат того же рода.

**Лемма 1.3.3** Пусть  $k(s + 2l) = k(s)$  ( $\phi(s + 2l) = \phi(s)$ ). Тогда

$$J(\alpha + 2l, \beta, \gamma + 2l) = J(\alpha, \beta, \gamma), \quad \tilde{J}(\alpha + 2l, \beta, \gamma + 2l) = \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1.3.4)$$

Из этой леммы следует периодичность по пространственной переменной решения  $u(t, s)$  при периодическом продолжении коэффициентов уравнения и начальных данных.

В дальнейшем мы всегда, рассматривая задачу на  $[0, l]$ , будем предполагать, что коэффициент  $k(s)$  уравнения (1.0.2) продолжен на всю ось четным  $2l$ -периодическим образом и уравнение (1.0.2) с так продолженным коэффициентом будем называть *продолженным уравнением*. Соответственно

нечетным  $2l$ -периодическим образом будет продолжаться функция  $\phi(s)$ , и коэффициенты переноса, определяемые ею из уравнений (1.1.3).

### 1.3.2 Формулы решения смешанной задачи

Перейдем теперь к иллюстрации того, как с помощью построения волнового оператора решаются краевые задачи.

Начнем со смешанной задачи для уравнения (1.0.2) на отрезке  $[0, l]$  изменения пространственной переменной, когда в точке  $s = 0$  задано неоднородное граничное условие:  $u(t, 0) = \nu(t)$ . Обычно это условие интерпретируют как *граничное управление* струной (или другим объектом, описываемым уравнением (1.0.2)) за левый конец. При этом задают некоторые начальные условия  $u(0, s) = u_0(s)$ ,  $u_t(0, s) = u_1(s)$  (для  $s \in [0, l]$ ) и какие-либо условия на правом конце, например,  $u(t, l) \equiv 0$ . Для классической разрешимости, естественно, необходимо выполнение условия согласования данных  $\nu(0) = u_0(0)$ ,  $\dot{\nu}(0) = u_1(0)$ ,  $\ddot{\nu} = u_0''(0)$ .

Сначала, для простоты, предположим, что  $u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = 0$ . Поскольку наше уравнение (1.0.2) линейное, решение такой задачи равно сумме решений двух задач. Одна – с нулевой  $\nu(t)$  и ненулевыми начальными данными, которая по существу совпадает с задачей о колебаниях закрепленной струны, решение которой обсуждалось в предыдущем пункте: оно описывается формулой (1.1.1) с  $V(s)$ ,  $W(s)$ , определяемыми по начальным данным условиями (1.1.2), и продолженными на всю ось нечетным (относительно нуля) и  $2l$ -периодическим образом и с коэффициентами переноса, определяемыми формулами (1.1.3) (для продолженного уравнения). Вторая же задача – с нулевыми начальными условиями и ненулевой  $\nu(t)$ . Ее решение мы сейчас и приведем.

**Теорема 1.3.1** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\nu(t)$  задана при  $0 \leq t \leq l$  и  $\nu(0) = \nu'(0) = \nu''(0) = 0$ . Тогда классическое решение смешанной задачи для уравнения (1.0.2) на  $[0, l]$  с условиями  $u(0, s) = u_t(0, s) \equiv 0$ ,  $u(t, 0) = \nu(t)$ ,  $u(t, l) \equiv 0$  определяется при  $0 \leq t \leq l$  формулой

$$u(t, s) = \sqrt{\frac{k(0)}{k(s)}} \left\{ \nu(t-s) + \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) + J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) \right] d\tau \right\}, \quad (1.3.5)$$

в которой  $\nu(t)$  считается продолженной на полюсь  $t \leq 0$  тождественным нулем.

**Доказательство.** Чтобы показать, что определяемая формулой (1.3.5) функция является решением уравнения (1.0.2), достаточно убедиться, что функция  $z(t, s) = \sqrt{\frac{k(s)}{k(0)}}u(t, s)$  является решением уравнения (1.0.4), а для этого достаточно проверить, что функции

$$z^+(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{-\xi} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) - \tilde{J}\left(\frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) \right] d\tau$$

и

$$z^-(\xi, \eta) = \nu(-\xi) + \frac{1}{2} \int_0^{-\xi} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) - \tilde{J}\left(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) \right] d\tau$$

удовлетворяют системе (1.1.4), что делается прямым дифференцированием с использованием правил дифференцирования коэффициентов переноса (1.1.6) и следующих из (1.1.3) равенств  $J(\alpha, \beta, \alpha) = 0$ ,  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \alpha) = \phi(\alpha)$ . Таким образом, функция (1.3.5) – решение уравнения (1.1.1).

Остается заметить, что удовлетворение нулевым начальным условиями на  $[0, l]$  при  $t = 0$  очевидно:  $\nu(\cdot) \equiv 0$  как во всех интегралах, так и во внеинтегральном члене, поскольку аргумент принимает отрицательные значения. По тем же причинам для всех  $0 \leq t \leq l$  выполняется  $u(t, l) \equiv 0$ . Ну, а то, что  $u(t, 0) \equiv \nu(t)$  при всех  $0 \leq t \leq l$  следует из того, что при  $s = 0$  интеграл в правой части (1.3.5) обращается в нуль, т.к. в силу (1.3.1)  $J(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0) + J(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau-t}{2}, 0) = \tilde{J}(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0) + \tilde{J}(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau-t}{2}, 0) = 0$ . Теорема доказана.

Формула (1.3.5) дает решение смешанной задачи только для  $t < l$ . Дело в том, что при  $t \geq l$  нам придется учитывать дополнительный эффект отражения волн от закрепленного конца  $s = l$ , и поэтому формула решения несколько усложняется.

**Теорема 1.3.2** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\nu(t)$  задана при  $t \geq 0$  и  $\nu(0) = \nu'(0) = \nu''(0) = 0$ . Тогда классическое решение задачи для уравнения (1.0.2) на  $[0, l]$  с условиями  $u(0, s) = u_t(0, s) \equiv 0$ ,  $u(t, 0) = \nu(t)$ ,  $u(t, l) \equiv 0$  определяется при  $t \geq 0$  формулой

$$u(t, s) = \sqrt{\frac{k(0)}{k(s)}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \nu(t - s - 2lm) - \sum_{m=1}^{\infty} \nu(t + s - 2lm) \right\}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{t-s-2lm} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s+2lm-t+\tau}{2}, \frac{s+2lm-t+\tau}{2}, s+2lm\right) - \right. \\
& \quad - \tilde{J}\left(\frac{s+2lm-t+\tau}{2}, \frac{s+2lm-t+\tau}{2}, s+2lm\right) + \\
& \quad + J\left(\frac{s+2lm+t-\tau}{2}, \frac{s+2lm+t-\tau}{2}, s+2lm\right) - \\
& \quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{s+2lm+t-\tau}{2}, \frac{s+2lm+t-\tau}{2}, s+2lm\right) \right] d\tau + \tag{1.3.6} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{t+s-2lm} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s-2lm-t+\tau}{2}, \frac{s-2lm-t+\tau}{2}, s-2lm\right) - \right. \\
& \quad - \tilde{J}\left(\frac{s-2lm-t+\tau}{2}, \frac{s-2lm-t+\tau}{2}, s-2lm\right) + \\
& \quad + J\left(\frac{s-2lm+t-\tau}{2}, \frac{s-2lm+t-\tau}{2}, s-2lm\right) - \\
& \quad \left. - \tilde{J}\left(\frac{s-2lm+t-\tau}{2}, \frac{s-2lm+t-\tau}{2}, s-2lm\right) \right] d\tau \Big\},
\end{aligned}$$

в которой  $\nu(t)$  считается продолженной на полюсь  $t \leq 0$  тождественным нулем.

Отметим, что хотя суммы в формуле (1.3.6) и бесконечные, на самом деле для любого фиксированного  $t$  все слагаемые с  $m \geq (t+s)/2l$  нулевые (при соответствующих значениях аргумента функция  $\nu(\cdot)$  тождественно равна нулю), так что вопрос о сходимости рядов здесь не стоит.

**Доказательство.** Поскольку наше решение является суммой слагаемых вида (1.3.5), каждое из этих слагаемых, а значит – и их сумма удовлетворяют и уравнению, и нулевому начальному условию. Поэтому необходимо только проверить, что сумма при  $s = l$  дает нуль, а при  $s = 0$  – функцию  $\nu(t)$

При  $s = l$  все слагаемые в суммах сокращаются: что  $m$ -ое слагаемое в первой сумме уничтожает  $m + 1$ -е слагаемое во второй сумме – очевидно, а что  $m$ -ое слагаемое в третьей сумме уничтожает  $m + 1$ -е слагаемое в четвертой сумме, следует из того, что

$$\begin{aligned}
& J\left(\frac{l+2lm \pm (t-\tau)}{2}, \frac{l+2lm \pm (t-\tau)}{2}, l+2lm\right) + \\
& + J\left(\frac{l-2l(m+1) \mp (t-\tau)}{2}, \frac{l-2l(m+1) \mp (t-\tau)}{2}, l-2l(m+1)\right) = \\
& = \tilde{J}\left(\frac{l+2lm \pm (t-\tau)}{2}, \frac{l+2lm \pm (t-\tau)}{2}, l+2lm\right) +
\end{aligned}$$

$$+\tilde{J}\left(\frac{l-2l(m+1)\mp(t-\tau)}{2}, \frac{l-2l(m+1)\mp(t-\tau)}{2}, l-2l(m+1)\right) = 0$$

в силу (1.3.4). При  $s = 0$  тоже происходит уничтожение, но при этом  $m$ -ые слагаемые во второй и четвертой суммах уничтожают  $m$ -ые слагаемые в первой и третьей суммах соответственно, так что остаются только нулевые слагаемые из первой и третьей сумм

$$\begin{aligned} \nu(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{-t+\tau}{2}, \frac{-t+\tau}{2}, 0\right) - \tilde{J}\left(\frac{-t+\tau}{2}, \frac{-t+\tau}{2}, 0\right) + \right. \\ \left. + J\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) - \tilde{J}\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) \right] d\tau, \end{aligned}$$

дающие в точности  $\nu(t)$  в силу нечетности функций  $J, \tilde{J}$ . Таким образом, теорема доказана.

Совершенно аналогично теоремам 1.3.1-1.3.2 доказывается

**Теорема 1.3.3** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\mu(t)$  задана при  $t \geq 0$  и  $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$ . Тогда классическое решение задачи для уравнения (1.0.2) на  $[0, l]$  с условиями  $u(0, s) = u_t(0, s) \equiv 0$ ,  $u(t, 0) \equiv 0$ ,  $u(t, l) = \mu(t)$  определяется при  $0 \leq t \leq l$  формулой

$$\begin{aligned} u(t, s) = \sqrt{\frac{k(l)}{k(s)}} \left\{ \mu(t+s-l) - \frac{1}{2} \int_0^{t+s-l} \mu(\tau) \times \right. \\ \left[ J\left(\frac{s+l-t+\tau}{2}, \frac{s-l-t+\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+l-t+\tau}{2}, \frac{s-l-t+\tau}{2}, s\right) + \right. \\ \left. + J\left(\frac{s+l+t-\tau}{2}, \frac{s-l+t-\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+l+t-\tau}{2}, \frac{s-l+t-\tau}{2}, s\right) \right] d\tau \Big\}, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

а при  $t \geq l$  - формулой

$$\begin{aligned} u(t, s) = \sqrt{\frac{k(l)}{k(s)}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \mu(t+s-l-2lm) - \sum_{m=0}^{\infty} \mu(t-s-l-2lm) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{t+s-l-2lm} \mu(\tau) \left[ J\left(\frac{s+l-2lm-t+\tau}{2}, \frac{s-l-2lm-t+\tau}{2}, s-2lm\right) - \right. \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{s+l-2lm-t+\tau}{2}, \frac{s-l-2lm-t+\tau}{2}, s-2lm\right) + \right. \\ \left. + J\left(\frac{s+l-2lm+t-\tau}{2}, \frac{s-l-2lm+t-\tau}{2}, s-2lm\right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{J}\left(\frac{s+l-2lm+t-\tau}{2}, \frac{s-l-2lm+t-\tau}{2}, s-2lm\right) \Big] d\tau - \quad (1.3.8) \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{t-s-l-2lm} \mu(\tau) \left[ J\left(\frac{s-l+2lm-t+\tau}{2}, \frac{s+l+2lm-t+\tau}{2}, s+2lm\right) - \right. \\
 & \quad -\tilde{J}\left(\frac{s-l+2lm-t+\tau}{2}, \frac{s+l+2lm-t+\tau}{2}, s+2lm\right) + \\
 & \quad + J\left(\frac{s-l+2lm+t-\tau}{2}, \frac{s+l+2lm+t-\tau}{2}, s+2lm\right) - \\
 & \quad \left. -\tilde{J}\left(\frac{s-l+2lm+t-\tau}{2}, \frac{s+l+2lm+t-\tau}{2}, s+2lm\right) \right] d\tau \Big\},
 \end{aligned}$$

в которых  $\mu(t)$  считается продолженной на полуось  $t \leq 0$  тождественным нулем.

Очевидно, что собирая вместе результаты теорем 1.3.1-1.3.3 и формулу (1.1.1), можно получить и формулу решения для струны, управляемой за два конца с произвольным начальным условием:

**Теорема 1.3.4** Для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\nu(t)$  и  $\mu(t)$ , заданных при  $t \geq 0$  и для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций  $u_0(s)$ ,  $u_1(s)$ , заданных на  $[0, l]$  таких, что выполнены условия согласования

$$\begin{aligned}
 \nu(0) &= u_0(0), \quad \dot{\nu}(0) = v_0(0), \quad \ddot{k}(0)\nu(0) = (ku'_0)'(0) \\
 \mu(0) &= u_0(l), \quad \dot{\mu}(0) = v_0(l), \quad \ddot{k}(0)\mu(0) = (ku'_0)'(l)
 \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

классическое решение задачи для уравнения (1.0.2) на  $[0, l]$  с начальными условиями  $u(0, s) = u_0(s)$ ,  $u_t(0, s) = u_1(s)$ ,  $u(t, 0) = \nu(t)$ ,  $u(t, l) = \mu(t)$  определяется при  $0 \leq t \leq l$  формулой, получаемой сложением правых частей формул (1.1.1), (1.3.5), (1.3.7), а при  $t \geq l$  - сложением правых частей формул (1.1.1), (1.3.6), (1.3.8).

Доказательство этой теоремы для случая, когда все фигурирующие в (1.3.9) величины равны нулю, тривиально.

В случае же, когда эти величины не равны нулю, возможны два варианта: использование корректора (вычитание из решения некоторой простой функции), имеющего вид

$$u(t, s) = \bar{u}(t, s) + \frac{(u_0(0) + tu_1(0)) \int_s^l \frac{d\sigma}{k(\sigma)} + (u_0(l) + tu_1(l)) \int_0^s \frac{d\sigma}{k(\sigma)}}{\int_0^l \frac{d\sigma}{k(\sigma)}},$$

который редуцирует задачу к случаю нулевых значений для нулевых и первых производных из (1.3.9). Однако здесь более предпочтительным оказывается другой путь: пользуясь тем, что каждая из формул (1.1.1) и (1.3.5)-(1.3.8) определяют функцию, являющуюся классическим решением в каждом квадрате, на который рассекают плоскость прямые  $s - t = ml$ ,  $s + t = ml$  ( $m$  – целое), посчитать величины скачков, которые имеют все эти функции и их производные, и убедиться, что, хотя каждое слагаемое оказывается, вообще говоря, разрывным, в сумме эти скачки друг друга уничтожают, так что сумма является непрерывным и гладким решением. Хотя эти вычисления можно проделать и для решений, представленных через распространяющиеся волны, удобнее их осуществлять тогда, когда решения представлены через функцию Римана. Поэтому мы отложим эти вычисления до следующего параграфа, в котором будет описана связь функции Римана с коэффициентами переноса и формулы решений будут переписаны в терминах функции Римана.

### 1.3.3 Вывод формул решения смешанной задачи с помощью волнового оператора

Для того, чтобы результат, сформулированный в теоремах 1.3.1-1.3.3, не выглядел фокусом, мы покажем, как выводится формула (1.3.5). Она получается путем построения волнового оператора, отвечающего задаче. Данные заданы на прямой  $s = 0$ , поэтому волны, заданные на этой прямой (обозначим их  $V(\tau)$  и  $W(\tau)$ ) будут переноситься из точек  $(\tau, 0)$  в точку  $(t, s)$ . Значит, в аргументы коэффициентов переноса необходимо вместо  $y$  подставить нуль (откуда перенос), вместо  $s$  так и оставить  $s$  (куда перенос), и вместо  $t$  подставить  $t - \tau$  (за какое время перенос). С учетом того, что с прямой  $s = 0$  в точки, где  $s > 0$  прямой (без отражений) перенос возможен лишь для правой волны  $V$ , мы получаем следующие формулы:

$$V^t(s) = \sqrt{\frac{k(0)}{k(s)}} \left\{ V(t-s) + \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \left[ V(\tau) J\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + W(\tau) \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) \right] d\tau \right\},$$

$$W^t(s) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k(0)}{k(s)}} \int_0^{t-s} \left[ W(\tau) J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) + \right. \\ \left. + V(\tau) \tilde{J}\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) \right] d\tau.$$

Промежуток интегрирования выбран так, чтобы на прямой  $s = t$  получить нуль (что гарантируется для нашей задачи нулевыми начальными условиями).

Стандартным уже образом проверяется, что пара функций

$$z^- = \sqrt{k(s)}V^t(s), \quad z^+ = \sqrt{k(s)}W^t(s),$$

отнесенных к переменным  $\xi = s - t$ ,  $\eta = s + t$  удовлетворяет системе (1.1.4) для любых  $V(\tau)$ ,  $W(\tau)$ , что тривиальность решения при  $t \leq s$  обеспечивается тривиальностью  $V$ ,  $W$  при отрицательных значениях аргумента, и остается только подставить полученную формулу в условие  $u(t, 0) = \nu(t)$ , что дает условие

$$\begin{aligned} \nu(t) = V(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ V(\tau) J\left(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau-t}{2}, 0\right) + W(\tau) \tilde{J}\left(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau-t}{2}, 0\right) - \right. \\ \left. - W(\tau) J\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) - V(\tau) \tilde{J}\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) \right] d\tau, \end{aligned}$$

которое, в силу нечетности  $J$  и  $\tilde{J}$  (формулы (1.3.1)) приводится к виду

$$\nu(t) = V(t) + \frac{1}{2} \int_0^t [W(\tau) + V(\tau)] \left[ J\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) \right] d\tau.$$

Если обозначить сумму  $[W(\tau) + V(\tau)]$  через  $\omega(\tau)$ , то получаем

$$V(t) = \nu(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \omega(\tau) \left[ J\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) \right] d\tau,$$

$$W(t) = \omega(t) - \nu(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \omega(\tau) \left[ J\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}, 0\right) \right] d\tau.$$

Хотя функция  $\omega(\tau)$  и не определена, оказывается, что именно от нее решение  $u(t, s) = V^t(s) + W^t(s)$  не зависит, так как соответствующие слагаемые взаимно уничтожаются. Поэтому можно взять  $\omega = 0$ , что дает  $V(t) = -W(t) = \nu(t)$ , откуда и получается формула (1.3.5).

Покажем независимость решения от выбора  $\omega$ . Подставляя содержащие  $\omega$  составляющие  $V$  и  $W$  в формулы для  $V^t$  и  $W^t$ , и обозначая сумму полученных функций через  $u^\omega(t, s)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \sqrt{k(s)/k(0)}u^\omega(t, s) = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \omega(\tau) \left[ J\left(\frac{t-s-\tau}{2}, \frac{t-s-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{t-s-\tau}{2}, \frac{t-s-\tau}{2}, 0\right) \right] d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \omega(\tau) \left[ \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) \right] d\tau + \\
& + \frac{1}{4} \int_0^{t-s} \int_0^y \omega(\tau) \left[ J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) \right] \times \\
& \times \left[ J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t+y}{2}, s\right) + J\left(\frac{s+t-y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) - \right. \\
& \left. - \tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t+y}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) \right] d\tau dy.
\end{aligned}$$

Замена порядка интегрирования в двойном интеграле и объединение интегралов в один дают

$$\begin{aligned}
& \sqrt{k(s)/k(0)} u^\omega(t, s) = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \omega(\tau) \left\{ J\left(\frac{t-s-\tau}{2}, \frac{t-s-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{t-s-\tau}{2}, \frac{t-s-\tau}{2}, 0\right) + \right. \\
& + \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) + \\
& + \frac{1}{2} \int_\tau^{t-s} \left[ J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) + \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) \right] \times \\
& \times \left[ J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t+y}{2}, s\right) + J\left(\frac{s+t-y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) - \right. \\
& \left. - \tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t+y}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) \right] dy \left. \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Оказывается, что множитель в фигурных скобках – это тождественный нуль, что доказывается следующей леммой о свертке, аналогичной лемме (1.2.2).

**Лемма 1.3.4** Пусть  $J, \tilde{J}$  удовлетворяют (1.1.3). Тогда

$$\begin{aligned}
& \int_\tau^{-\xi} \left[ J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\
& \left. - \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\
& = -2J\left(\frac{-\xi-\tau}{2}, \frac{-\xi-\tau}{2}, 0\right), \tag{1.3.10}
\end{aligned}$$

$$\int_\tau^{-\xi} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right) J\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right.$$

$$-J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)\tilde{J}\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy = 0, \quad (1.3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{-\xi} \left[ J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)J\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)\tilde{J}\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = 2J\left(\frac{\eta-\tau}{2}, \frac{\eta-\tau}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right), \quad (1.3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{-\xi} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. -J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)\tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = -2\tilde{J}\left(\frac{\xi+\tau}{2}, \frac{\xi+\tau}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{-\xi-\tau}{2}, \frac{-\xi-\tau}{2}, 0\right). \quad (1.3.13) \end{aligned}$$

**Доказательство** этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 1.2.2, поэтому мы лишь наметим его схему. Сначала доказываются две пары равенств

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{-\xi} \left[ J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)J\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. -\tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)\tilde{J}\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = -2J\left(\frac{\xi+\tau}{2}, \frac{\xi+\tau}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2J\left(\frac{-\xi-\tau}{2}, \frac{-\xi-\tau}{2}, 0\right), \quad (1.3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{-\xi} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)J\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. -J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)\tilde{J}\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \\ = 2\tilde{J}\left(\frac{\eta-\tau}{2}, \frac{\eta-\tau}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{\eta-\tau}{2}, \frac{\eta-\tau}{2}, 0\right) \quad (1.3.15) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{-\xi} \left[ J\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)J\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) - \right. \\ \left. -\tilde{J}\left(\frac{y-\tau}{2}, \frac{y-\tau}{2}, 0\right)\tilde{J}\left(\frac{\eta-y}{2}, \frac{\eta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy = \end{aligned}$$

$$= 2J\left(\frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - 2J\left(\frac{\eta - \tau}{2}, \frac{\eta - \tau}{2}, 0\right), \quad (1.3.16)$$

$$\int_{\eta}^{-\xi} \left[ \tilde{J}\left(\frac{y - \tau}{2}, \frac{y - \tau}{2}, 0\right) J\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - J\left(\frac{y - \tau}{2}, \frac{y - \tau}{2}, 0\right) \tilde{J}\left(\frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi + y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy = \\ = -2\tilde{J}\left(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - 2\tilde{J}\left(\frac{-\xi - \tau}{2}, \frac{-\xi - \tau}{2}, 0\right). \quad (1.3.17)$$

Выполнение этих равенств при  $\xi + \eta = 0$  очевидно, а их выполнение при остальных  $(\xi, \eta)$  следует из того, что разности между правыми и левыми частями каждой пары удовлетворяют однородной системе Вольтерра, аналогичной той, что приведена в доказательстве леммы 1.2.2: дифференцирование одного равенства по  $\xi$ , а другого по  $\eta$  дает парное ему равенство с коэффициентом  $1/2 \cdot \phi((\xi + \eta)/2)$ .

Из справедливости (1.3.14) и (1.3.17) при  $\eta = \tau$  получаем справедливость при  $\eta = \tau$  равенств (1.3.10) и (1.3.13), справедливость (1.3.11) и (1.3.12) при  $\xi = -\tau$  очевидна, и мы можем опять увидеть, что разности правой и левой части в каждой паре (1.3.10)-(1.3.11) и (1.3.12)-(1.3.13) удовлетворяют однородной системе Вольтерра: дифференцирование одного из равенств пары по соответствующей переменной ( $\xi$  или  $\eta$ ) дает другое с коэффициентом  $1/2 \cdot \phi((\xi + \eta)/2)$ . Таким образом, равенства (1.3.10)-(1.3.13) действительно имеют место.

Завершая вывод формулы (1.3.5), отметим, что подстановку  $V(t) = -W(t) = \nu(t)$ , вообще говоря, нельзя считать формулой для определения левой и правой волн в нуле – это лишь упрощающий прием, корректность которого обосновывается тривиальностью  $u^\omega(t, s)$ . "Настоящие" же левая и правая волны должны удовлетворять равенствам (1.2.3), из которых следует, что для получения самих волн следует взять  $\omega(t) = \nu(t)$ .

### 1.3.4 Задача Гурса

Рассмотрим теперь задачу с условиями на характеристиках (хотя в некоторых монографиях – см., напр., [178], – задачу с условиями на характеристиках называют задачей Дарбу, а под задачей Гурса понимают задачу вычисления решения по его значениям на двух кривых, из которых по крайней мере одна не является характеристической). Для уравнения (1.0.2) это будут прямые  $s - t = A$  и  $s + t = B$ .

**Теорема 1.3.5** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f(s)$  задана при  $s \in \mathbb{R}$  и  $f\left(\frac{A+B}{2}\right) = 0$ . Тогда классическое решение



задачи для уравнения (1.0.2) с условиями  $u(s-A, s) = f(s)$ ,  $u(B-s, s) \equiv 0$ , определяется формулой

$$u(t, s) = \sqrt{\frac{k(\frac{s+t+A}{2})}{k(s)}} W\left(\frac{s+t+A}{2}\right) + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) \times \\ \times \left\{ \tilde{J}\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right\} dy, \quad (1.3.18)$$

где

$$W(s) = f(s) - \int_{\frac{A+B}{2}}^s \frac{k(y)}{k(s)} f(y) \phi(y) dy. \quad (1.3.19)$$

**Доказательство.** То, что функция (1.3.18) является решением уравнения (1.0.2) обосновывается, как и в предыдущих теоремах, проверкой того, что составляющие (1.3.18) функции

$$z^+(\xi, \eta) = \sqrt{k\left(\frac{\eta+A}{2}\right)} W\left(\frac{\eta+A}{2}\right) - \\ - \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{\eta+A}{2}} \sqrt{k(y)} W(y) J\left(\frac{\eta+A}{2}, \frac{\eta+A}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy, \\ z^-(\xi, \eta) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{\eta+A}{2}} \sqrt{k(y)} W(y) \tilde{J}\left(\frac{\xi-A}{2} + y, \frac{\xi-A}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy$$

удовлетворяют (1.1.4). Отметим, что при этом вид функции  $W$  не играет значения.

Выполнение условия  $u(B-s, s) \equiv 0$  очевидно: при  $t+s=B$  у всех интегралов нижний предел интегрирования совпадает с верхним, а внеинтегральный член аннулируется в силу  $W\left(\frac{A+B}{2}\right) = 0$ , что следует из (1.3.19) и предположения теоремы  $f\left(\frac{A+B}{2}\right) = 0$ .

Условие же  $u(s-A, s) = f(s)$  при подстановке в него функции (1.3.18) превращается в

$$W(s) + \int_{\frac{A+B}{2}}^s \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) \phi(y) dy = f(s),$$

т.е. в интегральное уравнение Вольтерра с вырожденным ядром относительно функции  $W(s)$ , решением которого и является (1.3.19). Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается

**Теорема 1.3.6** Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $g(s)$  задана при  $s \in \mathbb{R}$  и  $g(\frac{A+B}{2}) = 0$ . Тогда классическое решение задачи для уравнения (1.0.2) с условиями  $u(s-A, s) \equiv 0$ ,  $u(B-s, s) = g(s)$ , определяется формулой

$$u(t, s) = \sqrt{\frac{k(\frac{s-t+B}{2})}{k(s)}} V\left(\frac{s-t+B}{2}\right) + \int_{\frac{s-t+B}{2}}^{\frac{A+B}{2}} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} V(y) \times \\ \times \left\{ J\left(\frac{s-t+B}{2}, \frac{s-t+B}{2} - y, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-B}{2} + y, \frac{s+t-B}{2}, s\right) \right\} dy, \quad (1.3.20)$$

где

$$V(s) = g(s) + \int_s^{\frac{A+B}{2}} \frac{k(y)}{k(s)} g(y) \phi(y) dy. \quad (1.3.21)$$

Практически непосредственным следствием теорем 1.3.5-1.3.6 является

**Теорема 1.3.7** Пусть дважды непрерывно дифференцируемые функции  $f(s)$  и  $g(s)$  заданы при  $s \in \mathbb{R}$  и  $f(\frac{A+B}{2}) = g(\frac{A+B}{2}) = U^*$ .

Тогда классическое решение задачи для уравнения (1.0.2) с условиями  $u(s-A, s) = f(s)$ ,  $u(B-s, s) = g(s)$  определяется формулой, получаемой сложением константы  $u^*$  с формулами (1.3.18), (1.3.20), в которых функции  $V(s)$  и  $W(s)$  определяются формулами (1.3.21) и (1.3.19) соответственно, но в этих формулах  $f(s)$  и  $g(s)$  заменены на  $f(s) - U^*$  и  $g(s) - U^*$ .

Немного другое представление решения, без замен  $f$  и  $g$ , мы дадим в следующем параграфе.

Отметим, что теоремы 1.3.5-1.3.7 и фигурирующие в них формулы не зависят от того, в каком из четырех углов, на которые разрезают плоскость прямые  $s-t=A$ ,  $s+t=B$ , рассматривается задача.

### 1.3.5 Вывод формул решения задачи Гурса с помощью волнового оператора

Построим волновой оператор, отвечающий за передачу волн с прямой  $y - \tau = A$  в произвольную точку  $(t, s)$ . Точку  $(\tau, y)$  на прямой будем задавать ее второй координатой  $y$ , соответственно левая и правая волны в точке  $(y - A, y)$  будут обозначаться  $V(y)$  и  $W(y)$ . Пределами интегрирования являются, с одной стороны, точка пересечения прямых  $y - \tau = A$  и  $y + \tau = B$ , т.е.  $y = (B + A)/2$ , а с другой – крайняя точка на прямой  $y - \tau = A$ , из которой возмущение может достигнуть точки  $(t, s)$ , т.е. точка  $y = (s + t + A)/2$ . Волновой оператор определяется тогда формулами (отправная точка  $y$ , конечная  $s$ , время перехода  $t - y + A$ )

$$\begin{aligned}
 V^t(s) &= \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \left[ V(y) J\left(\frac{s+y-t+y-A}{2}, \frac{s-y-t+y-A}{2}, s\right) + \right. \\
 &\quad \left. + W(y) \tilde{J}\left(\frac{s+y-t+y-A}{2}, \frac{s-y-t+y-A}{2}, s\right) \right] dy, \\
 W^t(s) &= \sqrt{k\left(\frac{s+t+A}{2}\right)/k(s)} W\left(\frac{s+t+A}{2}\right) - \\
 &\quad - \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \left[ W(y) J\left(\frac{s+y+t-y+A}{2}, \frac{s-y+t-y+A}{2}, s\right) + \right. \\
 &\quad \left. + V(y) \tilde{J}\left(\frac{s+y+t-y+A}{2}, \frac{s-y+t-y+A}{2}, s\right) \right] dy,
 \end{aligned}$$

а решение равно  $u(t, s) = V^t(s) + W^t(s)$ . Коэффициенты перед интегралами здесь оказываются единицами, а не половинками, как в формуле (1.1.1). Природу этого обстоятельства (связанного с криволинейным интегрированием 1-го рода) мы объясним чуть позже, в пункте, посвященном переносу данных с произвольной кривой, в данном же случае коэффициенты можно найти просто "подбором". То, что именно приведенные формулы дают функцию, которая является решением уравнения (1.0.2) при любых  $V(s)$ ,  $W(s)$ , проверяется все по той же схеме – разбиением (вполне очевидным) формулы на части, которые после замен  $z(t, s) = \sqrt{k(s)}u(t, s)$ ,  $\xi = s - t$ ,  $\eta = s + t$ ) дают функции, которые удовлетворяют (1.1.4).

Однородное условие Гурса на прямой  $s + t = B$  дает, очевидно, условие  $W(\frac{B+A}{2}) = 0$ , а на прямой  $s - t = A$  - условие

$$f(s) = W(s) + \int_{\frac{B+A}{2}}^s \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \left[ V(y)J(y, 0, s) + W(y)\tilde{J}(y, 0, s) - \right. \\ \left. - W(y)J(s, s - y, s) - V(y)\tilde{J}(s, s - y, s) \right] dy,$$

которое, с учетом того, что при указанных значениях аргумента значения  $J, \tilde{J}$  явно вычисляются из формул (1.1.3), эквивалентно соотношению

$$f(s) = W(s) + \int_{\frac{B+A}{2}}^s \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \left\{ W(y)\phi(y) + V(y) \left[ \int_s^y \phi^2(\sigma)d\sigma - \phi(s) \right] \right\} dy. \quad (1.3.22)$$

Это соотношение является интегральным уравнением Вольтерра с вырожденным ядром относительно функции  $W(s)$ , его решение находится явно и представляется в виде суммы двух слагаемых:  $W(s) = W_f(s) + W_V(s)$ , где

$$W_f(s) = f(s) - \int_{\frac{A+B}{2}}^s \frac{k(y)}{k(s)} \phi(y) f(y) dy, \quad W_V(s) = \int_{\frac{A+B}{2}}^s \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi(s) V(y) dy.$$

Подстановка в формулы для  $V^t$  и  $W^t$  вместо  $W(s)$  составляющей  $W_V(s)$  дает в сумме тождественный нуль:

$$\sqrt{k(s)}u^V(t, s) = \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(y)}\phi\left(\frac{s+t+A}{2}\right)V(y) dy + \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(y)}V(y) \times \\ \times \left[ J\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right] dy + \\ + \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \left[ \tilde{J}\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right] \times \\ \times \int_{\frac{A+B}{2}}^y \sqrt{k(\sigma)}\phi(y)V(\sigma) d\sigma dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \left\{ \phi\left(\frac{s+t+A}{2}\right) \sqrt{k(y)} V(y) + \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \frac{d}{dy} \left[ \int_{\frac{A+B}{2}}^y \sqrt{k(\sigma)} V(\sigma) d\sigma \right] \times \right. \\
 &\times \left[ J\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right] + \\
 &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^y \sqrt{k(\sigma)} V(\sigma) d\sigma \times \\
 &\left. \times \frac{d}{dy} \left[ J\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right] \right\} dy
 \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что, в силу формул (1.1.3),  $J_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) = \phi(\alpha - \beta) \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $\tilde{J}_\beta(\alpha, \beta, \gamma) = -\phi(\alpha - \beta) J(\alpha, \beta, \gamma)$ ), и так как во втором интеграле подынтегральное выражение является полной производной,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{k(s)} u^V(t, s) &= \phi\left(\frac{s+t+A}{2}\right) \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(y)} V(y) dy + \left[ \int_{\frac{A+B}{2}}^y \sqrt{k(\sigma)} V(\sigma) d\sigma \times \right. \\
 &\times \left\{ J\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \tilde{J}\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right\} \right]_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} = \\
 &= \phi\left(\frac{s+t+A}{2}\right) \int_{\frac{B+A}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(y)} V(y) dy + \\
 &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(\sigma)} V(\sigma) d\sigma \left[ J\left(s, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t+A}{2}, 0, s\right) \right] = 0,
 \end{aligned}$$

поскольку  $J\left(s, \frac{s-t-A}{2}, s\right) = 0$ , а  $\tilde{J}\left(\frac{s+t+A}{2}, 0, s\right) = \phi\left(\frac{s+t+A}{2}\right)$ .

Таким образом, выбор  $V(s)$  (и соответствующей ей  $W_V(s)$ ) не влияет на значения  $u(t, s)$ , поэтому можно для простоты взять  $V(s) \equiv 0$ ,

$$W(s) = f(s) - \int_{\frac{A+B}{2}}^s \frac{k(y)}{k(s)} \phi(y) f(y) dy,$$

что дает нам в точности (1.3.18)-(1.3.19). Выбор  $V(s) \equiv 0$ , конечно, не означает, что мы можем брать левую и правую волны произвольно, он просто упрощает вычисления. "Настоящие" же левая и правая волны должны удовлетворять, помимо (1.3.22), также и (1.2.3), что дает для них формулы

$$V(s) = \int_{\frac{A+B}{2}}^s \frac{k(y)}{k(s)} [1 - \phi(s)(s-y)] \phi(y) f(y) dy,$$

$$W(s) = f(s) - \int_{\frac{A+B}{2}}^s \frac{k(y)}{k(s)} [1 - \phi(s)(s-y)] \phi(y) f(y) dy.$$

### 1.3.6 Формулы решения задачи Фридландера

Рассмотрим следующую задачу для уравнения (1.0.2): найти решение, удовлетворяющее при  $t = \theta$  условию  $u(\theta, s) = u_\theta(s)$ , а на характеристике  $s - t = A$  - условию  $u(s - A, s) = f(s)$ . Такая задача была рассмотрена Фридландером в [181] для случая  $\theta = 0$ ,  $f(s) \equiv u_0(A)$ . В [120] эта задача названа задачей Дарбу. Формулы для решения этой задачи нам понадобятся при изучении случая  $T < l$ .

Задача фактически распадается на две: случай  $u_\theta(s) \equiv 0$  и случай  $f(s) \equiv 0$ . Первый случай (в предположении, естественно, что  $f(A + \theta) = 0$ ) решается, по существу, формулами из предыдущего пункта: из соображений симметрии следует, что решение задачи Гурса с условием  $g(s) = -f(s)$  для пары характеристик  $s - t = A$ ,  $s + t = B$ , где  $B = A + 2\theta$  должно удовлетворять соотношению  $u(t, s) = -u(2\theta - t, s)$  и аннулироваться на прямой  $t = \theta$ . Непосредственно проверяется, что решение, описываемое формулой

$$u(t, s) = \sqrt{\frac{k(\frac{s+t+A}{2})}{k(s)}} W\left(\frac{s+t+A}{2}\right) + \int_{A+\theta}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) \times$$

$$\times \left\{ \tilde{J}\left(\frac{s-t-A}{2} + y, \frac{s-t-A}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - y, s\right) \right\} dy -$$

$$(1.3.23)$$

$$- \sqrt{\frac{k(\frac{s-t+A}{2} + \theta)}{k(s)}} W\left(\frac{s-t+A}{2} + \theta\right) + \int_{A+\theta}^{\frac{s-t+A}{2} + \theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} W(y) \times$$

$$\times \left\{ J\left(\frac{s-t+A}{2} + \theta, \frac{s-t+A}{2} + \theta - y, s\right) - \right.$$

$$\left. - \tilde{J}\left(\frac{s+t-A}{2} + y - \theta, \frac{s+t-A}{2} - \theta, s\right) \right\} dy,$$

где  $W$  определяется формулой

$$W(s) = f(s) - \int_{A+\theta}^s \frac{k(y)}{k(s)} f(y) \phi(y) dy$$

(идентичной (1.3.19) при  $B = A + \theta$ ), аннулируется при  $t = \theta$ , так как при этом значении  $t$  интегралы оказываются по одному и тому же промежутку, и подинтегральные функции, так же, как и внеинтегральные члены, уничтожают друг друга.

Для второй же задачи решение дается следующей леммой.

**Лемма 1.3.5** Пусть функция  $u_\theta(s)$  дважды непрерывно дифференцируема и обращается в нуль при  $s = A + \theta$ . Тогда классическое решение уравнения (1.0.2), удовлетворяющее условиям  $u|_{s=t=A} = 0$ ,  $u|_{t=\theta} = u_\theta(s)$ , описывается формулой

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \sqrt{k(s-t+\theta)}u_\theta(s-t+\theta) - \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{s-t+\theta} \sqrt{k(y)}u_\theta(y) \times \\ &\times \left[ J\left(\frac{s-t+\theta+y}{2}, \frac{s-t+\theta-y}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-\theta+y}{2}, \frac{s+t-\theta-y}{2}, s\right) - \right. \\ &\left. - J\left(\frac{s+t-\theta+y}{2}, \frac{s+t-\theta-y}{2}, s\right) + \tilde{J}\left(\frac{s-t+\theta+y}{2}, \frac{s-t+\theta-y}{2}, s\right) \right] dy. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

**Доказательство.** Как и для предыдущих задач, проверяется, что для любых  $V(y)$  и  $W(y)$  функции

$$\begin{aligned} z^-(\xi, \eta) &= \sqrt{k(\xi+\theta)}V(\xi+\theta) - \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{\xi+\theta} \sqrt{k(y)} \times \\ &\times \left[ V(y)J\left(\frac{\xi+\theta+y}{2}, \frac{\xi+\theta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \right. \\ &\left. + W(y)\tilde{J}\left(\frac{\xi+\theta+y}{2}, \frac{\xi+\theta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \right] dy \end{aligned}$$

и

$$z^+(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{\xi+\theta} \sqrt{k(y)} \left[ V(y)\tilde{J}\left(\frac{\eta-\theta+y}{2}, \frac{\eta-\theta-y}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + \right.$$

$$+W(y)J\left(\frac{\eta - \theta + y}{2}, \frac{\eta - \theta - y}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) dy$$

удовлетворяют (1.1.4), и поэтому их сумма удовлетворяет уравнению (1.0.4).  
Значит,

$$u(t, s) = [z^-(s - t, s + t) + z^+(s - t, s + t)]/\sqrt{k(s)}$$

будет являться решением (1.0.2) для любых функций  $V$  и  $W$ . Подстановка полученной формулы в условие на характеристике дает  $V(A + \theta) = 0$ , а подстановка в условие при  $t = \theta$  дает

$$u_\theta(s) = V(s) - \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^s \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} [V(y) - W(y)] \times \\ \times \left[ J\left(\frac{s+y}{2}, \frac{s-y}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+y}{2}, \frac{s-y}{2}, s\right) \right] dy,$$

которое оставляет произвол для выбора  $V$  и  $W$  (как мы видели, этот произвол – явление типичное, он не влияет на окончательный результат, и выбор более удобных значений может только лишь избавить нас от ненужных вычислений). Положив  $V(s) = W(s)$ , мы получаем, что обе они равны  $u_\theta$ , и при этом автоматически, в силу предположения леммы, выполнено и условие  $V(A + \theta) = 0$ . Подстановка  $u_\theta$  вместо  $V$  и  $W$  дает формулу (1.3.24). Лемма доказана.

Когда обе функции  $f(s)$  и  $u_\theta(s)$  в задаче Фридландера нетривиальны, то решение получается суммированием формул (1.3.23) и (1.3.24), причем оказывается, что это имеет место не только когда общее значение  $f(A + \theta) = u_\theta(A + \theta)$  равно нулю, но и когда это значение отлично от нуля. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что сумма (1.3.23) и (1.3.24) равна единице при  $f(s) \equiv 1$  и  $u_\theta(s) \equiv 1$ . Действительно, при этих значениях  $f(s)$  и  $u_\theta(s)$  интегрирование по частям половины каждого интеграла в (1.3.23) и подстановка в (1.3.24) выражения  $W(s) = -1 + 2k(A + \theta)/k(s)$ , получаемого из (1.3.19) при  $f \equiv 1$ , дает нам для суммы выражение

$$\sqrt{k(s)}u(t, s) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{k\left(\frac{s+t+A}{2}\right)} - \sqrt{k\left(\frac{s-t+A}{2} + \theta\right)} \right\} + \\ + \sqrt{k(s-t+\theta)} - \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(x)} \left[ J\left(\frac{s+t+A}{2}, \frac{s+t+A}{2} - x, s\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{s-t-A}{2} + x, \frac{s-t-A}{2}, s\right) \right] dx +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{\frac{s-t+A}{2} + \theta} \sqrt{k(\varkappa)} \left[ J \left( \frac{s-t+A}{2} + \theta, \frac{s-t+A}{2} + \theta - \varkappa, s \right) - \right. \\
& \quad \left. - \tilde{J} \left( \frac{s+t-A}{2} + \varkappa - \theta, \frac{s+t-A}{2} - \theta, s \right) \right] d\varkappa - \\
& - \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{s-t+\theta} \sqrt{k(y)} \left[ \tilde{J} \left( \frac{s-t+y+\theta}{2}, \frac{s-t-y+\theta}{2}, s \right) + \right. \\
& + J \left( \frac{s-t+y+\theta}{2}, \frac{s-t-y+\theta}{2}, s \right) - \tilde{J} \left( \frac{s+t+y-\theta}{2}, \frac{s+t-y-\theta}{2}, s \right) - \\
& \quad \left. - J \left( \frac{s+t+y-\theta}{2}, \frac{s+t-y-\theta}{2}, s \right) \right] dy,
\end{aligned}$$

и используя очередную пару тождеств

$$\begin{aligned}
& \sqrt{k\left(\frac{\eta+A}{2}\right)} - \sqrt{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} + \int_{A+\theta}^{\xi+\theta} \sqrt{k(y)} \left[ \tilde{J} \left( \frac{\eta+y-\theta}{2}, \frac{\eta-y-\theta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + J \left( \frac{\eta+y-\theta}{2}, \frac{\eta-y-\theta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) \right] dy - \\
& - \int_{A+\theta}^{\frac{\xi+A}{2} + \theta} \sqrt{k(\varkappa)} \tilde{J} \left( \frac{\eta-A}{2} + \varkappa - \theta, \frac{\eta-A}{2} - \theta, \frac{\xi+\eta}{2} \right) d\varkappa - \\
& - \int_{A+\theta}^{\frac{\eta+A}{2}} \sqrt{k(\varkappa)} J \left( \frac{\eta+A}{2}, \frac{\eta+A}{2} - \varkappa, \frac{\xi+\eta}{2} \right) d\varkappa = 0, \\
& - \sqrt{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} - \int_{A+\theta}^{\xi+\theta} \sqrt{k(y)} \left[ \tilde{J} \left( \frac{\xi+y+\theta}{2}, \frac{\xi-y+\theta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + J \left( \frac{\xi+y+\theta}{2}, \frac{\xi-y+\theta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) \right] dy + \\
& + 2\sqrt{k(\xi+\theta)} + \int_{A+\theta}^{\frac{\xi+A}{2} + \theta} \sqrt{k(\varkappa)} J \left( \frac{\xi+A}{2} + \theta, \frac{\xi+A}{2} + \theta - \varkappa, \frac{\xi+\eta}{2} \right) d\varkappa +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{A+\theta}^{\frac{\eta+A}{2}} \sqrt{k(\varkappa)} \tilde{J} \left( \frac{\xi-A}{2} + \varkappa, \frac{\xi-A}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) d\varkappa - \sqrt{k\left(\frac{\xi+A}{2} + \theta\right)} = 0$$

мы приходим, после подстановки интегралов и сокращений, к  $u(t, s) \equiv 1$ . Тождества же доказываются уже по стандартной схеме – проверкой того что левые части  $z^+$  и  $z^-$  удовлетворяют (1.1.4), что  $z^+$  при  $\xi = A$  обращается в нуль (у первого и второго интегралов промежуток интегрирования вырождается в точку, в третьем интеграле функция  $J$  принимает нулевое значение, так как ее первый и третий аргументы совпадают, внеинтегральные члены уничтожаются) и что  $z^-$  при  $\eta = A + 2\theta$  также обращается в нуль (в третьем интеграле вырождается промежуток интегрирования, во втором обращается в нуль подинтегральная функция, а сумма первого интеграла с внеинтегральными членами оказывается тоже равной нулю, так как совпадает с удвоенной левой частью второго тождества (1.1.7), в котором вместо  $\xi$  и  $\eta$  нужно подставить  $\xi + \theta$  и  $A + \theta$  соответственно). Поэтому  $z^\pm$  являются решением однородной системы Вольтерра и обязаны быть нулями.

Наконец, в случае, когда условие задано не на характеристике  $s - t = A$ , а на характеристике  $s + t = B$ , решение задачи Фридландера имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)}u_\theta(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy + \\ &+ \left[ \sqrt{k}u_\theta \right] (s+t-\theta) + \sqrt{\frac{k\left(\frac{s-t+B}{2}\right)}{k(s)}}V\left(\frac{s-t+B}{2}\right) + \int_{\frac{s-t+B}{2}}^{B-\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y) \times \\ &\times \left\{ J\left(\frac{s-t+B}{2}, \frac{s-t+B}{2} - y, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-B}{2} + y, \frac{s+t-B}{2}, s\right) \right\} dy + \\ &- \sqrt{\frac{k\left(\frac{s+t+B}{2} - \theta\right)}{k(s)}}V\left(\frac{s+t+B}{2} - \theta\right) + \int_{\frac{s+t+B}{2}-\theta}^{B-\theta} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y) \times \\ &\times \left\{ \tilde{J}\left(\frac{s-t-B}{2} + \theta + y, \frac{s-t-B}{2} + \theta, s\right) - \right. \\ &\quad \left. - J\left(\frac{s+t+B}{2} - \theta, \frac{s+t+B}{2} - \theta - y, s\right) \right\} dy, \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

где

$$V(s) = g(s) + \int_s^{\frac{A+B}{2}} \frac{k(y)}{k(s)} g(y) \phi(y) dy.$$

Отметим, что задача Фридландера, не обладает свойством единственности решения. Прямые, на которых заданы данные, разбивают плоскость на четыре угла – два острых и два тупых, и внутри тупых углов решение задачи с однородными условиями имеет нетривиальные решения – см., напр., [57, задача 14.29]. Эти решения определяются своими значениями на той характеристике, которая лежит внутри угла. Поэтому полученные нами формулы в указанном случае дают лишь одно частное решение.

Мы будем далее использовать эти формулы только внутри острых углов, там, где вопрос о единственности решается положительно, поэтому эту проблему, достаточно важную в прикладных вопросах (например, в вопросе о формировании волн разрежения), мы далее обсуждать не будем.

### 1.3.7 Перенос данных с произвольной кривой

Для того, чтобы пояснить, почему перед интегралами в формулах решения начальной и начально-краевой задач стоит множитель  $1/2$ , а в формулах решения задачи Гурса – единица, мы приведем здесь волновой оператор для произвольной кривой.

Пусть кривая на плоскости  $(t, s)$  задана параметрически  $t = \tau(\lambda)$ ,  $s = \sigma(\lambda)$ , которую мы, во избежание осложнений, будем сначала предполагать нехарактеристической. Для любой точки  $(t, s)$  введем  $\lambda_-(s-t)$  и  $\lambda_+(s+t)$  – значения параметра отвечающие точкам пересечения с кривой характеристик, проведенных через точку  $(t, s)$ :

$$\sigma(\lambda_{\pm}) \pm \tau(\lambda_{\pm}) = s \pm t. \quad (1.3.26)$$

Тогда волновой оператор, описывающий перенос волн с нашей кривой, описывается формулами

$$\begin{aligned} V^t(s) = & \sqrt{\frac{k(\sigma(\lambda_-(s-t)))}{k(s)}} V(\lambda_-(s-t)) + \frac{1}{2} \int_{\lambda_-(s-t)}^{\lambda_+(s+t)} \sqrt{\frac{k(\sigma(\lambda))}{k(s)}} \times \\ & \times \left\{ [\sigma - \tau]'(\lambda) V(\lambda) J\left(\frac{s-t + [\sigma + \tau](\lambda)}{2}, \frac{s-t - [\sigma - \tau](\lambda)}{2}, s\right) + \right. \\ & \left. + [\sigma + \tau]'(\lambda) W(\lambda) \tilde{J}\left(\frac{s-t + [\sigma + \tau](\lambda)}{2}, \frac{s-t - [\sigma - \tau](\lambda)}{2}, s\right) \right\} d\lambda, \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

$$\begin{aligned}
 W^t(s) &= \sqrt{\frac{k(\sigma(\lambda_+(s+t)))}{k(s)}} W(\lambda_+(s+t)) - \frac{1}{2} \int_{\lambda_-(s-t)}^{\lambda_+(s+t)} \sqrt{\frac{k(\sigma(\lambda))}{k(s)}} \times \\
 &\times \left\{ [\sigma + \tau]'(\lambda) W(\lambda) J\left(\frac{s+t + [\sigma - \tau](\lambda)}{2}, \frac{s+t - [\sigma + \tau](\lambda)}{2}, s\right) + \right. \\
 &\quad \left. + [\sigma - \tau]'(\lambda) V(\lambda) \tilde{J}\left(\frac{s+t + [\sigma - \tau](\lambda)}{2}, \frac{\sigma + \tau - [b+a](\lambda)}{2}, s\right) \right\} d\lambda.
 \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

Эти формулы проверяются все тем же способом – введением функций  $z^- = \sqrt{k(s)}V^t(s)$  и  $z^+ = \sqrt{k(s)}W^t(s)$ , переходом к характеристическим переменным  $\xi, \eta$  и проверкой справедливости (1.1.4). При этом существенную роль играют тождества

$$[\sigma - \tau]'(\lambda_-(\xi)) \cdot \lambda'_-(\xi) \equiv 1, \quad [\sigma + \tau]'(\lambda_+(\eta)) \cdot \lambda'_+(\eta) \equiv 1,$$

являющиеся непосредственным следствием (1.3.26).

Формулы (1.3.27) и (1.3.28) на самом деле, как легко видеть, сохраняют свое действие и за рамками предположения о том, что кривая является нехарактеристической. Например, им можно пользоваться для и в случае, когда кривая – характеристика, при этом часть членов (два интеграла и один внеинтегральный) исчезают, и один из пределов интегрирования приходится заменять (поскольку соответствующее  $\lambda$  оказывается не определенно) на величину, определяемую из других соображений (как мы это делали, например, в задаче Гурса).

Наиболее "деликатной" является ситуация, когда кривая, являющаяся на некотором участке нехарактеристической, при некотором значении параметра  $\lambda = \lambda^*$  касается характеристики. В этом случае удовлетворение системе (1.1.4) при этом значении  $\lambda$  удастся получить предельным переходом, с использованием известного следствия из теоремы Лагранжа о конечных приращениях (если производная имеет предел в точке, то в этой точке функция дифференцируема и равна этому пределу).

## § 1.4 Функция Римана и ее связь с коэффициентами переноса. Выражение решения краевых задач через функцию Римана.

### 1.4.1 Функция Римана и связанные с нею тождества.

**Лемма 1.4.1** *Имеют место следующие тождества:*

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} J \left( \frac{a+\eta}{2}, \frac{a+\eta}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy - \frac{1}{\sqrt{k(\frac{a+\eta}{2})}} - \quad (1.4.1)$$

$$- \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \tilde{J} \left( \frac{\eta-b}{2} + y, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy + \frac{1}{\sqrt{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} = 0,$$

$$- \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \tilde{J} \left( \frac{\xi-a}{2} + y, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy + \frac{1}{\sqrt{k(\frac{\xi+b}{2})}} + \quad (1.4.2)$$

$$+ \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} J \left( \frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi+b}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy - \frac{1}{\sqrt{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} = 0,$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{k(y)} J \left( \frac{a+\eta}{2}, \frac{a+\eta}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy - \sqrt{k(\frac{a+\eta}{2})} + \quad (1.4.3)$$

$$+ \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{k(y)} \tilde{J} \left( \frac{\eta-b}{2} + y, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy + \sqrt{k(\frac{\xi+\eta}{2})} = 0,$$

$$- \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{k(y)} \tilde{J} \left( \frac{\xi-a}{2} + y, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy - \sqrt{k(\frac{\xi+b}{2})} - \quad (1.4.4)$$

$$- \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{k(y)} J \left( \frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi+b}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy + \sqrt{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} = 0.$$

**Доказательство** стандартное, тождества доказываются парами (1.4.1)-(1.4.2) и (1.4.3)-(1.4.4) проверкой для их левых частей (1.1.4).

Везде далее мы через  $R(\xi, \eta, a, b)$  будем обозначать функцию Римана эквивалентного (1.0.4) уравнения (1.1.5). Напомним, что функция Римана определяется как решение уравнения (1.1.5) (а точнее, сопряженного к нему, но оно совпадает с исходным), равное единице на характеристиках  $\xi = a$  и  $\eta = b$ .

**Лемма 1.4.2** *Функция Римана  $R(\xi, \eta, a, b)$  уравнения (1.1.5) может быть выражена одной из четырех следующих формул:*

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k\left(\frac{a+\eta}{2}\right)}} + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k(y)}} \left[ \tilde{J} \left( \frac{\xi-a}{2} + y, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) - \right. \\ \left. - J \left( \frac{a+\eta}{2}, \frac{a+\eta}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2} \right) \right] dy, \quad (1.4.5)$$

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k\left(\frac{\xi+b}{2}\right)}} + \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k(y)}} \left[ J \left( \frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi+b}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2} \right) - \right. \\ \left. - \tilde{J} \left( \frac{\eta-b}{2} + y, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) \right] dy, \quad (1.4.6)$$

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}} + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k(y)}} \tilde{J} \left( \frac{\xi-a}{2} + y, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy - \\ - \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{k\left(\frac{a+b}{2}\right)}{k(y)}} \tilde{J} \left( \frac{\eta-b}{2} + y, \frac{\eta-b}{2}, \frac{\xi+\eta}{2} \right) dy,$$

$$R(\xi, \eta, a, b) = \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{\xi+b}{2})}} + \int_{\frac{\xi+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} J\left(\frac{\xi+b}{2}, \frac{\xi+b}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy -$$

$$- \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{\xi+\eta}{2})}} + \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{a+\eta}{2})}} - \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} J\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{a+\eta}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy.$$

**Доказательство** достаточно провести только для одной формулы, так как эквивалентность всех четырех формул между собой следует из (1.4.1)-(1.4.4). Правую часть формулы (1.4.5) разобьем на два слагаемых:

$$z^+(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{a+\eta}{2})}} - \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} J\left(\frac{a+\eta}{2}, \frac{a+\eta}{2} - y, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy,$$

$$z^-(\xi, \eta) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \tilde{J}\left(\frac{\xi-a}{2} + y, \frac{\xi-a}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) dy.$$

Как всегда, проверяется, что  $z^\pm$  удовлетворяет (1.1.4) откуда следует, что их сумма является решением уравнения (1.0.4). Осталось отметить, что при  $\xi = a$  и при  $\eta = b$  правая часть формулы (1.4.5) равна единице: второе очевидно, а первое следует из того, что, в силу (1.1.3), при  $\alpha = \gamma$  получаем  $J(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ , а при  $\beta = 0$  – соответственно  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \phi(\alpha)$ , так что при  $\xi = a$  выражение в квадратных скобках превращается в  $\phi(y) = k'(y)/[2k(y)]$ .

**Следствие 1.** Функция Римана уравнения (1.0.4) имеет вид  $R(s - t, s + t, \sigma - \tau, \sigma + \tau)$ , а функция Римана уравнения (1.0.2) –

$$\frac{1}{\sqrt{k(s)}} R(s - t, s + t, \sigma - \tau, \sigma + \tau).$$

**Следствие 2.** Функция  $R$  инвариантна относительно одновременной рокировки каждой пары аргументов:  $R(\xi, \eta, a, b) = R(\eta, \xi, b, a)$ .

**Следствие 3.** Функция  $R$  инвариантна относительно любого альтернансного сдвига каждой пары ее аргументов на одну и ту же величину:  $R(\xi + \theta, \eta - \theta, a + \theta, b - \theta) = R(\xi, \eta, a, b)$ .

Эти два следствия отражают, в терминах свойств функции Римана, факт инвариантности дифференциального уравнения (1.0.2) как относительно сдвига по времени, так и относительно обращения времени.

**Следствие 3.** Если  $k(s)$  является четной:  $k(-s) = k(s)$  (что обеспечивается нечетностью  $\phi(s)$ ), то функция  $R$  будет четной относительно совокупного изменения знака ее аргументов:  $R(-\xi, -\eta; -a, -b) = R(\xi, \eta; a, b)$ .

**Следствие 4.** Если  $k(s)$  является пространственно-периодической:  $k(s + 2l) = k(s)$  (что обеспечивается нечетностью и  $2l$ -периодичностью  $\phi(s)$ ), то функция  $R$  инвариантна относительно любого синхронного сдвига ее аргументов на период:  $R(\xi + 2l, \eta + 2l; a + 2l, b + 2l) = R(\xi, \eta; a, b)$ .

**Лемма 1.4.3** Производные функции Римана  $R(\xi, \eta; a, b)$  уравнения (1.1.5) выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \tilde{J} \left( \frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) + J \left( \frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \tilde{J} \left( \frac{a + \eta}{2}, \frac{\eta - b}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) + J \left( \frac{a + \eta}{2}, \frac{\eta - b}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial a} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{a + b}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ J \left( \frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) - \tilde{J} \left( \frac{a + \eta}{2}, \frac{\eta - b}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial b} &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{a + b}{2}\right) R(\xi, \eta, a, b) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ J \left( \frac{a + \eta}{2}, \frac{\eta - b}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) - \tilde{J} \left( \frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

**Замечание.** Хотя в (1.4.7)-(1.4.10) фигурирует четыре коэффициента переноса, не следует думать, что из этой системы можно выразить коэффициенты переноса через функцию Римана, посмотрев на нее как на линейную систему относительно коэффициентов переноса. Эта система на самом деле является вырожденной, так как комбинация (1.4.8)-(1.4.7)+(1.4.10)-(1.4.9) дает тождество  $R_\eta - R_\xi + R_a - R_b = 0$ , в котором  $J$  и  $\tilde{J}$  уже не фигурируют и которое имеет место в силу следствия 2 предыдущей леммы.



**Доказательство.** Дифференцирование (1.4.5) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \beta} + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial J}{\partial \gamma} \left( \frac{a + \eta}{2}, \frac{a + \eta}{2} - y, \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{k(y)}} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \alpha} \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \tilde{J} \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \phi(y) \tilde{J} \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right), \end{aligned}$$

применяя следующую из (1.1.3) формулу дифференцирования  $\tilde{J}$  по второму аргументу

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \beta}(\alpha, \beta, \gamma) = -\phi(\alpha - \beta)J(\alpha, \beta, \gamma)$$

и формулы (1.1.6) дифференцирования  $J$  и  $\tilde{J}$  по третьему аргументу, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, a, b)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \tilde{J} \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \phi(y) \tilde{J} \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \phi(y) J \left( \frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) dy - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} \left[ J\left(\frac{a + \eta}{2}, \frac{a + \eta}{2} - y, \frac{\xi + \eta}{2}\right) - \right. \\ \left. - \tilde{J}\left(\frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy$$

Первый интеграл (от полной производной) равен

$$\sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(\frac{a+\eta}{2})}} \phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) - \tilde{J}\left(\frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right),$$

и первое слагаемое вместе с последним интегралом дает (ср. с (1.4.5))

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) R(s - t, s + t, a, b).$$

Средний интеграл, в силу  $(1/\sqrt{k(y)})' = -\phi(y)/\sqrt{k(y)}$  и в силу следующего из (1.1.3) правила дифференцирования  $J$  по первому аргументу

$$J_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) = \phi(\alpha - \beta)\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$$

также приводится к интегралу от полной производной

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+\eta}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sqrt{\frac{k(\frac{a+b}{2})}{k(y)}} J\left(\frac{\xi - a}{2} + y, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \right] dy = \\ = -J\left(\frac{\xi + b}{2}, \frac{\xi - a}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}\right).$$

В результате для  $R_\xi$  мы и получаем формулу (1.4.7). Аналогичные вычисления дают для  $R_\eta$  формулу (1.4.8).

Формулы же (1.4.9)-(1.4.10) получаются непосредственным дифференцированием (1.4.6) и (1.4.5) соответственно. Лемма доказана.

**Следствие.**

$$\frac{\partial R(s - t, s + t, a, b)}{\partial t} = \\ = \frac{1}{2}\tilde{J}\left(\frac{s - t + b}{2}, \frac{s - t - a}{2}, s\right) + \frac{1}{2}J\left(\frac{s - t + b}{2}, \frac{s - t - a}{2}, s\right) - \quad (1.4.11) \\ - \frac{1}{2}\tilde{J}\left(\frac{s + t + a}{2}, \frac{s + t - b}{2}, s\right) - \frac{1}{2}J\left(\frac{s + t + a}{2}, \frac{s + t - b}{2}, s\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta, \sigma - \tau, \sigma + \tau)}{\partial \sigma} &= \phi(\sigma)R(\xi, \eta, \sigma - \tau, \sigma + \tau) - \\ & - \frac{1}{2} \tilde{J} \left( \frac{\xi + \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi - \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) + \frac{1}{2} J \left( \frac{\xi + \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi - \sigma + \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \tilde{J} \left( \frac{\eta + \sigma - \tau}{2}, \frac{\eta - \sigma - \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right) + \frac{1}{2} J \left( \frac{\eta + \sigma - \tau}{2}, \frac{\eta - \sigma - \tau}{2}, \frac{\xi + \eta}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Производные функции Римана мы будем обозначать нижними индексами, причем если этот индекс будет  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $a$  или  $b$ , то это будет означать дифференцирование по соответствующему аргументу функции  $R$ , а если  $t$  или  $\sigma$  – то производные (1.4.11) и (1.4.12), так что всегда  $R_t = R_\eta - R_\xi$ ,  $R_\sigma = R_a + R_b$ . При необходимости вычисления любой другой производной мы ее будем обозначать "развернутой" формой, например,  $dR/dy$ .

### 1.4.2 Выражение с помощью функции Римана решения начальной задачи

Формулы (1.4.11) -(1.4.12) позволяют записать выражение решений краевых задач в более компактной форме.

Обратимся сначала к решению (1.1.1) начальной задачи. Пусть начальные данные  $u(s) = u(\theta, s)$  и  $v(s) = u_t(\theta, s)$  заданы на прямой  $t = \theta$ . Подстановка в формулу (1.1.1) найденных из (1.1.2) выражений  $V(s)$  и  $W(s)$  через  $u(s)$  и  $v(s)$

$$V(s) = \frac{1}{2}u(s) - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{k(\varkappa)}{k(s)}v(\varkappa)d\varkappa, \quad W(s) = \frac{1}{2}u(s) + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{k(\varkappa)}{k(s)}v(\varkappa)d\varkappa$$

(с заменой  $t$  на  $t - \theta$ ) дает

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{k}u](s - t + \theta) - \frac{V(s - t + \theta)}{\sqrt{k(s)k(s - t + \theta)}} \int_0^{s-t+\theta} k(\varkappa)v(\varkappa) d\varkappa \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{k}u](s + t - \theta) + \frac{W(s + t - \theta)}{\sqrt{k(s)k(s + t - \theta)}} \int_0^{s+t-\theta} k(\varkappa)v(\varkappa) d\varkappa \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)}u(y) \frac{1}{2} \left[ J\left(\frac{s-t+y+\theta}{2}, \frac{s-t-y+\theta}{2}, s\right) - \right. \\ & \left. - \tilde{J}\left(\frac{s+t+y-\theta}{2}, \frac{s+t-y-\theta}{2}, s\right) - J\left(\frac{s+t+y-\theta}{2}, \frac{s+t-y-\theta}{2}, s\right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{J}\left(\frac{s-t+y+\theta}{2}, \frac{s-t-y+\theta}{2}, s\right) \Big] dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \int_0^y k(x)v(x) dx \frac{1}{2} \left[ \tilde{J}\left(\frac{s-t+y+\theta}{2}, \frac{s-t-y+\theta}{2}, s\right) - \right. \\
 & - J\left(\frac{s+t+y-\theta}{2}, \frac{s+t-y-\theta}{2}, s\right) + \tilde{J}\left(\frac{s+t+y-\theta}{2}, \frac{s+t-y-\theta}{2}, s\right) - \\
 & \left. - J\left(\frac{s-t+y+\theta}{2}, \frac{s-t-y+\theta}{2}, s\right) \right] dy.
 \end{aligned}$$

В первом интеграле в квадратных скобках стоит, очевидно,  $R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)$  (ср. с (1.4.11)). Во втором интеграле квадратная скобка равна  $\phi(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) - R_\sigma(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)$ , а поскольку  $R_\sigma(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)$  может интерпретироваться как полная производная по  $y$  от  $R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)$  второй интеграл приводится, в силу  $\phi(y)/\sqrt{k(y)} = -(1/\sqrt{k(y)})'$ , к виду

$$\begin{aligned}
 & \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \frac{\phi(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) - R_\sigma(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)}{\sqrt{k(y)}} \times \\
 & \times \int_0^y k(x)v(x) dx dy = \\
 & = \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \int_0^y k(x)v(x) dx \left[ -\frac{1}{\sqrt{k(y)}}R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) \right]'_y dy = \\
 & = - \left[ \int_0^y k(x)v(x) dx \frac{1}{\sqrt{k(y)}}R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) \right]_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} + \\
 & + \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)}v(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy,
 \end{aligned}$$

и после сокращения внеинтегральных членов наша формула принимает вид

$$\begin{aligned}
 \sqrt{k(s)}u(t, s) & = \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{k}u](s-t+\theta) + [\sqrt{k}u](s+t-\theta) \right\} + \quad (1.4.13) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)} [u(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) + v(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)] dy.
 \end{aligned}$$

Использование формул (1.4.7)-(1.4.10) позволяет написать аналогичную формулу и для производной: дифференцирование по  $t$  формулы (1.4.13) дает

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(t, s) &= \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{ku}]'(s+t-\theta) - [\sqrt{ku}]'(s-t+\theta) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{ku}](s+t-\theta)R_t(s-t, s+t, s+t-2\theta, s+t) + [\sqrt{kv}](s+t-\theta) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{ku}](s-t+\theta)R_t(s-t, s+t, s-t, s-t+2\theta) + [\sqrt{kv}](s-t+\theta) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)} [u(y)R_{tt}(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) + v(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)] dy. \end{aligned}$$

Вторую половину интеграла мы трогать уже не будем, а первую преобразуем, пользуясь соотношением

$$\begin{aligned} R_{tt}(s-t, s+t, \sigma-\theta, \sigma+\theta) &= \tag{1.4.14} \\ &= R_{\sigma\sigma}(s-t, s+t, \sigma-\theta, \sigma+\theta) - [\phi' + \phi^2](\sigma)R(s-t, s+t, \sigma-\theta, \sigma+\theta). \end{aligned}$$

Действительно, функция Римана удовлетворяет по второй паре переменных уравнению  $R_{ab} = \frac{1}{4}[\phi' + \phi^2](\{a+b\}/2)$ , и поэтому для  $R = R(s-t, s+t, \sigma-\tau, \sigma+\tau)$  имеет место  $R_{\tau\tau} = R_{\sigma\sigma} - [\phi'(\sigma) + \phi^2(\sigma)]R$ , а в силу автономности уравнения (1)  $R_{tt} = R_{\tau\tau}$ .

Поскольку  $R_{\sigma\sigma}(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)$  можно считать второй полной производной по  $y$ , двукратное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} &\int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)}u(y)R_{tt}(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy = \\ &= \left[ (\sqrt{ku})(y)R_{\sigma}(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) - \right. \\ &\quad \left. - (\sqrt{ku})'(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) \right]_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} + \\ &+ \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \{ [\sqrt{ku}]''(y) - [\sqrt{ku}](y)[\phi'(y) + \phi^2(y)] \} R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy = \\ &= \left[ (\sqrt{ku})(s+t-\theta)R_{\sigma}(s-t, s+t, s+t-2\theta, s+t) - (\sqrt{ku})'(s+t-\theta) \right] - \\ &- \left[ (\sqrt{ku})(s-t+\theta)R_{\sigma}(s-t, s+t, s-t, s-t+2\theta) - (\sqrt{ku})'(s-t+\theta) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)} [u''(y) + 2\phi(y)u'(y)] R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy.$$

Подстановкой полученного выражения в нашу формулу получаем, после сокращения внеинтегральных членов и использования обозначения  $Lu = (k(s)u')'/k(s)$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(t, s) &= \frac{1}{2} \left\{ [\sqrt{k}v](s+t-\theta) + [\sqrt{k}v](s-t+\theta) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)} Lu(y) R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy + \\ &+ \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)} v(y) R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Формулы (1.4.13) и (1.4.15) производят впечатление хорошо известных, хотя на самом деле даже формула (1.4.13) встречается только в специальной литературе [111], [175]. Впрочем, в [158, гл. II, §5, п. 4], приводится аналогичная ей формула (за номером 36) для уравнения с постоянным  $\phi(s)$ , там в роли функции Римана выступает функция Бесселя. Такая же формула с функцией Бесселя имеется и в [103, гл. III, §20] (формула номер 20.19), менее известном, но изданном в тот же год, что и первое издание [158].

### 1.4.3 Выражение с помощью функции Римана решения начально-краевой задачи. Баланс скачков.

Сравнение формул (1.3.5) и (1.3.6), полученных в теоремах 1.3.1-1.3.2 с формулами (1.4.5)-(1.4.6) показывает, что в квадратных скобках там стоит (с учетом множителя 1/2 перед интегралом) функция  $[R_\sigma - \phi(0)R](s-t, s+t, -\tau, \tau)$ , а поскольку в силу наших предположений  $\phi(0) = 0$  (см. первый пункт предыдущего параграфа), формулы (1.3.5) и (1.3.6) в терминах функции Римана приобретают вид

$$\sqrt{k(s)}u(t, s) = \sqrt{k(0)} \left\{ \nu(t-s) + \int_0^{t-s} \nu(\tau) R_\sigma(s-t, s+t, -\tau, \tau) d\tau \right\}, \quad (1.4.16)$$

и

$$\sqrt{k(s)}u(t, s) = \sqrt{k(0)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \nu(t-s-2lm) - \sum_{m=1}^{\infty} \nu(t+s-2lm) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{t-s-2lm} \nu(\tau) R_{\sigma}(s+2lm-t, s+2lm+t, -\tau, \tau) d\tau + \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{t+s-2lm} \nu(\tau) R_{\sigma}(s-2lm-t, s-2lm+t, -\tau, \tau) d\tau \right\}. \quad (1.4.17)
 \end{aligned}$$

Для формул (1.3.7)-(1.3.8) мы, соответственно, получаем представление

$$\sqrt{k(s)}u(t, s) = \sqrt{k(l)} \left\{ \mu(t+s-l) - \int_0^{t+s-l} \mu(\tau) R_{\sigma}(s-t, s+t, l-\tau, l+\tau) d\tau \right\}, \quad (1.4.18)$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{k(s)}u(t, s) = & \sqrt{k(l)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \mu(t+s-l-2lm) - \sum_{m=0}^{\infty} \mu(t-s-l-2lm) - \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{t+s-l-2lm} \mu(\tau) R_{\sigma}(s-2lm-t, s-2lm+t, l-\tau, l+\tau) d\tau - \\
 & \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{t-s-l-2lm} \mu(\tau) R_{\sigma}(s+2lm-t, s+2lm+t, -l-\tau, -l+\tau) d\tau \right\}, \quad (1.4.19)
 \end{aligned}$$

Формулы (1.4.17) и (1.4.19) являются аналогами известных формул для однородной среды (см., напр., [158, гл. II, §2, п. 7, формула (25)] и отличаются от них наличием интегральных членов.

Мы уже говорили, что в случае произвольных начальных данных  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $\nu(t)$ ,  $\mu(t)$ , для которых все фигурирующие в (1.3.9) величины равны нулю, решение является суммой трех полученных формул, т.е., в терминах функции Римана, формул (1.4.13), (1.4.17) и (1.4.19).

Покажем, что эта же сумма дает решение и в случае ненулевых величин в (1.3.9). Поскольку и функции, определяемые этими формулами, и их производные допускают, вообще говоря, разрывы на прямых  $s-t = nl$  и на прямых  $s+t = nl$  ( $n$  – целое), а внутри каждого квадрата, на который разрезают эти прямые плоскость, каждое слагаемое описывает классическое решение, имеющее равномерные пределы при приближении  $(t, s)$  к границам квадрата, нам достаточно показать, что возникающие на прямых  $s \pm t = nl$  скачки как самих слагаемых, так и их производных уничтожают друг друга.

Для функции, определяемой формулой (1.4.13) (напомним, что при этом осуществляется нечетно-периодическое продолжение  $\phi(s)$  за пределы  $[0, l]$  в предположении  $\phi(0) = \phi(l) = 0$  – см. первый пункт предыдущего параграфа) наличие скачков и у самой функции, и у ее производных связано

с тем, что для нечетно-периодическим образом продолженных произвольных начальных условий  $u_0(s)$  и  $v_0(s)$  неизбежно появление разрывов при  $s = 0$  и при  $s = l$  как у функций, так и у вторых производных (первые оказываются непрерывными). Эти разрывы порождают при дифференцировании формулы (1.4.13) дополнительные внеинтегральные члены, которые и несут в себе информацию о скачках производных. Вычисление величин этих скачков (далее через  $\Delta f|_{s\pm t=h}$  будет обозначается величина скачка функции  $f(t, s)$  на прямой  $s \pm t = h$ , считаемый "в направлении возрастания  $s$ ", т.е.  $f(\pm(h - s) - 0, s + 0) - f(\pm(h - s) + 0, s - 0)$ ) дает

$$\Delta[\sqrt{ku}]|_{s-t=2nl} = \frac{1}{2}\Delta[\sqrt{ku}_0](2nl) = \frac{1}{2}\Delta[\sqrt{ku}_0](0) = [\sqrt{ku}_0](0)$$

в силу  $2l$ -периодичности коэффициентов и начальных условий и в силу нечетности  $\sqrt{ku}_0$  (везде далее под  $[\sqrt{ku}_0](0)$  будет пониматься  $[\sqrt{ku}_0](0+)$ , под  $[\sqrt{ku}_0](l)$  будет пониматься  $[\sqrt{ku}_0](l - 0)$ , и аналогично для остальных производных),

$$\Delta[\sqrt{ku}]|_{s\pm t=2nl} = \frac{1}{2}\Delta[\sqrt{ku}]_0(2nl) = \frac{1}{2}\Delta[\sqrt{ku}]_0(0) = [\sqrt{ku}]_0(0),$$

$$\begin{aligned} \Delta[\sqrt{ku}]_t|_{s\pm t=2nl} &= [\sqrt{kv}]_0(0) \mp [\sqrt{ku}]_0(0)R_\sigma(0, 2s - 4nl; 0, 0), \\ \Delta[\sqrt{ku}]_s|_{s\pm t=2nl} &= \pm[\sqrt{kv}]_0(0) - [\sqrt{ku}]_0(0)R_t(0, 2s - 4nl; 0, 0), \\ \Delta[\sqrt{ku}]_{tt}|_{s\pm t=2nl} &= \mp[\sqrt{kv}]_0(0)R_t(0, 2s - 4nl; 0, 0) + Lu_0(0) + \\ &\quad + [\sqrt{ku}]_0(0)R_{t\sigma}(0, 2s - 4nl; 0, 0), \\ \Delta[\sqrt{ku}]_{ts}|_{s\pm t=2nl} &= -[\sqrt{kv}]_0(0)R_t(0, 2s - 4nl; 0, 0) \pm Lu_0(0) \mp \\ &\quad \mp [\sqrt{ku}]_0(0)R_{s\sigma}(0, 2s - 4nl; 0, 0). \end{aligned}$$

Величины скачков при  $s \pm t = (2n + 1)l$  определяются аналогичными формулами, они получаются из приведенных заменой  $[\sqrt{ku}]_0^{(j)}(0)$  и  $[\sqrt{kv}]_0^{(j)}(0)$  на  $-[\sqrt{ku}]_0^{(j)}(l)$  и  $-[\sqrt{kv}]_0^{(j)}(l)$  соответственно и заменой аргументов у функции Римана и ее производных на  $(l, 2s - (4n + 1)l, l, l)$ .

Для функции, определяемой формулой (1.4.17) наличие скачков как у функции, так и у ее производных, связано с добавлением к сумме новых слагаемых при переходе через прямые  $s - t = 2nl$ , и через прямые  $s + t = 2nl$ , на прямых же  $s \pm t = (2n + 1)l$  эта функция непрерывна вместе со всеми производными. Поскольку при этом дополнительный интегральный член никакого вклада в скачки не дает, величины скачков определяются



только ненулевыми значениями внеинтегральных членов и равны

$$\begin{aligned}\Delta[\sqrt{k}u]|_{s\pm t=2nl} &= -\sqrt{k(0)}\nu(0), \\ \Delta[\sqrt{k}u]_t|_{s\pm t=2nl} &= -\sqrt{k(0)}\nu'(0) \pm \sqrt{k(0)}\nu(0)R_\sigma(0, 2s - 4lm; 0, 0), \\ \Delta[\sqrt{k}u]_s|_{s\pm t=2nl} &= \mp\sqrt{k(0)}\nu'(0) + \sqrt{k(0)}\nu(0)R_\sigma(0, 2s - 4ln; 0, 0), \\ \Delta[\sqrt{k}u]_{tt}|_{s\pm t=2nl} &= -\sqrt{k(0)}\nu''(0) \pm \sqrt{k(0)}\nu'(0)R_\sigma(0, 2s - 4ln; 0, 0) - \\ &\quad -\sqrt{k(0)}\nu(0)R_{t\sigma}(0, 2s - 4ln; 0, 0), \\ \Delta[\sqrt{k}u]_{ts}|_{s\pm t=2nl} &= \mp\sqrt{k(0)}\nu''(0) + \sqrt{k(0)}\nu'(0)R_\sigma(0, 2s - 4ln; 0, 0) \pm \\ &\quad \pm\sqrt{k(0)}\nu(0)R_{s\sigma}(0, 2s - 4ln; 0, 0)].\end{aligned}$$

Аналогичными формулами (с заменой  $\sqrt{k(0)}\nu^{(j)}(0)$  на  $-\sqrt{k(l)}\mu^{(j)}(0)$  и аргументов у функции Римана и ее производных на  $(l, 2s - (4n + 1)l, l, l)$ ) определяются скачки функции, определяемой формулой (1.4.19), на прямых  $s \pm t = (2n + 1)l$ ; на прямых же  $s \pm t = 2nl$  разрывы как у функции, так и у ее производных отсутствуют.

Сложение полученных формул показывает, что условия (1.3.9) обеспечивают непрерывность суммы функций, определяемых формулами (1.4.13), (1.4.17) и (1.4.19) вместе со всеми производными.

#### 1.4.4 Выражение с помощью функции Римана решения задачи Гурса

Сравнение формулы (1.3.18) с (1.4.9) и (1.4.10), показывает, что в (1.3.18) в фигурных скобках стоит

$$\begin{aligned}\phi(\varkappa)R(s - t, s + t, A, 2\varkappa - A) - 2R_b(s - t, s + t, A, 2\varkappa - A) &= \\ = \phi(\varkappa)R(s - t, s + t, A, 2\varkappa - A) - \frac{dR(s - t, s + t, A, 2\varkappa - A)}{d\varkappa}.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям приводит (1.3.18) к виду

$$\begin{aligned}\sqrt{k(s)}u(t, s) &= [\sqrt{k}W] \left( \frac{A + B}{2} \right) + \\ &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \sqrt{k(\varkappa)}[W' + 2\phi W](\varkappa)R(s - t, s + t, A, 2\varkappa - A) d\varkappa,\end{aligned}$$

а поскольку в силу (1.3.19)  $W(\frac{A+B}{2}) = f(\frac{A+B}{2}) = 0$ , а  $[W' + 2\phi W](s) = [f' + \phi f](s)$ , что после умножения на  $\sqrt{k(s)}$  дает  $[\sqrt{k}f]'(s)$ , мы получаем

$$u(t, s) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \frac{[\sqrt{k}f]'(\varkappa)}{\sqrt{k(s)}} R(s - t, s + t, A, 2\varkappa - A) d\varkappa.$$

Совершенно аналогично из формул (1.3.20)-(1.3.21) получаем

$$u(t, s) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s-t+B}{2}} \frac{[\sqrt{k}g]'(\varkappa)}{\sqrt{k(s)}} R(s-t, s+t, 2\varkappa-B, B) d\varkappa,$$

сумма полученных формул дает решение задачи Гурса для произвольных  $f(s)$  и  $g(s)$ , равных нулю в точке  $\frac{A+B}{2}$ . Если же общее значение этих функций в точке пересечения характеристик не равно нулю (обозначим его через  $U^*$ ), то решение задачи Гурса имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \sqrt{k\left(\frac{A+B}{2}\right)}U^*R(s-t, s+t, A, B)+ \\ &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} [\sqrt{k}f]'(\varkappa)R(s-t, s+t, A, 2\varkappa-A) d\varkappa+ \\ &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s-t+B}{2}} [\sqrt{k}g]'(\varkappa)R(s-t, s+t, 2\varkappa-B, B) d\varkappa. \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Это оказывается следствием того, что вычитание из  $u(t, s)$  функции Римана уравнения (1.0.2) не влияет на значения  $[\sqrt{k}f]'(s)$  и  $[\sqrt{k}g]'(s)$  (для функции Римана значения этих величин равны нулю), поэтому, подбирая коэффициент у функции Римана так, чтобы разность в точке пересечения характеристик равнялась нулю, и, следовательно, представлялась суммой интегралов, фигурирующих в (44), мы и получим нашу формулу.

Формула (1.4.20) также создает впечатление хорошо известной. Однако и эта формула в учебниках и монографиях не фигурирует, хотя, безусловно, является идеально компактным описанием решения. Единственное, пожалуй, исключение составляет учебник [28], где имеется формула (гл. III, в §4, п. 2), из которой (1.4.20) могла быть получена (но почему-то это не было сделано) простым интегрированием по частям.

#### 1.4.5 Выражение с помощью функции Римана решения задачи Фридландера и производной.

Сравнивая выражение в квадратных скобках под интегралом в (1.3.24), мы видим, что оно совпадает с производной (1.4.11) функции Римана. По-

скольку оставшаяся часть формулы, описывающей решение задачи Фридландера является "унаследованной" из задачи Гурса, мы можем записать достаточно компактно и решение задачи Фридландера как для характеристики  $s - t = A$

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \int_{A+\theta}^{\frac{s+t+A}{2}} [\sqrt{k}f]'(\varkappa)R(s-t, s+t, A, 2\varkappa-A) d\varkappa - \\ &- \int_{A+\theta}^{\frac{s-t+A}{2} + \theta} [\sqrt{k}f]'(\varkappa)R(s-t, s+t, 2\varkappa-A-2\theta, A+2\theta) d\varkappa + \quad (1.4.21) \\ &+ \sqrt{k(s-t+\theta)}u_\theta(s-t+\theta) - \int_{A+\theta}^{s-t+\theta} \sqrt{k(y)}u_\theta(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy, \end{aligned}$$

так и для характеристики  $s + t = B$

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u(t, s) &= \int_{B-\theta}^{\frac{s-t+B}{2}} [\sqrt{k}g]'(\varkappa)R(s-t, s+t, 2\varkappa-B, B) d\varkappa - \\ &- \int_{B-\theta}^{\frac{s+t+B}{2} - \theta} [\sqrt{k}g]'(\varkappa)R(s-t, s+t, B-2\theta, 2\varkappa-B+2\theta) d\varkappa + \quad (1.4.22) \\ &+ [\sqrt{k}u_\theta](s+t-\theta) + \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} \sqrt{k(y)}u_\theta(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy. \end{aligned}$$

При исследовании задач управляемости нам понадобятся значения производной решения задачи Фридландера на той же самой прямой  $t = \theta$ , на которой задано значение самого решения  $u_\theta(s)$ . Нетрудно проверить, пользуясь формулой (1.4.11), что дифференцирование двух интегралов в (1.4.21) при  $t = \theta$  дает два одинаковых слагаемых, сумма которых при  $t = \theta$  равна

$$\sqrt{k(s)}u_t(\theta, s) = [\sqrt{k}f]'\left(\frac{s+\theta+A}{2}\right) + 2 \int_{A+\theta}^{\frac{s+\theta+A}{2}} [\sqrt{k}f]'(\varkappa)R_t(s-\theta, s+\theta, A, 2\varkappa-A) d\varkappa.$$

Дифференцирование же слагаемых, порожденных данными на прямой  $t = \theta$  дает

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(t, s) = & - \int_{A+\theta}^{s-t+\theta} \sqrt{k(y)}u_\theta(y)R_{tt}(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy + \\ & + [\sqrt{k}u_\theta](s-t+\theta)(R_\eta - R_\xi)(s-t, s+t, s-t, s-t+2\theta) - [\sqrt{k}u_\theta]'(s-t+\theta). \end{aligned}$$

Заменяя здесь  $R_{tt}$  по формуле (1.4.14), получаем после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(t, s) = & - \int_{A+\theta}^{s-t+\theta} \sqrt{k(y)}[u''_\theta(y) + 2\phi(y)u'_\theta(y)]R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) dy - \\ & + \left[ [\sqrt{k}u_\theta]'(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) - \right. \\ & \left. - [\sqrt{k}u_\theta](y)R_\sigma(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) \right]_{A+\theta}^{s-t+\theta} + \\ & + [\sqrt{k}u_\theta](s-t+\theta)(R_\eta - R_\xi)(s-t, s+t, s-t, s-t+2\theta) - [\sqrt{k}u_\theta]'(s-t+\theta). \end{aligned}$$

Как при  $\xi = A$ , так и при  $\eta = B$  выполнено  $R(\xi, \eta, A, B) = 1$ , кроме того, при  $\xi = A$  совпадают  $R_\sigma$  и  $R_\eta - R_\xi$  (см. (1.4.11)-(1.4.12)), поэтому часть внеинтегральных членов сокращается, и мы приходим для этой части производной к выражению

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(\theta, s) = & - \int_{A+\theta}^s \sqrt{k(y)}[u''_\theta(y) + 2\phi(y)u'_\theta(y)]R(s-\theta, s+\theta, y-\theta, y+\theta) dy + \\ & + [\sqrt{k}u_\theta](A+\theta)R_\sigma(s, s, A+\theta, A+\theta) - [\sqrt{k}u_\theta]'(A+\theta)R(s, s, A+\theta, A+\theta). \end{aligned}$$

Таким образом, производная от решения задачи Фридландера на прямой  $t = \theta$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(\theta, s) = & [\sqrt{k}f]'\left(\frac{s+\theta+A}{2}\right) + 2 \int_{A+\theta}^{\frac{s+\theta+A}{2}} [\sqrt{k}f]'(\chi)R_t(s-\theta, s+\theta, A, 2\chi-A) d\chi - \\ & - \int_{A+\theta}^s \sqrt{k(y)}[u''_\theta(y) + 2\phi(y)u'_\theta(y)]R(s-\theta, s+\theta, y-\theta, y+\theta) dy + \quad (1.4.23) \\ & + [\sqrt{k}u_\theta](A+\theta)R_\sigma(s, s, A+\theta, A+\theta) - [\sqrt{k}u_\theta]'(A+\theta)R(s, s, A+\theta, A+\theta). \end{aligned}$$

Аналогично получается и формула для производной при  $t = \theta$  в случае задачи с условием на характеристике  $s + t = B$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}u_t(\theta, s) &= [\sqrt{k}g]'\left(\frac{s - \theta + B}{2}\right) - 2 \int_{B-\theta}^{\frac{s-\theta+B}{2}} [\sqrt{k}f]'(\chi) R_t(s - \theta, s + \theta, 2\chi - B, B) d\chi + \\ &+ \int_{B-\theta}^s \sqrt{k(y)} [u''_{\theta}(y) + 2\phi(y)u'_{\theta}(y)] R(s - \theta, s + \theta, y - \theta, y + \theta) dy - \quad (1.4.24) \\ &- [\sqrt{k}u_{\theta}](B - \theta) R_{\sigma}(s, s, B - \theta, B - \theta) - [\sqrt{k}u_{\theta}]'(B - \theta) R(s, s, B - \theta, B - \theta). \end{aligned}$$

### 1.4.6 Обоснование формулы среднего значения

В заключение этого параграфа приведем обоснование аналога формулы среднего значения для неоднородной среды:

$$\begin{aligned} k(s+r)u(t, s+r) + k(s-r)u(t, s-r) &= k(s)[u(t+r, s) + u(t-r, s)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_s^{s+r} k'(\sigma) [u(t+r+s-\sigma, \sigma) + u(t-r-s+\sigma, \sigma)] d\sigma - \quad (1.4.25) \\ &- \frac{1}{2} \int_{s-r}^s k'(\sigma) [u(t+r-s+\sigma, \sigma) + u(t-r+s-\sigma, \sigma)] d\sigma. \end{aligned}$$

Эта формула является вариантом формулы, приведенной (без доказательства) Е. И. Моисеевым, В. В. Тихомировым и Е. А. Козловым в [115]. Хотя в [115] формула приводилась для случая негладкого, и даже разрывного коэффициента  $k(s)$ , мы проведем доказательство (1.4.25) в наших прежних предположениях – о его непрерывности и гладкости.

Естественно, мы будем непосредственно доказывать эту формулу лишь для  $t = 0$ , ссылаясь на автономность дифференциального уравнения. Из (1.4.13) при  $\theta = 0$ ,  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  следует, что

$$\begin{aligned} \sqrt{k(s)}[u(t, s) + u(-t, s)] &= [\sqrt{k}u_0](s-t) + [\sqrt{k}u_0](s+t) + \\ &+ \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{k(y)} u_0(y) R_t(s-t, s+t, y, y) dy. \end{aligned}$$

Подставляя это в (1.4.25), получаем

$$k(s+r)u_0(s+r) + k(s-r)u_0(s-r) = \sqrt{k(s)}\{[\sqrt{k}u_0](s-r) + [\sqrt{k}u_0](s+r)\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{k(s)} \int_{s-r}^{s+r} \sqrt{k(y)} u_0(y) R_t(s-r, s+r, y, y) dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_s^{s+r} \frac{k'(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} \left\{ [\sqrt{k}u_0](2\sigma - s - r) + [\sqrt{k}u_0](s+r) \right\} d\sigma + \\
& + \frac{1}{2} \int_s^{s+r} \frac{k'(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} \int_{2\sigma-s-r}^{s+r} \sqrt{k(y)} u_0(y) R_t(2\sigma - s - r, s+r, y, y) dy d\sigma - \\
& - \frac{1}{2} \int_{s-r}^s \frac{k'(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} \left\{ [\sqrt{k}u_0](s-r) + [\sqrt{k}u_0](2\sigma - s + r) \right\} d\sigma - \\
& - \frac{1}{2} \int_{s-r}^s \frac{k'(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} \int_{s-r}^{2\sigma-s+r} \sqrt{k(y)} u_0(y) R_t(s-r, 2\sigma - s + r, y, y) dy d\sigma.
\end{aligned}$$

Некоторые интегралы можно вычислить немедленно (и они сокращаются с внеинтегральными членами), в остальных однократных интегралах можно заменить переменную интегрирования, а в двукратных – поменять местами порядок интегрирования, что приводит наше равенство к виду

$$\begin{aligned}
0 & = \sqrt{k(s)} \int_{s-r}^{s+r} \sqrt{k(y)} u_0(y) R_t(s-r, s+r, y, y) dy + \\
& + \frac{1}{4} \int_{s-r}^{s+r} \frac{k'}{\sqrt{k}} \left( \frac{s+r+y}{2} \right) [\sqrt{k}u_0](y) dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_{s-r}^{s+r} \sqrt{k(y)} u_0(y) \int_s^{\frac{y+r+s}{2}} \frac{k'(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} R_t(2\sigma - s - r, s+r, y, y) d\sigma dy - \\
& - \frac{1}{4} \int_{s-r}^{s+r} \frac{k'}{\sqrt{k}} \left( \frac{y+s-r}{2} \right) [\sqrt{k}u_0](y) dy - \\
& - \frac{1}{2} \int_{s-r}^{s+r} \sqrt{k(y)} u_0(y) \int_{\frac{y+s-r}{2}}^s \frac{k'(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} R_t(s-r, 2\sigma - s + r, y, y) d\sigma dy,
\end{aligned}$$

и для того, чтобы обосновать (1.4.25), нам необходимо и достаточно доказать тождество (мы заменили  $k'/\sqrt{k}$  на  $2\sqrt{k}\phi$ )

$$2 \int_s^{\frac{y+s+r}{2}} \sqrt{k(\sigma)} \phi(\sigma) R_t(2\sigma - s - r, s+r, y, y) d\sigma -$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{\frac{y+s-r}{2}}^s \sqrt{k(\sigma)} \phi(\sigma) R_t(s-r, 2\sigma-s+r, y, y) d\sigma + \\
 & + [\sqrt{k}\phi]\left(\frac{y+s+r}{2}\right) - [\sqrt{k}\phi]\left(\frac{y+s-r}{2}\right) + 2\sqrt{k(s)} R_t(s-r, s+r, y, y) = 0.
 \end{aligned}$$

Последнее же легко устанавливается на основе формулы (1.4.11), из которой, с учетом (1.1.6), следует, что

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{k(\sigma)} \phi(\sigma) R_t(2\sigma-s-r, s+r, y, y) = \\
 & = - \left[ \sqrt{k(\sigma)} \left\{ J\left(\frac{s+r+y}{2}, \frac{s+r-y}{2}, \sigma\right) + \tilde{J}\left(\frac{s+r+y}{2}, \frac{s+r-y}{2}, \sigma\right) \right\} \right]'_{\sigma}, \\
 & 2\sqrt{k(\sigma)} \phi(\sigma) R_t(s-r, 2\sigma-s+r, y, y) = \\
 & = \left[ \sqrt{k(\sigma)} \left\{ J\left(\frac{s-r+y}{2}, \frac{s-r-y}{2}, \sigma\right) + \tilde{J}\left(\frac{s-r+y}{2}, \frac{s-r-y}{2}, \sigma\right) \right\} \right]'_{\sigma},
 \end{aligned}$$

так что вычисление интегралов немедленно подтверждает справедливость нашего тождества.

## Глава 2

# Формулы граничного управления неоднородной струной

### § 2.1 Задача граничной управляемости при $T < l$

#### 2.1.1 Постановка задачи граничной управляемости и анализ методов ее решения

Для уравнения неоднородной струны (1.0.1) рассматриваемого на  $[x_0, x_1]$ , задача, которую обычно называют задачей *граничной управляемости*, ставится следующим образом: определить, при каких условиях для заданных начальных данных  $u_0(s) = u(0, s)$ ,  $v_0(s) = \partial u / \partial t(0, s)$  и конечных данных  $u_T(s) = u(T, s)$ ,  $v_T(s) = \partial u / \partial t(T, s)$  существуют граничные управления  $n(t) = u(t, x_0)$  и  $m(t) = u(t, x_1)$ , которые позволяют перевести струну из заданного начального состояния в заданное конечное. Нашей целью является вывод явных (насколько это вообще возможно) формул для условий и для граничных управлений, позволяющих исчерпывающе описать решение этой задачи.

Задача граничной управляемости – одна из задач, связанных с преобразованием данных, характеризующих решение дифференциального уравнения (начальные и конечные данные преобразуются в граничные). Помимо непосредственного применения в вопросах управления континуумами различной размерности она играет существенную роль и в ряде смежных вопросов, в частности, в обратных задачах [1], [25], [26] (правда, в несколько "облегченном" варианте – когда требуется получить заданное значение только для  $u(T, s)$ , без ограничений на конечную скорость). Хотя в задачах преобразования данных вопрос о разрешимости достаточно давно и детально изучается, причем в самых общих постановках (см., напр., [199], [200], [201]), сам факт существования решения для дальнейшего применения, как правило, мало что дает, поэтому немаловажную роль играет вопрос о предъявлении этого решения явной формулой.



Один из наиболее известных методов построения решения задач граничной управляемости (см., напр., [54, 191]) осуществляется разложением решения в ряд Фурье с определением коэффициентов по начальным и конечным данным и с последующим вычислением по этим коэффициентам граничных данных (как правило, с использованием теорем о разрешимости проблемы моментов). Этот метод, будучи чрезвычайно эффективен для параболических уравнений, при переносе на уравнения гиперболического типа оказывается несколько "петлеобразным": в силу определенного равноправия пространственной и временной переменной начальные и граничные данные "почти одинаковы" (для решений классического одномерного волнового уравнения, имеющих вид  $u(t, x) = f(x + t)$ , функции  $u(t, 0)$  и  $u(0, x)$  просто идентичны), поэтому использование метода Фурье означает, по большому счету, что мы сначала разлагаем некоторую функцию в ряд Фурье, а затем обратно суммируем этот же ряд.

Представляется более естественным получать формулы решения задачи граничной управляемости для гиперболических уравнений более прямым путем – опираясь на волновую природу этих уравнений, т.е. на то, что они, в локальной форме, описывают движущееся состояние среды. С этой точки зрения уже для уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  оказывается, что граничное управление носит "пассивный" характер и состоит, по большому счету, в том, чтобы движение границы определять по той волне, которая в данный момент этой границы достигла. Например, в задаче успокоения управлять необходимо так, чтобы вовремя "гасить" то возмущение, которое достигает границы и не дать ему отразиться назад.

Такой взгляд на задачу управляемости делает очевидным то, что практически любая постановка, связанная с граничными данными (не обязательно нахождение  $u(t, x_0)$  и  $u(t, x_1)$  в случае отрезка), является либо переформулировкой той же самой задачи в других терминах (например, если в нашем распоряжении не сам закон движения правого конца, а сила, которую мы можем к нему прикладывать), либо связана с ограничениями на возможность полной реализации "идеального" принципа – гашения возмущения, приходящего на границу. В последнем случае принцип удастся реализовать лишь частично, выполняя это гашение поэтапно, в несколько шагов, или даже за бесконечное число шагов, но с существенным уменьшением энергии на каждом шаге (задача почти-управляемости). Понятно, что для содержательного анализа такого рода задач необходим не факт существования решения, а его формула.

Наличие явных формул позволяет существенно углубить анализ самой задачи управляемости. Так, оказывается возможным не только указать те значения  $T$ , для которых решение задачи существует для любых началь-

ных и конечных данных, но для тех  $T$ , когда безусловная управляемость отсутствует, выписать условия на начальные и конечные данные, при выполнении которых задача все-таки оказывается разрешимой (условная управляемость). Кроме того, оказывается возможным явно описать тот произвол в граничных управлениях, который допускается в случае, когда решение не единственно. Такого типа результаты были получены в [78]-[81] для однородной струны и для некоторых задач с переменными коэффициентами в уравнении.

### 2.1.2 Упрощения и обозначения

Чтобы избежать усложнения формул за счет несущественной для задачи общности формулировок, мы приведем формулы для случая уравнения (1.0.4), обозначая через  $z_0(s) = z(0, s)$  и  $\zeta_0(s) = z_t(0, s)$  – начальное положение и начальную скорость, а через  $z_T(s) = z(T, s)$  и  $\zeta_T(s) = z_t(T, s)$  – конечное положение и конечную скорость. Граничные управления при этом обозначим через  $\nu(t) = z(t, 0)$  и  $\mu(t) = z(t, l)$ .

Ниже все результаты получены в предположениях, при которых решения уравнения (1.0.4) являются классическими. Это – предположение о непрерывной дифференцируемости  $\phi(s)$  (что соответствует предположению о дважды непрерывной дифференцируемости и положительности  $k(s)$ ), и предположение о достаточной гладкости начальных и конечных данных (дважды непрерывная дифференцируемость для  $z_0, z_T$  и непрерывная дифференцируемость для  $\zeta_0, \zeta_T$ ). Распространение действия полученных формул на случай обобщенных решений (если начальные и конечные данные теряют гладкость) того или иного класса осуществляется стандартной техникой, при этом, как правило, происходит ослабление ограничений на начальные и конечные данные. Распространение же действия этих формул на случай негладких или нерегулярных (когда  $k(s)$  обращается в нуль в отдельных точках) коэффициентов нетривиально и требует дополнительных рассуждений, выходящих за рамки целей, стоящих перед данной работой.

Через  $R(\xi, \eta; a, b)$  обозначим функцию Римана уравнения (1.1.5), т.е. функцию, являющуюся решением этого уравнения и на прямых  $\xi = a$  и  $\eta = b$  принимающую значение, равное единице. Производные от  $R$  по своим аргументам мы, как это было указано в параграфе § 1.4, обозначаем через  $R_\xi, R_\eta, R_a, R_b$ . Кроме того, через  $R_t$  и  $R_s$  обозначаются полные производные по  $t$  и по  $s$  от  $R(s - t, s + t; a, b)$  (которые равны  $R_\eta - R_\xi$  и  $R_\eta + R_\xi$  соответственно), а через  $R_\sigma$  и  $R_\tau$  – полные производные по  $\sigma$  и по  $\tau$  от  $R(\xi, \eta; \sigma - \tau, \sigma + \tau)$  (они равны соответственно  $R_a + R_b$  и  $R_b - R_a$ ).

Через  $\Lambda(y; \xi, \eta; A, B)$  обозначим функцию

$$\begin{aligned} \Lambda(y; \xi, \eta; A, B) = & \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x - A) R_{\eta}(A, 2x - A; y, y) dx - \\ & - \frac{1}{2} R(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4} R(\xi, \eta; A, B) R(A, B; y, y), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

а через  $\Lambda'(y; \xi, \eta; A, B)$  – ее производную  $\Lambda_{\xi} - \Lambda_{\eta} + \Lambda_A - \Lambda_B$ , или, другими словами,

$$\Lambda'(y; \xi, \eta; A, B) = \left. \frac{d}{d\theta} \Lambda(y; \xi + \theta, \eta - \theta; A + \theta, B - \theta) \right|_{\theta=0}. \quad (2.1.2)$$

Оператор  $R_{\alpha}^{\beta} \left[ \begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix} \right]$ , определяемый формулой

$$\begin{aligned} R_{\alpha}^{\beta} \left[ \begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix} \right] (t, s) = & \frac{z(\alpha) + z(\beta)}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [z(y) R_t(s - t, s + t; y, y) + \zeta(y) R(s - t, s + t; y, y)] dy \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

мы будем называть *оператором Римана*, отображающим начальные данные с отрезка  $[\alpha, \beta]$  в точку  $(t, s)$ , операторы  $R_{(\alpha)}^{\beta} \left[ \begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix} \right]$  и  $R_{\alpha}^{(\beta)} \left[ \begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix} \right]$ , отличающиеся от (2.1.3) отсутствием члена с  $z(\alpha)$  или  $z(\beta)$  соответственно – *усеченными операторами Римана*, а оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha}^{\beta} \left[ \begin{smallmatrix} z \\ \zeta \end{smallmatrix} \right] (t, s) = & \frac{z(\beta) - z(\alpha)}{4} R(s - t, s + t; \alpha, \beta) + \\ & + \int_{\alpha}^{\beta} [z(y) \Lambda'(y; s - t, s + t; \alpha, \beta) - \zeta(y) \Lambda(y; s - t, s + t; \alpha, \beta)] dy \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

– *оператором коррекции*, также отображающим начальные данные с отрезка  $[\alpha, \beta]$  в точку  $(t, s)$ .

Наконец, для функции  $z(s)$  через  $Lz$  обозначим функцию  $Lz = z'' - (\phi' + \phi^2)(s)z$ , т.е. результат применения оператора в правой части (2) к функции  $z$ .

### 2.1.3 Решение задачи граничной управляемости в случае $T \leq l$ (теорема об условной управляемости).

**Теорема 2.1.1** *Если  $T \leq l$ , то классическое решение задачи граничной управляемости для уравнения (2) на отрезке  $[0, l]$  существует тогда и*

только тогда, когда начальные и конечные данные  $z_0(s)$ ,  $\zeta_0(s)$ ,  $z_T(s)$ ,  $\zeta_T(s)$  удовлетворяют условиям

$$R_{s-T/2}^{s+T/2} \begin{bmatrix} z_0 - z_T \\ \zeta_0 + \zeta_T \end{bmatrix} (T/2, s) = R_{s-T/2}^{s+T/2} \begin{bmatrix} \zeta_0 - \zeta_T \\ Lz_0 + Lz_T \end{bmatrix} (T/2, s) = 0 \quad (2.1.5)$$

при  $s \in [T/2, l - T/2]$  в случае  $T < l$  и условиям

$$R_0^l \begin{bmatrix} z_0 - z_T \\ \zeta_0 + \zeta_T \end{bmatrix} (l/2, l/2) = 0, \quad (2.1.6)$$

$$\frac{d}{ds} R_{s-l/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} z_0 - z_T \\ \zeta_0 + \zeta_T \end{bmatrix} (l/2, s) \Big|_{s=l/2} = 0, \quad R_0^l \begin{bmatrix} \zeta_0 - \zeta_T \\ Lz_0 + Lz_T \end{bmatrix} (l/2, l/2) = 0, \quad (2.1.7)$$

$$\frac{d}{ds} R_{s-T/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} \zeta_0 - \zeta_T \\ Lz_0 + Lz_T \end{bmatrix} (l/2, s) \Big|_{s=l/2} = 0, \quad R_0^l \begin{bmatrix} Lz_0 - Lz_T \\ L\zeta_0 + L\zeta_T \end{bmatrix} (l/2, l/2) = 0, \quad (2.1.8)$$

в случае  $T = l$ .

При выполнении этих условий граничные управления определяются по  $z_0$ ,  $\zeta_0$ ,  $z_T$ ,  $\zeta_T$  однозначно и даются формулами

$$\nu(t) = \{R_0^t - \Lambda_0^T\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, 0) + \{R_0^{T-t} - \Lambda_0^T\} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (T - t, 0), \quad (2.1.9)$$

$$\mu(t) = \{R_l^{l+t-T} - \Lambda_l^{l-T}\} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t - T, l) + \{R_l^{l-t} - \Lambda_l^{l-T}\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, l). \quad (2.1.10)$$

**Замечание 1.** Формальное увеличение количества условий при  $T = l$  связано с тем, что при  $T < l$  пять условий непрерывности функции  $z$  и ее производных  $z_t$ ,  $z_s$ ,  $z_{ts}$  и  $z_{ss}$  (условие непрерывности  $z_{tt}$  тогда следует из уравнения (1.0.4)) на отрезке  $s \in [T/2, l - T/2]$  прямой  $t = T/2$  не являются независимыми. Три из них – условия непрерывности  $z_s$ ,  $z_{ts}$  и  $z_{ss}$  – являются следствиями условий непрерывности  $z_t$  и  $z$ , так как получаются из них простым дифференцированием по  $s$  (вдоль отрезка). В случае же, когда этот отрезок вырождается в точку, дифференцирование вдоль него невозможно и все пять условий непрерывности для  $z$  и ее производных становятся независимыми друг от друга.

**Замечание 2.** Для того, чтобы выписать условия (2.1.5) и условия (2.1.6)-(2.1.8) в развернутой форме, достаточно подставить в них выражение для оператора Римана из (2.1.3). При этом второе из условий (2.1.8), являющееся условием непрерывности для  $z_{tt}$  (его здесь удобнее использовать, чем условие непрерывности  $z_{ss}$ ), можно понимать непосредственно

через представление (2.1.3) только если сумма  $\zeta_0 + \zeta_T$  имеет "дополнительную" гладкость (т.е. является не один, а два раза непрерывно дифференцируемой). В противном случае мы будем использовать соглашение о представлении оператора Римана на  $L\zeta$  в виде

$$R_\alpha^\beta \begin{bmatrix} 0 \\ L\zeta \end{bmatrix} (t, s) = \frac{\zeta'(\beta)R(s-t, s+t; \beta, \beta) - \zeta'(\alpha)R(s-t, s+t; \alpha, \alpha)}{2} - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\zeta'(y)R_\sigma(s-t, s+t; y, y) + \zeta(y)(\phi' + \phi^2)(y)R(s-t, s+t; y, y)] dy. \quad (2.1.3')$$

**Замечание 3.** При рассмотрении обобщенных решений, допускающих разрывы второй производной (слабые разрывы) условия (2.1.8) опускаются. При допущении же и сильных разрывов у нас остается только условие (2.1.6) (а при  $T < l$  – только первое условие (2.1.5)).

### 2.1.4 Схема обоснования

Обоснование формул осуществляется по известной (см., напр., [78]-[81]) схеме решения задач граничной управляемости. В прямоугольнике  $(t, s) \in [0, T] \times [0, l]$  проводятся характеристики  $s - t = A$  и  $s + t = B$  ( $A$  и  $B$  принимают те или иные значения в зависимости от соотношений между  $T$  и  $l$  и от того, на правой или на левой границе вычисляется граничное управление). Начальные и конечные данные позволяют определить решение начальной задачи в областях ниже и выше точки пересечения характеристик (на плоскости  $(t, s)$ , где ось  $s$  предполагается горизонтальной, а ось  $t$  вертикальной), что дает значения решения на характеристиках. Затем по этим значениям решается задача Гурса, дающая решение слева и справа от точки пересечения. Значения полученных таким образом решений при  $s = 0$  и  $s = l$  соответственно и есть искомые граничные управления.

Если  $T \leq l$ , то условия разрешимости можно представить в виде явного выражения части конечных данных по начальным и остальной части конечных данных. Для этого значения решения на характеристиках приходится подставлять не в формулы решения задачи Гурса, а в формулы решения задачи нахождения решения по его значениям при  $t = \theta$  и на одной из характеристик (эту задачу мы назвали задачей Фридландера – см. п. 1.3.6).

Для оперирования с решениями начальной, начально-краевой задачи, задачи Гурса и Фридландера, мы используем представления решений в наиболее компактной форме – в терминах функции Римана (параграф §1.4).

Принципиальным моментом (на взгляд автора, даже более важным, чем сами формулы граничного управления) является описанная ниже техника упрощения формул, полученных подстановкой решения начальной или начально-краевой задачи в формулы для решения задачи Гурса или Фридландера, на основе *формул свертки* для функции Римана, аналогичных интегральным тождествам для специальных функций (в частности, для функций Бесселя, представляющих функцию Римана при  $\phi(s) \equiv \text{const}$ ). Эти формулы свертки нетривиальны, догадаться об их существовании практически невозможно, и выйти на них удалось лишь через метод распространяющихся волн: поскольку семейство операторов, преобразующих левую и правую волны с течением времени, является группой, формулы свертки имеют место для коэффициентов переноса волн (см. параграф § 1.2), а наличие сверточных формул для функции Римана является уже следствием формул, выражающих функцию Римана через коэффициенты переноса (параграф § 1.4). Подчеркнем, что сам факт возможности упрощения формул позволяет перейти в исследовании гиперболических волновых уравнений от общих обоснований разрешимости сложных, не элементарных задач к вопросам о представлении решений этих задач и к разработке алгоритмов преобразования таких представлений.

### 2.1.5 Формулы решения задачи Гурса с данными, определяемыми через начальные.Свертки функций Римана.

Формулы мы получим для произвольной пары характеристик  $s - t = A$ ,  $s + t = B$ , а далее, в зависимости от того, какой случай рассматривается и что находится, будем подставлять соответствующие значения для  $A$ ,  $B$ ,  $s$  и  $t$ .

Мы приведем, для простоты, формулы, получающиеся из формул параграфа § 1.3 при переходе от уравнения (1.0.2) к уравнению (1.0.4). Формула (1.4.13) решения начальной задачи принимает вид

$$z(t, s) = \frac{z(s - t + \theta) + z(s + t - \theta)}{2} + \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} [z(y)R_t(s - t, s + t, y - \theta, y + \theta) + \zeta(y)R(s - t, s + t, y - \theta, y + \theta)] dy, \quad (2.1.11)$$

производная этого решения равна

$$z_t(t, s) = \frac{\zeta(s - t + \theta) + \zeta(s + t - \theta)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} [\zeta(y)R_t(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta) + Lz(y)R(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)] dy, \quad (2.1.12)$$

а формула (1.4.20) для решения задачи Гурса – вид

$$\begin{aligned} z(t, s) = & \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{A+B}{2}\right) + g\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] R(s-t, s+t, A, B) + \\ & + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} f'(\varkappa) R(s-t, s+t, A, 2\varkappa-A) d\varkappa + \\ & + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s-t+B}{2}} g'(\varkappa) R(s-t, s+t, 2\varkappa-B, B) d\varkappa \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

(мы представили общее значение функций  $f$  и  $g$  в точке пересечения характеристик в виде полусуммы значений этих функций).

Из формулы (2.1.11) подстановками  $t = s-A$  и  $t = B-s$  можно получить значения решения на характеристиках – функции  $f(s)$  и  $g(s)$ :

$$\begin{aligned} f(s) = & \frac{1}{2} [z_\theta(A+\theta) + z_\theta(2s-A-\theta)] + \\ & + \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{2s-A-\theta} [z_\theta(y)R_t(A, 2s-A; y-\theta, y+\theta) + \zeta_\theta(y)R(A, 2s-A; y-\theta, y+\theta)] dy, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} g(s) = & \frac{1}{2} [z_\theta(2s-B+\theta) + z_\theta(B-\theta)] + \\ & + \frac{1}{2} \int_{2s-B+\theta}^{B-\theta} [z_\theta(y)R_t(2s-B, B; y-\theta, y+\theta) + \zeta_\theta(y)R(2s-B, B; y-\theta, y+\theta)] dy, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

дифференцирование (2.1.14) и (2.1.15) дает

$$\begin{aligned} f'(s) = & z'_\theta(2s-A-\theta) + \zeta_\theta(2s-A-\theta) + \\ & + z_\theta(2s-A-\theta)R_t(A, 2s-A; 2s-A-2\theta, 2s-A) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{A+\theta}^{2s-A-\theta} [z_\theta(y)R_{t\eta}(A, 2s-A; y-\theta, y+\theta) + \zeta_\theta(y)R_\eta(A, 2s-A; y-\theta, y+\theta)] dy, \quad (2.1.16)$$

$$g'(s) = z'_\theta(2s-B+\theta) - \zeta_\theta(2s-B+\theta) - z_\theta(2s-B+\theta)R_t(2s-B, B; 2s-B, 2s-B+2\theta) + \int_{2s-B+\theta}^{B-\theta} [z_\theta(y)R_{t\xi}(2s-B, B; y-\theta, y+\theta) + \zeta_\theta(y)R_\xi(2s-B, B; y-\theta, y+\theta)] dy. \quad (2.1.17)$$

Эти функции необходимо подставлять в формулу (2.1.13) решения задачи Гурса при  $\theta = 0$  и при  $\theta = T$ . Нам будет удобно представить формулу (2.1.13) в виде суммы двух слагаемых:

$$z^f(t, s) = \frac{1}{2}f\left(\frac{A+B}{2}\right)R(s-t, s+t; A, B) + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} f'(\varkappa)R(s-t, s+t; A, 2\varkappa-A)d\varkappa \quad (2.1.18)$$

и

$$z^g(t, s) = \frac{1}{2}g\left(\frac{A+B}{2}\right)R(s-t, s+t; A, B) + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s-t+B}{2}} g'(\varkappa)R(s-t, s+t; 2\varkappa-B, B)d\varkappa \quad (2.1.19)$$

Мы подставим (2.1.16) и (2.1.17) в (2.1.18) и (2.1.19) соответственно, выполним упрощения, а затем уже будем просто брать необходимые  $A$ ,  $B$  и  $\theta$  и складывать полученные формулы.

Поскольку и (2.1.16), и (2.1.17) явно разделяется на слагаемые, содержащие  $z_\theta$ , и слагаемые, содержащие  $\zeta_\theta$ , мы выполним подстановку по частям, находя соответственно функции  $z^{fz}$ ,  $z^{f\zeta}$ ,  $z^{gz}$  и  $z^{g\zeta}$ . Поскольку при подстановке появляется зависимость от  $\theta$ ,  $A$  и  $B$ , мы будем явно указывать ее в аргументах – это позволит потом просто указать при суммировании значение этого аргумента.

**Лемма 2.1.1** *Функции  $z^{fz}$ ,  $z^{f\zeta}$ ,  $z^{gz}$  и  $z^{g\zeta}$  выражаются следующими формулами:*

$$z^{f\zeta}(t, s; \theta, A, B) = \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{s+t-\theta} \zeta_\theta(y)R(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) dy +$$



$$+ \int_{A+\theta}^{B-\theta} \zeta_{\theta}(y) \Lambda(y; s-t+\theta, s+t-\theta; A+\theta, B-\theta) dy. \quad (2.1.20)$$

$$\begin{aligned} z^{fz}(t, s; \theta, A, B) &= \frac{1}{2} z_{\theta}(s+t-\theta) + \frac{1}{4} [z_{\theta}(A+\theta) - z_{\theta}(B-\theta)] R(s-t, s+t; A, B) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{A+\theta}^{s+t-\theta} z_{\theta}(y) R_t(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) dy - \\ &- \int_{A+\theta}^{B-\theta} z_{\theta}(y) \Lambda'(y; s-t+\theta, s+t-\theta; A+\theta, B-\theta) dy. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

$$\begin{aligned} z^{g\zeta}(t, s; \theta, A, B) &= \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{B-\theta} \zeta_{\theta}(y) R(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) dy + \\ &- \int_{B-\theta}^{A+\theta} \zeta_{\theta}(y) \Lambda(y; s+t-\theta, s-t+\theta; B-\theta, A+\theta) dy. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$\begin{aligned} z^{gz}(t, s; \theta, A, B) &= \frac{1}{2} z_{\theta}(s-t+\theta) + \frac{1}{4} [z_{\theta}(B-\theta) - z_{\theta}(A+\theta)] R(s-t, s+t; A, B) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{B-\theta} z_{\theta}(y) R_t(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) dy - \\ &- \int_{B-\theta}^{A+\theta} z_{\theta}(y) \Lambda'(y; s+t-\theta, s-t+\theta; B-\theta, A+\theta) dy. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

**Замечание.** Нетрудно видеть, что правые части формул (2.1.20)-(2.1.23) выражаются разностью оператора Римана (2.1.3) и оператора коррекции (2.1.4), так что из этих формул следует, что

$$z^f(t, s; \theta, A, B) = R_{(A+\theta)}^{s+t-\theta} \begin{bmatrix} z_{\theta} \\ \zeta_{\theta} \end{bmatrix} (t-\theta, s) - \Lambda_{A+\theta}^{B-\theta} \begin{bmatrix} z_{\theta} \\ \zeta_{\theta} \end{bmatrix} (t-\theta, s), \quad (2.1.24)$$

$$z^g(t, s; \theta, A, B) = R_{(B-\theta)}^{s-t+\theta} \begin{bmatrix} z_{\theta} \\ -\zeta_{\theta} \end{bmatrix} (\theta-t, s) - \Lambda_{B-\theta}^{A+\theta} \begin{bmatrix} z_{\theta} \\ -\zeta_{\theta} \end{bmatrix} (\theta-t, s). \quad (2.1.25)$$

**Доказательство леммы.** Докажем сначала формулу (2.1.20). Подстановка слагаемых, содержащих  $\zeta_{\theta}$  из (2.1.14) (при  $s = (A+B)/2$ ) и из (2.1.16)

в формулу (2.1.18) дает

$$\begin{aligned}
 z^{f\zeta}(t, s; \theta, A, B) &= \frac{1}{4}R(s-t, s+t; A, B) \int_{A+\theta}^{B-\theta} \zeta_{\theta}(y)R(A, B; y-\theta, y+\theta) dy + \\
 &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \zeta_{\theta}(2\kappa - A - \theta)R(s-t, s+t; A, 2\kappa - A) d\kappa + \\
 &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \int_{A+\theta}^{2\kappa - A - \theta} \zeta_{\theta}(y)R_{\eta}(A, 2\kappa - A; y-\theta, y+\theta)R(s-t, s+t; A, 2\kappa - A) dy d\kappa.
 \end{aligned}$$

Заменяя во втором интеграле переменную интегрирования  $y = 2\kappa - A - \theta$  и меняя в двойном интеграле порядок интегрирования по правилу

$$\int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \int_{A+\theta}^{2\kappa - A - \theta} \dots dy d\kappa = \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} \int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} \dots d\kappa dy + \int_{A+\theta}^{B-\theta} \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} \dots d\kappa dy,$$

получаем

$$\begin{aligned}
 z^{f\zeta}(t, s; \theta, A, B) &= \frac{1}{4}R(s-t, s+t; A, B) \int_{A+\theta}^{B-\theta} \zeta_{\theta}(y)R(A, B; y-\theta, y+\theta) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} \zeta_{\theta}(y)R(s-t, s+t; A, y+\theta) dy + \\
 &+ \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} \zeta_{\theta}(y) \int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\kappa - A)R_{\eta}(A, 2\kappa - A; y-\theta, y+\theta) d\kappa dy + \\
 &+ \int_{A+\theta}^{B-\theta} \zeta_{\theta}(y) \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\kappa - A)R_{\eta}(A, 2\kappa - A; y-\theta, y+\theta) d\kappa dy.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим внутренний интеграл в первом двойном интеграле

$$\int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x - A) R_{\eta}(A, 2x - A; y - \theta, y + \theta) dx$$

Это – решение дифференциального уравнения (1.1.5) (что проверяется прямым дифференцированием), на характеристике  $\eta = y + \theta$  это решение, очевидно, равно нулю, а на характеристике  $\xi = A$  первый множитель под интегралом обращается в единицу, и интеграл оказывается равен

$$\frac{1}{2}[R(A, \eta; y - \theta, y + \theta) - R(A, y + \theta; y - \theta, y + \theta)] = \frac{1}{2}[R(A, \eta; y - \theta, y + \theta) - 1].$$

Нетрудно проверить, что функция  $\frac{1}{2}[R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta) - R(\xi, \eta; A, y + \theta)]$ , также являющаяся решением уравнения (1.1.5), удовлетворяет тем же условиям на характеристиках, и поэтому совпадает с нашим интегралом, так что

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x - A) R_{\eta}(A, 2x - A; y - \theta, y + \theta) dx = \\ & = \frac{1}{2}[R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta) - R(\xi, \eta; A, y + \theta)]. \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

К сожалению, для внутреннего интеграла во втором двойном интеграле подобной формулы получить не удастся, и, скорее всего, ее просто не существует. Поэтому мы введением обозначения (2.1.1) превращаем этот интеграл в

$$\begin{aligned} \Lambda(y; s - t + \theta, s + t - \theta; A + \theta, B - \theta) + \frac{1}{2}R(s - t, s + t; y - \theta, y + \theta) - \\ - \frac{1}{4}R(s - t, s + t; A, B)R(A, B; y - \theta, y + \theta) \end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений и дает, после сокращений, формулу (2.1.20).

Несколько сложнее обстоит дело с формулой (2.1.21). Подстановка в (2.1.18) содержащих  $z_{\theta}$  слагаемых из формулы (2.1.14) (при  $s = (A + B)/2$ ) и из формулы (2.1.16) дает

$$z^{fz}(t, s; \theta, A, B) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} \int_{A+\theta}^{2x-A-\theta} z_{\theta}(y) R_{t\eta}(A, 2x - A; y - \theta, y + \theta) \times$$

$$\begin{aligned} & \times R(s-t, s+t; A, 2\mathfrak{x} - A) dy d\mathfrak{x} + \\ & + \frac{1}{4} \left[ z_\theta(A + \theta) + z_\theta(B - \theta) + \int_{A+\theta}^{B-\theta} z_\theta(y) R_t(A, B; y - \theta, y + \theta) dy \right] \times \\ & \quad \times R(s-t, s+t; A, B) + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\mathfrak{x} - A) \times \\ & \quad \times [z'_\theta(2\mathfrak{x} - A - \theta) + z_\theta(2\mathfrak{x} - A - \theta) R_t(A, 2\mathfrak{x} - A; 2\mathfrak{x} - A - 2\theta, 2\mathfrak{x} - A)] d\mathfrak{x}, \end{aligned}$$

после замены переменной в последнем интеграле и интегрирования в нем по частям первого слагаемого, а также замены порядка интегрирования в двойном интеграле получаем

$$\begin{aligned} z_{fz}(t, s; \theta, A, B) &= \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} z_\theta(y) \int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\mathfrak{x} - A) \times \\ & \quad R_{t\eta}(A, 2\mathfrak{x} - A; y - \theta, y + \theta) d\mathfrak{x} dy + \\ & + \int_{A+\theta}^{B-\theta} z_\theta(y) \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\mathfrak{x} - A) R_{t\eta}(A, 2\mathfrak{x} - A; y - \theta, y + \theta) d\mathfrak{x} dy + \\ & + \frac{1}{4} \left[ z_\theta(A + \theta) + z_\theta(B - \theta) + \int_{A+\theta}^{B-\theta} z_\theta(y) R_t(A, B; y - \theta, y + \theta) dy \right] \times \\ & \quad \times R(s-t, s+t; A, B) + \frac{1}{2} [z_\theta(s+t-\theta) - z_\theta(B-\theta) R(s-t, s+t; A, B)] + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} z_\theta(y) [R_t(A, y+\theta; y-\theta, y+\theta) R(s-t, s+t; A, y+\theta) - \\ & \quad - R_b(s-t, s+t; A, y+\theta)] dy \end{aligned}$$

Поскольку производная  $R_t = R_a - R_b$  (см. (1.4.11)-(1.4.12)) для аргументов  $(s-t, s+t, y-\theta, y+\theta)$  может быть интерпретирована как  $-\frac{d}{d\theta} R(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta)$ , внутренние интегралы могут быть представлены через

производную по  $\theta$  от (2.1.26) и от (2.1.1). Дифференцирование (2.1.1) дает формулу

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\mathcal{X}-A) R_{t\eta}(A, 2\mathcal{X}-A; y-\theta, y+\theta) d\mathcal{X} = \\
 & = -\frac{d}{d\theta} \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+s+t}{2}} R(s-t, s+t; A, 2\mathcal{X}-A) R_{\eta}(A, 2\mathcal{X}-A; y-\theta, y+\theta) d\mathcal{X} = \\
 & = -\frac{d}{d\theta} \Lambda(y; s-t+\theta, s+t-\theta; A+\theta, B-\theta) + \frac{1}{2} R_t(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) - \\
 & \quad - \frac{1}{4} R(\xi, \eta; A, B) R_t(A, B; y-\theta, y+\theta)
 \end{aligned}$$

для второго внутреннего интеграла (напомним, что фигурирующую здесь производную (2.1.2) мы договорились обозначать просто через  $\Lambda'$ ). Для первого же внутреннего интеграла дифференцированием (2.1.26) по  $\theta$  получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{A+y+\theta}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\mathcal{X}-A) R_{t\eta}(A, 2\mathcal{X}-A; y-\theta, y+\theta) d\mathcal{X} = \\
 & = \frac{1}{2} [R_t(\xi, \eta; y-\theta, y+\theta) - R(\xi, \eta; A, y+\theta) R_{\eta}(A, y+\theta; y-\theta, y+\theta) + \\
 & \quad + R_b(\xi, \eta; A, y+\theta)]. \tag{2.1.27}
 \end{aligned}$$

Подставляя все выражения для внутренних интегралов и производя сокращения, приходим к формуле (2.1.21).

Формулы для (2.1.22)-(2.1.23) получаются аналогично, при этом для выражения внутренних интегралов через те же самые  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$  основную роль играет тот факт, что  $R(\xi, \eta; a, b) = R(\eta, \xi; b, a)$ .

### 2.1.6 Доказательство теоремы 2.1.1

В теореме 2.1.1 мы имеем дело со случаем  $T \leq l$ . В этом случае основные проблемы сосредоточены вокруг условий разрешимости задачи. Если начальные и конечные данные совместны, то решение – функции  $\nu(t)$  и  $\mu(t)$  – получаются по формулам (2.1.24)-(2.1.25) в виде  $\nu(t) = z^f(t, 0; 0, 0, T) +$

$z^g(t, 0; T, 0, T)$ ,  $\mu(t) = z^f(t, l; T, l - T, l) + z^g(t, l; 0, l - T, l)$ , что и дает формулы (2.1.9)-(2.1.10); при этом в формулах для  $\mu$  удобно выполнить приведение аргументов к  $(t, 0)$ , используя следующее из (2.1.3) равенство

$$R_{(\alpha)}^{\beta} \begin{bmatrix} z \\ -\zeta \end{bmatrix} (-t, s) = R_{\beta}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s).$$

Обсудим теперь условия разрешимости задачи. Эти условия могут быть описаны несколькими способами. Простейший из них – симметричная форма, указанная в формулировке теоремы 2.1.1 (другие формы условий будут обсуждаться в следующем параграфе). Она получается из следующих соображений. Проведем в прямоугольнике  $0 \leq s \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$  характеристики  $s - t = 0$ ,  $s + t = T$ ,  $s - t = l - T$ ,  $s + t = l$  и обозначим  $M_1 = (0, 0)$ ,  $M_2 = (T/2, T/2)$ ,  $M_3 = (T, 0)$ ,  $M_4 = (l/2, l/2)$ ,  $M_5 = (T, l)$ ,  $M_6 = (T/2, l - T/2)$ ,  $M_7 = (0, l)$  и  $M_8 = (T - l/2, l/2)$ . Гладкие начальные условия однозначно определяют гладкое (классическое) решение в треугольнике  $M_0M_4M_7$ , конечные – в треугольнике  $M_3M_8M_5$ , эти два решения совпадают на общей части – в квадрате  $M_8M_2M_4M_6$  тогда и только тогда, когда они совпадают на отрезке  $M_2M_6$  вместе с производной по  $t$ . В этом случае одно решение является гладким продолжением другого, поэтому сужения этого решения на каждую из указанных характеристик является гладким, и решение может быть гладко продолжено, как решение задачи Гурса, в левый треугольник  $M_1M_2M_3$  и в правый треугольник  $M_5M_6M_7$ . Условия совпадения решений и их производных на отрезке  $M_2M_6$  и есть условия (2.1.5), они получаются путем приравнивания результатов подстановки в (2.1.11) и (2.1.12) с одной стороны – значений  $\theta = 0$ ,  $t = T/2$ , а с другой – значений  $\theta = T$ ,  $t = T/2$ . Приведение интегралов к подобию осуществляется с использованием тождеств из следствий 1-2 леммы 1.4.2  $R(\xi + \theta, \eta - \theta; a + \theta, b - \theta) = R(\xi, \eta; a, b) = R(\eta, \xi; b, a)$  и получаемых из них дифференцированием тождеств  $R_t(\xi + \theta, \eta - \theta; a + \theta, b - \theta) = R_t(\xi, \eta; a, b) = -R_t(\eta, \xi; b, a)$ . Доказательство теоремы 2.1.1 завершено.

## § 2.2 Выражение конечных данных через начальные в задачах условной управляемости

В этом параграфе, как и в предыдущем, рассматривается задача граничной управляемости для уравнения (1.0.4): по заданным начальным данным  $z_0(s) = z(0, s)$  и  $\zeta_0(s) = z_t(0, s)$  и конечным данным  $z_T(s) = z(T, s)$  и  $\zeta_T(s) = z_t(T, s)$  найти такие граничные управления  $\nu(t) = z(t, 0)$  и  $\mu(t) = z(t, l)$ , которые позволяют перевести струну из заданного начального состояния в заданное конечное. Как следует из теоремы 2.1.1, при  $T \leq l$  решение имеется только при выполнении некоторых дополнительных условий. Эти условия разрешимости, очевидно, определяют часть данных по остальным данным. Конечно, хотелось бы уметь разрешать эти условия относительно конечных или относительно начальных данных и, если такое разрешение осуществлено, то выписать формулы для управлений через те данные, которые могут быть выбраны произвольным образом и не связаны никакими ограничениями.

### 2.2.1 Формулировки теорем

Здесь, как и ранее, через  $R(\xi, \eta, a, b)$  обозначается функция Римана (1.1.5) с производными (1.4.7)-(1.4.12), через  $\Lambda(y; \xi, \eta, A, B)$  – функция (2.1.1), а через  $\Lambda'(y; \xi, \eta, A, B)$  – ее производная (2.1.2). В формулировках будут, как и в предыдущем параграфе, использоваться операторы Римана (2.1.3) и коррекции (2.1.4).

**Теорема 2.2.1** *При  $T \leq l/2$  условия, обеспечивающие разрешимость задачи граничного управления (условия (2.1.5) теоремы 2.1.1) могут быть переписаны в форме, явно выражающей конечную скорость на всем  $[0, l]$ , конечное состояние на  $[T, l - T]$  и граничные управления через начальные данные и значения конечного состояния  $z_T$  на  $[0, T]$  и на  $[l - T, l]$ :*

$$z_T(s) = R_{s-T}^{s+T} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, s), \quad \zeta_T(s) = R_{s-T}^{s+T} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ Lz_0 \end{bmatrix} (T, s), \quad s \in [T, l - T]; \quad (2.2.1)$$

$$\zeta_T(s) = 2R_s^{(T)} \begin{bmatrix} 0 \\ Lz_T \end{bmatrix} (0, s) + 2 \left\{ R_{(0)}^{s+T} - \Lambda_0^{2T} \right\} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ Lz_0 \end{bmatrix} (T, s), \quad s \in [0, T]; \quad (2.2.2)$$

$$\zeta_T(s) = 2R_{(l-T)}^s \begin{bmatrix} 0 \\ Lz_T \end{bmatrix} (0, s) + 2 \left\{ R_{(l)}^{s-T} - \Lambda_l^{l-2T} \right\} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ -Lz_0 \end{bmatrix} (T, s), \quad s \in [l - T, l]. \quad (2.2.3)$$

При этом начальные данные и значения конечного состояния  $z_T$  на  $[0, T]$  и на  $[l - T, l]$  оказываются уже свободными, не связанными никакими ограничениями, если не считать значений  $z_T$  и ее производных в точках  $s = T$  и  $s = l - T$ , которые должны определяться формулами

$$z_T(T - 0) = R_0^{2T} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, T), \quad z'_T(T - 0) = \frac{d}{ds} R_{s-T}^{s+T} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, s) \Big|_{s=T},$$

$$(Lz_T)(T - 0) = R_0^{2T} \begin{bmatrix} Lz_0 \\ L\zeta_0 \end{bmatrix} (T, T) \quad (2.2.4)$$

в точке  $s = T$  и формулами

$$z_T(l - T + 0) = R_{l-2T}^l \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, T), \quad z'_T(l - T + 0) = \frac{d}{ds} R_{s-T}^{s+T} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, s) \Big|_{s=l-T},$$

$$(Lz_T)(l - T + 0) = R_{l-2T}^l \begin{bmatrix} Lz_0 \\ L\zeta_0 \end{bmatrix} (T, l - T) \quad (2.2.5)$$

в точке  $s = l - T$ .

Только через свободные данные выражаются и граничные управления

$$\nu(t) = 2R_{T-t}^{(T)} \begin{bmatrix} z_T \\ 0 \end{bmatrix} + \left( R_{(0)}^t - \Lambda_0^{2T} \right) \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, 0) - \left( R_{(0)}^{2T-t} - \Lambda_0^{2T} \right) \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (2T - t, 0), \quad (2.2.6)$$

$$\mu(t) = 2R_{(l-T)}^{l+t-T} \begin{bmatrix} z_T \\ 0 \end{bmatrix} + \left( R_{(l)}^{l-t} - \Lambda_l^{l-2T} \right) \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, l) -$$

$$- \left( R_{(l)}^{l+t-2T} - \Lambda_l^{l-2T} \right) \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (t - 2T, l). \quad (2.2.7)$$

**Замечание.** И в (2.2.4), и в (2.2.5) используется принятое в предыдущем параграфе соглашение для лишь один раз непрерывно дифференцируемой функции  $\zeta(s)$  считать

$$R_\alpha^\beta \begin{bmatrix} 0 \\ L\zeta \end{bmatrix} (t, s) = \frac{\zeta'(\beta)R(s - t, s + t; \beta, \beta) - \zeta'(\alpha)R(s - t, s + t; \alpha, \alpha)}{2} -$$

$$\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\zeta'(y)R_\sigma(s - t, s + t; y, y) + \zeta(y)(\phi' + \phi^2)(y)R(s - t, s + t; y, y)] dy. \quad (2.1.3')$$

**Теорема 2.2.2** При  $l/2 < T < l$  условия, обеспечивающие разрешимость задачи граничного управления (условия (2.1.5) теоремы 2.1.1) могут быть переписаны в форме, явно выражающей конечную скорость на



$[0, l - T]$  и на  $[0, T]$  через начальные данные, конечное состояние  $z_T$  и значения конечной скорости на  $[l - T, T]$ . На  $[0, l - T]$  эта скорость дается формулой

$$\zeta_T(s) = 2 \left\{ R_{(0)}^{s+T} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ -Lz_0 \end{bmatrix} (T, s) - 2 \left\{ R_{(T)}^s - \Lambda_T^{l-T} \right\} \begin{bmatrix} \zeta_T \\ Lz_T \end{bmatrix} (0, s), \quad (2.2.8)$$

а на  $[T, l]$  - формулой

$$\zeta_T(s) = -2 \left\{ R_{(l)}^{s-T} - \Lambda_l^0 \right\} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ -Lz_0 \end{bmatrix} (-T, s) - 2 \left\{ R_{(l-T)}^s - \Lambda_{l-T}^T \right\} \begin{bmatrix} \zeta_T \\ -Lz_T \end{bmatrix} (0, s). \quad (2.2.9)$$

Через свободные данные выражаются и граничные управления: при  $0 \leq t \leq 2T - l$

$$\nu(t) = \left\{ R_{(0)}^t - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, 0) + \left\{ R_{(l-T)}^{T-t} - \Lambda_{l-T}^T \right\} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (T - t, 0), \quad (2.2.10)$$

$$\mu(t) = \left\{ R_{(l)}^{l+T-t} - \Lambda_l^0 \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, l) + \left\{ R_{(T)}^{l-T+t} - \Lambda_T^{l-T} \right\} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t - T, l), \quad (2.2.11)$$

а при  $2T - l \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \left\{ R_{(0)}^t - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, 0) - \left\{ R_{(0)}^{2T-t} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (2T - t, 0) + \\ &+ 2R_{T-t}^{(T)} \begin{bmatrix} z_T \\ 0 \end{bmatrix} (t - T, 0) - \Lambda_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (T - t, 0) + \Lambda_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t - T, 0), \quad (2.2.12) \\ \mu(t) &= \left\{ R_{(l)}^{l-t} - \Lambda_l^0 \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, l) - \left\{ R_{(l)}^{l-2T+t} - \Lambda_l^0 \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (t - 2T, l) + \\ &+ 2R_{(l-T)}^{l-T+t} \begin{bmatrix} z_T \\ 0 \end{bmatrix} (t - T, l) - \Lambda_{l-T}^T \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (t - T, l) + \Lambda_{l-T}^T \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (T - t, l). \quad (2.2.13) \end{aligned}$$

Значения  $z_T$  и  $\zeta_T$  и их производных в точках  $T$  и  $l - T$  соотношениями (2.2.8)-(2.2.9) не определяются (при этих значениях  $s$  они обращаются в тождества), а должны быть найдены из пяти условий, играющих ту же роль, что и условия (2.1.6)-(2.1.8) при  $l = T$  в теореме 2.1.1

$$\begin{aligned} R_0^l \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right) &= R_{l-T}^T \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right), \\ R_0^l \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ Lz_0 \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right) &= R_{l-T}^T \begin{bmatrix} \zeta_T \\ -Lz_T \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right), \quad (2.2.14) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds} R_{s-l/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, s \right) \Big|_{s=l/2} = \frac{d}{ds} R_{s-T-l/2}^{s+T-l/2} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, s \right) \Big|_{s=l/2}, \quad (2.2.15)$$

$$\frac{d}{ds} R_{s-l/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ Lz_0 \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, s \right) \Big|_{s=l/2} = \frac{d}{ds} R_{s-T-l/2}^{s+T-l/2} \begin{bmatrix} \zeta_T \\ -Lz_T \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, s \right) \Big|_{s=l/2}, \quad (2.2.16)$$

$$R_0^l \begin{bmatrix} Lz_0 \\ L\zeta_0 \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right) = R_{l-T}^T \begin{bmatrix} Lz_T \\ -L\zeta_T \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right). \quad (2.2.17)$$

**Замечание.** В постановках задач граничной управляемости, используемых для решения обратных задач (Boundary Control Method или, короче, ВС-метод – см. [25]), необходимо при нулевых начальных условиях получить заданное конечное состояние, конечная скорость при этом не задается. Для этой постановки из теорем 2-3 немедленно следует, что при  $T > l/2$  управляемость имеет место: в этом случае формулы (2.2.8)-(2.2.9) превращаются просто в явное описание той конечной скорости, которая не задавалась. При  $T < l/2$  управляемость отсутствует, так как условие (2.2.1) исключает произвол в выборе конечного состояния  $z_T$ . В "пограничном" случае  $T = l/2$  управляемость имеет место при выполнении тройного условия  $z_T(l/2) = z_T'(l/2) = z_T''(l/2) = 0$  (которое, естественно, может быть ослаблено путем перехода от классических решений к обобщенным – тогда в нем остаются условия только на те производные, для которых в соответствующем понимании решения значения в точке определены), и граничные управления описывается формулами

$$\nu(t) = z_T(T-t) + \int_{T-t}^T z_T(y) R_t(T-t, t-T; y, y) dy,$$

$$\mu(t) = z_T(l+t-T) + \int_{l-T}^{l+t-T} z_T(y) R_t(l-t+T, l+t-T; y, y) dy.$$

### 2.2.2 Формулы решения краевых задач

Мы приведем формулы, получаемые из формул § 1.4 при переходе от уравнения (1.0.2) к уравнению (1.0.4), которые будем использовать в доказательстве теорем 2.2.1-2.2.2.

Для решения начальной задачи с заданными значениями  $z_\theta(s) = z(\theta, s)$  и  $\zeta_\theta(s) = z_t(\theta, s)$  на прямой  $t = \theta$  формула решения имеет вид

$$z(t, s) = \frac{1}{2} [z_\theta(s-t+\theta) + z_\theta(s+t-\theta)] +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} [z_\theta(y)R_t(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) + \zeta_\theta(y)R(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta)] dy, \quad (2.1.11)$$

а ее производная описывается формулой

$$z_t(t, s) = \frac{1}{2}[\zeta_\theta(s+t-\theta) + \zeta_\theta(s-t+\theta)] + \frac{1}{2} \int_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} [\zeta_\theta(y)R_t(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) + (Lz_\theta)(y)R(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) dy]. \quad (2.1.12)$$

В терминах обозначений (2.1.3)

$$z(t, s) = R_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \begin{bmatrix} z_\theta \\ \zeta_\theta \end{bmatrix} (t-\theta, s), \quad z_t(t, s) = R_{s-t+\theta}^{s+t-\theta} \begin{bmatrix} \zeta_\theta \\ Lz_\theta \end{bmatrix} (t-\theta, s).$$

Для решения задачи Гурса с данными на характеристиках  $z|_{s-t=A} = f(s)$ ,  $z|_{s+t=B} = g(s)$  в предположении согласования данных  $f([A+B]/2) = g([A+B]/2)$  решение дается формулой

$$z(t, s) = \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{A+B}{2}\right) + g\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] R(s-t, s+t; A, B) + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} f'(\varkappa)R(s-t, s+t; A, 2\varkappa-A) d\varkappa + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s-t+B}{2}} g'(\varkappa)R(s-t, s+t; 2\varkappa-B, B) d\varkappa. \quad (2.1.13)$$

Формула решения задачи Фридландера (с данными на характеристике и на прямой  $t = \theta$ ) в случае характеристики  $s - t = A$  имеет вид

$$z(t, s) = \int_{A+\theta}^{\frac{s+t+A}{2}} f'(\varkappa)R(s-t, s+t; A, 2\varkappa-A) d\varkappa - \int_{A+\theta}^{\frac{s-t+A}{2} + \theta} f'(\varkappa)R(s-t, s+t; 2\varkappa-A-2\theta, A+2\theta) d\varkappa + z_\theta(s-t+\theta) - \int_{A+\theta}^{s-t+\theta} z_\theta(y)R_t(s-t, s+t; y-\theta, y+\theta) dy, \quad (2.2.18)$$

где  $f(s)$  – значения решения на характеристике, а  $z_\theta(s)$  – значения решения на прямой  $t = \theta$ . В случае характеристики  $s + t = B$  решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 z(t, s) = & z_\theta(s + t - \theta) + \int_{B-\theta}^{s+t-\theta} z_\theta(y) R_t(s - t, s + t; y - \theta, y + \theta) dy + \\
 & + \int_{B-\theta}^{\frac{s-t+B}{2}} g'(\chi) R(s - t, s + t; 2\chi - B, B) d\chi - \\
 & - \int_{B-\theta}^{\frac{s+t+B}{2} - \theta} g'(\chi) R(s - t, s + t; B - 2\theta, 2\chi - B + 2\theta) d\chi. \quad (2.2.19)
 \end{aligned}$$

В целях сокращения выкладок мы будем использовать полученные в п. 2.1.5 формулы, дающие результат подстановки в формулу (2.1.13) решения задачи Гурса данных на характеристиках  $z|_{s-t=A} = f(s)$ ,  $z|_{s+t=B} = g(s)$ , которые вычислены по начальным (при  $t = 0$ ) и конечным (при  $t = \theta$ ) данным: слева и справа от точки пересечения характеристик это решение описывается соответственно формулами

$$\begin{aligned}
 z(t, s) &= z^f(t, s; 0, A, B) + z^g(t, s; \theta, A, B), \\
 z(t, s) &= z^g(t, s; 0, A, B) + z^f(t, s; \theta, A, B),
 \end{aligned}$$

где  $z^f$  и  $z^g$  определяются формулами

$$z^f(t, s; \theta, A, B) = R_{(A+\theta)}^{s+t-\theta} \begin{bmatrix} z_\theta \\ \zeta_\theta \end{bmatrix} (t - \theta, s) - \Lambda_{A+\theta}^{B-\theta} \begin{bmatrix} z_\theta \\ \zeta_\theta \end{bmatrix} (t - \theta, s), \quad (2.1.24)$$

$$z^g(t, s; \theta, A, B) = R_{(B-\theta)}^{s-t+\theta} \begin{bmatrix} z_\theta \\ -\zeta_\theta \end{bmatrix} (\theta - t, s) - \Lambda_{B-\theta}^{A+\theta} \begin{bmatrix} z_\theta \\ -\zeta_\theta \end{bmatrix} (\theta - t, s). \quad (2.1.25)$$

### 2.2.3 Поправочный коэффициент $\Lambda(y; \xi, \eta; A, B)$

Поскольку в доказательстве теорем 2.2.1-2.2.2 нам придется постоянно использовать поправочный коэффициент и его производные, мы приведем формулы их выражения и найдем значения  $\Lambda$  и  $\Lambda_y$  при  $y = A$  и  $y = B$ . Прежде всего воспроизведем формулу (2.1.1)

$$\Lambda(y; \xi, \eta; A, B) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta, A; 2\chi - A) R_\eta(A, 2\chi - A; y, y) d\chi -$$

$$-\frac{1}{2}R(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y, y), \quad (2.1.1)$$

и ее дифференцированием получим производные от  $\Lambda$  по  $t, y$ , а также  $\Lambda'(y; \xi, \eta; A, B)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_t(y; \xi, \eta; A, B) &= \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R_t(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_\eta(A, 2\kappa - A; y, y) d\kappa + \\ &+ \frac{1}{2}R_\eta(A, \eta; y, y) - \frac{1}{2}R_t(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4}R_t(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y, y), \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_y(y; \xi, \eta; A, B) &= \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_{\sigma\eta}(A, 2\kappa - A; y, y) d\kappa - \\ &- \frac{1}{2}R_\sigma(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R_\sigma(A, B; y, y), \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned} \Lambda'(y; \xi, \eta; A, B) &= - \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_{t\eta}(A, 2\kappa - A; y, y) d\kappa + \\ &+ \frac{1}{2}R_t(\xi, \eta; y, y) - \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R_t(A, B; y, y). \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Производные  $\Lambda'$  и  $\Lambda_t$  связаны между собой. Действительно, их сумма равна  $\Lambda_A - \Lambda_B$ , а обе эти производные выражаются конечными формулами. Для  $\Lambda_B$  это получается непосредственным дифференцированием (2.1.1)

$$\Lambda_B(y; \xi, \eta; A, B) = \frac{1}{4}[R_b(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y, y) - R(\xi, \eta; A, B)R_\eta(A, B; y, y)]. \quad (2.2.23)$$

В формуле же производной  $\Lambda_A$

$$\begin{aligned} \Lambda_A(y; \xi, \eta; A, B) &= \frac{1}{2}R_\eta(A, \eta; y, y) - \frac{1}{2}R(\xi, \eta; A, B)R_\eta(A, B; y, y) + \\ &+ \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} [(R_a - R_b)(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_\eta(A, 2\kappa - A; y, y) + \\ &+ R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)(R_{\eta\xi} - R_{\eta\eta})(A, 2\kappa - A; y, y)] d\kappa + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}[R_a(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y, y) + R(\xi, \eta; A, B)R_\xi(A, B; y, y)]$$

после преобразования под интегралом слагаемого

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_{\eta\xi}(A, 2\kappa - A; y, y) &= \\ &= R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)\frac{1}{4}(\phi' + \phi^2)(\kappa)R(A, 2\kappa - A; y, y) = \\ &= R_{ab}(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R(A, 2\kappa - A; y, y) \end{aligned}$$

подынтегральное выражение оказывается полной производной по  $\kappa$  от

$$\frac{1}{2}[R_a(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R(A, 2\kappa - A; y, y) - R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_\eta(A, 2\kappa - A; y, y)],$$

что позволяет вычислить интеграл и после сокращений дает для  $\Lambda_A$  формулу

$$\begin{aligned} \Lambda_A(y; \xi, \eta; A, B) &= \\ &= \frac{1}{4}[R(\xi, \eta; A, B)R_\xi(A, B; y, y) - R_a(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y, y)]. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Вычитая из формулы (2.2.24) формулу (2.2.23), получаем, что

$$\begin{aligned} \Lambda_t(y; \xi, \eta; A, B) + \Lambda'(y; \xi, \eta; A, B) &= \frac{1}{4}[R(\xi, \eta; A, B)R_s(A, B; y, y) - \\ & - R_\sigma(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y, y)]. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Повторным дифференцированием получаются вторые производные

$$\begin{aligned} (\Lambda')_t(y; \xi, \eta; A, B) &= - \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R_t(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_{t\eta}(A, 2\kappa - A; y, y) d\kappa - \\ & - \frac{1}{2}R_{t\eta}(A, \eta; y, y) + \frac{1}{2}R_{tt}(\xi, \eta; y, y) - \frac{1}{4}R_t(\xi, \eta; A, B)R_t(A, B; y, y) \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

и

$$\begin{aligned} \Lambda_{yy}(y; \xi, \eta; A, B) &= \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A)R_{\sigma\sigma\eta}(A, 2\kappa - A; y, y) d\kappa \\ & - \frac{1}{2}R_{\sigma\sigma}(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R_{\sigma\sigma}(A, B; y, y) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

(здесь следует отметить, что производная  $R_{\sigma\sigma\eta}$  существует и непрерывна – это следует, например из формулы (1.4.12)). Эти производные также связаны между собой: используя равенство (1.4.14), получаем из (2.2.27), что

$$\Lambda_{yy}(y; \xi, \eta; A, B) - [\phi'(y) + \phi^2(y)]\Lambda(y; \xi, \eta; A, B) = -\frac{1}{2}R_{tt}(\xi, \eta; y, y) + \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R_{tt}(A, B; y, y) + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\mathcal{X} - A)R_{tt\eta}(A, 2\mathcal{X} - A; y, y) d\mathcal{X},$$

и сложение этого равенства с (2.2.26) дает

$$\begin{aligned} & \Lambda_{yy}(y; \xi, \eta; A, B) - (\phi'(y) + \phi^2(y))\Lambda(y; \xi, \eta; A, B) + (\Lambda')_t(y; \xi, \eta; A, B) = \\ & = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} [R(\xi, \eta; A, 2\mathcal{X} - A)R_{tt\eta}(A, 2\mathcal{X} - A; y, y) - \\ & - R_t(\xi, \eta; A, 2\mathcal{X} - A)R_{t\eta}(A, 2\mathcal{X} - A; y, y)] d\mathcal{X} - \frac{1}{2}R_{t\eta}(A, \eta; y, y) + \\ & + \frac{1}{4}[R(\xi, \eta; A, B)R_{tt}(A, B; y, y) - R_t(\xi, \eta; A, B)R_t(A, B; y, y)]. \end{aligned}$$

Поскольку под интегралом стоит полная производная:

$$\begin{aligned} & R(\xi, \eta; A, B)R_{tt\eta}(A, B; y, y) - R_t(\xi, \eta; A, B)R_{t\eta}(A, B; y, y) = \\ & = \frac{d}{dB}[R(\xi, \eta; A, B)R_{t\eta}(A, B; y, y) - R_a(\xi, \eta; A, B)R_t(A, B; y, y)] \end{aligned}$$

(что проверяется раскрытием производной в правой части, использованием тождеств

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta} &= \frac{1}{4} \left[ \phi' \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right) + \phi^2 \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right) \right] R, \\ R_{ab} &= \frac{1}{4} \left[ \phi' \left( \frac{a + b}{2} \right) + \phi^2 \left( \frac{a + b}{2} \right) \right] R \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

и равенств  $R_a - R_b = R_\eta - R_\xi = R_t$ ), после подстановки и сокращений получаем окончательно

$$\begin{aligned} & \Lambda_{yy}(y; \xi, \eta; A, B) - (\phi'(y) + \phi^2(y))\Lambda(y; \xi, \eta; A, B) + (\Lambda')_t(y; \xi, \eta; A, B) = \\ & = \frac{1}{4}[R_\sigma(\xi, \eta; A, B)R_t(A, B; y, y) - R(\xi, \eta; A, B)R_{ts}(A, B; y, y)]. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Кроме того, нам понадобятся значения  $\Lambda$  и ее первых производных по  $y$  при  $y = A, B$ . Что касается значений самой функции, то они равны

$$\begin{aligned}\Lambda(A; \xi, \eta; A, B) &= -\frac{1}{2}R(\xi, \eta; A, A) + \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B), \\ \Lambda(B; \xi, \eta; A, B) &= -\frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)\end{aligned}\quad (2.2.30)$$

(первое – поскольку  $R_\eta(\xi, \eta; a, b) = 0$  при  $\xi = a$ , а второе – в силу формулы (2.1.26), которая при  $\theta = 0$  принимает вид

$$\int_{\frac{A+y}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x - A) R_\eta(A, 2x - A; y, y) dx = \frac{1}{2}[R(\xi, \eta; y, y) - R(\xi, \eta; A, y)].\quad (2.2.31)$$

Что касается значений при  $y = A, B$  производной по  $y$ , то

$$\Lambda_y(B; \xi, \eta; A, B) = \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R_s(A, B; B, B) - \frac{1}{2}R_b(\xi, \eta; A, B)\quad (2.2.32)$$

– это получается подстановкой  $y = B$  в формулу

$$\begin{aligned}\int_{\frac{A+y}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x - A) R_{\sigma\eta}(A, 2x - A; y, y) dx &= \frac{1}{2}R(\xi, \eta; A, y)R_\eta(A, y; y, y) + \\ &+ \frac{1}{2}R_\sigma(\xi, \eta; y, y) - \frac{1}{2}R_b(\xi, \eta; A, y),\end{aligned}\quad (2.2.33)$$

получающуюся дифференцированием (2.2.31). Для вычисления же  $\Lambda_y(A; \xi, \eta; A, B)$  нам придется явно посчитать второй множитель под интегралом:

$$R_{\sigma\eta}(A, \eta; A, A) = \frac{d}{d\eta}R_\sigma(A, \eta; A, A).$$

Поскольку при  $\xi = a$  выполнено  $R_\eta(\xi, \eta; a, b) = R_b(\xi, \eta; a, b) = 0$ ,

$$R_\sigma(A, \eta; A, A) = -R_\tau(A, \eta; A, A) = R_t(A, \eta; A, A) = -R_\xi(A, \eta; A, A),$$

значит

$$R_{\sigma\eta}(A, \eta; A, A) = -R_{\xi\eta}(A, \eta; A, A) = -\frac{1}{4}[\phi' + \phi^2] \left( \frac{A + \eta}{2} \right) R(A, \eta; A, A),$$



а поскольку второй множитель равен единице,  $R_{\sigma\eta}(A, 2\mathcal{X} - A; A, A) = -\frac{1}{4}(\phi' + \phi^2)(\mathcal{X})$ . Но тогда, в силу второго равенства (2.2.28) подынтегральное выражение удастся представить в виде

$$-R_{ab}(\xi, \eta; A, 2\mathcal{X} - A) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\mathcal{X}} R_a(\xi, \eta; A, 2\mathcal{X} - A)$$

и интеграл полностью вычисляется, что дает нам (с учетом того, что  $R_a(\xi, \eta; a, b) = 0$  при  $b = \eta$ )

$$\begin{aligned} \Lambda_y(A; \xi, \eta; A, B) &= \frac{1}{2} R_a(\xi, \eta; A, B) - \\ &- \frac{1}{2} R_\sigma(\xi, \eta; A, A) + \frac{1}{4} R(\xi, \eta; A, B) R_\sigma(A, B; A, A). \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

#### 2.2.4 Доказательство теоремы 2.2.1

В условиях теоремы 2.2.1 ( $T \leq l/2$ ) треугольник  $(0, 0) - (l/2, l/2) - (0, l)$  "накрывает" часть прямой  $t = T$ , и тогда на этом отрезке конечные данные должны просто определяться формулами (2.1.11), (2.1.12) для решения начальной задачи с  $\theta = 0$ ,  $t = T$ ,  $z = z_0$ ,  $\zeta = \zeta_0$ . Это и есть, с учетом обозначений (2.1.3), формулы (2.2.3).

На отрезках же  $[0, T]$  и  $[l - T, l]$ , лежащих вне этого треугольника, одно из конечных данных определяется другим (например, конечная скорость – конечным положением), которое может уже задаваться почти произвольно (единственное ограничение – требование непрерывности  $z_T(s)$  и ее производных в точках  $s = T$  и  $s = l - T$  дает условия (2.2.4) и (2.2.5) соответственно). Действительно, поскольку начальные данные определяют однозначно решение на характеристиках  $s = t$  и  $s + t = l$  вплоть до пересечения с прямой  $t = T$ , в "левом" и "правом" треугольниках, отсекаемых этими характеристиками, мы оказываемся в условиях задачи Фридландера. Для ее решения необходимо воспользоваться формулами, полученными нами в п. 2.1.5: в формулу (2.2.18) подставить производную  $f'(s)$  значения  $f(s) = z(s - A, s)$  решения (2.1.11) при  $s - t = A$  и значение  $z_T(s)$  решения на прямой  $t = T$ .

Для того, чтобы не повторять снова все преобразования, связанные с подстановкой, мы можем использовать соображения симметрии, которые мы уже один раз проэксплуатировали в предыдущем параграфе, и которые состоят в том, что первые два слагаемых формулы (2.2.18) получаются из формулы решения задачи Гурса, если  $g(s) = -f(s)$  на прямой  $s + t = A + 2T$ . Чтобы этого добиться, достаточно на прямой  $t = 2T$  взять

"симметричные" начальным данные  $z_{2T}(s) = -z_0(s)$ ,  $\zeta_{2T}(s) = \zeta_0(s)$  и воспользоваться формулами (2.1.24) при  $\theta = A = 0$ ,  $B = 2T$  и (2.1.25) при  $A = 0$ ,  $B = \theta = 2T$ . Это дает для решения представление в виде

$$z(t, s) = (R_0^{s+t} - \Lambda_0^{2T}) \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, s) - (R_0^{s-t+2T} - \Lambda_0^{2T}) \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (2T - t, s) + \\ + 2R_{s-t+T}^{(T)} \begin{bmatrix} z_T \\ 0 \end{bmatrix} (t - T, s). \quad (2.2.35)$$

Подстановка сюда  $s = 0$  приводит к (2.2.6). Вычисление же производной при  $t = T$  позволяет получить условие (2.2.2). При этом существенно упрощает вычисление тот факт, что при  $t = T$  совпадают между собой как производные от пары слагаемых, представленных операторами Римана от начальных данных, так и производные от пары слагаемых, представленных операторами коррекции, поэтому производные достаточно вычислять только для одного слагаемого из каждой пары.

**Лемма 2.2.1** *Производные оператора Римана и оператора коррекции описываются следующими формулами:*

$$\frac{d}{dt} R_{(\alpha)}^{s+t} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) = R_{(\alpha)}^{s+t} \begin{bmatrix} \zeta \\ Lz \end{bmatrix} (t, s) + \\ + \frac{1}{2} [z'(\alpha) R(s-t, s+t; \alpha, \alpha) - z(\alpha) R_\sigma(s-t, s+t; \alpha, \alpha)], \quad (2.2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \Lambda_\alpha^\beta \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) = \Lambda_\alpha^\beta \begin{bmatrix} \zeta \\ Lz \end{bmatrix} (t, s) + \\ + \frac{1}{2} [z'(\alpha) R(s-t, s+t; \alpha, \alpha) - z(\alpha) R_\sigma(s-t, s+t; \alpha, \alpha)] + \\ + \frac{1}{2} R_\sigma(s-t, s+t; \alpha, \beta) \left\{ R_\alpha^\beta \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) \right\}_{\substack{s-t=\alpha \\ s+t=\beta}} - \\ - \frac{1}{2} R(s-t, s+t; \alpha, \beta) \left\{ \frac{d}{ds} R_{s-t}^{s+t} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) \right\}_{\substack{s-t=\alpha \\ s+t=\beta}}. \quad (2.2.37)$$

**Доказательство** формулы (2.2.36) осуществляется прямым дифференцированием с последующей заменой  $R_{tt}$  по формуле (1.4.14) и интегрированием по частям выражения  $z(y) R_{\sigma\sigma}(s-t, s+t; y, y)$ , в котором второй множитель интерпретируется как вторая производная по  $y$  от  $R(s-t, s+t; y, y)$ .

Формула (2.2.37) обосновывается аналогично, только выкладки требуются более громоздкие. Дифференцирование (2.1.4) дает

$$\frac{d}{dt} \Lambda_\alpha^\beta \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} (t, s) = \frac{1}{4} [z(\beta) - z(\alpha)] R_t(s-t, s+t; \alpha, \beta) +$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} [z(y)\Lambda'_t(y; s-t, s+t; \alpha, \beta) - \zeta(y)\Lambda_t(y; s-t, s+t; \alpha, \beta)] dy.$$

Выражая в интеграле  $\Lambda_t$  через  $\Lambda'$  по формуле (2.2.25), а  $(\Lambda')_t$  – через  $\Lambda_{yy}$  по формуле (2.2.29) и интегрируя  $z(y)\Lambda_{yy}$  по частям с использованием (2.2.30), (2.2.32), (2.2.34), мы получаем, после выделения указанных в правой части (2.2.37) слагаемых, что все оставшиеся внеинтегральные члены взаимно уничтожаются, и тем самым формула (2.2.37) также оказывается справедливой. Лемма доказана.

Подстановка формул (2.2.36)-(2.2.37) в формулу производной от (2.2.35) дает как раз (2.2.2), так как в силу (2.2.1)

$$z_T(T) = R_0^{2T} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, T), \quad z'_T(T) = \frac{d}{ds} R_{s-T}^{s+T} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T, s) \Big|_{s=T},$$

так что все дополнительные слагаемые, возникающие при дифференцировании, взаимно уничтожаются.

Формулы (2.2.3) и (2.2.7) получаются аналогично. Теорема 2.2.1 доказана.

### 2.2.5 Доказательство теоремы 2.2.2.

Для получения формул решения проведем характеристики  $s = t$  и  $s+t = l$ , а через точки пересечения каждой из них с прямой  $t = T$  проведем еще по одной характеристике, которые будут описываться уравнениями  $s - t = l - 2T$  и  $s + t = 2T$  соответственно. Эти дополнительные характеристики разобьют каждый из четырехугольников  $(0, 0)-(T, 0)-(T, l-T)-(l/2, l/2)$  и  $(l, 0)-(T, l)-(T, T)-(l/2, l/2)$  на треугольник и трапецию. Внутри трапеции нам удобнее вычислять решение, считая его решением задачи Гурса с данными на характеристиках  $s = t$  и  $s+t = l$ , а в треугольниках  $(2T-l, 0)-(T, 0)-(l-T, T)$  и  $(2T-l, l) - (T, l) - (T, T)$  – как решение задачи Фридландера на треугольниках  $(0, 0)-(0, T)-(T, T)$  и  $(0, l) - (T, l) - (l-T, T)$  соответственно.

Условие двукратной непрерывной дифференцируемости полученных решений обеспечивается пятью условиями (2.2.14)-(2.2.17), которые согласовывают решение, получаемое ниже точки пересечения характеристик  $s = t$  и  $s+t = l$ , исходя из начальных данных, и решение, получаемое выше точки пересечения характеристик, исходя из конечных данных.

Поскольку формулы (2.2.10)-(2.2.11), задающие граничные управления при  $t \leq 2T - l$ , получаются простой подстановкой в

$$\nu(t) = z^f(t, 0; 0, 0, l) + z^g(t, 0; T, 0, l), \quad \mu(t) = z^f(t, l; T, 0, l) + z^g(t, l; 0, 0, l),$$

выражений  $z^f$  и  $z^g$  по формулам (2.1.24)-(2.1.25), мы сосредоточимся на второй части задачи – вычислении решения в треугольниках.

Рассмотрим сначала треугольник  $(0, 0)-(0, T)-(T, T)$ . Здесь мы уже не можем воспользоваться формулами (2.1.24)-(2.1.25), поскольку значения  $z(t, s)$  на характеристике  $s - t = 0$  теперь определяются начальными данными только при  $s \leq l/2$ , а при  $s \geq l/2$  они задаются уже конечными данными, из-за чего первые два интеграла в (2.2.18) приходится каждый делить на две части, подставляя при  $\varkappa < l/2$  одну формулу, а при  $\varkappa > l/2$  – другую.

Однако ничто не мешает проследовать схеме, которая использовалась в доказательстве теоремы 2.1.1 при выводе самих формул (2.1.24)-(2.1.25). Для этого мы обозначим сужение функции  $f(s)$  на  $[0, l/2]$ , определяемое начальными условиями, через  $f_0(s)$ , ее сужение на  $[l/2, T]$ , определяемое конечными условиями – через  $f_T(s)$ , а решение  $z(t, s)$ , получаемое подстановкой в (51) функции  $f(s)$ , представим в виде суммы  $z^{f_0}(t, s)$  и  $z^{f_T}(t, s)$  слагаемых, зависящих от начальных и конечных данных соответственно.

Продифференцировав

$$f_0(s) = \frac{1}{2}[z_0(0) + z_0(2s)] + \frac{1}{2} \int_0^{2s} [z_0(y)R_t(0, 2s; y, y) + \zeta_0(y)R(0, 2s; y, y)] dy,$$

$$f_T(s) = \frac{1}{2}[z_T(T) + z_T(2s - T)] - \frac{1}{2} \int_{2s-T}^T [z_T(y)R_t(0, 2s; y - T, y + T) + \zeta_T(y)R(0, 2s; y - T, y + T)] dy,$$

и подставив полученные значения производных

$$f'_0(s) = z'_0(2s) + z_0(2s)R_t(0, 2s; 2s, 2s) + \zeta_0(2s) + \int_0^{2s} [z_0(y)R_{t\eta}(0, 2s; y, y) + \zeta_0(y)R_\eta(0, 2s; y, y)] dy,$$

$$f'_T(s) = z'_T(2s - T) + z_T(2s - T)R_t(0, 2s; 2s - 2T, 2s) + \zeta_T(2s - T) - \int_{2s-T}^T [z_T(y)R_{t\eta}(0, 2s; y - T, y + T) + \zeta_T(y)R_\eta(0, 2s; y - T, y + T)] dy,$$

в (51), получим для  $z^{f_0}$  и  $z^{f_T}$  выражения

$$\begin{aligned}
z^{f_0}(t, s) = & - \int_{\frac{s+t}{2}}^{l/2} [z'_0(2\mathfrak{x}) + z_0(2\mathfrak{x})R_t(0, 2\mathfrak{x}; 2\mathfrak{x}, 2\mathfrak{x}) + \zeta_0(2\mathfrak{x})] \times \\
& \times R(s-t, s+t; 0, 2\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} - \\
& - \int_{\frac{s+t}{2}}^{l/2} \int_0^{2\mathfrak{x}} [z_0(y)R_{t\eta}(0, 2\mathfrak{x}; y, y) + \zeta_0(y)R_\eta(0, 2\mathfrak{x}; y, y)] R(s-t, s+t; 0, 2\mathfrak{x}) dy d\mathfrak{x} + \\
& + \int_{\frac{s-t}{2} + T}^{l/2} [z'_0(2\mathfrak{x}) + z_0(2\mathfrak{x})R_t(0, 2\mathfrak{x}; 2\mathfrak{x}, 2\mathfrak{x}) + \zeta_0(2\mathfrak{x})] R(s-t, s+t; 2\mathfrak{x} - 2T, 2T) d\mathfrak{x} + \\
& + \int_{\frac{s-t}{2} + T}^{l/2} \int_0^{2\mathfrak{x}} [z_0(y)R_{t\eta}(0, 2\mathfrak{x}; y, y) + \zeta_0(y)R_\eta(0, 2\mathfrak{x}; y, y)] \times \\
& \times R(s-t, s+t; 2\mathfrak{x} - 2T, 2T) dy d\mathfrak{x}, \\
z^{f_T}(t, s) = & - \int_{\frac{l}{2}}^T [z'_T(2\mathfrak{x} - T) + z_T(2\mathfrak{x} - T)R_t(0, 2\mathfrak{x}; 2\mathfrak{x} - 2T, 2\mathfrak{x}) + \zeta_T(2\mathfrak{x} - T)] \times \\
& \times R(s-t, s+t; 0, 2\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} + \\
& + \int_{l/2}^T \int_{2\mathfrak{x}-T}^T [z_T(y)R_{t\eta}(0, 2\mathfrak{x}; y - T, y + T) + \zeta_T(y)R_\eta(0, 2\mathfrak{x}; y - T, y + T)] \times \\
& \times R(s-t, s+t; 0, 2\mathfrak{x}) dy d\mathfrak{x} + \\
& + \int_{l/2}^T [z'_T(2\mathfrak{x} - T) + z_T(2\mathfrak{x} - T)R_t(0, 2\mathfrak{x}; 2\mathfrak{x} - 2T, 2\mathfrak{x}) + \zeta_T(2\mathfrak{x} - T)] \times \\
& \times R(s-t, s+t; 2\mathfrak{x} - 2T, 2T) d\mathfrak{x} - \\
& - \int_{l/2}^T \int_{2\mathfrak{x}-T}^T [z_T(y)R_{t\eta}(0, 2\mathfrak{x}; y - T, y + T) + \zeta_T(y)R_\eta(0, 2\mathfrak{x}; y - T, y + T)] \times \\
& \times R(s-t, s+t; 2\mathfrak{x} - 2T, 2T) dy d\mathfrak{x}.
\end{aligned}$$

**Лемма 2.2.2** *Выражения  $z^{f_0}$  и  $z^{f_T}$  приводятся к виду*

$$z^{f_0}(t, s) = \left\{ R_{(0)}^{s+t} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, s) - \left\{ R_{(0)}^{s+2T-t} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (2T - t, s) + \\ + \frac{1}{2} [R(s-t, s+t; l-2T, 2T) - R(s-t, s+t; 0, l)] R_0^l \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right), \quad (2.2.38)$$

$$z^{f_T}(t, s) = \Lambda_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t-T, s) - \Lambda_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (T-t, s) + \\ + \frac{1}{2} [R(s-t, s+t; 0, l) - R(s-t, s+t; l-2T, 2T)] R_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2} - T, \frac{l}{2} \right). \quad (2.2.39)$$

**Доказательство** осуществляется преобразованиями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 2.1.1: в однократных интегралах осуществляется замена переменной, слагаемые, содержащие  $z'_\theta$  интегрируются по частям, а двойные интегралы выражаются с помощью формул (2.1.1), (2.2.22), (2.2.31) и формулы (2.1.27) при  $\theta = 0$

$$\int_{\frac{A+y}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2\kappa - A) R_{t\eta}(A, 2\kappa - A; y, y) d\kappa = \\ = \frac{1}{2} [R_t(\xi, \eta; y, y) - R(\xi, \eta; A, y) R_\eta(A, y; y, y) + R_b(\xi, \eta; A, y)].$$

Подстановка формул (2.2.38), (2.2.39) в формулу (2.2.18) дает для решения формулу

$$z(t, s) = \left\{ R_{(0)}^{s+t} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, s) - \left\{ R_{(0)}^{s+2T-t} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (2T - t, s) + \\ + 2R_{s-t+T}^{(T)} \begin{bmatrix} z_T \\ 0 \end{bmatrix} (t-T, s) + \Lambda_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t-T, s) - \Lambda_T^{l-T} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (T-t, s) \quad (2.2.40)$$

(при этом последние слагаемые в (2.2.38) и (2.2.39) уничтожились ввиду (2.2.14)). Из этой формулы при  $s = 0$  получается (2.2.12). Дифференцирование же (2.2.40) по формулам (2.2.36)-(2.2.37) леммы 2.2.1 дает, после подстановки  $t = T$ , формулу (2.2.8). Аналогичные рассуждения в треугольнике  $(0, l)$ - $(T, l)$ - $(l - T, T)$  позволяют из формулы (2.2.19) получить формулы (2.2.13) и (2.2.9). Теорема доказана.

## § 2.3 Задача граничной управляемости при $T > l$

### 2.3.1 Случай $T > l$ . Формулировка теоремы о безусловной управляемости.

Здесь мы, как и в случае теорем 2.1.1-2.2.2, используем выражение решения с помощью функции Римана  $R(\xi, \eta; a, b)$  уравнения (1.1.5), функции  $\Lambda(y; \xi, \eta; A, B)$  и порождаемых ими операторов Римана и операторов коррекции. Однако, в отличие от предыдущих случаев, нам понадобится переносить данные не только с горизонтальных прямых  $t = 0, t = T$ , но и с вертикальных  $s = 0, s = l$ . Для этого нам понадобится использовать несколько другие модификации оператора Римана

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\alpha^\beta \left[ \begin{array}{c} z \\ \zeta \end{array} \right]_\sigma (t, s) = \frac{z(\alpha) + z(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\zeta(\tau) R(s-t, s+t; \sigma-\tau, \sigma+\tau) - \\ - z(\tau) R_\sigma(s-t, s+t; \sigma-\tau, \sigma+\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

и оператора коррекции

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\alpha^\beta \left[ \begin{array}{c} z \\ \zeta \end{array} \right]_\sigma (t, s; A, B) = \frac{1}{4} [z(\beta) - z(\alpha)] R(s-t, s+t, A, B) - \\ - \int_\alpha^\beta [\zeta(\tau) \Lambda(\sigma; s-t, s+t; A-\tau, B+\tau) - z(\tau) \Lambda_y(\sigma; s-t, s+t; A-\tau, B+\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

а также соответствующие усеченные операторы  $\tilde{R}_{(\alpha)}^\beta, \tilde{R}_\alpha^{(\beta)}, \tilde{R}_{(\alpha)}^{(\beta)}$ , и усеченные операторы коррекции  $\tilde{\Lambda}_\alpha^{(\beta)}$  и  $\tilde{\Lambda}_{(\alpha)}^\beta$  (взятие в круглые скобки индексов  $\alpha$  и/или  $\beta$  по-прежнему означает отсутствие соответствующих внеинтегральных членов).

Оператор (2.3.1) описывает перенос данных  $z(t) = z(t, \sigma)$  и  $\zeta(t) = z_s(t, \sigma)$  с вертикальной прямой  $s = \sigma$  в точку  $(t, s)$ . Индекс  $\sigma$  за квадратной скобкой в (2.3.1)-(2.3.2) указывает, с какой вертикальной прямой переносятся данные, указанные в квадратных скобках.

**Теорема 2.3.1** *Если  $T > l$ , то классическое решение задачи граничной управляемости для уравнения (1.0.4) на отрезке  $[0, l]$  существует для любых начальных и конечных данных  $z_0(s), \zeta_0(s), z_T(s), \zeta_T(s)$ , однако оно не единственно. Произвол задается выбором граничных режимов  $\nu(t) = \nu^*(t), \mu(t) = \mu^*(t)$  при  $0 \leq t \leq T - l$ . Если этот режим задан, то граничные управления при  $T - l \leq t \leq T$  определяются формулами*

$$\nu(t) = \left\{ R_{(l-T)}^t - \Lambda_{l-T}^T \right\} \left[ \begin{array}{c} z_0 \\ \zeta_0 \end{array} \right] (t, 0) + \left\{ R_{(0)}^{T-t} - \Lambda_0^l \right\} \left[ \begin{array}{c} z_T \\ -\zeta_T \end{array} \right] (T-t, 0) +$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(T-l-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, 0) - \tilde{\Lambda}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, 0; l - T, T) \right\} - \\
& -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{(t-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, 0) - \tilde{\Lambda}_{(0)}^{(T-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, 0; l - T, T) \right\} + \\
& +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{t-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, 0) - \tilde{\Lambda}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, 0; l - T, T) \right\} - \\
& -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(T-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, 0) - \tilde{\Lambda}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, 0; l - T, T) \right\}, \\
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \left\{ R_{(T)}^{l-t} - \Lambda_T^{l-T} \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, l) + \left\{ R_{(l)}^{l+t-T} - \Lambda_l^0 \right\} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t - T, l) + \\
& +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(t-l-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, l) + \tilde{\Lambda}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, -l; -T, T - l) \right\} - \\
& -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{(T-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, l) + \tilde{\Lambda}_{(0)}^{(T-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, -l; -T, T - l) \right\} + \\
& +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, l) + \tilde{\Lambda}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-l-2lm} (t, -l; -T, T - l) \right\} - \\
& -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(t-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, l) + \tilde{\Lambda}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-l+2lm} (t, -l; -T, T - l) \right\}. \\
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Произвольные функции  $\nu_*(t)$  и  $\mu_*(t)$  заданы на  $[0, T - l]$ , и должны удовлетворять, для того, чтобы решение было классическим, шести условиям согласования при  $t = 0$

$$\begin{aligned}
\nu_*(+0) &= z_0(0), \quad \dot{\nu}_*(+0) = \zeta_0(0), \quad \ddot{\nu}_*(+0) = Lz_0(0), \\
\mu_*(+0) &= z_0(l), \quad \dot{\mu}_*(+0) = \zeta_0(l), \quad \ddot{\mu}_*(+0) = Lz_0(l),
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

и пяти условиям согласования (аналогичным условиям (2.1.6)-(2.1.8) теоремы 2.1.1), в точке пересечения характеристик, решения, полученного ниже точки пересечения характеристик, исходя из начальных данных совместно с граничными режимами  $\nu_*$ ,  $\mu_*$  и решения, полученного выше точки пересечения характеристик - исходя из конечных данных. Эти условия имеют вид

$$R_{l-T}^T \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right) - R_0^l \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right) +$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2lm) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 2lm) \right\} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-2lm} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 2lm) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2lm) \right\} = 0, \tag{2.3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{l-T}^T \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ Lz_0 \end{bmatrix} (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2}) - R_0^l \begin{bmatrix} \zeta_T \\ -Lz_T \end{bmatrix} (\frac{l}{2}, \frac{l}{2}) + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2lm) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 2lm) \right\} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-2lm} \begin{bmatrix} \nu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 2lm) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2lm) \right\} = 0, \tag{2.3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left[ R_{s-T+l/2}^{s+T-l/2} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (T - \frac{l}{2}, s) - R_{s-l/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (\frac{l}{2}, s) + \right. \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{T-l/2-s-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (T - \frac{l}{2}, s + 2lm) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{(0)}^{T-l/2-s+2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (T - \frac{l}{2}, s - 2lm) \right\} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-l/2+s-2lm} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (T - \frac{l}{2}, s - 2lm) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{T+l/2-s-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (T - \frac{l}{2}, s + 2lm) \right\} \Big]_{s=l/2} = 0, \tag{2.3.8}
\end{aligned}$$

$$R_{l-T}^T \begin{bmatrix} Lz_0 \\ L\zeta_0 \end{bmatrix} (T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2}) - R_0^l \begin{bmatrix} Lz_T \\ -L\zeta_T \end{bmatrix} (\frac{l}{2}, \frac{l}{2}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu''_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2lm \right) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu''_* \\ 0 \end{bmatrix}_l \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 2lm \right) \right\} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-2lm} \begin{bmatrix} \nu''_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 2lm \right) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu''_* \\ 0 \end{bmatrix}_l \left( T - \frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2lm \right) \right\} = 0, \tag{2.3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left[ R_{s-T+l/2}^{s+T-l/2} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ Lz_0 \end{bmatrix} \left( T - \frac{l}{2}, s \right) - R_{s-l/2}^{s+l/2} \begin{bmatrix} \zeta_T \\ -Lz_T \end{bmatrix} \left( \frac{l}{2}, s \right) + \right. \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{T-l/2-s-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 \left( T - \frac{l}{2}, s + 2lm \right) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{(0)}^{T-l/2-s+2lm} \begin{bmatrix} \mu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_l \left( T - \frac{l}{2}, s - 2lm \right) \right\} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-l/2+s-2lm} \begin{bmatrix} \nu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 \left( T - \frac{l}{2}, s - 2lm \right) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \tilde{R}_{T+l/2-s-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu'_* \\ 0 \end{bmatrix}_l \left( T - \frac{l}{2}, s + 2lm \right) \right\} \Bigg]_{s=l/2} = 0. \tag{2.3.10}
\end{aligned}$$

Во всех формулах (2.3.3)-(2.3.4), (2.3.6)-(2.3.10) считается формально  $\nu_*(\tau) = \mu_*(\tau) \equiv 0$  при  $\tau < 0$ , так что суммирование реально происходит только по тем значениям  $m$ , для которых соответствующие индексы у  $\tilde{R}$  и  $\tilde{\Lambda}$  будут положительными.

### 2.3.2 Доказательство теоремы 2.3.1

Доказательство в целом осуществляется все по той же схеме, что и доказательство теорем 2.1.1-2.2.2. На этот раз мы будем продолжать решение через характеристики  $s - t = l - T$  и  $s + t = T$ . Выше точки пересечения этих характеристик решение определяется формулой (2.1.11) при  $\theta = T$ , что в терминах оператора (2.1.3) выражается формулой

$$z(t, s) = R_{s+t-T}^{s-t+T} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (T - t, s). \tag{2.3.11}$$

Ниже точки пересечения характеристик решение описывается суммой формулы (2.1.11) при  $\theta = 0$  и формул

$$z(t, s) = \sum_{m=0}^{\infty} [\nu_*(t - s - 2lm) + \int_0^{t-s-2lm} \nu_*(\tau) R_\sigma(s + 2lm - t, s + 2lm + t; -\tau, \tau) d\tau] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\nu_*(t + s - 2lm) + \int_0^{t+s-2lm} \nu_*(\tau) R_\sigma(s - 2lm - t, s - 2lm + t; -\tau, \tau) d\tau \right], \quad (2.3.12)$$

$$z(t, s) = \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_*(t + s - l - 2lm) - \int_0^{t+s-l-2lm} \mu_*(\tau) R_\sigma(s - 2lm - t, s - 2lm + t; l - \tau, l + \tau) d\tau] - \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_*(t - s - l - 2lm) + \int_0^{t-s-l-2lm} \mu_*(\tau) R_\sigma(s + 2lm - t, s + 2lm + t; -l - \tau, -l + \tau) d\tau], \quad (2.3.13)$$

получаемых из 1.4.17 и (1.4.19) соответственно. В терминах введенных операторов переноса решение смешанной задачи ниже точки пересечения характеристик может быть представлено в виде

$$z(t, s) = R_{s-t}^{s+t} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, s) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{t-s-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (t, s + 2lm) + \tilde{R}_{(0)}^{t+s-l(2m+1)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (t, s - 2lm) \right\} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{t+s-2lm} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_0 (t, s - 2lm) + \tilde{R}_{t-s-l(2m-1)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_l (t, s + 2lm) \right\}. \quad (2.3.14)$$

Для выражения условий гладкой стыковки решений (2.3.11)-(2.3.14) в точке пересечения характеристик  $(T-l/2, l/2)$  нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 2.3.1** Производные по  $t$  от операторов  $\tilde{R}$  выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{R}_{s-t+\sigma}^{s+t-\sigma} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}_\sigma (t, s) &= \tilde{R}_{s-t+\sigma}^{s+t-\sigma} \begin{bmatrix} z' \\ \zeta' \end{bmatrix}_\sigma (t, s), \\ \frac{d}{dt} \tilde{R}_{(\alpha)}^{s+t-\sigma} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}_\sigma (t, s) &= \tilde{R}_{(\alpha)}^{s+t-\sigma} \begin{bmatrix} z' \\ \zeta' \end{bmatrix}_\sigma (t, s) + \\ &+ \frac{1}{2} [\zeta(\alpha) R(s-t, s+t, \sigma-\alpha, \sigma+\alpha) - z(\alpha) R_\sigma(s-t, s+t, \sigma-\alpha, \sigma+\alpha)]. \end{aligned}$$

**Доказательство** проводится прямым дифференцированием и использованием того, что  $R_t = -R_\tau$ , что позволяет проинтегрировать полученные интегралы по частям, и приводит к требуемым формулам. Можно поступить и по-другому: сделав замену в интегралах  $\tau - t = y$ , получить выражения, в которых от  $t$  зависят только интегрируемые функции  $z, \zeta$ , так что дифференцирование просто переносится на эти функции через знак интеграла. Лемма доказана.

Из леммы следует, что при дифференцировании (2.3.14) по  $t$  следует заменить  $\nu_*$  и  $\mu_*$  на производные этих функций и учесть внеинтегральные члены. Как было показано в п. 1.4.3, эти члены уничтожаются теми дополнительными членами, которые возникают при дифференцировании последнего слагаемого в (2.3.14) из-за разрывов нечетно продолженных за пределы  $[0, l]$  начальных условий  $z_0(s)$  и  $\zeta_0(s)$  (при этом существенную роль играют как раз условия (2.3.5)). В результате условия согласования решений (2.3.11) и (2.3.14) выражаются в форме соотношений (2.3.6)-(2.3.10).

Для определения же граничных управлений  $\nu(t)$  и  $\mu(t)$  при  $t \geq T - l$  нам необходимо найти значения обоих найденных нами решений (2.3.11), (2.3.14) на характеристиках, и подставить их в формулу (2.1.13) для решения задачи Гурса. Здесь мы снова можем воспользоваться формулами (2.1.24)-(2.1.25), дающими результат подстановки в эту формулу той части формул (2.3.11)-(2.3.14), которая определяется начальными и конечными данными (они равны  $z^f(t, s; 0, l - T, T)$  и  $z^g(t, s; T, l - T, T)$  слева от точки пересечения характеристик и  $z^g(t, s; 0, l - T, T)$  и  $z^f(t, s; T, l - T, T)$  справа от этой точки), однако это дает нам лишь часть решения, поскольку на нижней половине характеристик значения решения определяются не только начальными данными, но и граничными режимами  $\nu(t) = \nu_*(t)$  и  $\mu(t) = \mu_*(t)$  при  $0 \leq t \leq T - l$ . Поэтому решение слева от точки пересечения характеристик будет представлять собой сумму

$$z(t, s) = z^f(t, s; 0, l - T, T) + z^g(t, s; T, l - T, T) +$$

$$+z^{f\nu}(t, s; l - T, T) + z^{f\mu}(t, s; l - T, T),$$

а справа – сумму

$$z(t, s) = z^f(t, s; T, l - T, T) + z^g(t, s; 0, l - T, T) + z^{g\nu}(t, s; l - T, T) + z^{g\mu}(t, s; l - T, T),$$

где  $z^{f\nu}(t, s; A, B)$ ,  $z^{f\mu}(t, s; A, B)$ ,  $z^{g\nu}(t, s; A, B)$  и  $z^{g\mu}(t, s; A, B)$  – результат подстановки в формулу (2.1.13) функций  $f_{\nu, \mu}(s)$  и  $g_{\nu, \mu}(s)$ , вычисляемых как значения (2.3.12) и (2.3.13) на характеристиках  $s - t = A$  и  $s + t = B$  соответственно

$$f_{\nu}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \nu_*(-A - 2lm) + \int_0^{-A-2lm} \nu_*(\tau) R_{\sigma}(A + 2lm, 2s - A + 2lm, -\tau, \tau) d\tau \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \nu_*(2s - A - 2lm) - \int_0^{2s-A-2lm} \nu_*(\tau) R_{\sigma}(A - 2lm, 2s - A - 2lm, -\tau, \tau) d\tau \right], \quad (2.3.15)$$

$$f_{\mu}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_*(2s - A - l(2m + 1)) - \int_0^{2s-A-l(2m+1)} \mu_*(\tau) R_{\sigma}(A - 2lm, 2s - A - 2lm, l - \tau, l + \tau) d\tau] - \sum_{m=1}^{\infty} [\mu_*(-A - l(2m - 1)) + \int_0^{-A-l(2m-1)} \mu_*(\tau) R_{\sigma}(A + 2lm, 2s - A + 2lm, l - \tau, l + \tau) d\tau],$$

$$g_{\nu}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} [\nu_*(B - 2s - 2lm) + \int_0^{B-2s-2lm} \nu_*(\tau) R_{\sigma}(2s + 2lm - B, B + 2lm, -\tau, \tau) d\tau] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \nu_*(B - 2lm) - \int_0^{B-2lm} \nu_*(\tau) R_{\sigma}(2s - 2lm - B, B - 2lm, -\tau, \tau) d\tau \right],$$

$$g_{\mu}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_*(B - l(2m + 1)) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{B-l(2m+1)} \mu_*(\tau) R_\sigma(2s - 2lm - B, B - 2lm, l - \tau, l + \tau) d\tau \Big] - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \mu_*(B - 2s - l(2m - 1)) + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^{B-2s-l(2m-1)} \mu_*(\tau) R_\sigma(2s + 2lm - B, B + 2lm, l - \tau, l + \tau) d\tau \right].
 \end{aligned}$$

**Лемма 2.3.2** Функции  $z^{f\nu}(t, s; A, B)$ ,  $z^{f\mu}(t, s; A, B)$ ,  $z^{g\nu}(t, s; A, B)$  и  $z^{g\mu}(t, s; A, B)$  выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 z^{f\nu}(t, s; A, B) = & 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(-A-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, s) - \right. \\
 & \left. - \tilde{\Lambda}_{-A-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, s; A, B) \right\} - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{(s+t-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, s) - \tilde{\Lambda}_{(0)}^{(B-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, s; A, B) \right\}, \quad (2.3.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z^{f\mu}(t, s; A, B) = & 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{s+t-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, s) - \right. \\
 & \left. - \tilde{\Lambda}_{(0)}^{B-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, s; A, B) \right\} - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(l-2lm-A)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, s) - \tilde{\Lambda}_{l-2lm-A}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, s; A, B) \right\}, \quad (2.3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z^{g\nu}(t, s; A, B) = & 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(t-s-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, s) + \right. \\
 & \left. + \tilde{\Lambda}_{-A-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, -s; -B, -A) \right\} - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{(B-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, s) + \tilde{\Lambda}_{(0)}^{(B-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, -s; -B, -A) \right\}, \quad (2.3.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z^{g\mu}(t, s; A, B) = & 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{B-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm}(t, s) + \right. \\
 & \left. + \tilde{\Lambda}_{(0)}^{B-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-l-2lm}(t, -s; -B, -A) \right\} - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(t-s+l-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm}(t, s) + \tilde{\Lambda}_{l-2lm-A}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-l+2lm}(t, -s; -B, -A) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

**Доказательство.** Подставим функцию  $f_\nu$ , определяемую формулой (2.3.15), и ее производную

$$\begin{aligned}
 f'_\nu(s) = & 2 \sum_{m=1}^{\infty} [-\nu'_*(2s - A - 2lm) + \nu_*(2s - A - 2lm)R_\sigma(2s - 4lm, 0, 0, 0)] + \\
 & + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{-A-2lm} \nu_*(\tau)R_{\sigma\eta}(A + 2lm, 2s - A + 2lm, -\tau, \tau)d\tau + \\
 & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2s-A-2lm} \nu_*(\tau)R_{\sigma\eta}(A - 2lm, 2s - A - 2lm, -\tau, \tau)d\tau
 \end{aligned}$$

в формулу

$$\begin{aligned}
 z(t, s) = & \frac{1}{2}f\left(\frac{A+B}{2}\right)R(s-t, s+t, A, B) + \\
 & + \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{s+t+A}{2}} f'(\varkappa)R(s-t, s+t, A, 2\varkappa - A) d\varkappa,
 \end{aligned}$$

содержащую те слагаемые из (2.1.13), которые зависят от  $f$ . После замены переменной в однократных интегралах, перемены порядка интегрирования в двойных интегралах и использования формул

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta, A, 2\varkappa - A)R_{\sigma\eta}(A, 2\varkappa - A, y - \tau, y + \tau) d\varkappa = \\
 & = 2\Lambda_y(y; \xi + \tau, \eta - \tau, A + \tau, B - \tau) + R_\sigma(\xi, \eta, y - \tau, y + \tau) - \\
 & \quad - \frac{1}{2}R(\xi, \eta; A, B)R_\sigma(A, B; y - \tau, y + \tau),
 \end{aligned}$$

$$2 \int_{\frac{A+y+\tau}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta, A, 2x - A) R_{\sigma\eta}(A, 2x - A, y - \tau, y + \tau) dx =$$

$$= R(\xi, \eta, A, y + \tau) R_{\eta}(A + \tau, y, y, y) + R_{\sigma}(\xi, \eta, y - \tau, y + \tau) - R_b(\xi, \eta, A, y + \tau)$$

(это – по-другому переписанные формулы (2.2.21) и (2.2.33)), после сокращений получаем

$$z^{f\nu}(t, s; A, B) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \nu_*(-A - 2ml) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \nu_*(B - 2ml) \right] R(s - t, s + t, A, B) -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \nu_*(s + t - 2ml) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{s+t-2ml} \nu_*(\tau) R_{\sigma}(s - t, s + t, 2ml - \tau, 2ml + \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{-A-2lm} \nu_*(\tau) [2\Lambda_y(-2ml; s - t + \tau, s + t - \tau, A + \tau, B - \tau) +$$

$$+ R_{\sigma}(s - t, s + t, -2ml - \tau, -2ml + \tau)] d\tau +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{B-2ml} \nu_*(\tau) 2\Lambda_y(2ml; s - t + \tau, s + t - \tau, A + \tau, B - \tau) d\tau,$$

что и дает, с учетом введенных обозначений для операторов Римана и коррекции, формулу (2.3.16).

Формулы (2.3.17)-(2.3.19) получаются аналогично, при этом для приведения подынтегральных выражений в  $z^{g\nu}$  и  $z^{g\mu}$  к виду, соответствующему формуле оператора коррекции  $\tilde{\Lambda}$ , приходится использовать свойство нечетности функции  $\Lambda_y(y; \xi, \eta; A, B)$  по совокупности аргументов, которое вытекает из формулы (2.2.21) и четности функции Римана:  $R(-\xi, -\eta; -A, -B) = R(\xi, \eta; A, B)$ . Лемма доказана.

Таким образом, мы получили выражения для всех слагаемых решения, и оно в левом треугольнике имеет вид

$$z(t, s) = \left\{ R_{(l-T)}^{s+t} - \Lambda_{l-T}^T \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} (t, s) + \left\{ R_{(0)}^{s-t+T} - \Lambda_0^l \right\} \begin{bmatrix} z_T \\ -\zeta_T \end{bmatrix} (T - t, s) +$$

$$+ 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(T-l-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, s) - \tilde{\Lambda}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, s; l - T, T) \right\} -$$

$$- 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{(s+t-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, s) - \tilde{\Lambda}_{(0)}^{(T-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, s; l - T, T) \right\} +$$



$$\begin{aligned}
 & +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{s+t-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, s) - \tilde{\Lambda}_{(0)}^{B-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, s; l-T, T) \right\} - \\
 & -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(T-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, s) - \tilde{\Lambda}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, s; l-T, T) \right\},
 \end{aligned}$$

а в правом – вид

$$\begin{aligned}
 z(t, s) & = \left\{ R_{(T)}^{s-t} - \Lambda_T^{l-T} \right\} \begin{bmatrix} z_0 \\ -\zeta_0 \end{bmatrix} (-t, s) + \left\{ R_{(l)}^{s+t-T} - \Lambda_l^0 \right\} \begin{bmatrix} z_T \\ \zeta_T \end{bmatrix} (t-T, s) + \\
 & +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(t-s-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, s) + \tilde{\Lambda}_{T-l-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, -s; -T, T-l) \right\} - \\
 & -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{(T-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{2lm} (t, s) + \tilde{\Lambda}_{(0)}^{(T-2lm)} \begin{bmatrix} \nu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-2lm} (t, -s; -T, T-l) \right\} + \\
 & +2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l+2lm} (t, s) + \tilde{\Lambda}_{(0)}^{T-l-2lm} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-l-2lm} (t, -s; -T, T-l) \right\} - \\
 & -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{R}_{(t-s+l-2lm)}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{l-2lm} (t, s) + \tilde{\Lambda}_{T-2lm}^{(0)} \begin{bmatrix} \mu_* \\ 0 \end{bmatrix}_{-l+2lm} (t, -s; -T, T-l) \right\}.
 \end{aligned}$$

Из первой формулы при  $s = 0$  получаем (2.3.3), а из второй при  $s = l -$  (2.3.4). Теорема 2.3.1 доказана.

### 2.3.3 Заключительные замечания.

**Замечание 1.** Операторы Римана  $R$  и  $\tilde{R}$  по существу являются реализациями одного и того же оператора переноса данных с некоторой линии (вообще говоря, кривой) в точку  $(t, s)$ .

В терминах волн перенос с кривой  $\Gamma$ , параметризованной параметром  $y$  и задаваемой уравнениями  $t = \tau(y)$ ,  $s = \sigma(y)$ , описывается формулами

$$\begin{aligned}
 V^t(s) & = V(\alpha(s-t))\alpha'(s-t) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} V(y) J \left( \frac{s-t + (\sigma + \tau)(y)}{2}, \frac{s-t - (\sigma - \tau)(y)}{2}, s \right) dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} W(y) \tilde{J} \left( \frac{s-t + (\sigma + \tau)(y)}{2}, \frac{s-t - (\sigma(y) - \tau)(y)}{2}, s \right) dy,
 \end{aligned}$$

$$W^t(s) = W(\beta(s+t))\beta'(s+t) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} V(y) \tilde{J} \left( \frac{s+t+(\sigma-\tau)(y)}{2}, \frac{s+t-(\sigma+\tau)(y)}{2}, s \right) dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} W(y) J \left( \frac{s+t+(\sigma-\tau)(y)}{2}, \frac{s+t-(\sigma+\tau)(y)}{2}, s \right) dy,$$

где  $\alpha(\xi)$  и  $\beta(\eta)$  – некоторые функции от характеристик, а  $V(y)$  и  $W(y)$  – исходные (находящиеся на кривой  $\Gamma$ ) волны. Пара функций  $z^-(t, s) = V^t(s)$  и  $z^+(t, s) = W^t(s)$  удовлетворяет системе (1.1.4), описывающей перенос волн, и поэтому их сумма является решением (1.0.4) при любом выборе функций  $V, W, \alpha$  и  $\beta$ .

В случае, когда кривая не является характеристической, в качестве  $\alpha(\xi)$  и  $\beta(\eta)$  удобно выбрать точку пересечения соответствующей характеристики с кривой (точнее, отвечающее это точке значение параметра  $y$ ), что дает тождества

$$(\sigma + \tau)(\beta(\eta)) = \eta, \quad (\sigma - \tau)(\alpha(s - t)) = s - t,$$

$$\alpha(\sigma(y) - \tau(y)) = \beta(\sigma(y) + \tau(y)) = y,$$

из последней пары следует

$$\alpha'(\sigma(y) - \tau(y))[\sigma'(y) - \tau'(y)] = \beta'(\sigma(y) + \tau(y))[\sigma'(y) + \tau'(y)] = 1,$$

и *перенормировка волн*

$$\tilde{V}(y) = V(y)\alpha'(\sigma(y) - \tau(y)), \quad \tilde{W}(y) = W(y)\beta'(\sigma(y) + \tau(y)),$$

позволяет перейти ко *второй форме* уравнений переноса (соответствующей уравнениям (1.3.27)-(1.3.28))

$$V^t(s) = \tilde{V}(\alpha(s - t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} \tilde{V}(y) [\sigma - \tau]'(y) J \left( \frac{s-t+(\sigma+\tau)(y)}{2}, \frac{s-t-(\sigma-\tau)(y)}{2}, s \right) dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} \tilde{W}(y) [\sigma + \tau]'(y) \tilde{J} \left( \frac{s-t+(\sigma+\tau)(y)}{2}, \frac{s-t-(\sigma(y) - \tau(y))}{2}, s \right) dy,$$

$$W^t(s) = \tilde{W}(\beta(s + t)) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} \tilde{V}(y)[\sigma - \tau]'(y) \tilde{J} \left( \frac{s+t+(\sigma-\tau)(y)}{2}, \frac{s+t-(\sigma+\tau)(y)}{2}, s \right) dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\alpha(s-t)}^{\beta(s+t)} \tilde{W}(y)[\sigma + \tau]'(y) J \left( \frac{s+t+(\sigma-\tau)(y)}{2}, \frac{s+t-(\sigma+\tau)(y)}{2}, s \right) dy.$$

Подстановка в эти уравнения для  $z(t, s) = V^t(s) + W^t(s)$  данных

$$z(\tau(y), \sigma(y)) = z(y), \quad \frac{\partial z}{\partial n}(\tau(y), \sigma(y)) = \zeta(y)$$

на кривой приводит к равенствам

$$z(y) = V(y) + W(y),$$

$$\zeta(y) = \frac{\sigma'^2(y) - \tau'^2(y)}{\sqrt{\sigma'^2(y) + \tau'^2(y)}} \left\{ (\tilde{V} - \tilde{W})'(y) + \phi(\sigma(y)) [(\tilde{V} - \tilde{W})(y)\sigma'(y) - (\tilde{V} + \tilde{W})(y)\tau'(y)] \right\}$$

позволяющим выразить через  $z(l), \zeta(l)$  исходные правую и левую волны  $\tilde{V}$  и  $\tilde{W}$ , и прийти, после использования формул, выражающих через коэффициенты переноса функцию Римана и ее производные, к классической формуле Римана, которая приводится почти во всех учебниках по уравнениям математической физики.

Однако может оказаться, что кривая является характеристической (точно или асимптотически), так что не все характеристики с этой кривой пересекаются. Аналогичная ситуация возникает, когда данные заданы только на конечной части кривой (например, на отрезке прямой). Тогда один или оба параметра  $\alpha, \beta$  приходится задавать "принудительно", исходя из тех или иных соображений (как это было в случае задачи Гурса или смешанной задачи), как правило - константой. В этом случае соответствующие внеинтегральные слагаемые исчезают, и одновременно мы лишаемся возможности осуществлять перенормировку волн. Кроме того, подстановка данных на кривой приводит уже не к "точечным" соотношениям, а к интегральным уравнениям на кривой, которые, тем не менее, решаются и после выражения исходных волн через данные задачи, приводят к формулам уже с усеченными операторами Римана.

**Замечание 2.** Как нетрудно заметить из формул (2.2.30), (2.2.32), (2.2.34), поправочный коэффициент  $\Lambda$  у нас определен так, что имеет место определенная асимметрия. На самом деле симметричности можно добиться, уменьшив  $\Lambda$  на  $\frac{1}{4}R(\xi, \eta, y, y)$  - тогда при  $y = A$  этот коэффициент

примет значение  $\frac{1}{4}[R(\xi, \eta, A, B) - R(\xi, \eta, A, A)]$ , а при  $y = B$  – значение  $\frac{1}{4}[R(\xi, \eta, B, B) - R(\xi, \eta, A, B)]$ . Мы не сделали этого по единственной причине: в этом случае все формулы на треть удлинятся, так как каждая комбинация вида  $R_{(\alpha)}^{s\pm t} - \Lambda_{\alpha}^{\beta}$  превратится в  $\frac{1}{2}R_{(\alpha)}^{s\pm t} + \frac{1}{2}R_{s\pm t}^{(\beta)} - \Lambda_{\alpha}^{\beta}$ , то есть весь перенос данных будет разлагаться на перенос над характеристикой, перенос под характеристикой (описываемые операторами Римана) и перенос через характеристику (описываемый оператором коррекции). Хотя такое представление решения, возможно, было бы более адекватным физике, мы, преследуя цели экономии места и компактности формулировок, использовали все-таки для поправочного коэффициента определение (2.1.1).

**Замечание 3.** Отчасти смысл поправочного коэффициента проясняет следующее соображение: если ввести более общий объект

$$\Lambda(y - \theta, y + \theta; \xi, \eta; A, B) = \int_{\frac{A+B}{2}}^{\frac{A+\eta}{2}} R(\xi, \eta; A, 2x - A) R_{\eta}(A, 2x - A; y - \theta, y + \theta) dx - \\ - \frac{1}{4}R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta) + \frac{1}{4}R(\xi, \eta; A, B)R(A, B; y - \theta, y + \theta),$$

то он будет удовлетворять, как функция  $\xi, \eta$ , уравнению (1.1.5), принимая при  $\xi = A$  и  $\eta = B$  значения  $\frac{1}{4}[R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta) - R(A, B; y - \theta, y + \theta)]$  и  $\frac{1}{4}[R(A, B; y - \theta, y + \theta) - R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta)]$  соответственно, а как функция  $\theta, y$  – уравнению (1.0.4)

$$\Lambda_{\theta\theta} = \Lambda_{yy} - (\phi' + \phi^2)(y)\Lambda,$$

принимая при  $y - \theta = A$  и при  $y + \theta = B$  значения  $\frac{1}{4}[R(\xi, \eta; A, B) - R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta)]$  и  $\frac{1}{4}[R(\xi, \eta; y - \theta, y + \theta) - R(\xi, \eta; A, y + \theta)]$ , так что поправочный коэффициент можно считать, в некотором смысле, *утерированным ядром*, отвечающим функции Римана.

## Глава 3

# Трехмерное уравнение эйконала для неоднородной среды

### § 3.1 Уравнение эйконала в геометрической оптике и акустике

#### 3.1.1 Основные понятия геометрической оптики

В теории распространения волн центральную роль играет система представлений, восходящих к древнегреческим идеям об образе ( $\eta\kappa\tilde{\omega}\nu$  – отсюда и термин "эйконал") тела, отделяющемся от него и достигающем нашего глаза. Эти представления, в современной форме облаченные в термины математических уравнений, образуют раздел волновой теории, называемый геометрической оптикой (иногда – акустикой). Основными, базовыми понятиями этой системы представлений являются *фронты* как носители распространяющегося возмущения (описываемого теми или иными волновыми дифференциальными уравнениями) и *лучи*, как кривые (в однородной среде – прямые) линии, вдоль которой движутся точки фронта с течением времени.

Базовыми для уравнений фронтов и лучей являются несколько принципов. Первый утверждает, что в однородной изотропной среде лучи являются прямыми, а фронт от возмущения в одной точке является сферическим:  $v^2 t^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ , где  $v$  – скорость распространения волны. Второй – *принцип Гюйгенса* – утверждает, что в однородной среде положение фронта в момент времени  $t + \Delta t$  можно получить, построив вокруг каждой точки фронта в момент времени  $t$  сферу радиуса  $\Delta t/v$  и найдя огибающую этих поверхностей. Третий – *закон Снеллиуса* – описывает излом луча при переходе из однородной среды с одной скоростью распространения в другую среду, тоже однородную, но с другой скоростью распространения (например, из воздуха в воду), являющийся следствием принципа Гюйгенса и естественного *принципа неразрывности* для фронта

на границе раздела двух сред.

Уравнения для фронтов и лучей в неоднородной среде можно получить, заменив сначала неоднородную среду кусочно-однородной, записав для нее закон Снеллиуса, а затем совершив предельный переход, что дает дифференциальные уравнения для лучей

$$\dot{r} = v(r)\tau, \quad \dot{\tau} = -\nabla v(r) + (\nabla v(r), \tau)\tau, \quad (3.1.1)$$

где  $r$  – радиус-вектор,  $\tau$  – единичный вектор касательной к лучу,  $\nabla$  – оператор градиента, а точка означает дифференцирование по времени. Первое уравнение в (3.1.1) – это просто определение  $\tau$ , второе – инфинитезимальный аналог закона Снеллиуса. В двумерном случае  $r = (x, y)$ ,  $\tau = (\cos \theta, \sin \theta)$ , и (3.1.1) приобретает вид системы

$$\dot{x} = v(x, y) \cos \theta, \quad \dot{y} = v(x, y) \sin \theta, \quad \dot{\theta} = v_x \sin \theta - v_y \cos \theta. \quad (3.1.2)$$

Для фронтов же мы из (3.1.1) получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y, z)} \quad (3.1.3)$$

в трехмерном случае и уравнение

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y)} \quad (3.1.4)$$

в двумерном, которое и называется *уравнением эйконала*. Здесь  $\psi$  – неизвестная функция (эйконал),  $v(x, y, z)$  или  $v(x, y)$  – заданная функция (скорость распространения возмущения), фронт описывается в виде системы поверхностей  $t = \psi(x, y, z)$ .

### 3.1.2 Уравнение эйконала как уравнение характеристик для волновых уравнений

Ключевая роль уравнения эйконала в математической физике связана с тем, что уравнение (3.1.3) является уравнением характеристик для основных волновых уравнений: как акустических (см. [97], [147], [63], [13], [91], [52]-[53]))

$$m(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} (p(x, y, z) \operatorname{grad} u), \quad \frac{1}{v^2(x, y, z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad (3.1.5)$$

так и системы уравнений Максвелла (см., напр., [13, Гл. I, §5]) в предположении изотропности среды. Аналогично уравнение (3.1.4) является уравнением характеристик для двумерного волнового уравнения, хотя нас в этой главе оно будет интересовать больше как редуцированное трехмерное.

Уравнения же лучей (3.1.1) оказываются уравнениями характеристик для самого уравнения эйконала, и, соответственно, уравнением бихарактеристик для волновых уравнений. Именно эта чисто математическая связь между уравнением (3.1.5) (получаемым как линеаризация вблизи некоторого стационарного состояния нелинейных уравнений сплошной среды) и уравнениями эйконала и лучей дает основание называть уравнение (3.1.5) волновым (впрочем, это касается и системы Максвелла, иначе она могла бы рассматриваться только как колебательная система).

С другой стороны, эта связь оправдывает постановку задачи об эйконале в неоднородной среде: уравнения (3.1.5), как мы уже говорили, получается линеаризацией уравнений сплошной среды (газовой динамики и гидродинамики), фигурирующие в них в качестве коэффициентов функции определяются распределением давления и плотности в стационарном состоянии, а эти величины могут быть различными в разных точках пространства: давление может меняться вследствие воздействия гравитации (как это имеет место в атмосфере, океане, гравитирующем газе и т.п.), а плотность – еще и вследствие изменения температуры. Отметим, что в системе уравнений Максвелла также допускается неоднородность среды (электрическая и магнитная проницаемости могут быть переменными) [108], и, хотя природа их изменения не вполне ясна, а тем более неясен вопрос о том, является ли скорость света постоянной или нет (пока что мы пользуемся лишь гипотезой, принятой в силу принципа недостаточного основания: раз нам неизвестны механизмы, могущие изменить эту величину, и раз в доступном нам окружающем пространстве не удалось зафиксировать ее сколь-нибудь существенное изменение, мы считаем ее постоянной всегда и везде) с математической точки зрения анализ таких сред вполне оправдан. В отличие от физики, которая изучает только то, что, в силу тех или иных соображений, возможно, математика изучает все, что в рамках известных нам фактов, не является невозможным.

Следует сказать, что связь между решениями уравнения эйконала и волновыми уравнениями имеется не только в дифференциальных терминах. Известные попытки описать в интегральной форме решения волновых уравнений (см., напр., [147]-[63]) показывают, что практически все фигурирующие в формулах величины так или иначе выражаются именно через эйконал. Это касается и чрезвычайно широко распространенного в настоящее время асимптотического подхода [13], [91] к решению волновых уравнений, в котором распространение фазы колебания оказывается также подчиненным уравнению эйконала, а амплитуда выражается с помощью линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, определяемыми через эйконал.

В заключение отметим, что математическая связь между волновыми уравнением и уравнениями эйконала и лучей в терминах характеристических уравнений сейчас считается основной, а исходные принципы (принцип Гюйгенса и закон Снеллиуса) – вторичными. Дело в том, что в неоднородной среде фронт, вообще говоря, теряет свою изначальную функцию как носителя возмущения (впрочем, это имеет место и для двумерного уравнения в однородной среде), лишь ограничивая возмущенную область. Тем самым принцип Гюйгенса распадается на два: общий (справедливый для всех неоднородных сред, но с утратой фронтом функции носителя возмущения) и частный (с сохранением фронтом функций носителя возмущения, но выполняющийся крайне редко – по этому поводу см. исследования [75], [77]). Исключением являются разве что ситуации, когда решение волнового уравнения на поверхности фронта теряет гладкость или даже терпит разрыв (в механике это называют ударными волнами) – в этом случае фронт оказывается носителем соответствующей особенности, однако с математической точки зрения ему соответствует уже "обобщенное" решение волнового уравнения. Аналогичная ситуация складывается и с законом Снеллиуса: в анизотропных средах он теряет свою наглядную очевидность, и мотивацию его аналогов обычно основывают уже на чисто математических аргументах.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнения (3.1.3) и (3.1.4), отвечающие случаю изотропной стационарной среды, когда скорость распространения возмущения не зависит ни от направления распространения волны, ни от времени. Более общие постановки, в которых наблюдается анизотропия, возникающие при изучении упругих волн в твердом теле, мы здесь не рассматриваем. Также мы не касаемся и нестационарного случая, когда  $v$  зависит еще и от времени (см., напр., [14]), хотя, безусловно, и он играет очень важную роль.

### 3.1.3 Уравнение эйконала и геометрия лучей

Чрезвычайно важным математическим фактом является то, что уравнения лучей (3.1.1) являются следствием экстремального принципа, впервые сформулированного Ферма, и в современных терминах звучащего как принцип стационарного действия: лучи отвечают критическому значению функционала

$$T = \int_{r^0}^{r^1} \frac{dl}{v(r)}, \quad (3.1.6)$$

где минимизация осуществляется по всем кривым, соединяющим точки  $r^0$  и  $r^1$ ,  $dl$  – дифференциал длины дуги вдоль кривой. Сам интеграл имеет



смысл времени "пробегаания возмущения при движении вдоль кривой".

Этот факт, с одной стороны, оказался центральным для создания целого сплава оптико-механических аналогий, приведших к созданию классического вариационного исчисления (где "поле экстремалей", функция Гамильтона, уравнения Вейерштрасса-Эрдмана являются лишь другими названиями для лучей, фронтов и аналогов законов отражения и преломления лучей) и явившихся основой современных квантово-механических представлений, в которых за основу берутся некие уравнения, а "волна" и "частица" являются лишь интерпретациями, корректными в рамках тех или иных предположений.

С другой стороны, этот факт оказывается центральным для связи уравнения эйконала с геометрией: принцип Ферма для интеграла (3.1.6) означает, что лучи являются геодезическими для риманова пространства с метрикой

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/v^2(x, y, z) \quad (3.1.7)$$

в трехмерном случае и

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/v^2(x, y) \quad (3.1.8)$$

в случае двумерном. Это риманово пространство мы далее будем называть *пространством лучей*. Эйконал при этом приобретает смысл геодезического расстояния.

Как мы увидим ниже, многие свойства уравнения эйконала связаны самым тесным образом с геометрическими характеристиками пространства лучей, прежде всего с гауссовой кривизной  $K$ , которая в трехмерном случае равна

$$K(x, y, z) = \frac{4}{3}v(x, y, z)\Delta v(x, y, z) - 2[\nabla v(x, y, z)]^2 \quad (3.1.9)$$

а в двумерном –

$$K(x, y) = v(x, y)\Delta v(x, y) - [\nabla v(x, y)]^2. \quad (3.1.10)$$

Напомним, что в двух- и трехмерном случае все характеристики, связанные с кривизной, определяются тензором Риччи  $R_j^i$  (см., напр., [174]), который в двумерном случае пропорционален тождественному с коэффициентом  $2K(x, y)$ , а в случае более высокой размерности ( $x = (x^i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) равен

$$R_j^i(x) = \{v(x)\Delta v(x) - (n-1)[\nabla v(x)]^2\} \delta_j^i + (n-2)v(x)D^2v(x), \quad (3.1.11)$$

где  $\Delta$  – по-прежнему оператор Лапласа,  $\nabla$  – оператор градиента,  $D^2v$  – матрица вторых производных,  $\delta_j^i$  – символ Кронекера. Из (3.1.11) немедленно следует, что риманова кривизна равна

$$R = R_i^i = 2(n-1)v(x)\Delta v(x) - n(n-1)[\nabla v(x)]^2,$$

что дает при  $n = 2, 3$  формулы (3.1.10)-(3.1.9) для гауссовой кривизны.

Отметим, что связь групповых свойств волновых уравнений с геометрией пространства лучей была детально изучена в [124], [74] и [75], однако почему-то для уравнения эйконала такого анализа не проводилось, хотя именно для эйконала эта связь оказывается наиболее яркой и эффективной.

### 3.1.4 Решения уравнения эйконала

Несмотря на такую важность уравнений эйконала для описания распространения волн, сами уравнения (3.1.3)-(3.1.4), исследованы главным образом для случая  $v = \text{const}$ . Здесь, помимо формул для фронта волны точечного источника  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = v^2 t^2$  и фронта плоской волны, известны решения, описывающие преломление и дифракцию волн (на телах "эталонной" формы), а также решения, обладающие какими-либо дополнительными свойствами (симметрией, либо инвариантностью соответствующих решений волнового уравнения относительно какого-либо семейства преобразований) [182], [86], [18].

Для неоднородной же среды известные решения единичны (см. [84]). Эти решения получаются либо с помощью аддитивного разделения переменных (см., напр., [91]) в случае  $1/v^2(x, y, z) = a(x) + b(y) + c(z)$ , что является скорее данью математическому методу, чем физической природе уравнения, либо путем "склеивания" решений в случае кусочно-однородной среды [52]-[53]. Один из редких примеров проинтегрированного в конечном виде уравнения эйконала, причем уже для неизотропной среды приведен в [63], однако нетрудно заметить, что и он заменой  $\tilde{x} = 2e^{-\alpha x/2}/\alpha$ ,  $\tilde{y} = y$ ,  $\tilde{z} = z$  сводится к случаю однородной среды. Очень эффективное решение уравнения эйконала для нестационарной среды специального вида приведено в [76],[77].

Двумерное уравнение несколько богаче решениями, ряд из них также приведен в [84]. Отметим, что в некоторых случаях, в которых уравнение эйконала в конечной форме не представимо, или это представление необозримо, удастся проинтегрировать уравнения лучей. Так, в [111] это было сделано для двумерного уравнения с  $v(x, y) = \sqrt{x}$ , и оказалось, что лучи являются циклоидами.

Тем не менее, и для двумерного, и для трехмерного уравнений их разрешимость в конечной форме не подчинена какой-бы то ни было системе, а определяется скорее волей случая, удачным стечением обстоятельств.

Такое "недостаточное" внимание к уравнениям эйконала нельзя считать случайным. Ввиду чрезвычайной общности этого уравнения для его

содержательного анализа необходимо иметь достаточный запас решаемых в явной форме случаев для того, чтобы теми или иными интегральными соображениями получать выводы и для случаев, в явной форме нерешаемых.

Конечно, уравнение эйконала, как типичное нелинейное уравнение в частных производных первого порядка, "теоретически" интегрируется по известной схеме сведением к полному интегралу Лагранжа. Однако легко проверить, что даже в простейших случаях реализация этой схемы приводит к необходимости исключения двух параметров из трех соотношений, содержащих квадратуры достаточно общего вида, так что на самом деле эта схема явного представления решения, вообще говоря, не дает.

Поскольку для нелинейного уравнения нельзя рассчитывать на возможность явного решения в общем случае, вопрос упирается в определение тех из уравнений (3.1.3)-(3.1.4), которые можно проинтегрировать. Выбор интегрируемых случаев здесь совершенно неочевиден, и для их определения необходимы специальные методы.

Групповая классификация [124], [75], [126] как раз помогает препарировать семейство уравнений с целью выделения из них наиболее доступных для анализа (и, в частности, для явной разрешимости). Эта доступность измеряется размерностью той группы преобразований, которая оставляет уравнение инвариантным (группы симметрий).

В настоящей и следующей главе мы выполняем групповой анализ трехмерного и двумерного уравнений эйконала и для уравнений с максимальной группой симметрий находим решения, описывающие фронт волны точечного источника, в виде конечных явных формул. Эти формулы позволяют обнаружить ряд новых эффектов (иллюзию движущегося источника и локализацию фронта), которые явно имеют общий характер. Для иллюзии движущегося источника получено описание этого явления в общем случае, обнаруживающее его близость, по крайней мере на уровне формулы, к известному закону Хаббла.

Наконец, отметим, что формульный характер приводимых решений, позволяя избежать необходимости погружения уравнения в какое-то функциональное пространство, вместе с тем демонстрирует нетривиальность вопроса о структуре решения в общем случае. Стандартные методы обоснования разрешимости такого уравнения гарантируют существование решения и его регулярность только "в малом", а далее, несмотря на то, что физически процесс продолжается, с математической точки зрения он становится нерегулярным: решение (как показывают примеры) приобретает особенности, для анализа которых необходимо привлекать специальную математическую технику (см., напр. [9]-[10], [153]).

## § 3.2 Групповой анализ уравнения эйконала

### 3.2.1 Используемые принципы и идеи группового анализа

Напомним (см. [124], [75], [126], [125]), что точечное преобразование пространства переменных (в нашем случае –  $(x, y, z, \psi)$ ) называется *симметрией* дифференциального уравнения, если оно оставляет это уравнение инвариантным. Множество симметрий конкретного уравнения является группой относительно операции суперпозиции, непрерывная составляющая этой группы обычно параметризуется одним или несколькими параметрами, приобретая еще и структуру многообразия (если параметризации носят локальный характер) и становясь тем самым *группой Ли*. Размерность группы Ли определяется как размерность касательного пространства (она одна и та же во всех точках: в силу группового свойства окрестность каждой точки изоморфна окрестности тождественного преобразования).

С конечномерной группой Ли точечных преобразований пространства переменных  $(x, y, z, \psi)$  связана алгебра векторных полей, порождающих одномерные подгруппы этой группы (*алгебра Ли*). Компоненты этих векторных полей мы будем обозначать через  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  соответственно. Они являются функциями от четырех переменных  $x, y, z, \psi$ , и однопараметрическая подгруппа преобразований, порождаемая таким векторным полем, вычисляется как решение системы  $\dot{x} = \xi(x, y, z, \psi)$ ,  $\dot{y} = \eta(x, y, z, \psi)$ ,  $\dot{z} = \zeta(x, y, z, \psi)$ ,  $\dot{\psi} = \phi(x, y, z, \psi)$ , где точка означает дифференцирование относительно параметризации этой подгруппы.

Язык алгебр Ли удобен, прежде всего, тем, что группа однозначно определяется своей алгеброй Ли, а последняя имеет структуру линейного пространства, поэтому описать группу – это значит предъявить конкретные выражения  $\xi(x, y, z, \psi)$ ,  $\eta(x, y, z, \psi)$ ,  $\zeta(x, y, z, \psi)$ ,  $\phi(x, y, z, \psi)$ , в которых фигурируют произвольные константы, входящие в выражения как коэффициенты линейной комбинации. Количество констант (естественно, с оговоркой о линейной независимости соответствующих векторных полей) и является размерностью группы.

Поскольку однопараметрическая группа точечных преобразований пространства  $\mathbb{R}^{3+1}$  задает однопараметрическую группу преобразований во множестве функций, заданных на этом пространстве, инфинитезимальная образующая которой оказывается дифференциальным оператором

$$\Xi = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_z + \phi \partial_\psi \quad (3.2.1)$$

( $\partial_\alpha$  – дифференцирования по соответствующим переменным), алгебра Ли исходной группы отождествляется с алгеброй операторов вида (3.2.1). В терминах (3.2.1) условие инвариантности дифференциального уравнения

относительно группы преобразований удастся описать в форме, чрезвычайно прозрачной с геометрической точки зрения и весьма компактной – с точки зрения аналитической.

С одной стороны, поскольку любое преобразование в пространстве переменных  $(x, y, z, \psi)$  порождает, по формулам обычного математического анализа, преобразование производных, и тем самым продолжается до преобразования в "расширенном" пространстве (в нашем случае – это пространство переменных  $(x, y, z, \psi, \psi_x, \psi_y, \psi_z)$ ), а уравнение (в нашем случае – уравнение (3.1.3)) может интерпретироваться как поверхность в этом пространстве, инвариантность уравнения относительно преобразований оказывается эквивалентной инвариантности этой поверхности.

С другой же стороны, Алгебра Ли (3.2.1) продолжается в это "расширенное" пространство в виде алгебры

$$\Xi^{(1)} = \Xi + \phi^x \partial_{\psi_x} + \phi^y \partial_{\psi_y} + \phi^z \partial_{\psi_z},$$

где коэффициенты, обозначенные через  $\phi^\alpha$ , вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \phi^x &= \phi_x + \phi_\psi \psi_x - \psi_x (\xi_x + \xi_\psi \psi_x) - \psi_y (\eta_x + \eta_\psi \psi_x) - \psi_z (\zeta_x + \zeta_\psi \psi_x), \\ \phi^y &= \phi_y + \phi_\psi \psi_y - \psi_x (\xi_y + \xi_\psi \psi_y) - \psi_y (\eta_y + \eta_\psi \psi_y) - \psi_z (\zeta_y + \zeta_\psi \psi_y), \\ \phi^z &= \phi_z + \phi_\psi \psi_z - \psi_x (\xi_z + \xi_\psi \psi_z) - \psi_y (\eta_z + \eta_\psi \psi_z) - \psi_z (\zeta_z + \zeta_\psi \psi_z), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

а поскольку эта алгебра, так же, как и (3.2.1), геометрически интерпретируется как алгебра векторных полей, порождающих однопараметрические подгруппы преобразований, условие инвариантности уравнения относительно группы превращается в условие касания векторного поля и поверхности, записываемого обычно в форме *уравнения Ли*

$$\Xi^{(1)} F \Big|_{F=0} = 0, \quad (3.2.3)$$

где  $F$  – разность между левой и правой частями дифференциального уравнения.

Групповая классификация семейства уравнений (в нашем случае – уравнений (3.1.3)), каждое из которых определяется "своей" функцией  $v(x, y, z)$ , предполагает, прежде всего, деление всего семейства на подсемейства, имеющие различные группы симметрий. Это – первичная, "грубая" сепарация. Дело в том, что уравнения с внешне различными, но одинаковыми по структуре группами симметрий могут оказаться эквивалентными (а их группы симметрий – изоморфными), т.е. преобразующимися друг в друга заменой переменных. Поскольку любая замена переменных сохраняет структуру группы симметрий, уравнения с группами симметрий различной структуры, а тем более разной размерности эквивалентны быть не могут.

А вот семейства уравнений с изоморфными группами симметрий необходимо еще расслоить на классы эквивалентности, указав в каждом классе одного или нескольких представителей, наиболее простых по форме и имеющих наиболее просто описываемую группу симметрий. Этот детальный анализ осуществляется с помощью исследования *групп эквивалентности* [125], [194].

Группа эквивалентности для семейства уравнений (3.1.3) – это группа преобразований, которая всякое уравнение семейства переводит в уравнение этого же семейства (с, вообще говоря, другой функцией  $v(x, y, z)$ ; если же "новая"  $v(x, y, z)$  совпала со старой – значит, наше преобразование является симметрией уравнения). Для отыскания группы эквивалентности уравнение (3.1.3) рассматривается как соотношение уже между пятью величинами  $x, y, z, \psi, v$ , порождающая ее алгебра Ли имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} = & \xi(x, y, z, \psi, v)\partial_x + \eta(x, y, z, \psi, v)\partial_y + \zeta(x, y, z, \psi, v)\partial_z + \\ & + \phi(x, y, z, \psi, v)\partial_\psi + \omega(x, y, z, \psi, v)\partial_v, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

а коэффициенты определяются из аналогичного (3.2.3) уравнения Ли

$$\bar{\Xi}^{(1)} F \Big|_{F=0} = 0, \quad (3.2.5)$$

выполненного для всех  $x, y, \psi, v$ , удовлетворяющих (3.1.3). Эту группу эквивалентности и алгебру мы будем называть *общей* группой эквивалентности, в отличие от групп и алгебр эквивалентности различных подсемейств уравнений, определяемых теми или иными ограничениями на  $v(x, y)$ .

### 3.2.2 Конус и пространство касательных эквивалентностей

Помимо алгебры эквивалентности (3.2.4) нас будет интересовать еще один объект, который алгеброй, вообще говоря, не является, однако описывается в аналогичных терминах. Насколько автору известно, этот объект является новым, поэтому на его описании и свойствах мы остановимся более подробно.

Пусть  $v(x, y, z)$  – произвольная фиксированная функция. Рассмотрим семейство  $T(\tau)$  преобразований пространства переменных  $(x, y, z, \psi, v)$ , преобразующих уравнение (3.1.3) с заданной нами функцией  $v(x, y, z)$  в уравнение вида (3.1.3) с, вообще говоря, другой функцией  $v = v^\tau(x, y, z)$ . Тогда для производной

$$\frac{dT(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = (\xi, \eta, \zeta, \phi, \omega), \quad (3.2.6)$$

где все компоненты являются функциями от  $(x, y, z, \psi, v)$ , оператор (3.2.4) удовлетворяет уравнению (3.2.5), но только *при фиксированной*  $v(x, y, z)$ .

**Определение.** Оператор (3.2.4), удовлетворяющий (3.2.5) при фиксированной  $v = v(x, y, z)$ , мы будем называть оператором касательной эквивалентности, а множество таких операторов (оно является, вообще говоря, линейным пространством) – пространством касательных эквивалентностей, отвечающим данной  $v(x, y, z)$  (и соответствующему уравнению).

**Замечание.** Вообще говоря, не все решения уравнения (3.2.4) являются производными от некоторых семейств вида (3.2.6). Про эти производные можно только утверждать, что они образуют некоторое коническое множество (которое мы далее будем называть конусом касательных эквивалентностей), которое наверняка лежит именно в пространстве касательных эквивалентностей, так что это пространство является для интересующего нас множества "верхней оценкой".

Пространство касательных эквивалентностей оказалось чрезвычайно удобно для анализа классов эквивалентности. Дело в том, что алгебра эквивалентности, наряду с неоспоримыми преимуществами, связанными с наличием простого алгоритма ее вычисления (оно даже зачастую проще, чем вычисление алгебры симметрий), имеет тот недостаток, что она обслуживает или все семейство уравнений (если речь идет об общей алгебре эквивалентности), либо какое-то подсемейство (и тогда рассматривается соответствующая частная алгебра). Классификация же носит "индивидуальный" характер: для данного конкретного уравнения необходимо найти все уравнения, эквивалентные ему и все преобразования, осуществляющие эту эквивалентность.

Естественный алгоритм, позволяющий "спуститься" от "общего" объекта – семейства к "индивидуальному" – классу эквивалентности состоит в построении некоторой иерархии семейств и подсемейств и соответствующих им групп эквивалентности, так что наверху этой иерархии будет все изучаемое семейство, а внизу – классы эквивалентности и отвечающие им преобразования.

Однако на этом пути есть принципиальная сложность, и заключается она в том, что набор преобразований, устанавливающих эквивалентность уравнений из одного класса эквивалентности, не является группой, и его отношение к самому классу эквивалентности в корне отличается от отношения группы эквивалентности семейства к самому семейству. В случае группы эквивалентности преобразование переводит *все* уравнения семейства в эквивалентные им. В случае же класса эквивалентности ниоткуда не следует, что преобразование, переводящее одно уравнение из класса в другое, эквивалентное ему, переводит третье уравнение из того же класса в уравнение, хотя бы просто принадлежащее рассматриваемому семейству

(поскольку на классы эквивалентности мы разбиваем всегда некоторое семейство уравнений, выбираемое из тех или иных соображений).

Понятно, что проблема на самом деле заключается в удачном выборе исходного семейства, и, как мы увидим, класс уравнений (3.1.3) и (3.1.4) в этом смысле выбран удачно. Однако уже при анализе некоторых подсемейств уравнений (3.1.3) мы увидим, что естественным образом нормализованное (чтобы избавиться от "лишних" параметров) подсемейство уравнений оказывается выбранным "неудачно", причем как его выбрать "удачно" – совершенно неясно.

Пространство касательных эквивалентностей позволяет решить проблему радикальным образом, избавляя нас от необходимости заботиться об удачном изначальном выборе исходного семейства уравнений или об удачной нормализации какого-то подсемейства, поскольку содержит все касательные векторы ко всем однопараметрическим семействам преобразований, осуществляющих эквивалентность данного уравнения с другими уравнениями из класса эквивалентности. В частности, оно содержит алгебру симметрий, общую алгебру эквивалентности, их сумму и все частные алгебры эквивалентности всех подсемейств уравнений, содержащих данное.

Покажем теперь, как "работает" пространство касательных эквивалентностей. "Идеальная" ситуация, отвечающая "правильному" (см. по этому поводу также [134, 196]) выбору семейства или подсемейства складывается тогда, когда для каждого уравнения семейства пространство касательных эквивалентностей является суммой алгебры эквивалентности семейства и группы симметрий соответствующего уравнения. В этом случае максимально упрощается взаимное отношение между общей группой эквивалентности всего семейства и частными группами эквивалентности подсемейств: чтобы получить частную группу эквивалентности, надо найти ту подгруппу общей группы эквивалентности, которая оставляет семейство инвариантным, и добавить к ней группу симметрий, общую для всего семейства (ядро групп симметрий по терминологии [124]).

Более тонкий результат, касающийся уже устройства класса эквивалентности, приведен в нижеследующей теореме.

**Теорема 3.2.1** *Пусть пространство касательных эквивалентностей некоторого семейства уравнений для любого уравнения из семейства является суммой алгебры Ли группы симметрий этого уравнения и алгебры Ли общей группы эквивалентности, и пусть обе группы (группа эквивалентности и группа симметрий) являются конечномерными. Тогда любая компонента  $C^1$ -связности любого класса эквивалентности этих уравнений может быть получена из любого из уравнений этой компо-*



ненты действием на него группы эквивалентности.

Доказательство этой теоремы опирается на один достаточно элементарный факт: решение системы дифференциальных уравнений с переменной (по  $t$ ) правой частью можно приблизить решениями дифференциальных уравнений с кусочно-постоянной правой частью. Нам понадобится следующий результат, являющийся вариантом теоремы о непрерывной зависимости решения от правой части.

**Лемма 3.2.1** Пусть  $X \in \mathbb{R}^n$ , и функции  $F_i(X) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ) непрерывно дифференцируемы. Пусть для некоторого набора из  $m$  непрерывных функций  $a_i(\tau) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  решение задачи Коши  $X(0) = X_0$  для системы уравнений

$$\dot{X} = a_1(\tau)F_1(X) + a_2(\tau)F_2(X) + \dots + a_m(\tau)F_m(X) \quad (3.2.7)$$

существует на интервале  $[0, T]$  для всех  $X_0$  из некоторого открытого множества  $\Omega$ . Тогда и это решение, и его производные по начальным условиям непрерывно зависят от коэффициентов  $a_i(\tau)$ , т.е. для любого компакта  $K \subset \Omega$  и для любого  $\epsilon > 0$  такого, что  $\epsilon$ -окрестность  $K$  лежит в  $\Omega$ , найдется такое  $\delta > 0$ , что для любых непрерывных или кусочно-непрерывных  $b_i(\tau)$  таких, что  $|a_i(\tau) - b_i(\tau)| < \delta$  на  $[0, T]$  решение системы (3.2.7) будет отличаться от решения задачи Коши с тем же условием  $X(0) = X_0$  для системы

$$\dot{X} = b_1(\tau)F_1(X) + b_2(\tau)F_2(X) + \dots + b_m(\tau)F_m(X), \quad (3.2.8)$$

а производная решения (3.2.7) по начальным данным – от соответствующей производной решения (3.2.8) не более чем на  $\epsilon$  сразу для всех  $\tau \in [0, T]$  и для всех  $X_0 \in K$ .

**Доказательство леммы** сводится к обоснованию сходимости последовательных приближений  $X^k$  для эквивалентного (3.2.8) векторного интегрального уравнения

$$X(\tau) = X_0 + \int_0^\tau [b_1(s)F_1(X(s)) + b_2(s)F_2(X(s)) + \dots + b_m(s)F_m(X(s))] ds \quad (3.2.9)$$

и соответствующего матричного ( $Y$  – матрица частных производных) уравнения в вариациях

$$Y(\tau) = I + \int_0^\tau [b_1(s)\nabla F_1(X(s)) + b_2(s)\nabla F_2(X(s)) + \dots + b_m(s)\nabla F_m(X(s))]Y(s) ds. \quad (3.2.10)$$

В качестве начального приближения  $X^0(\tau)$  мы возьмем решение  $\bar{X}(\tau)$  эквивалентного (3.2.7) интегрального уравнения

$$X(\tau) = X_0 + \int_0^\tau [a_1(s)F_1(X(s)) + a_2(s)F_2(X(s)) + \dots + a_m(s)F_m(X(s))] ds, \quad (3.2.11)$$

существующее на всем  $[0, T]$  в силу предположения леммы, а в качестве начального приближения для (3.2.10) – решение соответствующего уравнения в вариациях

$$Y(\tau) = I + \int_0^\tau [a_1(s)\nabla F_1(X(s)) + a_2(s)\nabla F_2(X(s)) + \dots + a_m(s)\nabla F_m(X(s))]Y(s) ds. \quad (3.2.12)$$

Обозначим через  $K_{\epsilon, T}$  замкнутую  $\epsilon$ -окрестность объединения графиков решений уравнения (3.2.7) с начальными условиями из  $K$ , через  $M = M(K, \epsilon, T)$  – супремум абсолютной величины всех  $F_i(x)$  на  $K_{\epsilon, T}$ , через  $L = L(K, \epsilon, T)$  – их общую константу Липшица (существующую в силу непрерывной дифференцируемости  $F_i$ ), а через  $A$  – максимум всех  $a_i(\tau)$  на  $[0, T]$ .

Тогда для указанного нами начального приближения при наличии неравенства  $|b_i(\tau) - a_i(\tau)| < \delta$  на  $[0, T]$  из интегральных уравнений (3.2.9)–(3.2.11) стандартным образом обосновывается оценка

$$|X^{k+1}(\tau) - \bar{X}(\tau)| \leq M\delta m|\tau| + mA L \int_0^\tau |X^k(s) - \bar{X}(s)| ds,$$

откуда методом математической индукции получаем

$$\begin{aligned} |X^k(\tau) - \bar{X}(\tau)| &\leq M\delta m[|\tau| + \frac{1}{2}ALm|\tau|^2 + \frac{1}{6}A^2L^2m^2|\tau|^3 + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!}(ALm)^{k-1}|\tau|^k] < \delta \frac{M}{AL} e^{ALMT}, \end{aligned}$$

так что выбрав  $\delta$  так, чтобы правая часть неравенства не превосходила заданное  $\epsilon$ , мы получим все последовательные приближения лежащими в  $K_{\epsilon, T}$ , гарантируя как справедливость всех полученных оценок, так и то, что и последовательные приближения  $X^k(\tau)$ , и их предел  $X(\tau)$ , являющийся решением (3.2.9) и (3.2.8), отличаются от  $\bar{X}(\tau)$  не более, чем на  $\epsilon$ .

Независимость всех полученных оценок от выбора начального условия  $X_0$ , лежащего в  $K$ , гарантирует, что неравенство  $|X(\tau) - \bar{X}(\tau)| < \epsilon$  будет выполнено равномерно для всех  $\tau \in [0, T]$  и для всех начальных условий  $X_0 \in K$ . Аналогично обосновывается сходимость и для уравнения (3.2.12). Лемма доказана.

**Следствие 1.** Если для каждого  $i = 1, \dots, m$  последовательность  $a_i^j(\tau)$  равномерно на  $[0, T]$  сходится к  $a_i(\tau)$ , операторы сдвига по траекториям для аппроксимирующих систем

$$\dot{X} = a_1^j(\tau)F_1(X) + a_2^j(\tau)F_2(X) + \dots + a_m^j(\tau)F_m(X)$$

сходятся вместе с производными равномерно на компактах к операторам сдвига по траекториям системы (3.2.7).

**Определение.** Группу преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$  будем называть замкнутой, если любое невырожденное преобразование, являющееся пределом преобразований из этой группы в смысле сходимости, равномерной на компактах вместе с производными, также принадлежит группе.

**Следствие 2.** Пусть  $G$  – замыкание некоторой конечномерной локальной группы Ли, имеющей алгебру Ли  $L$ . Если для некоторого непрерывно дифференцируемого по параметру семейства преобразований  $T(\tau)$ ,  $T(0) = I$  для каждого  $\tau \in [0, T]$  производная  $dT/d\tau$  принадлежит  $L$ , то все операторы  $T(\tau)$  лежат в  $G$ .

Действительно, если ввести в алгебре  $L$  некоторый базис  $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_m$ , то предположения следствия означают, что

$$\frac{dT(\tau)}{d\tau} = a_1(\tau)\Xi_1 + \dots + a_m(\tau)\Xi_m.$$

Это – система дифференциальных уравнений, удовлетворяющая условиям леммы 3.2.1, и поэтому операторы  $T(\tau)$ , являющиеся операторами сдвига по траекториям этой системы, могут быть приближены операторами сдвига по траекториям системы с кусочно-постоянными коэффициентами  $b_i(\tau)$ . Но для системы с кусочно-постоянными коэффициентами все операторы сдвига по траекториям лежат в соответствующей группе Ли, так как являются произведениями конечного числа экспонент от операторов алгебры Ли  $L$ . Значит, их пределы – операторы  $T(\tau)$  – принадлежат  $G$  (в силу предположения о ее получении в результате замыкания группы Ли).

Свойство замкнутости группы преобразований не является внутренним свойством группы, а скорее относится к ее внешней геометрии. Если группа Ли, как многообразие, вложена в нечто окружающее (скажем, в более широкую группу) регулярно, то она оказывается замкнутой. В качестве примера можно привести тривиальную одномерную группу, которая при реализации в качестве группы сдвигов в  $\mathbb{R}^n$  оказывается замкнутой: предел сдвигов – всегда сдвиг; при ее реализации в виде группы растяжений в  $\mathbb{R}^n$  она также замкнута: единственное преобразование, являющееся пределом растяжений и не являющееся растяжением есть тривиальное отображение

(все пространство в одну точку), которое вырождено; при реализации же одномерной группы в виде группы сдвигов на торе она будет замкнутой только при соизмеримости коэффициентов у соответствующего порождающего оператора, в противном же случае она будет незамкнутой и ее замыкание даст уже двумерную группу всех сдвигов на торе.

Хотя свойство замкнутости подгруппы в некоторой конечномерной группе изучалось (см., напр., [109]), в нашем случае речь идет о несколько более сложной конструкции: здесь вложение осуществляется в группу всех невырожденных диффеоморфизмов, которая является бесконечномерным многообразием с топологией равномерной сходимости на компактах с производными, для которого общий вопрос о регулярности вложения, как и все метрические и топологические вопросы, обрастает огромным количеством вариантов, оговорок и тонкостей, в которые совершенно не хотелось бы вдаваться.

Удачным стечением обстоятельств является то, что, хотя свойство замкнутости, как мы видим, нетривиально, в групповом анализе дифференциальных уравнений обычно приходится иметь дело именно с замкнутыми группами. Действительно, если мы возьмем последовательность симметрий некоторого дифференциального уравнения первого порядка, и возьмем ее предел в смысле равномерной сходимости на компактах вместе с производными, то этот предел, очевидно, будет симметрией того же дифференциального уравнения. То же самое касается и эквивалентных преобразований семейства уравнений. Как правило, при этом оказывается второстепенным, совпадает ли эта группа с соответствующей группой Ли, получаемой из алгебры Ли с помощью теорем Ли, или она получается еще и замыканием. В простейших ситуациях (группы сдвигов, вращений, движений, конформных преобразований) это совпадение очевидно и следует из наличия взаимно-однозначного соответствия между значениями параметров группы (как собственных, так и несобственных) и значениями операторов группы на некотором конечном наборе точек.

Поэтому в дальнейшем мы на свойстве замкнутости останавливаться не будем, просто пользуясь свойством замкнутости группы симметрий и группы эквивалентности как достаточно очевидным фактом.

**Доказательство теоремы 3.2.1** теперь уже совершенно несложно. Пусть  $T(\tau)$  – некоторое непрерывно дифференцируемое семейство преобразований некоторого уравнения  $U_0$  в эквивалентные ему уравнения  $U_\tau$ , причем  $T(0) = I$ . Обозначим через  $\Xi$  алгебру Ли группы симметрий уравнения  $U_0$ , через  $\Xi_\tau$  – алгебру Ли группы симметрий уравнения  $U_\tau$ , а через  $\bar{\Xi}$  – алгебру Ли группы эквивалентности некоторого класса уравнений, которому принадлежат все  $U_\tau$ .

Дифференцирование  $T(\tau)$  дает для  $X \in \mathbb{R}^n$  соотношение

$$\frac{dT(\tau)X}{d\tau} = \tilde{\xi}_\tau(T(\tau)X),$$

где  $\tilde{\xi}_\tau$  – векторное поле, отвечающее оператору касательной эквивалентности (оно, естественно, вычисляется в точке  $T(\tau)X$ ). В силу предположения теоремы  $\tilde{\xi}_\tau$  можно представить в виде суммы

$$\tilde{\xi}_\tau(Y) = \xi_\tau(Y) + \bar{\xi}_\tau(Y),$$

где  $\xi(\tau) \in \Xi_\tau$ , а  $\bar{\xi} \in \bar{\Xi}$ . Поскольку отображения  $T(\tau)$  устанавливают изоморфизм групп симметрий, их градиенты отображают алгебру  $\Xi$  на  $\Xi_\tau$ , поэтому  $\xi_\tau(Y)$  можно представить в виде

$$\xi_\tau(Y) = [\nabla T(\tau, T^{-1}(\tau)Y)]\xi_\tau^0(T^{-1}(\tau)Y),$$

где  $\xi_\tau^0(\cdot) \in \Xi$ . Таким образом, мы получаем для  $dT/d\tau$  декомпозицию

$$\frac{dT(\tau)X}{d\tau} = [\nabla T(\tau, X)]\xi_\tau^0(X) + \bar{\xi}_\tau(T(\tau)X).$$

Обозначим через  $S(\tau)$  решение уравнения

$$\frac{dS(\tau)X}{d\tau} = -\xi_\tau^0(SX)$$

это уравнение есть уравнение вида (3.2.7), определяющее  $S(\tau)$  как оператор сдвига по траекториям этого уравнения (в роли  $F_i$  выступают здесь базисные векторные поля алгебры симметрий). В силу следствия 2 из леммы 3.2.1  $S(\tau)$  являются симметриями уравнения  $U_0$ . Положим теперь  $E(\tau) = T(\tau)S(\tau)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dE(\tau)X}{d\tau} &= \frac{dT(\tau)}{d\tau}S(\tau)X + [\nabla T(\tau, S(\tau)X)]\frac{dS(\tau)X}{d\tau} = \\ &= [\nabla T(\tau, S(\tau)X)]\xi_\tau^0(S(\tau)X) + \bar{\xi}_\tau(T(\tau)S(\tau)X) - \\ &- [\nabla T(\tau, S(\tau)X)]\xi_\tau^0(S(\tau)X) = \bar{\xi}_\tau(T(\tau)S(\tau)X) = \bar{\xi}_\tau(E(\tau)X), \end{aligned}$$

т.е.  $E(\tau)$  удовлетворяет уравнению вида (3.2.1), но только здесь в качестве  $F_i$  выступают базисные векторные поля алгебры эквивалентности. Значит, по тому же следствию 2,  $E(\tau)$  принадлежат группе эквивалентности, и искомое представление  $T(\tau) = E(\tau)S^{-1}(\tau)$  получено. Поскольку  $S(\tau)$  являются симметриями уравнения  $U_0$ , все уравнения  $U_\tau$  получаются из  $U_0$  с помощью преобразований  $E(\tau)$ , лежащих в группе эквивалентности. Теорема 3.2.1 доказана.

**Замечание.** Как нетрудно видеть из доказательства, для ключевого факта – декомпозиции преобразования  $T(\tau) = E(\tau)S^{-1}(\tau)$  – то, что мы имеем дело именно с группой симметрий и именно с группой эквивалентности не играет существенной роли. Такая декомпозиция имеет место для любых двух замкнутых конечномерных групп  $G$  и  $\bar{G}$  и их алгебр Ли  $\Xi$  и  $\bar{\Xi}$ , если для  $T(\tau)$  выполнено условие

$$\frac{dT}{d\tau} \in \bar{\Xi} + \nabla T[\Xi].$$

## § 3.3 Группы симметрий уравнений эйконала

### 3.3.1 Формулировка теоремы

**Теорема 3.3.1 I.** *Группа симметрий уравнения эйконала (3.1.3) является 15-мерной для следующих функций скорости  $v(x, y, z)$  (с точностью до сдвига системы координат): постоянной*

$$v(x, y, z) \equiv \text{const}, \quad (3.3.1)$$

*линейной*

$$v(x, y, z) = Px + Qy + Rz \quad (P^2 + Q^2 + R^2 > 0), \quad (3.3.2)$$

*и квадратичной одного из трех типов*

$$v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2) \quad (\nu > 0), \quad (3.3.3)$$

$$v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2) \quad (\nu > 0), \quad (3.3.4)$$

$$v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.3.5)$$

*Соответствующие алгебры Ли приведены в приложении II.2.*

*II. Группа симметрий уравнения эйконала является 4-мерной для  $v(x, y, z)$ , принадлежащей (с точностью до сдвига системы координат) одному из четырех семейств функций ( $V(\cdot)$  – произвольная функция,  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ ): плоско-слоистых*

$$v(x, y, z) = V(Px + Qy + Rz), \quad (3.3.6)$$

*сферически-слоистых*

$$v(x, y, z) = V(x^2 + y^2 + z^2), \quad (3.3.7)$$

*однородно-цилиндрически-слоистых*

$$v(x, y, z) = (-Rx + Pz) \cdot V\left(\frac{Ry - Qz}{-Rx + Pz}\right), \quad (R \neq 0), \quad (3.3.8)$$

*и осесимметрично-слоистых*

$$v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2) \cdot V\left(\frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2}\right). \quad (3.3.9)$$

*Соответствующие алгебры Ли перечислены в таблице II.1 в приложении II.3.*

*Каждое из указанных семейств содержит по несколько (четыре, шесть, шесть и шестнадцать соответственно) конечномерных подсемейств, для которых группы симметрий уравнения (3.1.3) шестимерны;*

кроме того, семейство (3.3.6) и семейство (3.3.9) имеют по одному подсемейству, для которых группа симметрий уравнения (3.1.3) пятимерна. Списки этих подсемейств для каждого семейства и соответствующие алгебры Ли приведены в таблицах II.2-II.6 в приложении II.3.

III. Для 11 семейств функций скорости  $v(x, y, z)$ , описываемых произвольными функциями от двух аргументов, группа симметрий уравнения (3.1.3) двумерна. Эти семейства определяются как общие решения уравнений вида

$$\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z = (\xi_x - M)v \quad (3.3.10)$$

(классифицирующих уравнений), где

$$\begin{aligned} \xi &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Gy - Fz + H, \\ \eta &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Gx + Dy + Ez + I, \\ \zeta &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Ey + Dz + J, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

а  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$  и  $M$  – некоторые константы. Для каждого из таких семейств соответствующая алгебра Ли имеет вид

$$\Xi = \Delta[\xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z - M\psi\partial_\psi] + L\partial_\psi, \quad (3.3.12)$$

где  $\Delta$  и  $L$  – произвольные константы. Формулы решений уравнения (3.3.10) для случая  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  (классифицирующие уравнения с квадратичными коэффициентами) приведены в приложении II.4, а для случая  $A = B = C = 0$  (классифицирующие уравнения с линейными коэффициентами) – в приложении II.5. В обоих приложениях уравнение (3.3.10) приведено сдвигом и поворотом системы координат к нормализованной форме, и формулы решений соответствуют именно этой форме.

IV. Во всех остальных случаях группа симметрий уравнения (3.1.3) одномерна (это – группа сдвигов по  $\psi$  с алгеброй  $L\partial_\psi$ ).

### 3.3.2 Схема доказательства

Опишем вкратце схему доказательства, приведенного в следующих пунктах. Первый шаг – это получение *определяющих уравнений*, т.е. дифференциальных уравнений, связывающих  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  и  $v(x, y, z)$ , и являющихся необходимыми и достаточными условиями инвариантности уравнения эйконала с функцией  $v(x, y, z)$  относительно соответствующей группы преобразований. Второй этап – это решение части из этих уравнений, позволяющее описать общий вид функций  $\xi, \eta, \zeta$  как функций от  $(x, y, z)$ .

Третий этап – это "грубая" классификация с выделением семейств (3.3.6)–(3.3.9). Дело в том, что в определяющих уравнениях условия относительно  $\phi$  выглядят просто как задание градиента  $\phi$  по переменным  $(x, y, z)$ ,



причем правые части этих равенств выражены некоторым образом через  $\xi, \eta, \zeta$ . Для того, чтобы эти правые части действительно были компонентами градиента – необходимо выполнение дополнительных условий (условия полного дифференциала), что налагает дополнительные ограничения на  $\xi, \eta, \zeta$ . Эти ограничения и позволяют произвести первичную сепарацию.

Следует отметить, что коэффициенты, фигурирующие в описании семейств (3.3.6)-(3.3.9) при грубой классификации, получаются, вообще говоря, зависящими от  $\psi$ . А поскольку функция  $v$  от  $\psi$  зависеть не должна (просто по постановке задачи – неавтономный случай уравнения (3.1.3) мы не рассматриваем), приходится доказывать, что независимость  $v$  от  $\psi$  означает независимость от  $\psi$  коэффициентов в выражении для  $v$ . Этот – четвертый – этап, хотя и обосновывает достаточно "очевидный" факт, оказывается достаточно кропотливым и трудоемким: каждый случай требует своих приемов.

Поскольку в дальнейшем анализе постоянно возникают случаи функции  $v(x, y, z)$  вида (3.3.1)-(3.3.5), мы заранее исследуем эти "особые" случаи, для того, чтобы потом к ним не возвращаться. Это – пятый этап (правда, в нашем изложении, в целях удобства, он предшествует четвертому).

Последний, шестой этап – уже детальная, "тонкая" классификация. В ее основе лежит решение специального уравнения

$$-\left[ \frac{S''(r)}{S'(r)} \frac{1}{\chi'(r)} + \left( \frac{1}{\chi'(r)} \right)' \right] = \lambda S(r) + \mu,$$

которое, в зависимости от значений  $\lambda$  и  $\mu$  приводит к шести вариантам зависимости  $S(\chi(r))$  (и, соответственно, функции  $v(x, y, z)$ ). Именно эти шесть вариантов и приведены в в таблицах II.2-II.6 в приложении II.3, хотя есть и исключения: некоторые варианты оказываются функциями вида (3.3.1)-(3.3.5), а у плоскостойкого варианта (3.3.6) и у осесимметрично-стойкого (3.3.9) при  $\nu = 0$  появляется по одному "степенному" подсемейству с пятимерной группой симметрий, аналогов которого нет у других семейств.

Отметим, что с точки зрения комплексного анализа практически все подсемейства одного семейства эквивалентны в силу отсутствия разницы между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Точно так же в семействе осесимметричных  $v(x, y, z)$  можно было бы не различать  $+\nu^2$  и  $-\nu^2$ . Однако мы будем работать только в вещественных терминах, что увеличивает количество вариантов, но зато позволяет избежать трудностей с последующей физической интерпретацией результатов.

### 3.3.3 Определяющие уравнения

Следуя схеме, изложенной в пункте 3.2.1, запишем уравнение Ли  $\Xi^{(1)}F|_{F=0} = 0$  для продолжения

$$\Xi^{(1)} = \Xi + \phi^x \partial_{\psi_x} + \phi^y \partial_{\psi_y} + \phi^z \partial_{\psi_z}$$

алгебры (3.2.1). В нашем случае  $F = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 - 1/v^2(x, y, z)$ , и условие инвариантности приобретает вид

$$2\phi^x \psi_x + 2\phi^y \psi_y + 2\phi^z \psi_z + 2\xi \frac{v_x}{v^3} + 2\eta \frac{v_y}{v^3} + 2\zeta \frac{v_z}{v^3} = 0,$$

что, после подстановки формул (3.2.2) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \phi_x \psi_x + (\phi_\psi - \xi_x) \psi_x^2 - \eta_x \psi_x \psi_y - \zeta_x \psi_x \psi_z - \xi_\psi \psi_x^3 - \eta_\psi \psi_x^2 \psi_y - \zeta_\psi \psi_x^2 \psi_z + \\ & + \phi_y \psi_y + (\phi_\psi - \eta_y) \psi_y^2 - \xi_y \psi_x \psi_y - \zeta_y \psi_y \psi_z - \eta_\psi \psi_y^3 - \xi_\psi \psi_x \psi_y^2 - \zeta_\psi \psi_y^2 \psi_z + \\ & + \phi_z \psi_z + (\phi_\psi - \zeta_z) \psi_z^2 - \xi_z \psi_x \psi_z - \eta_z \psi_y \psi_z - \zeta_\psi \psi_z^3 - \xi_\psi \psi_x \psi_z^2 - \eta_\psi \psi_y \psi_z^2 + \\ & + \xi \frac{v_x}{v^3} + \eta \frac{v_y}{v^3} + \zeta \frac{v_z}{v^3} = 0, \end{aligned}$$

которое после группировки слагаемых и использования условия  $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = 1/v^2$  упрощается до вида

$$\begin{aligned} & -\xi_x \psi_x^2 - \eta_y \psi_y^2 - \zeta_z \psi_z^2 - (\eta_x + \xi_y) \psi_x \psi_y - (\zeta_x + \xi_z) \psi_x \psi_z - (\eta_z + \zeta_y) \psi_y \psi_z + \\ & + \psi_x (\phi_x - \xi_\psi \frac{1}{v^2}) + \psi_y (\phi_y - \eta_\psi \frac{1}{v^2}) + \psi_z (\phi_z - \zeta_\psi \frac{1}{v^2}) + \phi_\psi \frac{1}{v^2} + \xi \frac{v_x}{v^3} + \eta \frac{v_y}{v^3} + \zeta \frac{v_z}{v^3} = 0. \end{aligned}$$

При фиксированных  $(x, y, z)$  наше уравнение означает, что некоторая квадратичная функция от  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  на сфере  $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 - 1/v^2 = 0$  равна нулю. Это возможно тогда и только тогда, когда она пропорциональна функции, определяющей сферу, что дает нам уравнения

$$\xi_x = \eta_y = \zeta_z = \phi_\psi + (\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z)/v, \quad (3.3.13)$$

$$\eta_x + \xi_y = 0, \quad \zeta_x + \xi_z = 0, \quad \eta_z + \zeta_y = 0, \quad (3.3.14)$$

$$\phi_x = \xi_\psi/v^2, \quad \phi_y = \eta_\psi/v^2, \quad \phi_z = \zeta_\psi/v^2. \quad (3.3.15)$$

Это и есть *определяющие уравнения* для компонент  $\xi, \eta, \zeta, \phi$ . Начиная с этого момента мы, по существу, будем решать систему (3.3.13)-(3.3.15), находя те условия на  $v(x, y, z)$ , при которых эта система имеет решение  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  с тем или иным количеством произвольных постоянных.

### 3.3.4 Первичная классификация

Исследуем сначала зависимость  $\xi, \eta, \zeta$  от переменных  $x, y, z$ . Эта зависимость определяется пятью уравнениями: первыми двумя равенствами из

(3.3.13)  $\xi_x = \eta_y = \zeta_z$  и уравнениями (3.3.14). В совокупности они образуют систему условий, определяющих алгебру Ли группы конформных преобразований пространства  $\mathbb{R}^3$ . Решение этой системы имеет вид (см., напр., [75, §9, п. 3], подробный вывод приведен в приложении III)

$$\begin{aligned}\xi &= A(\psi)(x^2 - y^2 - z^2) + 2B(\psi)xy + 2C(\psi)xz + \\ &\quad + D(\psi)x + G(\psi)y - F(\psi)z + H(\psi), \\ \eta &= B(\psi)(y^2 - x^2 - z^2) + 2A(\psi)xy + 2C(\psi)yz - \\ &\quad - G(\psi)x + D(\psi)y + E(\psi)z + I(\psi), \\ \zeta &= C(\psi)(z^2 - x^2 - y^2) + 2A(\psi)xz + 2B(\psi)yz + \\ &\quad + F(\psi)x - E(\psi)y + D(\psi)z + J(\psi).\end{aligned}\tag{3.3.16}$$

В нашем случае, когда коэффициенты зависят от  $\psi$ , очевидно, речь идет об алгебре несколько более широкой, по сравнению с конформной, группы.

Рассмотрим теперь соотношения (3.3.15). Их правые части представляют собой компоненты градиента функции  $\phi$ . Для существования функции  $\phi$  с таким градиентом должны выполняться условия совместности:

$$\left(\frac{\xi_\psi}{v^2}\right)_y = \left(\frac{\eta_\psi}{v^2}\right)_x; \quad \left(\frac{\xi_\psi}{v^2}\right)_z = \left(\frac{\zeta_\psi}{v^2}\right)_x; \quad \left(\frac{\eta_\psi}{v^2}\right)_z = \left(\frac{\zeta_\psi}{v^2}\right)_y.$$

Нам удобно будет обозначить через  $W(x, y, z)$  функцию  $W(x, y, z) = \ln v^2(x, y, z)$ . Тогда условия совместности запишутся в виде системы линейных неоднородных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned}\eta_\psi W_x - \xi_\psi W_y &= \eta_{\psi x} - \xi_{\psi y}, \\ -\zeta_\psi W_x + \xi_\psi W_z &= -\zeta_{\psi x} + \xi_{\psi z}, \\ \zeta_\psi W_y - \eta_\psi W_z &= \zeta_{\psi y} - \eta_{\psi z}.\end{aligned}\tag{3.3.17}$$

Эта система играет очень важную роль в наших рассуждениях: именно она определяет "баланс" между условиями на функцию скорости  $v(x, y, z)$  (а значит – на  $W(x, y, z)$ ) и условиями на компоненты  $\xi, \eta, \zeta$  алгебры Ли. В этом пункте мы снова будем считать временно  $\psi$  просто параметром, а  $\xi_\psi, \eta_\psi, \zeta_\psi$  – просто обозначениями трех функций, зависящих, помимо  $(x, y, z)$ , еще и от параметра  $\psi$ . Отметим, что система (3.3.17) является алгебраически вырожденной (как система относительно  $W_x, W_y, W_z$ ): сложение уравнений с коэффициентами  $\zeta_\psi, \eta_\psi, \xi_\psi$  соответственно даст в левой части нуль. Поэтому необходимым условием ее разрешимости является обращение в нуль соответствующей комбинации правых частей. Позже мы покажем, что это условие и достаточно, предъявив решения системы в явном виде.

Итак, выпишем условие разрешимости системы (3.3.17):

$$(\eta_{\psi x} - \xi_{\psi y})\zeta_\psi + (-\zeta_{\psi x} + \xi_{\psi z})\eta_\psi + (\zeta_{\psi y} - \eta_{\psi z})\xi_\psi = 0$$

Подстановка в него функций  $\xi, \eta, \zeta$  из (3.3.16) (при этом, для краткости записи, мы аргумент  $\psi$  у коэффициентов будем опускать, а производные по этому аргументу будем обозначать штрихом) дает уравнение

$$(2A'y - 2B'x - G')(C'(z^2 - x^2 - y^2) + 2A'xz + 2B'yz + F'x - E'y + D'z + J') + \\ + (2C'x - 2A'z - F')(B'(y^2 - x^2 - z^2) + 2A'xy + 2C'yz - G'x + D'y + E'z + I') + \\ + (2B'z - 2C'y - E')(A'(x^2 - y^2 - z^2) + 2B'xy + 2C'xz + D'x + G'y - F'z + H') = 0,$$

которое после приведения подобных (кубические члены сокращаются) и приравнивания по отдельности квадратичных, линейных и свободных членов приводится к системе

$$2[(A'y - B'x)(F'x - E'y) + (C'x - A'z)(E'z - G'x) + (B'z - C'y)(G'y - F'z) - \\ - (A'x + B'y + C'z)(G'z + F'y + E'x)] + (A'E' + B'F' + C'G')(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ 2[(A'y - B'x)J' + (C'x - A'z)I' + (B'z - C'y)H'] - D'(E'x + F'y + G'z) = 0, \\ E'H' + F'I' + G'J' = 0,$$

из которой мы получаем условия на коэффициенты

$$A'E' + B'F' + C'G' = 0, \quad (3.3.18)$$

$$2C'I' - 2B'J' = D'G', \quad 2A'J' - 2C'H' = D'F', \quad 2B'H' - 2A'I' = D'E', \quad (3.3.19)$$

$$E'H' + F'I' + G'J' = 0, \quad (3.3.20)$$

являющиеся основой первичной классификации.

**Случай**  $A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0$ . В этом случае за счет сдвига системы координат  $\tilde{x} = x - \alpha(\psi)$ ,  $\tilde{y} = y - \beta(\psi)$ ,  $\tilde{z} = z - \gamma(\psi)$  удастся сделать коэффициенты  $D', E', F', G'$  нулевыми (при этом играет роль то, что в силу условия (3.3.18) вектор  $(E', F', G')$  ортогонален вектору  $(A', B', C')$ ). Тогда уравнения (3.3.18) и (3.3.20) оказываются выполненными автоматически, а уравнения (3.3.19) означают пропорциональность вектора  $(H', I', J')$  вектору  $(A', B', C')$ . Если коэффициент пропорциональности обозначить через  $\mp \nu^2$ , то в новой системе координат

$$\xi_\psi = A'(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 \mp \nu^2) + 2B'\tilde{x}\tilde{y} + 2C'\tilde{x}\tilde{z}, \\ \eta_\psi = B'(\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{z}^2 \mp \nu^2) + 2A'\tilde{x}\tilde{y} + 2C'\tilde{y}\tilde{z}, \\ \zeta_\psi = C'(\tilde{z}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 \mp \nu^2) + 2B'\tilde{y}\tilde{z} + 2A'\tilde{x}\tilde{z}. \quad (3.3.21)$$

Обратимся теперь к системе (3.3.17). Соответствующая однородная система

$$\eta_\psi W_x - \xi_\psi W_y = 0; \quad -\zeta_\psi W_x + \xi_\psi W_z = 0; \quad \zeta_\psi W_y - \eta_\psi W_z = 0.$$

решается методом характеристик: если обозначить  $l = A'\tilde{x} + B'\tilde{y} + C'\tilde{z}$ ,  $\sigma = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \pm \nu^2$ , то общее решение этой системы имеет вид  $W(x, y, z) = \Omega(l/\sigma)$ . Поиск частного решения неоднородной системы в виде  $W(x, y, z) = W(l, \sigma)$  приводит к одному-единственному уравнению  $lW_l + \sigma W_\sigma = 2$ , имеющему решением, например,  $W(l, \sigma) = 2 \ln \sigma$ .

Таким образом, общее решение системы (3.3.17) в предположении  $A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0$  оказалось равным  $W(x, y, z) = 2 \ln \sigma + \Omega(l/\sigma)$ , что соответствует функции скорости

$$v(x, y, z) = \sigma \exp\left(\frac{1}{2}\Omega(l/\sigma)\right) = \sigma V\left(\frac{l}{\sigma}\right), \quad (3.3.22)$$

где  $V$  – произвольная функция от  $r = l/\sigma$ . По существу мы получили семейство (3.3.9). Поскольку вращения пространства вокруг оси  $(A', B', C')$  не меняют ни значения  $l$ , ни значения  $\sigma$ , поверхности уровня функции  $v(x, y, z)$  являются наверняка фигурами вращения вокруг этой оси, и таким образом, полученная нами функция скорости соответствует осесимметрично-слоистой среде.

**Случай**  $A' = B' = C' = 0$ ,  $E'^2 + F'^2 + G'^2 \neq 0$ . В этом случае уравнение (3.3.18) обращается в тождество, из уравнений (3.3.19) получаем  $D' = 0$ , а из условия (3.3.20) ортогональности вектора  $(H', I', J')$  вектору  $(E', F', G')$ , следует возможность за счет сдвига системы координат сделать  $H', I', J'$  нулями. Таким образом, мы получаем, что

$$\xi_\psi = G'\tilde{y} - F'\tilde{z}, \quad \eta_\psi = -G'\tilde{x} + E'\tilde{z}, \quad \zeta_\psi = F'\tilde{x} - E'\tilde{y}, \quad (3.3.23)$$

Интегрирование системы (3.3.17) в этом случае тоже не представляет труда: соответствующая однородная система

$$\eta_\psi W_x - \xi_\psi W_y = -\zeta_\psi W_x + \xi_\psi W_z = \zeta_\psi W_y - \eta_\psi W_z = 0$$

имеет (в предположении  $G' \neq 0$ , не ограничивающим общности) решение  $W(x, y, z) = \Omega([G'\tilde{y} - F'\tilde{z}]/[-G'\tilde{x} + E'\tilde{z}])$ , где  $\Omega$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а решение неоднородной системы удается, как и в предыдущем случае, отыскать в виде  $W(x, y, z) = 2 \ln | -G'\tilde{x} + E'\tilde{z} |$ . Таким образом, общее решение системы (3.3.17) в этом случае равно  $W(x, y, z) = 2 \ln | -G'\tilde{x} + E'\tilde{z} | + \Omega((G'\tilde{y} - F'\tilde{z})/(-G'\tilde{x} + E'\tilde{z}))$ , а функция скорости –

$$v(x, y, z) = (-G'\tilde{x} + E'\tilde{z})V\left(\frac{G'\tilde{y} - F'\tilde{z}}{-G'\tilde{x} + E'\tilde{z}}\right). \quad (3.3.24)$$

Мы получили семейство (3.3.8). Найденная нами функция скорости соответствует среде с однородно-цилиндрическим слоением: линии уровня

функции  $v(x, y, z)$  являются цилиндрами с направляющими, параллельными вектору  $(E', F', G')$ , причем эти цилиндры подобны друг другу: гомотетия с коэффициентом  $k$  переводит поверхность  $v = 1$  в поверхность  $v = k$ .

**Случай**  $A' = B' = C' = E' = F' = G' = 0, D' \neq 0$ . Здесь все уравнения (3.3.18)-(3.3.19) оказываются тождествами; за счет сдвига системы координат получаем  $\xi_\psi = D'\tilde{x}$ ,  $\eta_\psi = D'\tilde{y}$ ,  $\zeta_\psi = D'\tilde{z}$ , система (3.3.17) оказывается однородной, и ее общее решение имеет вид  $W(x, y, z) = \Omega(\sigma_0)$ , где  $\sigma_0 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2$ , а  $\Omega$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Соответственно функция скорости имеет вид

$$v(x, y, z) = V(\sigma_0) = V(x^2 + y^2 + z^2), \quad (3.3.25)$$

что дает нам семейство (3.3.7), описывающее сферически слоистые среды.

**Случай**  $A' = B' = C' = E' = F' = G' = D' = 0, H'^2 + I'^2 + J'^2 \neq 0$ . Здесь  $\xi_\psi = H'$ ,  $\eta_\psi = I'$ ,  $\zeta_\psi = J'$ , общее решение системы (3.3.17) имеет вид  $W(x, y, z) = \Omega(s)$ , где  $s = H'x + I'y + J'z$ , а  $\Omega$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Функция скорости соответственно имеет вид

$$v(x, y, z) = V(s) = V(H'x + I'y + J'z), \quad (3.3.26)$$

что соответствует семейству (3.3.6), описывающему плоско-слоистые среды.

**Случай**  $\xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi \equiv 0$ . В этом случае уже система уравнений (3.3.17) превращается в тождество – значит, ей удовлетворяет любая функция  $W(x, y, z)$  и любая функция скорости. Более детальный анализ этого случая, как и остальных, будет произведен позже – там появятся дополнительные ограничения на  $W$  и  $v$ .

### 3.3.5 Особые случаи функции скорости (3.3.1)-(3.3.5)

Поскольку в дальнейших рассуждениях нам постоянно будут встречаться, в качестве частных случаев, функции скорости (3.3.1)-(3.3.5), нам будет удобно заранее описать алгебры Ли соответствующих групп симметрий, чтобы потом просто исключать соответствующие частные случаи из рассмотрения.

**Случай**  $v(x, y, z) \equiv v = \text{const}$ . В этом случае  $W(x, y, z) = \text{const}$  и уравнения (3.3.17) дают нам условия  $\xi_{\psi y} = \eta_{\psi x}$ ,  $\zeta_{\psi x} = \xi_{\psi z}$ ,  $\eta_{\psi z} = \zeta_{\psi y}$ , из которых, ввиду условий (3.3.14) получаем

$$\xi_{\psi y} = \eta_{\psi x} = \zeta_{\psi x} = \xi_{\psi z} = \eta_{\psi z} = \zeta_{\psi y} = 0,$$

откуда  $A' = B' = C' = E' = F' = G' = 0$ , а значит  $A, B, C, D, E, F, G$  являются константами:  $A(\psi) = \bar{A}$ ,  $B(\psi) = \bar{B}$ ,  $C(\psi) = \bar{C}$ ,  $E(\psi) = \bar{E}$ ,  $F(\psi) = \bar{F}$ ,  $G(\psi) = \bar{G}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}\xi &= \bar{A}(x^2 - y^2 - z^2) + 2\bar{B}xy + 2\bar{C}xz + D(\psi)x + \bar{G}y - \bar{F}z + H(\psi), \\ \eta &= \bar{B}(y^2 - x^2 - z^2) + 2\bar{A}xy + 2\bar{C}yz - \bar{G}x + D(\psi)y + \bar{E}z + I(\psi), \\ \zeta &= \bar{C}(z^2 - x^2 - y^2) + 2\bar{A}xz + 2\bar{B}yz + \bar{F}x - \bar{E}y + D(\psi)z + J(\psi).\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

Система (3.3.15) превращается в

$$\phi_x = \frac{\xi_\psi}{v^2} = \frac{D'x + H'}{v^2}, \quad \phi_y = \frac{\eta_\psi}{v^2} = \frac{D'y + I'}{v^2}, \quad \phi_z = \frac{\zeta_\psi}{v^2} = \frac{D'z + J'}{v^2},$$

и ее решение имеет вид

$$\phi(x, y, z, \psi) = \frac{\frac{1}{2}D'(\psi)(x^2 + y^2 + z^2) + H'(\psi)x + I'(\psi)y + J'(\psi)z}{v^2} + \hat{\phi}(\psi).\tag{3.3.28}$$

Подстановка этого решения в последнее из неиспользованных нами пока уравнений (3.3.13), которое для  $v(x, y, z) = v$  принимает вид  $\phi_\psi = \xi_x = \eta_y = \zeta_z$ , приводит к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}D''(\psi)(x^2 + y^2 + z^2) + H''(\psi)x + I''(\psi)y + J''(\psi)z}{v^2} + \hat{\phi}'(\psi) &= \\ &= 2(\bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C}z) + D(\psi),\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

и приравнивание коэффициентов многочленов дает условия  $D'' = 0$ ,  $H'' = 2v^2\bar{A}$ ,  $I'' = 2v^2\bar{B}$ ,  $J'' = 2v^2\bar{C}$ ,  $\hat{\phi}' = D$ , из которых определяются

$$D = 2D_1\psi + D_2, \quad \hat{\phi} = D_1\psi^2 + D_2\psi + L.$$

$$H = Av^2\psi^2 + H_1\psi + H_2, \quad I = Bv^2\psi^2 + I_1\psi + I_2, \quad J = Cv^2\psi^2 + J_1\psi + J_2.$$

Таким образом, алгебра Ли группы симметрий уравнения эйконала с постоянной скоростью имеет компоненты

$$\begin{aligned}\xi(x, y, z, \psi) &= \bar{A}(\psi^2v^2 + x^2 - y^2 - z^2) + 2\bar{B}xy + 2\bar{C}xz + (2D_1\psi + D_2)x + \\ &\quad + \bar{G}y - \bar{F}z + H_1\psi + H_2, \\ \eta(x, y, z, \psi) &= \bar{B}(\psi^2v^2 + y^2 - x^2 - z^2) + 2\bar{A}xy + 2\bar{C}yz + (2D_1\psi + D_2)y - \\ &\quad - \bar{G}x + \bar{E}z + I_1\psi + I_2, \\ \zeta(x, y, z, \psi) &= \bar{C}(\psi^2v^2 + z^2 - x^2 - y^2) + 2\bar{B}yz + 2\bar{A}xz + (2D_1\psi + D_2)z + \\ &\quad + \bar{F}x - \bar{E}y + J_1\psi + J_2,\end{aligned}$$

$$\phi(x, y, z, \psi) = \frac{D_1(\psi^2 v^2 + x^2 + y^2 + z^2) + H_1 x + I_1 y + J_1 z}{v^2} + \\ + \psi(2\bar{A}x + 2\bar{B}y + 2\bar{C}z + D_2) + L,$$

что в точности дает алгебру, указанную в приложении II.2.1.

**Случай**  $v(x, y, z) = Px + Qy + Rz$ . Этот случай рассматривается по той же схеме, что и предыдущий, поэтому мы изложим его вкратце, опустив детальные выкладки. В этом случае система (3.3.17) приобретает вид

$$\begin{aligned} 2P\eta_\psi - 2Q\xi_\psi &= [\eta_{\psi x} - \xi_{\psi y}](Px + Qy + Rz), \\ -2P\zeta_\psi + 2R\xi_\psi &= [-\zeta_{\psi x} + \xi_{\psi z}](Px + Qy + Rz), \\ 2Q\zeta_\psi - 2R\eta_\psi &= [\zeta_{\psi y} - \eta_{\psi z}](Px + Qy + Rz), \end{aligned}$$

и подстановка в эти уравнения функций (3.3.16) дает систему соотношений относительно квадратичных функций, из которых приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях получаем набор уравнений относительно коэффициентов:  $B'P = A'Q$ ,  $C'P = A'R$ ,  $B'R = C'Q$ ,  $D' = 0$ ,  $E'P + F'Q + G'R = 0$ ,  $I'P = H'Q$ ,  $J'P = H'R$ ,  $J'Q = I'R$ . Эти соотношения позволяют представить коэффициенты  $A, B, C, D, E, F, G$  и  $H, I, J$  в виде

$$\begin{aligned} A(\psi) &= \lambda(\psi)P + \bar{A}, & B(\psi) &= \lambda(\psi)Q + \bar{B}, & C(\psi) &= \lambda(\psi)R + \bar{C}, \\ D(\psi) &\equiv \bar{D}, & E &= \hat{E}(\psi) + \theta P, & F &= \hat{F}(\psi) + \theta Q, & G &= \hat{G}(\psi) + \theta R, \\ H(\psi) &= \varkappa(\psi)P + \bar{H}, & I(\psi) &= \varkappa(\psi)Q + \bar{I}, & J(\psi) &= \varkappa(\psi)R + \bar{J}, \end{aligned}$$

где  $\bar{A}P + \bar{B}Q + \bar{C}R = \hat{E}(\psi)R + \hat{F}(\psi)Q + \hat{G}(\psi)P = \bar{H}P + \bar{I}Q + \bar{J}R = 0$ , и, соответственно,

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda(\psi)[P(x^2 - y^2 - z^2) + 2Qxy + 2Rxz] + \bar{A}(x^2 - y^2 - z^2) + 2\bar{B}xy + \\ &\quad + 2\bar{C}xz + \bar{D}x + G(\psi)y - F(\psi)z + \theta[Ry - Qz] + \varkappa(\psi)P + \bar{H}, \\ \eta &= \lambda(\psi)[Q(y^2 - x^2 - z^2) + 2Pxy + 2Ryz] + \bar{B}(y^2 - x^2 - z^2) + 2\bar{A}xy + \\ &\quad + 2\bar{C}yz - G(\psi)x + \bar{D}y + E(\psi)z + \theta[-Rx + Pz] + \varkappa(\psi)Q + \bar{I}, \\ \zeta &= \lambda(\psi)[R(z^2 - x^2 - y^2) + 2Pxz + 2Qyz] + \bar{C}(z^2 - x^2 - y^2) + 2\bar{A}xz + \\ &\quad + 2\bar{B}yz + F(\psi)x - E(\psi)y + Dz + \theta[Qx - Py] + \varkappa(\psi)R + \bar{J}, \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Подстановка (3.3.30) в уравнения (3.3.15) позволяет проинтегрировать эти уравнения и получить

$$\phi(x, y, z, \psi) = \frac{\lambda'(x^2 + y^2 + z^2) - (\hat{G}'y - \hat{F}'z)/P - \varkappa'}{Px + Qy + Rz} + \hat{\phi}, \tag{3.3.31}$$



а подстановка полученной  $\phi$  в последнее соотношение (3.3.13) приводит опять к равенству двух квадратичных функций, из которого после сокращений и приведения подобных получаются соотношения

$$\begin{aligned} \lambda''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\lambda(\psi), & \varkappa''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\varkappa(\psi) \\ \hat{E}''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\hat{E}(\psi), & \hat{F}''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\hat{F}(\psi), \\ & & -P\hat{\phi}'(\psi) &= R\hat{F}(\psi) - Q\hat{E}(\psi). \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Обозначая  $w^2 = P^2 + Q^2 + R^2$ , решая полученные уравнения и подставляя эти решения в (3.3.16) и в формулу для  $\phi$ , получаем формулы приложения П.2.2:

$$\begin{aligned} \xi &= [\lambda_1 \operatorname{ch} w\psi + \lambda_2 \operatorname{sh} w\psi][P(x^2 - y^2 - z^2) + 2Qxy + 2Rxz] + \bar{A}(x^2 - y^2 - z^2) + \\ &+ 2\bar{B}xy + 2\bar{C}xz + \bar{D}x + [G_1 \operatorname{ch} w\psi + G_2 \operatorname{sh} w\psi]y - [F_1 \operatorname{ch} w\psi + F_2 \operatorname{sh} w\psi]z + \\ &+ \theta[Ry - Qz] + [\varkappa_1 \operatorname{ch} w\psi + \varkappa_2 \operatorname{sh} w\psi]P + \bar{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= [\lambda_1 \operatorname{ch} w\psi + \lambda_2 \operatorname{sh} w\psi][Q(y^2 - x^2 - z^2) + 2Pxy + 2Ryz] + \bar{B}(y^2 - x^2 - z^2) + \\ &+ 2\bar{A}xy + 2\bar{C}yz + \bar{D}y - [G_1 \operatorname{ch} w\psi + G_2 \operatorname{sh} w\psi]x + [E_1 \operatorname{ch} w\psi + E_2 \operatorname{sh} w\psi]z + \\ &+ \theta[-Rx + Pz] + [\varkappa_1 \operatorname{ch} w\psi + \varkappa_2 \operatorname{sh} w\psi]Q + \bar{I}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= [\lambda_1 \operatorname{ch} w\psi + \lambda_2 \operatorname{sh} w\psi][R(z^2 - x^2 - y^2) + 2Pxz + 2Qyz] + \bar{C}(z^2 - x^2 - y^2) + \\ &+ 2\bar{A}xz + 2\bar{B}yz + Dz + [F_1 \operatorname{ch} w\psi + F_2 \operatorname{sh} w\psi]x - [E_1 \operatorname{ch} w\psi + E_2 \operatorname{sh} w\psi]y + \\ &+ \theta[Qx - Py] + [\varkappa_1 \operatorname{ch} w\psi + \varkappa_2 \operatorname{sh} w\psi]R + \bar{J}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= w[\lambda_1 \operatorname{sh} w\psi + \lambda_2 \operatorname{ch} w\psi] \frac{x^2 + y^2 + z^2}{Px + Qy + Rz} - \frac{w(\varkappa_1 \operatorname{sh} w\psi + \varkappa_2 \operatorname{ch} w\psi)}{Px + Qy + Rz} + \\ &+ \frac{E_1(Ry - Qz) + F_1(Pz - Rx) + G_1(Qx - Py)}{w(Px + Qy + Rz)} \operatorname{sh} w\psi + \\ &+ \frac{E_2(Ry - Qz) + F_2(Pz - Rx) + G_2(Qx - Py)}{w(Px + Qy + Rz)} \operatorname{ch} w\psi + \bar{L}. \end{aligned}$$

**Случай**  $v(x, y, z) = w\sigma = w(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)$ . Этот случай объединяет сразу три формулы (3.3.3)-(3.3.5). Символ  $\pm\nu^2$  обозначает один из трех вариантов:  $+\nu^2$ ,  $-\nu^2$  и  $0$ . Опять же мы следуем уже отлаженной схеме: уравнения (3.3.17) – уравнения (3.3.15) – последнее уравнение в (3.3.13), и, в целях экономии места, опускаем элементарные, но достаточно громоздкие выкладки.

Уравнения (3.3.17) приобретают вид

$$\eta_\psi \frac{4x}{\sigma} - \xi_\psi \frac{4y}{\sigma} = \eta_{\psi x} - \xi_{\psi y}, \quad -\zeta_\psi \frac{4x}{\sigma} + \xi_\psi \frac{4z}{\sigma} = -\zeta_{\psi x} + \xi_{\psi z},$$

$$\zeta_{\psi} \frac{4y}{\sigma} - \eta_{\psi} \frac{4z}{\sigma} = \zeta_{\psi y} - \eta_{\psi z},$$

и подстановка в них функций  $\xi, \eta, \zeta$  из (3.3.16) после упрощений приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} 4z(E'x + F'y + G'z) + 4(I'x - H'y) &= 2G'(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2), \\ 4y(E'x + F'y + G'z) + 4(H'z - J'x) &= 2F'(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2), \\ 4x(E'x + F'y + G'z) + 4(J'y - I'z) &= 2E'(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2), \end{aligned}$$

которые могут выполняться для всех  $(x, y, z)$  только если  $E' = F' = G' = H' = I' = J' = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \xi &= A(\psi)(x^2 - y^2 - z^2) + 2B(\psi)xy + 2C(\psi)xz + D(\psi)x + \bar{G}y - \bar{F}z + \bar{H}, \\ \eta &= B(\psi)(y^2 - x^2 - z^2) + 2A(\psi)xy + 2C(\psi)yz - \bar{G}x + D(\psi)y + \bar{E}z + \bar{I}, \\ \zeta &= C(\psi)(z^2 - x^2 - y^2) + 2A(\psi)xz + 2B(\psi)yz + \bar{F}x - \bar{E}y + D(\psi)z + \bar{J}. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Уравнения (3.3.15) тогда приобретают вид

$$\begin{aligned} \phi_x &= -\frac{1}{w^2} \left[ \frac{2A'x + 2B'y + 2C'z + D'}{2\sigma} \right]_x, \\ \phi_y &= -\frac{1}{w^2} \left[ \frac{2A'x + 2B'y + 2C'z + D'}{2\sigma} \right]_y, \\ \phi_z &= -\frac{1}{w^2} \left[ \frac{2A'x + 2B'y + 2C'z + D'}{2\sigma} \right]_z, \end{aligned}$$

откуда

$$\phi(x, y, z, \psi) = -\frac{2A'x + 2B'y + 2C'z + D'}{2w^2\sigma} + \hat{\phi}(\psi). \quad (3.3.34)$$

Остается последнее уравнение из (3.3.13), которое для нашей функции скорости выглядит как

$$\sigma \xi_x = \sigma \phi_{\psi} + 2x\xi + 2y\eta + 2z\zeta.$$

Подставляя найденные выше  $\xi, \eta, \zeta, \phi$ , получаем уравнение относительно квадратичных функций, и, приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} D'' &= \mp 4w^2\nu^2 D, \quad \hat{\phi}' = -D(\psi), \\ A'' &= \mp 4w^2\nu^2 A + 2w^2\bar{H}, \quad B'' = \mp 4w^2\nu^2 B + 2w^2\bar{I}, \quad C'' = \mp 4w^2\nu^2 C + 2w^2\bar{J}. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Решение этих уравнений в каждом из трех вариантов  $\pm\nu^2 = +\nu^2$ ,  $\pm\nu^2 = -\nu^2$  и  $\pm\nu^2 = 0$  и подстановка их в формулы (3.3.16) и в формулу для  $\phi$  дает алгебры Ли, указанные в приложениях II.2.3-II.2.5.

### 3.3.6 Независимость функции скорости от $\psi$ . Определение компонент $(\xi, \eta, \zeta, \phi)$ .

Вернемся к исследованию семейств (3.3.6)-(3.3.9). В полученных в пункте 3.3.4 формулах (3.3.22), (3.3.24), (3.3.25), (3.3.26) функция  $v$  выражена как функция не только от  $x, y, z$ , но и от  $\psi$  (как в коэффициентах, фигурирующих в этих формулах и в параметрах  $\alpha, \beta, \gamma$  сдвига системы координат для приведения к подходящему виду, так и в самом характере зависимости  $V(\cdot)$ ). Однако на самом деле она от  $\psi$  не зависит, и это налагает дополнительные ограничения на параметры. Естественное предположение состоит в том, что независимость  $v$  от  $\psi$  влечет независимость от  $\psi$  всех параметров и функции  $V(\cdot)$ , однако доказательство этого факта в каждом случае требует специальных приемов алгебраического характера. Нам будет удобнее идти от более простых функций скорости к более сложным (т.е. в порядке, указанном в формулировке теоремы). Кроме того, удобнее исследовать независимость от  $\psi$  функции  $W$ , а не функции  $v$ .

**Случай функции (3.3.26).** В предположении, что  $W$  имеет вид  $W(x, y, z, \psi) = \Omega(s, \psi)$ , где  $s = H'(\psi)x + I'(\psi)y + J'(\psi)z$ , условие независимости от  $\psi$  имеет вид

$$[H''(\psi)x + I''(\psi)y + J''(\psi)z]\Omega_s(s, \psi) + \Omega_\psi(s, \psi) = 0.$$

Зафиксируем значения  $\psi$  и  $s$ . Тогда  $x, y, z$  лежат на некоторой гиперплоскости. На этой гиперплоскости левая часть нашего уравнения является линейной функцией от  $x, y, z$ , и эта функция тождественно равна нулю. Значит, эта функция пропорциональна функции, определяющей гиперплоскость, т.е.  $H'' = k'(\psi)H', I'' = k'(\psi)I', J'' = k'(\psi)J'$ . Вообще говоря, коэффициент пропорциональности мог бы зависеть и от  $\psi$ , и от  $s$ , но поскольку  $H, I, J$  и их производные от  $s$  не зависят – остается только зависимость от  $\psi$ . Представление коэффициента пропорциональности в виде производной некоторой функции  $k(\psi)$  выбрано для удобства: из наших условий следует, что  $H' = Pe^{k(\psi)}$ ,  $I' = Qe^{k(\psi)}$ ,  $J' = Re^{k(\psi)}$ , где  $P, Q, R$  – некоторые константы (причем нам будет удобно считать, для определенности, что  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ ), а тогда

$$H'x + I'y + J'z = e^{k(\psi)}[Px + Qy + Rz] \quad (3.3.36)$$

$\Omega(H'x + I'y + J'z, \psi) = \Omega(e^{k(\psi)}[Px + Qy + Rz], \psi) = \hat{\Omega}(Px + Qy + Rz, \psi)$ , (экспоненциальный множитель, зависящий только от  $\psi$ , включен в зависимость от второго аргумента). Для новой же функции  $\hat{\Omega}$  независимость от  $\psi$  есть просто независимость от второго аргумента:  $\hat{\Omega}_\psi = 0$ . Значит, в итоге  $W(x, y, z, \psi) = \Omega(Px + Qy + Rz)$ , а  $v(x, y, z) = V(Px + Qy + Rz)$ .

Равенство (3.3.36) нам будет удобнее представить в виде  $H' = \theta'(\psi)P$ ,  $I' = \theta'(\psi)Q$ ,  $J' = \theta'(\psi)R$ , где  $\theta'(\psi) = e^{k(\psi)}$ , а тогда  $H = \theta(\psi)P + \bar{H}$ ,  $I = \theta(\psi)Q + \bar{I}$ ,  $J = \theta(\psi)R + \bar{J}$ , причем можно, для определенности выбора  $\theta(\psi)$ , считать  $P\bar{H} + Q\bar{I} + R\bar{J} = 0$ . Вместе с предположениями этого случая  $A' = B' = C' = D' = E' = F' = G' = 0$  это дает описание первых трех компонент алгебры Ли в виде

$$\begin{aligned}\xi(x, y, z, \psi) &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + \\ &\quad + Dx + Gy - Fz + \theta(\psi)P + \bar{H}, \\ \eta(x, y, z, \psi) &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - \\ &\quad - Gx + Dy + Ez + \theta(\psi)Q + \bar{I}, \\ \zeta(x, y, z, \psi) &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + \\ &\quad + Fx - Ey + Dz + \theta(\psi)R + \bar{J}.\end{aligned}\tag{3.3.37}$$

Четвертая же компонента определяется из уравнений (3.3.15), которые в нашем случае приобретают вид

$$\phi_x = \frac{\theta'(\psi)P}{V^2(r)}, \quad \phi_y = \frac{\theta'(\psi)Q}{V^2(r)}, \quad \phi_z = \frac{\theta'(\psi)R}{V^2(r)},$$

где  $r = Px + Qy + Rz$ . Поскольку, очевидно,  $P = r_x, Q = r_y, R = r_z$ , из наших уравнений немедленно следует, что

$$\phi(x, y, z, \psi) = \theta'(\psi)S(Px + Qy + Rz) + \hat{\phi}(\psi), \quad S(r) = \int \frac{dr}{V^2(r)}.\tag{3.3.38}$$

**Случай функции (3.3.25)** разбирается аналогично. Здесь

$$W(x, y, z, \psi) = \Omega(\sigma_0, \psi),$$

где  $\sigma_0 = (x - \alpha(\psi))^2 + (y - \beta(\psi))^2 + (z - \gamma(\psi))^2$ , условие независимости  $W$  от  $\psi$  имеет вид

$$\begin{aligned}-2\Omega_{\sigma_0}(\sigma_0, \psi)[\alpha'(\psi)(x - \alpha(\psi)) + \beta'(\psi)(y - \beta(\psi)) + \gamma'(\psi)(z - \gamma(\psi))] + \\ + \Omega_{\psi}(\sigma_0, \psi) \equiv 0,\end{aligned}$$

и если зафиксировать значения  $\psi$  и  $\sigma_0$ , то допустимые наборы  $(x, y, z)$  образуют сферу. Левая часть нашего уравнения является линейной функцией (относительно  $x, y, z$ ) и сохраняет на сфере нулевое значение. Это возможно только если эта функция тривиальна:

$$\Omega_{\sigma_0}(\sigma_0, \psi)\alpha'(\psi) = \Omega_{\sigma_0}(\sigma_0, \psi)\beta'(\psi) = \Omega_{\sigma_0}(\sigma_0, \psi)\gamma'(\psi) = 0.$$

откуда, в силу нетривиальности  $\Omega_{\sigma_0}$ ,  $\alpha'(\psi) = \beta'(\psi) = \gamma'(\psi) = 0$ , и  $\Omega_{\psi}(\sigma_0, \psi) = 0$ . Таким образом,  $W = \Omega(\sigma_0)$ ,  $v = V(\sigma_0)$  и, поскольку  $\alpha, \beta, \gamma$  от  $\psi$  не

зависят, можно считать систему координат выбранной так, что  $\sigma_0 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Поскольку при таком выборе системы координат  $H' = I' = J' = 0$  (а остальные производные коэффициентов, кроме  $D'(\psi)$ , равны нулю по предположению), первые три компоненты алгебры Ли имеют вид

$$\begin{aligned}\xi &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + D(\psi)x + Gy - Fz + H, \\ \eta &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Gx + D(\psi)y + Ez + I, \\ \zeta &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Ey + D(\psi)z + J.\end{aligned}\quad (3.3.39)$$

а из уравнений (3.3.15), имеющих в этом случае вид

$$\phi_x = \frac{D'(\psi)x}{V^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad \phi_y = \frac{D'(\psi)y}{V^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad \phi_z = \frac{D'(\psi)z}{V^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

получаем

$$\phi(x, y, z, \psi) = \frac{1}{2}D'(\psi)S(x^2 + y^2 + z^2) + \hat{\phi}(\psi), \quad S(r) = \int \frac{dr}{V^2(r)}. \quad (3.3.40)$$

**Случай функции (3.3.24).** Здесь нам будет удобно работать в исходной системе координат (без сдвига), обозначив  $m = G'y - F'z + H'$ ,  $n = -G'x + E'z + I'$ ,  $r = m/n$  (по-прежнему предполагая, что  $G'(\psi) \neq 0$  и оставляя условие (3.3.20):  $H'E' + I'F' + J'G' = 0$ ). Для  $W(x, y, z, \psi) = 2 \ln n + \Omega(r, \psi)$  условие независимости от  $\psi$  имеет вид

$$\Omega_r(r, \psi) \left( \frac{m_\psi n - mn_\psi}{n^2} \right) + \Omega_\psi(r, \psi) + 2 \frac{n_\psi}{n} = 0,$$

и мы преобразуем его, пользуясь тем, что  $m/n = r$ , и введя обозначения  $p = m_\psi/m$ ,  $q = n_\psi/n$  к виду

$$p(r\Omega_r(r, \psi)) - q(r\Omega_r(r, \psi) - 2) + \Omega_\psi(r, \psi) = 0.$$

Покажем, что полученное равенство может выполняться только при выполнении условий  $E''G' - G''E' = F''G' - G''F' = 0$ . Дело в том, что в предположении, что хотя бы одна из этих величин ненулевая, для любого заданного  $r^*$  оказывается возможным считать  $(p, q, r)$  новой локальной (вблизи  $(p^*, q^*, r^*)$  для некоторых  $p^*$  и  $q^*$ ) криволинейной системой координат, эквивалентной  $(x, y, z)$ , а поэтому оказывается возможным, зафиксировав  $r$ , менять  $p$  и  $q$  произвольным образом. Но тогда из нашего уравнения получаем  $r\Omega_r = r\Omega_r - 2 = 0$ , чего, очевидно, не может быть.

Эквивалентность же (локально) систем  $(p, q, r)$  и  $(x, y, z)$  следует из того, что  $(p, q, r)$  выражаются через  $(x, y, z)$  явно, а обратная зависимость

определяется из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} G'y - F'z + H' &= (-G'x + E'z + I')r, \\ G''y - F''z + H'' &= (G'y - F'z + H')p, \\ -G''x + E''z + I'' &= (-G'x + E'z + I')q, \end{aligned}$$

определитель которой равен

$$r(G'' - pG')[E''G' - G''E'] + (G'' - qG')[G'F'' - G''F'].$$

Поэтому в предположении, что одна из величин  $E''G' - G''E'$ ,  $F''G' - G''F'$  не равна нулю, для любого  $r^*$  можно указать такие  $p^*$ ,  $q^*$ , что определитель будет отличен от нуля в окрестности соответствующей точки, а значит в этой окрестности  $(x, y, z)$  и  $(p, q, r)$  взаимно однозначно выражаются друг через друга.

Таким образом, мы доказали, что условие независимости от  $\psi$  влечет  $E''G' - G''E' = F''G' - G''F' = 0$ , что означает просто пропорциональность между собой функций  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$ :

$$E'(\psi) = P\theta'(\psi), \quad F'(\psi) = Q\theta'(\psi), \quad G'(\psi) = R\theta'(\psi),$$

причем  $\theta'(\psi) \neq 0$ . Тогда, для удобства, можно предполагать, что и

$$H'(\psi) = \theta'(\psi)\hat{H}(\psi), \quad I'(\psi) = \theta'(\psi)\hat{I}(\psi), \quad J'(\psi) = \theta'(\psi)\hat{J}(\psi),$$

и, соответственно,

$$m = \theta'(\psi)[Ry - Qz + \hat{H}(\psi)], \quad n = \theta'(\psi)[-Rx + Pz + \hat{I}(\psi)],$$

$$r = (Ry - Qz + \hat{H}(\psi))/(-Rx + Pz + \hat{I}(\psi)),$$

$$W(x, y, z, \psi) = 2 \ln(-Rx + Pz + \hat{I}(\psi)) + \hat{\Omega}(r, \psi).$$

Но в этом случае условие независимости  $W$  от  $\psi$  упрощается и приобретает, после преобразования, вид

$$\frac{1}{-Rx + Pz + \hat{I}(\psi)} [\hat{H}'(\psi)\hat{\Omega}_r(r, \psi) - (r\hat{\Omega}_r(r, \psi) - 2)\hat{I}'(\psi)] + \hat{\Omega}_\psi(r, \psi) = 0.$$

Поскольку равенство должно быть тождеством, а при зафиксированных  $r, \psi$  множитель  $1/(-Rx + Pz + \hat{I}(\psi))$  может меняться произвольным образом, полученное уравнение эквивалентно двум условиям:

$$\hat{H}'(\psi)\hat{\Omega}_r(r, \psi) - (r\hat{\Omega}_r(r, \psi) - 2)\hat{I}'(\psi) = 0, \quad \hat{\Omega}_\psi(r, \psi) = 0.$$

Второе условие означает, что  $\hat{\Omega}$  является функцией только одной переменной –  $r$ . А в первом при этом по существу происходит разделение

переменных:  $\hat{H}'(\psi)\hat{\Omega}'(r) = (r\hat{\Omega}'(r) - 2)\hat{I}'(\psi)$ , и либо  $\hat{H}' = \hat{I}' = 0$ , либо  $r\hat{\Omega}'(r) - 2 = k\hat{\Omega}'(r)$  и  $\hat{H}' = k\hat{I}'$ .

В случае  $r\hat{\Omega}'(r) - 2 = k\hat{\Omega}'(r)$ , оказывается

$$W = 2 \ln(w[Ry - Qz + \hat{H}(\psi) - k(-Rx + Pz + \hat{I}(\psi))]),$$

и мы приходим к случаю линейной функции  $v(x, y, z)$ , с не зависящими от  $\psi$  коэффициентами ( $\hat{H}(\psi) - k\hat{I}(\psi)$  является константой, так как  $\hat{H}'(\psi) - k\hat{I}'(\psi) = 0$ ):

$$v(x, y, z) = w[kRx + Ry - (Q + kP)z + M].$$

Мы ее уже рассмотрели в предыдущем пункте, поэтому далее будем обсуждать только случай  $\hat{H}' = \hat{I}' = 0$ , т.е.  $\hat{H}$  и  $\hat{I}$  (а значит, и  $\hat{J}$  – в силу  $\hat{H}P + \hat{I}Q + \hat{J}R = 0$ ) являются константами:  $\hat{H}(\psi) \equiv \bar{H}$ ,  $\hat{I}(\psi) \equiv \bar{I}$ ,  $\hat{J}(\psi) \equiv \bar{J}$ . Но тогда мы приходим к функции скорости

$$v(x, y, z) = (-\bar{R}x - \bar{Q}z + \bar{I})V \left( \frac{\bar{R}y - \bar{Q}z + \bar{H}}{-\bar{R}x + \bar{P}z + \bar{I}} \right),$$

причем  $P\bar{H} + Q\bar{I} + R\bar{J} = 0$ . Далее мы будем предполагать, что за счет сдвига начала координат  $\bar{H}$ ,  $\bar{I}$  и  $\bar{J}$  сделаны нулевыми, и тогда

$$v(x, y, z) = (-Rx + Pz)V \left( \frac{Ry - Qz}{-Rx + Pz} \right),$$

а первые три компоненты алгебры Ли имеют вид

$$\begin{aligned} \xi &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + \\ &\quad + \theta(\psi)[Ry - Qz] + Gy - Fz + H, \\ \eta &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz + Dy + \\ &\quad + \theta(\psi)[-Rx + Pz] - Gx + Ez + I, \\ \zeta &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Dz + \\ &\quad + \theta(\psi)[Qx - Py] + Fx - Ey + J \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

При этом мы можем без ограничения общности считать, что вектор  $(P, Q, R)$  нормирован:  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$  и что  $PE + QF + RG = 0$  (иначе можно составляющую вектора  $(E, F, G)$ , коллинеарную  $(P, Q, R)$ , просто включить в предыдущее слагаемое, заменив на  $\hat{\theta}(\psi)$  сумму  $\theta(\psi) + PE + QF + RG$ ).

Четвертая же компонента  $\phi$  определяется, как и раньше, из соотношений (3.3.15), которые в нашем случае имеют вид

$$\phi_x = \frac{\theta'(\psi)(Ry - Qz)}{V^2(r)(-Rx + Pz)^2} = \frac{\theta'(\psi)r_x}{RV^2(r)}, \quad \phi_y = \frac{\theta'(\psi)r_y}{RV^2(r)}, \quad \phi_z = \frac{\theta'(\psi)r_z}{RV^2(r)}$$

(где  $r$  по-прежнему равно  $r = (Ry - Qz)/(-Rx + Pz)$ ), откуда

$$\phi(x, y, z, \psi) = \frac{\theta'(\psi)}{R} S(r) + \hat{\phi}(\psi), \quad S(r) = \int \frac{1}{V^2(r)}. \quad (3.3.42)$$

**Случай функции (3.3.22).** Обозначая, как и ранее,  $\tilde{x} = x - \alpha(\psi)$ ,  $\tilde{y} = y - \beta(\psi)$ ,  $\tilde{z} = z - \gamma(\psi)$ ,  $l = A'\tilde{x} + B'\tilde{y} + C'\tilde{z}$ ,  $\sigma = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \pm \nu^2$ ,  $r = l/\sigma$ , выпишем условия независимости от  $\psi$  функции  $W(x, y, z, \psi) = 2 \ln \sigma + \Omega(r, \psi)$ . После преобразования они приобретают вид

$$\begin{aligned} & -2[\alpha'(x - \alpha) + \beta'(y - \beta) + \gamma'(z - \gamma) \mp \nu\nu']r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) + \\ & + r\Omega_r(r, \psi)[A''(x - \alpha) + B''(y - \beta) + C''(z - \gamma) - (A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma')] + \\ & + \Omega_\psi(r, \psi)[A'(x - \alpha) + B'(y - \beta) + C'(z - \gamma)] = 0. \end{aligned}$$

Если зафиксировать  $r, \psi$ , то полученное соотношение означает равенство нулю на сфере

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 \pm \nu^2 - \frac{1}{r}[A'(x - \alpha) + B'(y - \beta) + C'(z - \gamma)] = 0$$

линейной относительно  $(x, y, z)$  функции, что возможно только если все ее коэффициенты нулевые. Это дает нам систему уравнений

$$\begin{aligned} & -2\alpha'r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) + r\Omega_r(r, \psi)A'' + \Omega_\psi(r, \psi)A' = 0, \\ & -2\beta'r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) + r\Omega_r(r, \psi)B'' + \Omega_\psi(r, \psi)B' = 0, \\ & -2\gamma'r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) + r\Omega_r(r, \psi)C'' + \Omega_\psi(r, \psi)C' = 0, \\ & \pm 2\nu\nu'r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) - r\Omega_r(r, \psi)[A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma'] = 0. \end{aligned}$$

Исключая пропорциональность  $r(2 - r\Omega_r)$  и  $r\Omega_r$  (т.к. предположение, что  $r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) = k(\psi)r\Omega_r(r, \psi)$ , приводит к  $v(x, y, z) = \Delta(\psi)(l + k\sigma)$ , которая является линейной функцией при  $k = 0$  и квадратичной при  $k \neq 0$ ), из последнего уравнения получаем  $\nu' = 0$  и  $A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma' = 0$ . Сложением первого уравнения, умноженного на  $\alpha'$ , второго - на  $\beta'$ , и третьего - на  $\gamma'$ , получим

$$-2[\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2]r(2 - r\Omega_r(r, \psi)) + r\Omega_r(r, \psi)[A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma'] = 0,$$

откуда (опять же исключая пропорциональности  $r(2 - r\Omega_r)$  и  $r\Omega_r$ )  $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ , т.е.  $\sigma$  от  $\psi$  не зависит. Нам будет удобно далее считать, что за счет сдвига системы координат мы добились того, чтобы  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , т.е.  $\sigma = x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2$ , а  $l = A'x + B'y + C'z$ .

В указанных предположениях наши уравнения приобретают вид

$$r\Omega_r(r, \psi)A'' + \Omega_\psi(r, \psi)A' = r\Omega_r(r, \psi)B'' + \Omega_\psi(r, \psi)B' =$$



$$= r\Omega_r(r, \psi)C'' + \Omega_\psi(r, \psi)C' = 0,$$

что означает взаимную пропорциональность коэффициентов  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ :

$$A'(\psi) = \Delta'(\psi)P, \quad B'(\psi) = \Delta'(\psi)Q, \quad C(\psi)' = \Delta'(\psi)R,$$

причем мы можем без ограничения общности предполагать, что  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ . В этом случае  $l = A'x + B'y + C'z = \Delta'(\psi)(Px + Qy + Rz)$ ,

$$W = 2\ln(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2) + \hat{\Omega}\left(\frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2}, \psi\right),$$

и независимость  $W$  от  $\psi$  эквивалентна  $\hat{\Omega}_\psi = 0$ , так что окончательно получаем

$$v(x, y, z) = \sigma V(r), \quad r = \frac{l}{\sigma} = \frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2}.$$

Первые три компоненты соответствующей алгебры Ли имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z, \psi) &= \Delta(\psi)[P(x^2 - y^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2Qxy + 2Rxz] + \\ &\quad + \bar{A}(x^2 - y^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2\bar{B}xy + 2\bar{C}xz + Dx + Gy - Fz + H, \\ \eta(x, y, z, \psi) &= \Delta(\psi)[Q(y^2 - x^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2Pxy + 2Ryz] + \\ &\quad + \bar{B}(y^2 - x^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2\bar{A}xy + 2\bar{C}yz - Gx + Dy + Ez + I, \\ \zeta(x, y, z, \psi) &= \Delta(\psi)[R(z^2 - y^2 - x^2 \mp \nu^2) + 2Qyz + 2Pxz] + \\ &\quad + \bar{C}(z^2 - y^2 - x^2 \mp \nu^2) + 2\bar{B}yz + 2\bar{A}xz + Fx - Ey + Dz + J, \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

причем без ограничения общности можно считать  $\bar{A}P + \bar{B}Q + \bar{C}R = 0$ .

Четвертая же компонента опять легко определяется из уравнений (3.3.15): поскольку оказывается, что  $\xi_\psi = -\Delta'(\psi)r_x\sigma^2$ ,  $\eta_\psi = -\Delta'(\psi)r_y\sigma^2$ ,  $\zeta_\psi = -\Delta'(\psi)r_z\sigma^2$ , уравнения

$$\phi_x = \frac{\xi_\psi}{\nu^2}, \quad \phi_y = \frac{\eta_\psi}{\nu^2}, \quad \phi_z = \frac{\zeta_\psi}{\nu^2}$$

немедленно дают

$$\phi(x, y, z, \psi) = -\Delta'(\psi)S(r) + \hat{\phi}(\psi), \quad S(r) = \int \frac{dr}{V^2(r)}. \quad (3.3.44)$$

**Случай**  $\xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi = 0$ . Здесь на вид функций  $W$  и  $v$  пока никаких ограничений не налагалось, поэтому независимость их от  $\psi$  никаких дополнительных предположений не требует, а система (3.3.15) превращается в  $\phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$ , что означает, что  $\phi$  зависит только от одного аргумента:  $\phi(x, y, z, \psi) = \hat{\phi}(\psi)$ . Остальные же компоненты алгебры определяются формулами (3.3.16) с не зависящими от  $\psi$  коэффициентами:

$$\begin{aligned} \xi &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Gy - Fz + H, \\ \eta &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Gx + Dy + Ez + I, \\ \zeta &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Ey + Dz + J. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

### 3.3.7 Детальная групповая классификация для семейств (3.3.6)-(3.3.9)

По существу у нас осталось одно-единственное уравнение, которое мы пока не разрешили – это последнее из уравнений (3.3.13)

$$\xi_x = \phi_\psi + \frac{1}{v}(\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z). \quad (3.3.46)$$

Мы произведем подстановку в это уравнение найденных нами компонент алгебры Ли  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  и функции скорости  $v(x, y, z)$ , и найдем дополнительные ограничения на коэффициенты алгебры и либо дополнительные ограничения на  $v(x, y, z)$  (и  $S(r)$ ), либо найдем алгебры, обслуживающие все семейство.

Всюду рассуждения происходят в три этапа. На первом подстановкой в (3.3.46) и исключением случаев, описываемых формулами (3.3.1)-(3.3.5) удастся добиться практически полного определения коэффициентов в формулах первых трех компонент  $\xi, \eta, \zeta$  векторного поля и прийти к некоторому уравнению, в котором фигурируют уже только две независимые переменные –  $r$  и  $\psi$  (и в которое входят неизвестные пока функции  $S(r)$  и  $V(r)$ ). Это уравнение мы будем называть *характеристическим уравнением* семейства. Второй этап – это разделение переменных. Здесь "отделяется" случай алгебры Ли, обслуживающей все семейство (и тогда полученное нами уравнение удовлетворяется тождественно), а в случае семейства (3.3.6) (плоских функций скорости) и семейства (3.3.9) с  $\nu = 0$  – и случай степенной зависимости с пятимерной алгеброй Ли. Альтернативой отделившимся вариантам оказывается дифференциальное уравнение, в котором фигурируют только одна независимая переменная –  $r$ , и в котором задается связь между  $S(r)$  и  $V(r)$ . Это уравнение мы будем далее называть *уравнением ветвления*. Третий этап – это решение уравнения ветвления. Поскольку оно имеет практически одинаковый вид для всех четырех семейств, мы соответствующие рассуждения проведем в общем виде в пункте 3.3.8. Именно это уравнение дает шесть различных формул, в зависимости от значений коэффициентов, и именно эти шесть вариантов и приведены в таблицах П.2-П.6 в приложении П.3. В случае четвертого семейства возникает еще одно ветвление вариантов – в зависимости от значения выражения  $\pm\nu^2$ , так что всего вариантов здесь оказывается восемнадцать. Правда, некоторые из них (два варианта в случае семейства плоских функций и два – в случае осесимметричных) оказываются функциями вида (3.3.1)-(3.3.5), и поэтому они в числе подсемейств раздела II в формулировке теоремы не учитываются.

**Случай**  $v(x, y, z) = V(r) = V(Px + Qy + Rz)$ . Для такой функции  $v$  (и

соответствующей  $\phi$ ) уравнение (3.3.46) превращается в

$$\xi_x = \theta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + \frac{V'(r)}{V(r)}(\xi r_x + \eta r_y + \zeta r_z),$$

а подстановка в него  $\xi, \eta, \zeta$  из (3.3.37) дает

$$\begin{aligned} 2Ax + 2By + 2Cz + D = \theta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + \frac{V'(r)}{V(r)} \times \\ \times \{ P[A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Ey - Fz + \theta(\psi)P + \bar{H}] + \\ + Q[B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Ex + Dy + Gz + \theta(\psi)Q + \bar{I}] + \\ + R[C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Gy + Dz + \theta(\psi)R + \bar{J}] \}. \end{aligned}$$

Если зафиксировать  $\psi$  и  $r$ , то мы получим, что некоторая квадратичная функция равна нулю на гиперплоскости  $Px + Qy + Rz = r$ , что возможно только если эта квадратичная функция является произведением  $Px + Qy + Rz - r$  на некоторую другую линейную функцию от  $x, y, z$ , т.е. может быть представлена в виде

$$(Px + Qy + Rz - r)(\alpha x + \beta y + \gamma z - \varkappa)$$

Осуществляя перемножение в этой формуле и уравнивая коэффициенты при соответствующих степенях  $x, y, z$  с коэффициентами в нашем уравнении, получаем

$$\begin{cases} (AP - BQ - RC)V'(r)/V(r) = \alpha P, \\ (-AP + BQ - RC)V'(r)/V(r) = \beta Q, \\ (-AP - BQ + RC)V'(r)/V(r) = \gamma R, \end{cases} \quad (3.3.47)$$

$$\begin{cases} (2BP + 2AQ)V'(r)/V(r) = \alpha Q + \beta P, \\ (2CP + 2AR)V'(r)/V(r) = \alpha R + \gamma P, \\ (2CQ + 2BR)V'(r)/V(r) = \beta R + \gamma Q, \end{cases} \quad (3.3.48)$$

$$\begin{cases} (PD - QE + RF)V'(r)/V(r) - 2A = -\alpha r - \varkappa P, \\ (PE + QD - RG)V'(r)/V(r) - 2B = -\beta r - \varkappa Q, \\ (-PF + QG + RD)V'(r)/V(r) - 2C = -\gamma r - \varkappa R, \end{cases} \quad (3.3.49)$$

$$\theta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + \frac{V'(r)}{V(r)}[\theta(\psi)(P^2 + Q^2 + R^2) + P\bar{H} + Q\bar{I} + R\bar{J}] - D = r\varkappa. \quad (3.3.50)$$

Умножая первое уравнение из (3.3.49) на  $PQ$  и подставляя в правую часть  $\alpha P$  и  $\beta Q$  из (3.3.47), после сокращения на  $V'/V$  (случай  $V' = 0$  исключен – это случай функции (3.3.1)), получаем  $(AP + BQ + CR)(P^2 + Q^2) = 0$ . Аналогично выводятся равенства  $(AP + BQ + CR)(P^2 + R^2) = 0$ ,

$(AP+BQ+CR)(Q^2+R^2) = 0$ , откуда (в силу  $P^2+Q^2+R^2 = 1$ ) следует  $AP+BQ+CR = 0$ . Но тогда (3.3.47) и (3.3.48) дают явные выражения  $\alpha, \beta, \gamma$  через  $A, B, C$ :  $\alpha = 2AV'(r)/V(r)$ ,  $\beta = 2BV'(r)/V(r)$ ,  $\gamma = 2CV'(r)/V(r)$ , и при этом из  $AP+BQ+CR = 0$  немедленно следует  $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$ .

Складывая уравнения (3.3.49) с коэффициентами  $P, Q, R$ , получаем явное выражение для  $\varkappa = -DV'(r)/V(r)$ , и поэтому (3.3.49) сводится к

$$\frac{V'(r)}{V(r)}[-QE + RF] = 2A(1 - r\frac{V'(r)}{V(r)}), \quad \frac{V'(r)}{V(r)}[PE - RG] = 2B(1 - r\frac{V'(r)}{V(r)}),$$

$$\frac{V'(r)}{V(r)}[-PF + QG] = 2C(1 - r\frac{V'(r)}{V(r)}),$$

из которых исключением случая  $(1 - rV'(r)/V(r)) = kV'(r)/V(r)$  (приводящему к случаю  $V(r) = w \cdot (r+k)$  линейной функции скорости), получаем  $A = B = C = \alpha = \beta = \gamma = 0$ ,  $-QE + RF = PE - RG = -PF + QG = 0$ , а последние соотношения означают, что для некоторой постоянной  $\Delta$  выполнено  $E = \Delta R$ ,  $F = \Delta Q$ ,  $G = \Delta P$ . Подстановка найденных коэффициентов в (3.3.37) дает

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z, \psi) &= \Delta(Ry - Qz) + \theta(\psi)P + \bar{H}, \\ \eta(x, y, z, \psi) &= \Delta(-Rx + Pz) + \theta(\psi)Q + \bar{I}, \\ \zeta(x, y, z, \psi) &= \Delta(Qx - Py) + \theta(\psi)R + \bar{J}, \end{aligned}$$

что, с учетом введенных нами в приложении II.1 обозначений, приводит к алгебре Ли

$$\begin{aligned} \Xi_{II.1} &= \Delta \Xi_{\circ}(P, Q, R) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J) + \theta(\psi)\Xi_{\uparrow}(P, Q, R) + \\ &+ (\theta'(\psi)S(Px + Qy + Rz) + \hat{\phi}(\psi))\partial_{\psi}, \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

где константы  $\Delta, \bar{H}, \bar{I}, \bar{J}$  произвольны и подчиняются только ограничению  $P\bar{H} + Q\bar{I} + R\bar{J} = 0$ , а функции  $S(r), V(r), \theta(\psi)$  и  $\hat{\phi}(\psi)$  удовлетворяют уравнению

$$\theta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + \frac{V'(r)}{V(r)}\theta(\psi) = D(1 - r\frac{V'(r)}{V(r)}). \quad (3.3.52)$$

которое получается из (3.3.50) подстановкой найденного значения  $\varkappa$ , и использованием равенства  $P\bar{H} + Q\bar{I} + R\bar{J} = 0$ . Это и есть характеристическое уравнение первого семейства.

Разделение переменных осуществляется непосредственно: случай  $\theta(\psi) = 0$  при  $D = 0$  дает  $\hat{\phi} = L$  и мы получаем алгебру, обслуживающую все семейство (она приведена в первой строке таблицы II.1 в приложении II.3). Случай  $D \neq 0$  для  $\theta(\psi) = 0$  (а также и для  $\theta(\psi) = \bar{\theta} = \text{const}$ ) приводит к

$V(r) = w \cdot (Dr + \bar{\theta})^{1-M/D}$ , откуда, обозначая  $-M/D = k$  и сдвигая систему координат так, чтобы  $\bar{\theta}$  оказалось равным нулю, получаем подсемейство, приведенное в первой строке таблицы II.2 приложения II.3.

Если же  $\theta \neq \text{const}$ , то дифференцирование нашего уравнения по  $\psi$  немедленно приводит к тому, что

$$V'(r)/V(r) = \lambda S(r) + \mu, \quad (3.3.53)$$

для некоторых констант  $\lambda$  и  $\mu$ , подстановка этого соотношения в (3.3.52) дает

$$S(r)[\theta''(\psi) + \lambda\theta(\psi) + \lambda Dr] + \hat{\phi}'(\psi) + \mu\theta(\psi) - D(1 - \mu r) = 0,$$

откуда либо  $\lambda D = \mu D = 0$ ,  $\theta''(\psi) + \lambda\theta(\psi) = 0$ ,  $\hat{\phi}'(\psi) + \mu\theta(\psi) = D$ , либо мы приходим к одной из функций скорости (3.3.1)-(3.3.2). Поскольку  $\lambda = \mu = 0$  в силу (3.3.53) опять же приводит к функции вида (3.3.1), остается  $D = 0$ , и уравнение (3.3.53) дополняется уравнениями

$$\theta''(\psi) + \lambda\theta(\psi) = 0, \quad \hat{\phi}'(\psi) + \mu\theta(\psi) = 0. \quad (3.3.54)$$

По существу разделение переменных сделано. Уравнение (3.3.53) есть уравнение ветвления для первого семейства. Анализ систем типа (3.3.53)-(3.3.54) (а такие системы возникают во всех четырех случаях) мы будем проводить единым образом в пункте 3.3.8.

**Случай**  $v(x, y, z) = V(\sigma_0) = V(x^2 + y^2 + z^2)$ . Анализ этого случая происходит по той же схеме, что и предыдущего. Подстановка в уравнение (3.3.46)  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  из (3.3.39)-(3.3.40) и  $v$  вида (3.3.7) дает линейное уравнение относительно  $x, y, z$  (при зафиксированных  $\psi$  и  $\sigma_0$ ), которое оказывается тождеством на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_0$ . Это возможно только если линейные функции в правой и левой частях уравнения совпадают тождественно, что дает систему соотношений

$$2A = 2\frac{V'(\sigma_0)}{V(\sigma_0)}(A\sigma_0 + H), \quad 2B = 2\frac{V'(\sigma_0)}{V(\sigma_0)}(B\sigma_0 + I), \quad 2C = 2\frac{V'(\sigma_0)}{V(\sigma_0)}(C\sigma_0 + J),$$

$$\frac{1}{2}D''(\psi)S(\sigma_0) + \hat{\phi}'(\psi) + D(\psi) \left[ 2\frac{V'(\sigma_0)}{V(\sigma_0)}\sigma_0 - 1 \right] = 0, \quad (3.3.55)$$

из которой исключением случая функции скорости вида (3.3.5) получаем  $A = B = C = H = I = J = 0$ , так что нам остается единственное уравнение (3.3.55) – характеристическое уравнение второго семейства. Компоненты векторного поля  $\xi, \eta, \zeta$  приобретают вид

$$\xi = D(\psi)x + Gy - Fz, \quad \eta = -Gx + D(\psi)y + Ez, \quad \zeta = Fx - Ey + D(\psi)z,$$

что приводит, с учетом обозначений параграфа II.1, к алгебре

$$\Xi_{II.2} = \Xi_{\circ}(E, F, G) + D(\psi)\Xi_{*} + \left[\frac{1}{2}D'(\psi)S(x^2 + y^2 + z^2) + \hat{\phi}(\psi)\right]\partial_{\psi} \quad (3.3.56)$$

с произвольными константами  $E, F, G$  и функциями  $S(r), V(r), D(\psi), \hat{\phi}(\psi)$ , удовлетворяющими (3.3.55).

Разделение переменных в (3.3.55) дает либо  $D(\psi) \equiv 0$ , что приводит к  $\phi(\psi) = L$  и мы получаем алгебру, обслуживающую все семейство, которая приведена во второй строке таблицы II.1 приложения II.3. Либо  $D(\psi) \neq 0$  (хотя бы для одного значения  $\psi$ ), и мы получаем тогда уравнение ветвления

$$4\frac{V'(\sigma_0)}{V(\sigma_0)}\sigma_0 - 2 = \lambda S + \mu, \quad (3.3.57)$$

а из (3.3.55) – сопровождающие уравнения

$$D''(\psi) = \lambda D(\psi), \quad \hat{\phi}'(\psi) = \frac{1}{2}\mu D(\psi). \quad (3.3.58)$$

Это – система того же типа, что и (3.3.53)-(3.3.54), она будет обсуждаться в пункте 3.3.8.

**Случай**  $v(x, y, z) = (-Rx + Pz)V((Ry - Qz)/(-Rx + Pz))$ . Подстановка в уравнение (3.3.46) функций  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  из (3.3.41)-(3.3.42) и  $v$  дает квадратичное уравнение относительно  $x, y, z$  (при зафиксированных  $\psi$  и  $r$ ), которое оказывается тождеством на плоскости  $r = (Ry - Qz)/(-Rx + Pz)$ . Поскольку гомотетия с коэффициентом  $k$  оставляет нас на этой плоскости, а различные члены квадратичной функции при этом умножаются на разные коэффициенты, оказывается возможным приравнять друг другу по отдельности квадратичные, линейные и свободные члены, что дает три уравнения

$$\begin{aligned} (RA - PC)\left(1 - r\frac{V'(r)}{V(r)}\right) - (RB - QC)\frac{V'(r)}{V(r)} &= 0, \\ (-Rx + Pz)\left[\frac{1}{G}\theta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi)\right] - R[\theta(\psi)(Ry - Qz) + Gy - Fz] + \\ + P[\theta(\psi)(Qx - Py) + Fx - Ey] + \frac{V'(r)}{V(r)}[Rr(\theta(\psi)(Ry - Qz) + Gy - Fz) + \\ + R(\theta(\psi)(-Rx + Pz) - Gx + Ez) - (Q + Pr)(\theta(\psi)(Qx - Py) + Fx - Ey)] &= 0, \\ (PJ - RH)\left(1 - r\frac{V'(r)}{V(r)}\right) - \frac{V'(r)}{V(r)}(QJ - RI) &= 0. \end{aligned}$$

Исключение в первом и третьем уравнениях случая функции вида (3.3.2) приводит нас к условиям  $RA - PC = RB - QC = 0$ ,  $PJ - RH = QJ - RI = 0$ , второе уравнение приводится к виду

$$(-Rx + Pz) \left[ \frac{1}{R} \theta''(\psi) S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + G\theta(\psi) \left( -r - \frac{P(Q + Pr)}{R^2} + \frac{V'(r)}{V(r)} \left( r^2 + 1 + \frac{(Q + Pr)^2}{R^2} \right) \right) \right] = [-F + (Fr - E) \frac{V'(r)}{V(r)}] (Px + Qy + Rz),$$

и подстановка в это уравнение вектора  $(x, y, z) = (P - \epsilon, Q + \epsilon r, R)$  (очевидно, лежащего в плоскости  $r = (Ry - Qz)/(-Rx + Pz)$ ) дает, в силу произвола выбора  $\epsilon$ , два уравнения, первое из которых  $-F + (Fr - E) \frac{V'(r)}{V(r)} = 0$  приводит исключением случая функций вида (3.3.1)-(3.3.2) к условию  $E = F = G = 0$ , а второе тогда оказывается как раз характеристическим уравнением третьего семейства:

$$\frac{1}{R} \theta''(\psi) S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + R\theta(\psi) \left( -r - \frac{P(Q + Pr)}{R^2} + \frac{V'(r)}{V(r)} \left( r^2 + 1 + \frac{(Q + Pr)^2}{R^2} \right) \right) = 0. \quad (3.3.59)$$

Подстановка полученных нами значений коэффициентов в (3.3.41) дает

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z, \psi) &= \Delta[E(x^2 - y^2 - z^2) + 2Fxy + 2Gxz] + Dx + \\ &\quad + \theta(\psi)[Ey - Fz] + \varkappa E, \\ \eta(x, y, z, \psi) &= \Delta[F(y^2 - x^2 - z^2) + 2Exy + 2Gyz] + Dy + \\ &\quad + \theta(\psi)[-Ex + Gz] + \varkappa F, \\ \zeta(x, y, z, \psi) &= \Delta[G(z^2 - x^2 - y^2) + 2Exz + 2Fyz] + Dz + \\ &\quad + \theta(\psi)[Fx - Gy] + \varkappa G, \end{aligned}$$

и мы получаем алгебру Ли

$$\begin{aligned} \Xi_{II.3} &= \Delta \Xi_\infty(E, F, G, 0) + D \Xi_* + \varkappa \Xi_\uparrow(E, F, G) + \\ &\quad + \theta(\psi) \Xi_\circ(E, F, G) + \left[ \frac{\theta'(\psi)}{G} S \left( \frac{Gy - Fz}{-Gx + Ez} \right) + \hat{\phi}(\psi) \right] \partial_\psi \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

с произвольными константами  $\Delta, D, \varkappa$  и с функциями  $S(r), V(r), \theta(\psi)$  и  $\hat{\phi}(\psi)$ , удовлетворяющими (3.3.59).

Из (3.3.59) при  $\theta(\psi) \equiv 0$  мы получаем  $\phi(\psi) = L$  и приходим к алгебре, обслуживающей все семейство, которая указана в третьей строке таблицы II.1 приложения II.3. При  $\theta(\psi) \neq 0$  хотя бы для одного  $\psi$  мы получаем, как и в предыдущих пунктах, систему

$$\frac{V'(r)}{V(r)} \left( r^2 + 1 + \frac{(Q + Pr)^2}{R^2} \right) - r - \frac{P(Q + Pr)}{R^2} = \frac{1}{R} (\lambda S(r) + \mu), \quad (3.3.61)$$

$$\theta''(\psi) + \lambda R\theta(\psi) = 0, \quad \hat{\phi}'(\psi) = -\mu\theta(\psi), \quad (3.3.62)$$

к которой вернемся в пункте 3.3.8.

**Случай**  $v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)V \left( \frac{Px+Qy+Rz}{x^2+y^2+z^2 \pm \nu^2} \right)$  Подстановка в уравнение (3.3.46)  $\xi, \eta, \zeta, \phi$  и  $v$  из (3.3.43)-(3.3.44) дает, после упрощений, и фиксации, как и ранее,  $\psi$  и  $r = (Px + Qy + Rz)/(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)$ , равенство нулю линейной функции на сфере. Это возможно только если линейная функция тривиальна, что дает систему соотношений

$$\begin{aligned} & P \left[ -\Delta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + D \left( 1 - r \frac{V'(r)}{V(r)} \right) - \right. \\ & \quad \left. -\Delta(\psi) \left( \frac{V'(r)}{V(r)}(1 \mp 4r^2\nu^2) \pm 4r\nu^2 \right) \right] \mp \\ & \mp 4\bar{A} \left( r - \frac{V'(r)}{V(r)}r^2 \right) \nu^2 + 2H \left( r - r^2 \frac{V'(r)}{V(r)} \right) + (FR - GQ)r \frac{V'(r)}{V(r)} = 0, \\ & Q \left[ -\Delta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + D \left( 1 - r \frac{V'(r)}{V(r)} \right) - \right. \\ & \quad \left. -\Delta(\psi) \left( \frac{V'(r)}{V(r)}(1 \mp 4r^2\nu^2) \pm 4r\nu^2 \right) \right] \mp \\ & \mp 4\bar{B} \left( r - \frac{V'(r)}{V(r)}r^2 \right) \nu^2 + 2I \left( r - r^2 \frac{V'(r)}{V(r)} \right) + (GP - ER)r \frac{V'(r)}{V(r)} = 0, \\ & R \left[ -\Delta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) + D \left( 1 - r \frac{V'(r)}{V(r)} \right) - \right. \\ & \quad \left. -\Delta(\psi) \left( \frac{V'(r)}{V(r)}(1 \mp 4r^2\nu^2) \pm 4r\nu^2 \right) \right] \mp \\ & \mp 4\bar{C} \left( r - \frac{V'(r)}{V(r)}r^2 \right) \nu^2 + 2J \left( r - r^2 \frac{V'(r)}{V(r)} \right) + (EQ - FP)r \frac{V'(r)}{V(r)} = 0, \\ & r \frac{V'(r)}{V(r)} [\pm 2Dr\nu^2 + (PH + QI + RJ)] \mp 2Dr\nu^2 = 0. \end{aligned}$$

Разрешение последнего соотношения с исключением случаев функций вида (3.3.2)-(3.3.5) приводит к равенствам  $D = 0$ ,  $PH + QI + RJ = 0$ , а тогда из первых трех соотношений получаем четыре уравнения:

$$-\Delta''(\psi)S(r) + \hat{\phi}'(\psi) - \Delta(\psi) \left( \frac{V'(r)}{V(r)}(1 \mp 4r^2\nu^2) \pm 4r\nu^2 \right) = 0, \quad (3.3.63)$$

$$(2H \mp 4\bar{A}\nu^2) \left( r - \frac{V'(r)}{V(r)}r^2 \right) + (FR - GQ)r \frac{V'(r)}{V(r)} = 0,$$



$$(2I \mp 4\bar{B}\nu^2) \left( r - \frac{V'(r)}{V(r)} r^2 \right) + (GP - ER)r \frac{V'(r)}{V(r)} = 0,$$

$$(2J \mp 4\bar{C}\nu^2) \left( r - \frac{V'(r)}{V(r)} r^2 \right) + (EQ - FP)r \frac{V'(r)}{V(r)} = 0,$$

решение последних трех из полученных уравнений снова с исключением случаев функции  $v(x, y, z)$  вида (3.3.2)-(3.3.5) дает условия  $H = \pm 2\bar{A}\nu^2$ ,  $I \pm 2\bar{B}\nu^2$ ,  $J = \pm 2\bar{C}\nu^2$ , (при этом условие  $PH + IQ + RJ = 0$  оказывается выполненным автоматически) и  $FR - GQ = GP - ER = EQ - FP = 0$ . Переписав последнее условие в виде  $E = \theta P$ ,  $F = \theta Q$ ,  $G = \theta R$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z, \psi) &= \Delta(\psi)[P(x^2 - y^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2Qxy + 2Rxz] + \\ &\quad + \bar{A}(x^2 - y^2 - z^2 \pm \nu^2) + 2\bar{B}xy + 2\bar{C}xz + \theta(Ry - Qz), \\ \eta(x, y, z, \psi) &= \Delta(\psi)[Q(y^2 - x^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2Pxy + 2Ryz] + \\ &\quad + \bar{B}(y^2 - x^2 - z^2 \pm \nu^2) + 2\bar{A}xy + 2\bar{C}yz + \theta(-Rx + Pz), \\ \zeta(x, y, z, \psi) &= \Delta(\psi)[R(z^2 - y^2 - x^2 \mp \nu^2) + 2Qyz + 2Pxz] + \\ &\quad + \bar{C}(z^2 - y^2 - x^2 \pm \nu^2) + 2\bar{B}yz + 2\bar{A}xz + \theta(Qx - Py), \end{aligned}$$

что дает алгебру Ли

$$\begin{aligned} \Xi_{II.4} &= \Xi_{\infty}(A, B, C, \mp \nu^2) + \theta \Xi_0(P, Q, R) + \\ &\quad + [-\Delta'(\psi)S \left( \frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2} \right) + \hat{\phi}(\psi)] \partial_{\psi} \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

с произвольными константами  $\theta$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , удовлетворяющими условию  $\bar{A}P + \bar{B}Q + \bar{C}R = 0$  и с функциями  $S(r)$ ,  $V(r)$ ,  $\Delta(\psi)$  и  $\hat{\phi}(\psi)$ , удовлетворяющими (3.3.63), которое является характеристическим уравнением для четвертого семейства.

Здесь, как и ранее, либо  $\Delta(\psi) \equiv 0$ , и тогда мы приходим к алгебре, обслуживающей все семейство и приведенной в четвертой строке таблицы II.1 приложения II.3, либо мы получаем уравнение ветвления

$$\frac{V'(r)}{V(r)}(1 \mp 4r^2\nu^2) \pm 4r\nu^2 = \lambda S(r) + \mu, \quad (3.3.65)$$

и сопровождающие уравнения

$$\Delta''(\psi) + \lambda\Delta(\psi) = 0, \quad \hat{\phi}'(\psi) = \mu\Delta(\psi), \quad (3.3.66)$$

которые будут обсуждаться ниже.

### 3.3.8 Уравнение ветвления

Как нетрудно видеть, все четыре полученные нами уравнения ветвления (3.3.53), (3.3.57), (3.3.61), (3.3.65) имеют одинаковый вид:

$$\frac{V'(r)}{V(r)} \frac{1}{\chi'(r)} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\chi'(r)} \right)' = \lambda S(r) + \mu \quad (3.3.67)$$

В случае первого семейства  $\chi'(r) = 1, \chi(r) = r$ , в случае второго  $\chi'(r) = 1/(4r), \chi(r) = 1/4 \ln r$ , для третьего  $\chi'(r) = R^{-1}[r^2 + 1 + (Q + Pr)^2/R^2]^{-1}, \chi(r) = \text{arctg}([r(R^2 + P^2) + QP]/R)$ , и, наконец, у четвертого семейства  $\chi'(r) = 1/(1 \mp 4r^2\nu^2)$ , и, в зависимости от значения  $\pm\nu^2$ , либо  $\chi(r) = \int dr/(1 - 4r^2\nu^2) = \frac{1}{4\nu} \ln[(1 + 2\nu r)/(1 - 2\nu r)]$ , либо  $\chi(r) = \int dr/(1 + 4\nu r^2) = \frac{1}{2\nu} \text{arctg } 2\nu r$ , либо  $\chi(r) = \int dr = r$ .

**Лемма 3.3.1** Пусть  $S'(r) = 1/V^2(r)$ . Тогда уравнение (3.3.67) имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} V(r) &= w \frac{1}{\sqrt{\chi'(r)}}, & S(r) &= \frac{1}{w^2} \chi(r) & (\lambda = \mu = 0); \\ V(r) &= w \frac{\exp(k\chi(r))}{\sqrt{\chi'(r)}}, & S(r) &= -\frac{1}{2kw^2} \exp(-2k\chi(r)) & (\lambda = 0, \mu = k); \\ V(r) &= w \frac{\cos(k\chi(r) + h)}{\sqrt{\chi'(r)}}, & S(r) &= \frac{1}{kw^2} \text{tg}(k\chi(r) + h) - \frac{\mu}{\lambda} & (\lambda = -k^2w^2); \\ V(r) &= w \frac{\text{sh}(k\chi(r) + h)}{\sqrt{\chi'(r)}}, & S(r) &= -\frac{1}{kw^2} \text{cth}(k\chi(r) + h) - \frac{\mu}{\lambda} & (\lambda = -k^2w^2); \\ V(r) &= w \frac{\text{ch}(k\chi(r) + h)}{\sqrt{\chi'(r)}}, & S(r) &= -\frac{1}{kw^2} \text{th}(k\chi(r) + h) - \frac{\mu}{\lambda} & (\lambda = k^2w^2); \\ V(r) &= w \frac{\chi(r) + h}{\sqrt{\chi'(r)}}, & S(r) &= -\frac{1}{w^2(\chi(r) + h)} - \frac{\mu}{\lambda} & (\lambda = -w^2). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Если  $\lambda = 0$ , то наше уравнение приобретает вид

$$\frac{V'(r)}{V(r)} \frac{1}{\chi'(r)} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\chi'(r)} \right)' = \mu$$

и легко интегрируется:

$$V^2(r) = w \frac{1}{\chi'(r)} e^{\mu\chi(r)}.$$

Это – как раз первая (при  $\mu = 0$ ) и вторая (при  $\mu \neq 0$ ) из приведенных нами формул.  $S(r)$  находится в этом случае простым интегрированием.

Если же  $\lambda \neq 0$ , то, можно заметить, что  $\mu$  определяет только выбор  $S(r)$  как первообразной от функции  $1/V^2(r)$ . Поэтому мы можем временно считать  $S(r)$  выбранной так, чтобы  $\mu$  равнялось нулю (а общий случай получится вычитанием из найденной функции  $\mu/\lambda$ , как это сделано в формулах с третьей по шестую в формулировке леммы).

Поскольку  $S'(r) = 1/V^2(r)$ , а значит  $V'(r)/V(r) = -S''(r)/(2S'(r))$ , уравнение (3.3.67) приводится к виду

$$\frac{S''(r)}{S'(r)} \frac{1}{\chi'(r)} + \left( \frac{1}{\chi'(r)} \right)' = -\lambda S(r).$$

После умножения на  $S'(r)$  оно интегрируется:

$$S'(r) \frac{1}{\chi'(r)} = -\lambda(S^2(r) \pm \varkappa^2), \quad (3.3.68)$$

и полученное уравнение можно проинтегрировать еще раз, однако интеграл зависит от значения  $\pm \varkappa^2$ : если оно положительно, то получаем

$$\frac{1}{\varkappa} \operatorname{arctg} \frac{S(r)}{\varkappa} = -\lambda(\chi(r) + h), \quad S(r) = \varkappa \operatorname{tg}[-\lambda \varkappa(\chi(r) + h)],$$

$$V(r) = \frac{\cos[-\lambda \varkappa(\chi(r) + h)]}{\sqrt{-\lambda \varkappa^2 \chi'(r)}}.$$

Остается переобозначить, для удобства,  $k = -\lambda \varkappa$ ,  $w = 1/(\sqrt{-\lambda \varkappa})$ , для того, чтобы получить третью формулу нашей леммы.

Аналогично, если  $\pm \varkappa^2$  отрицательно, то (3.3.68) дает

$$\frac{1}{2\varkappa} \ln \left| \frac{S(r) - \varkappa}{S(r) + \varkappa} \right| = -\lambda(\chi(r) + h), \quad \frac{S(r) - \varkappa}{S(r) + \varkappa} = \pm \exp[-2\lambda \varkappa(\chi(r) + h)],$$

и, в зависимости от того, является  $\pm$  плюсом или минусом, получаем либо

$$S(r) = \varkappa \operatorname{th}[\lambda \varkappa(\chi(r) + h)], \quad V(r) = \frac{\operatorname{ch}[\lambda \varkappa(\chi(r) + h)]}{\sqrt{\lambda \varkappa^2 \chi'(r)}},$$

либо

$$S(r) = \varkappa \operatorname{cth}[\lambda \varkappa(\chi(r) + h)], \quad V(r) = \frac{\operatorname{sh}[\lambda \varkappa(\chi(r) + h)]}{\sqrt{-\lambda \varkappa^2 \chi'(r)}}.$$

Переобозначая, как и выше,  $w = 1/(\sqrt{\lambda \varkappa})$  для первого случая и  $w = 1/(\sqrt{-\lambda \varkappa})$  для второго,  $k = -\lambda \varkappa$ , мы получим четвертую и пятую формулы нашей леммы.

Наконец, шестая формула получается из (3.3.68), если  $\varkappa = 0$ :

$$S(r) = \frac{1}{\lambda(\chi(r) + h)}, \quad V(r) = \sqrt{-\lambda} \frac{\chi(r) + h}{\sqrt{\chi'(r)}}$$

( $w = \sqrt{-\lambda}$ ). Доказательство леммы завершено.

Собственно говоря, детальная классификация семейств (3.3.6)-(3.3.9) завершена: все формулы таблиц II.2-II.6 приложения II.3 получаются применением леммы 3.3.1 для разных функций  $\chi(r)$  (и разных выражений для  $r$ ) с подстановкой в алгебры (3.3.51), (3.3.56), (3.3.60), (3.3.64) функций, вычисленных при соответствующих значениях  $\lambda, \mu$  из сопровождающих уравнений (3.3.54), (3.3.58), (3.3.62), (3.3.66) соответственно. При этом в случае  $\lambda \neq 0$  оказывается, что в формулах для  $\phi$  выражения, содержащие  $\mu$ , просто сокращаются, так что на конечный результат эта константа не оказывает никакого влияния. Небольшие варианты в сопровождающих уравнениях связаны только с тем, что для разных семейств функция  $S(r)$  входит в выражение для  $\phi$  с разными коэффициентами.

### 3.3.9 Случай $\xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi = 0$

Для завершения доказательства нам осталось обсудить случай, когда  $\xi, \eta$  и  $\zeta$  не зависят от  $\psi$ . В этом случае, как мы уже говорили, из (3.3.15) следует  $\phi(x, y, z, \psi) = \hat{\phi}(\psi)$  и, уравнение (3.3.46) приобретает вид уравнения с разделенными переменными, из которого получаем  $\hat{\phi}'(\psi) = M = \text{const}$ ,  $\hat{\phi}(\psi) = M\psi + L$ , и уравнение

$$\frac{1}{v}(\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z) = \xi_x - M, \quad (3.3.69)$$

совпадающее с уравнением (3.3.10) в формулировке теоремы. Это – линейное неоднородное уравнение в частных производных относительно функции  $W = 2 \ln v(x, y, z)$ . По существу остается только решить это уравнение в тех или иных предположениях. В целях экономии места мы не приводим здесь полные выкладки (они изложены в [38]), а лишь изложим результаты.

В случае  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  удастся сдвигом системы координат привести векторное поле  $(\xi, \eta, \zeta)$  к виду

$$\begin{aligned} \xi &= \Delta[\bar{A}(x^2 - y^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2\bar{B}xy + 2\bar{C}xz + \theta(\bar{C}y - \bar{B}z) + \lambda\bar{H}], \\ \eta &= \Delta[\bar{B}(y^2 - x^2 - z^2 \mp \nu^2) + 2\bar{A}xy + 2\bar{C}yz + \theta(-\bar{C}x + \bar{A}z) + \lambda\bar{I}], \\ \zeta &= \Delta[\bar{C}(z^2 - x^2 - y^2) + 2\bar{A}xz + 2\bar{B}yz + \theta(\bar{B}x - \bar{A}y) + \lambda\bar{J}], \end{aligned}$$

где  $\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 = 1$ ,  $\bar{A}\bar{H} + \bar{B}\bar{I} + \bar{C}\bar{J} = 0$ ,  $\bar{H}^2 + \bar{I}^2 + \bar{J}^2 = 1$ . Введение новой (ортогональной) системы координат  $l = \bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C}z$ ,  $s = \bar{H}x + \bar{I}y + \bar{J}z$ ,

$p = [\bar{B}\bar{J} - \bar{C}\bar{I}]x + [\bar{C}\bar{H} - \bar{A}\bar{J}]y + [\bar{A}\bar{I} - \bar{B}\bar{H}]z$  приводит уравнение (3.3.69) к виду

$$\Delta \frac{1}{v} [(l^2 - s^2 - p^2 \mp \nu^2)v_l + (2ls + \theta p + \lambda)v_l + (2lp - \theta s)v_p] = 2\Delta l - M,$$

или, если обозначить  $\bar{M} = M/\Delta$ ,

$$\frac{1}{v} [(l^2 - s^2 - p^2 \mp \nu^2)v_l + (2ls + \theta p + \lambda)v_l + (2lp - \theta s)v_p] = 2l - \bar{M}. \quad (3.3.70)$$

При этом  $\Delta$  оказывается еще одной (кроме  $L$ ) произвольной константой, а интегрирование уравнения (3.3.70) в разных случаях, зависящих от соотношений между коэффициентами  $\lambda, \theta, \pm\nu^2$ , определяемых в терминах корней квадратного уравнения

$$(\mu + \theta^2)(\mu \mp 4\nu^2) - 4\lambda^2 = 0, \quad (3.3.71)$$

дает семейства функций, приведенные в приложении II.4, которым отвечает алгебра (3.3.12).

В случае же  $A = B = C = 0$  векторное поле  $(\xi, \eta, \zeta)$  оказывается линейным и уравнение (3.3.69) интегрируется явным образом. В зависимости от того, равны или нет нулю  $E^2 + F^2 + G^2, D, H^2 + I^2 + J^2$  получаются варианты, приведенные в приложении II.5.

В случае же, когда  $\xi = \eta = \zeta \equiv 0$  мы получаем из уравнения (3.3.69)  $M = 0$ , и это дает нам алгебру Ли  $\Xi = L\partial_\psi$ , обслуживающую все уравнения эйконала, которая, впрочем, для данного уравнения является тривиальной: она порождает группу сдвигов по переменной  $\psi$ , а то, что сдвиг  $\psi$  не меняет уравнения – очевидно.

Таким образом, доказательство нашей теоремы полностью завершено.

### § 3.4 Группы эквивалентности и конус касательных эквивалентностей трехмерного уравнения эйконала

В этом параграфе мы рассмотрим группы эквивалентности уравнений эйконала и изучим структуру пространства касательных эквивалентностей. Результаты этого параграфа будут использованы в следующем параграфе для построения полной классификации семейства трехмерных уравнений эйконала.

#### 3.4.1 Общая группа эквивалентности уравнения эйконала

**Теорема 3.4.1** *Общая группа эквивалентности уравнений (3.1.3) совпадает с прямой суммой группы конформных преобразований пространства переменных  $(x, y, z)$  и группы сдвигов и растяжений переменной  $\psi$ .*

**Доказательство.** Уравнение Ли (3.2.5) для уравнения эйконала (3.1.3) приобретает вид

$$2\psi_x\phi^x + 2\psi_y\phi^y + 2\psi_z\phi^z + 2\frac{\omega}{v^3(x, y, z)} = 0,$$

где  $\phi^x$ ,  $\phi^y$  и  $\phi^z$  – координатные функции первого продолжения  $\bar{\Xi}^{(1)}$  оператора (3.2.4), определяемые формулами

$$\begin{aligned} \phi^x &= \phi_x + \phi_\psi\psi_x + \phi_v v_x - \psi_x(\xi_x + \xi_\psi\psi_x + \xi_v v_x) - \\ &\quad - \psi_y(\eta_x + \eta_\psi\psi_x + \eta_v v_x) - \psi_z(\zeta_x + \zeta_\psi\psi_x + \zeta_v v_x), \\ \phi^y &= \phi_y + \phi_\psi\psi_y + \phi_v v_y - \psi_x(\xi_y + \xi_\psi\psi_y + \xi_v v_y) - \\ &\quad - \psi_y(\eta_y + \eta_\psi\psi_y + \eta_v v_y) - \psi_z(\zeta_y + \zeta_\psi\psi_y + \zeta_v v_y), \\ \phi^z &= \phi_z + \phi_\psi\psi_z + \phi_v v_z - \psi_x(\xi_z + \xi_\psi\psi_z + \xi_v v_z) - \\ &\quad - \psi_y(\eta_z + \eta_\psi\psi_z + \eta_v v_z) - \psi_z(\zeta_z + \zeta_\psi\psi_z + \zeta_v v_z), \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в наше уравнение, получаем после преобразований

$$\begin{aligned} \frac{\phi_\psi}{v^2} - \frac{\xi_\psi\psi_x + \eta_\psi\psi_y + \zeta_\psi\psi_z}{v^2} + \psi_x(\phi_x + \phi_v v_x) + \psi_y(\phi_y + \phi_v v_y) + \psi_z(\phi_z + \phi_v v_z) - \\ - \psi_x^2(\xi_x + \xi_v v_x) - \psi_x\psi_y(\eta_x + \eta_v v_x) - \psi_x\psi_z(\zeta_x + \zeta_v v_x) - \psi_x\psi_y(\xi_y + \xi_v v_y) - \\ - \psi_y^2(\eta_y + \eta_v v_y) - \psi_y\psi_z(\zeta_y + \zeta_v v_y) - \psi_x\psi_z(\xi_z + \xi_v v_z) - \psi_y\psi_z(\eta_z + \eta_v v_z) - \\ - \psi_z^2(\zeta_z + \zeta_v v_z) + \frac{\omega}{v^3} = 0. \end{aligned}$$

Это равенство должно выполняться всегда, когда выполнено (3.1.3), и поскольку слева стоит квадратичная функция от  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$ , а уравнение

(3.1.3) – это уравнение сферы относительно  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$ , левая часть нашего уравнения должна быть пропорциональна уравнению сферы, что дает *определяющие уравнения*

$$\xi_x + \xi_v v_x = \eta_y + \eta_v v_y = \zeta_z + \zeta_v v_z = \phi_\psi + \frac{\omega}{v} \quad (3.4.1)$$

$$\eta_x + \eta_v v_x + \xi_y + \xi_v v_y = 0, \quad \zeta_x + \zeta_v v_x + \xi_z + \xi_v v_z = 0, \quad \eta_z + \eta_v v_z + \zeta_y + \zeta_v v_y = 0, \quad (3.4.2)$$

$$\phi_x + \phi_v v_x = \xi_\psi / v^2, \quad \phi_y + \phi_v v_y = \eta_\psi / v^2, \quad \phi_z + \phi_v v_z = \zeta_\psi / v^2. \quad (3.4.3)$$

Поскольку при преобразованиях мы предполагаем, что функция  $v$  продолжает оставаться независимой от  $\psi$ , а зависит только от  $x, y$  и  $z$ , нам необходимо дополнительно учесть эту независимость. Удобно записать ее в виде дифференциального уравнения  $v_\psi = 0$ , и воспользоваться все тем же принципом, написав уравнение Ли и для этого уравнения (для чего рассмотрим продолжение алгебры (3.2.4) в пространство переменных  $(x, y, z, \psi, v, v_x, v_y, v_z, v_\psi)$ ). Это уравнение имеет вид

$$\omega_\psi - v_x \xi_\psi - v_y \eta_\psi - v_z \zeta_\psi = 0. \quad (3.4.4)$$

Для определения алгебры Ли общей группы эквивалентности во всех уравнениях следует  $v_x, v_y, v_z$  считать произвольными величинами. Тогда из (3.4.1) получаем, что  $\xi_v = \eta_v = \zeta_v = 0$ , а из (3.4.3) – что  $\phi_v = 0$ , т.е. все коэффициенты (кроме  $\omega$ ) от  $v$  не зависят. Но тогда из (3.4.3), в силу произвола уже величины  $v$ , получаем  $\phi_x = \phi_y = \phi_z = \xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi = 0$ , т.е.  $\xi, \eta, \zeta$  зависят только от  $x, y, z$ . А тогда уравнения (3.4.1)-(3.4.2) превращаются в уравнения алгебры Ли группы конформных преобразований в пространстве  $(x, y, z)$ . Значит,

$$\begin{aligned} \xi &= a(x^2 - y^2 - z^2) + 2bxy + 2cxz + dx + gy - fz + h, \\ \eta &= b(y^2 - x^2 - z^2) + 2axy + 2cyz - gx + dy + ez + i, \\ \zeta &= c(z^2 - x^2 - y^2) + 2axz + 2byz + fx - ey + dz + j. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Из  $\xi_\psi = \eta_\psi = \zeta_\psi = 0$  следует, в силу (3.4.4), что  $\omega_\psi = 0$ , а поскольку последнее уравнение в (3.4.1) определяет  $\omega$  явным образом:  $\omega = v(\xi_x - \phi_\psi)$ , мы, дифференцируя, получаем, что  $\phi_{\psi\psi} = 0$ . Так как  $\phi$  зависит только от  $\psi$ , она может быть только линейной:

$$\phi = m\psi + l, \quad (3.4.6)$$

а значит,

$$\omega = v(2ax + 2by + 2cz + d - m). \quad (3.4.7)$$

Таким образом, общая группа эквивалентности оказалась совпадающей с прямой суммой группы конформных преобразований пространства  $(x, y, z)$  и группы растяжений и сдвигов переменной  $\psi$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Специальная структура  $\omega$  в виде произведения  $v$  на некоторую функцию от  $x, y, z$  означает, что при преобразованиях функция  $v$ , помимо замены переменных под знаком функции, испытывает еще умножение на некоторый множитель.

### 3.4.2 Пространство касательных эквивалентностей

**Теорема 3.4.2** *Пространство касательных эквивалентностей для всякого уравнения вида (3.1.3), за исключением уравнений (3.3.1) и (3.3.5), является суммой алгебры Ли группы симметрий этого уравнения и алгебры Ли общей группы эквивалентности. Для уравнений вида (3.3.1) и (3.3.5) пространство касательных эквивалентностей является суммой алгебры Ли группы симметрий, алгебры Ли группы эквивалентности и четырехмерного пространства, образованного операторами*

$$\bar{\Xi} = D_0[\psi^2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) + \psi(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}\psi^2)\partial_\psi - v(x^2 + y^2 + z^2)\partial_v] + \\ + \psi^2(H_0\partial_x + I_0\partial_y + J_0\partial_z + 2(H_0x + I_0y + J_0z)\psi\partial_\psi - 2v(H_0x + I_0y + J_0z)\partial_v) \quad (3.4.8)$$

в случае уравнения (3.3.1) и операторами

$$\bar{\Xi} = D_0[\psi^2(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) - D_0\psi \left[ \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{1}{3}\psi^2 \right] \partial_\psi + \\ + D_0 \left[ 2\psi^2 + \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \partial_v + \psi^2 \{ A_0[(x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z] + \\ + B_0[2xy\partial_x + (y^2 - x^2 - z^2)\partial_y + 2yz\partial_z] + C_0[2xz\partial_x + 2yz\partial_y + (z^2 - x^2 - y^2)\partial_z] \} - \\ - 2\psi \frac{A_0x + B_0y + C_0z}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \partial_\psi + 2(A_0x + B_0y + C_0z) \left[ \psi^2 + \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \partial_v \quad (3.4.9)$$

в случае уравнения (3.3.5).

**Доказательство.** То, что пространство касательных эквивалентностей содержит и алгебру симметрий, и общую алгебру эквивалентности – очевидно, поэтому нам необходимо показать, что других операторов оно не содержит.

Для операторов из пространства касательных эквивалентностей переход от уравнения Ли к определяющим уравнениям здесь происходит так же, как и в теореме 3.4.1, поэтому мы будем просто использовать уравнения (3.4.1)-(3.4.4). Для получения операторов касательной эквивалентности необходимо в формулы для  $\xi, \eta, \zeta, \phi, \omega$  подставить  $v = v(x, y, z)$ . Обозначим функции с такой подстановкой через  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\phi}$  и  $\tilde{\omega}$  соответственно. Тогда уравнения (3.4.1)-(3.4.4) превращаются в уравнения



$$\tilde{\xi}_x = \tilde{\eta}_y = \tilde{\zeta}_z = \tilde{\phi}_\psi + \frac{\tilde{\omega}}{v} \quad (3.4.10)$$

$$\tilde{\eta}_x + \tilde{\xi}_y = 0, \quad \tilde{\zeta}_x + \tilde{\xi}_z = 0, \quad \tilde{\eta}_z + \tilde{\zeta}_y = 0, \quad (3.4.11)$$

$$\tilde{\phi}_x = \tilde{\xi}_\psi/v^2, \quad \tilde{\phi}_y = \tilde{\eta}_\psi/v^2, \quad \tilde{\phi}_z = \tilde{\zeta}_\psi/v^2, \quad (3.4.12)$$

$$\tilde{\omega}_\psi - v_x \tilde{\xi}_\psi - v_y \tilde{\eta}_\psi - v_z \tilde{\zeta}_\psi = 0. \quad (3.4.13)$$

Уравнения (3.4.10)-(3.4.12) совпадают (кроме последнего уравнения в (3.4.10)) с системой (3.3.13)-(3.3.15). Поэтому мы можем просто воспользоваться результатами решения этой системы, приведенными в предыдущем параграфе, согласно которым  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{\phi}$  определяются формулами (3.3.27)-(3.3.28), (3.3.30)-(3.3.31), (3.3.33)-(3.3.34) для семейств (3.3.1)-(3.3.5), формулами (3.3.37), (3.3.39)(3.3.41) и (3.3.43) для семейств (3.3.6)-(3.3.9) и формулами (3.3.45) для семейств уравнений с двумерной группой симметрий. Функция  $\tilde{\omega}$  тогда вычисляется из последнего уравнения (3.4.10), и подстановка этой функции в (3.4.13) дает условие

$$\tilde{\xi}_{\psi x} = \tilde{\phi}_{\psi\psi} + \frac{v_x \tilde{\xi}_\psi + v_y \tilde{\eta}_\psi + v_z \tilde{\zeta}_\psi}{v}, \quad (3.4.14)$$

отличающееся от последнего уравнения (3.3.13) только дополнительным дифференцированием по  $\psi$ , удовлетворение которому окончательно определяет пространство касательных эквивалентностей.

Реализуя эту схему, отметим прежде всего, что для уравнений, не вошедших в разделы I-III формулировки теоремы 3.3.1, коэффициенты  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\zeta}$  операторов касательной эквивалентности определяются формулами (3.3.45) и не зависят от  $\psi$ . Но тогда, в силу (3.4.12),  $\tilde{\phi}$  зависит только от  $\psi$ , уравнение (3.4.13) превращается в  $\tilde{\omega}_\psi = 0$ , и для функций  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\omega}$  мы приходим к формулам (3.4.6)-(3.4.7). Это означает, что пространство касательных эквивалентностей для таких уравнений просто совпадает с алгеброй Ли общей группы эквивалентности. Поскольку для таких уравнений и группа симметрий представляет собой двумерную подгруппу общей группы эквивалентности, для них утверждение теоремы, хотя и тривиальным образом, но справедливо.

Рассмотрим теперь уравнения с функциями, перечисленными в разделах II-III формулировки теоремы 3.3.1. Для функций, не попадающих в раздел III, группа симметрий является подгруппой общей группы эквивалентности, так что и для них необходимо доказать только то, что пространство касательных эквивалентностей совпадает с общей алгеброй эквивалентности. Для уравнений же, попадающих в раздел III, и определяемых посредством соотношений (3.3.53)-(3.3.54), (3.3.57)-(3.3.58), (3.3.61)-

(3.3.62), (3.3.65)-(3.3.66) группа симметрий "выходит за рамки" общей группы эквивалентности, и здесь утверждение нашей теоремы носит содержательный характер.

Для каждого семейства раздела II ( теоремы 3.3.1 ) решения уравнений (3.4.10)-(3.4.12) (кроме последнего уравнения (3.4.10)) дают функции  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{\phi}$ , определяемые соответственно формулами (3.3.37), (3.3.39), (3.3.41) и (3.3.43), в которых значительная часть слагаемых уже принадлежит общей алгебре эквивалентности. Поскольку пространство касательных эквивалентностей, как мы уже говорили, наверняка не уже этой алгебры, нам для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что слагаемые, зависящие от  $\psi$ , либо порождают симметрии уравнения, либо входят в алгебру общей группы эквивалентности.

В случае  $v = V(Px + Qy + Rz)$  такими слагаемыми являются (см. (3.3.37))  $\tilde{\xi} = P\theta(\psi)$ ,  $\tilde{\eta} = Q\theta(\psi)$ ,  $\tilde{\zeta} = R\theta(\psi)$ ,  $\tilde{\phi} = \theta'(\psi)S(Px+Qy+Rz) + \hat{\phi}(\psi)$ . Тогда

$$\tilde{\omega} = -V(Px + Qy + Rz)[\theta''(\psi)S(Px + Qy + Rz) + \hat{\phi}'(\psi)].$$

и подстановка этих функций в условие (3.4.13) дает уравнение

$$V(r)[\theta'''(\psi)S(r) + \hat{\phi}''(\psi)] + V'(r)\theta'(\psi) = 0$$

( $r = Px + Qy + Rz$ ). Разделение переменных в этом уравнении приводит либо к предположению  $\theta'(\psi) = 0$ , тогда  $\hat{\phi}''(\psi) = 0$ , и мы получаем элементы общей алгебры эквивалентности, либо к уравнениям

$$V'(r)/V(r) = \lambda S(r) + \mu,$$

$$\theta'''(\psi) + \lambda\theta'(\psi) = 0, \quad \hat{\phi}''(\psi) + \mu\theta'(\psi) = 0.$$

Поскольку первое уравнение в точности совпадает с (3.3.53), мы оказываемся в одном из подсемейств уравнений с шестимерной группой симметрий. В то же время, как легко видеть, решение второго уравнения отличается от решения сопровождающего уравнения (3.3.54), дающего элементы алгебры симметрий, только на два слагаемых  $\theta = \text{const}$  и  $\phi = M\psi$ , порождающие операторы общей алгебры эквивалентности. Значит, для плоских слоений  $v(x, y, z) = V(Px + Qy + Rz)$  утверждение теоремы справедливо.

Аналогично оказывается, что для сферических слоений мы либо получаем  $D'(\psi) = 0$ , и пространство касательных эквивалентностей совпадает с общей алгеброй эквивалентности, либо мы получаем уравнение (3.3.57) для  $V$  и  $S$ , ограничивающее нас уравнениями эйконала с шестимерной группой симметрий, и уравнения для  $D(\psi)$  и  $\phi(\psi)$ , решения которых дают либо операторы алгебры симметрий уравнения, либо операторы общей алгебры

эквивалентности. Тот же результат мы получаем и для остальных семейств разделов II и III теоремы 3.3.1.

Для завершения доказательства осталось обсудить случаи функций (3.3.1)-(3.3.5). Здесь мы, по-прежнему следуя нашей схеме, воспользуемся результатами пункта 3.3.5, внося только коррективы, связанные с заменой последнего уравнения (3.3.13) на уравнение (3.4.14). Для функции  $v \equiv \text{const}$  мы таким образом получаем предварительные формулы (3.3.27)-(3.3.28), подстановка которых в (3.4.14) дает нам вместо (3.3.29) равенство

$$\frac{\frac{1}{2}D'''(\psi)(x^2 + y^2 + z^2) + H'''(\psi)x + I'''(\psi)y + J'''(\psi)z}{v^2} + \hat{\phi}''(\psi) = D'(\psi),$$

из которого получаем

$$D''' = H''' = I''' = J''' = 0, \quad \hat{\phi}'' = D'.$$

Сравнение решения этих уравнений, с операторами алгебры симметрий и алгебры эквивалентности показывает появление "избытка" в виде операторов (3.4.8). Для функции (3.3.2) подстановка (3.3.30)-(3.3.31) в (3.4.14) дает нам вместо (3.3.32) равенства

$$\begin{aligned} \lambda'''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\lambda'(\psi), & \varkappa'''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\varkappa'(\psi) \\ \hat{E}'''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\hat{E}'(\psi), & \hat{F}'''(\psi) &= (P^2 + Q^2 + R^2)\hat{F}'(\psi), \\ & & -P\hat{\phi}''(\psi) &= R\hat{F}'(\psi) - Q\hat{E}'(\psi), \end{aligned}$$

решения которых, как нетрудно убедиться сравнением, дают операторы либо алгебры симметрий либо общей алгебры эквивалентности. Наконец, для функций (3.3.3)-(3.3.5) подстановка (3.3.33)-(3.3.34) в (3.4.14) дает нам вместо (3.3.35) равенства

$$D''' = \mp 4w^2\nu^2 D', \quad \hat{\phi}'' = -D'(\psi),$$

$$A''' = \mp 4w^2\nu^2 A', \quad B''' = \mp 4w^2\nu^2 B', \quad C''' = \mp 4w^2\nu^2 C',$$

решение которых различно в зависимости от того, равно  $\pm\nu^2$  нулю или нет. Если оно отлично от нуля, то мы, как и в предыдущем случае, получаем решение, порождающее либо операторы алгебры симметрий, либо операторы общей алгебры эквивалентности. В случае же  $\nu = 0$  мы оказываемся в ситуации, аналогичной первому случаю (функция (3.3.1)), и здесь появляется "избыток" пространства касательных эквивалентностей над суммой алгебры симметрий и общей алгебры эквивалентности, равный (3.4.9).

Теорема 3.4.2 полностью доказана.

## § 3.5 Классификация трехмерных уравнений эйконала

Теоремы 3.2.1 и 3.4.2 позволяют сделать чрезвычайно важный вывод: для любого уравнения (3.1.3) его класс эквивалентности получается действием на это уравнение группы эквивалентности. Этот факт позволяет исчерпывающим образом описать структуру всего семейства уравнений эйконала, которая имеет иерархически-слоистый вид. Иерархия порождена групповой классификацией и определяется размерностью группы симметрий, ветвление в иерархии на семейства и подсемейства связано с тем, что группы симметрий одной и той же размерности могут быть неизоморфны. А вот разделение каждого из выделенных подсемейств на классы эквивалентности носит уже не иерархическую, а слоистую структуру, когда выбор класса осуществляется выбором некоторой произвольной функции и одного или нескольких скалярных параметров.

### 3.5.1 Классификационная теорема

Прежде, чем перейти к описанию классов эквивалентности, нам понадобится сделать несколько оговорок. Традиционно указание класса эквивалентности предполагает указание только одного представителя и набора преобразований, позволяющих из представителя получить весь класс. При этом предполагается, что по этому представителю можно восстановить весь класс, а вопрос о том, насколько это легко сделать, оставляется в стороне.

В нашем случае класс эквивалентности уравнений (3.1.3) порождается конформными преобразованиями пространственных переменных и линейными преобразованиями  $\psi$ . Просчитать результат применения к уравнению линейных преобразований можно и в уме, чего не скажешь об инверсиях, составляющих существенную часть конформной группы. Поэтому для того, чтобы не слишком отходить от традиции представлять результат в максимально компактной, "чистой" форме и одновременно не жертвовать при этом возможностью предъявить явно весь спектр получающихся уравнений (особенно наиболее интересные из них), мы выберем "адаптированную" форму, когда при описании класса эквивалентности указывается не один, а два представителя, так, чтобы все остальные элементы класса получались из них уже только линейными преобразованиями.

Кроме того, в случаях уравнений с маломерной группой симметрий оказывается неудобным выбирать каким-то определенным образом представителя класса по тому или иному правилу, так как использование любого такого правила приводит к появлению многочисленных оговорок и исклю-

чений. Вместо этого оказывается естественным просто описывать *сечение* того или иного функционального семейства классом эквивалентности, указывая произвол в выборе функции, определяющей класс. Например, проще указать, что класс эквивалентности определяет функцию  $V(x)$  с точностью до линейных преобразований  $x$  и умножений  $V$  на коэффициент, чем ограничивать функцию  $V(x)$  тремя условиями (скажем,  $V(1) = 1$ ,  $V'(1) = 1$  и  $V''(1) = 1$ ).

**Теорема 3.5.1** *Уравнения вида (3.1.3) распадаются на следующие классы эквивалентности (в каждом классе указаны представители, из которых остальные уравнения класса получаются в разделах I-IV гомотетиями, поворотами и сдвигами пространственных переменных и линейными преобразованиями  $\psi$ , а в разделе V – еще и инверсиями).*

*I. Уравнения с 15-мерной группой симметрий образуют три класса эквивалентности с представителями:*

$$v(x, y, z) \equiv 1, \quad v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad (I.1)$$

$$v(x, y, z) = x, \quad v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad (I.2)$$

$$v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 \quad (I.3)$$

*II. Классы эквивалентности уравнений с 4-мерной группой симметрий образуют три функциональных (определяемых функцией  $V(x)$ ) семейства. В первом представители*

$$v(x, y, z) = V(x), \quad v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)V\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (II.1)$$

*определяются функцией  $V(\cdot)$  с точностью до линейных преобразований ее аргумента и умножения функции на число, во втором – представители*

$$v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}V\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right), \\ v(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4x^2}V\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2 + y^2 + z^2}{(x+1)^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (II.2)$$

*определяются с точностью только до сдвига аргумента и умножения функции  $V(\cdot)$  на число, а в третьем – представители*

$$v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot V\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right), \\ v(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + 4x^2}V\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{1 - x^2 - y^2 - z^2}\right) \quad (II.3)$$

*определяются лишь с точностью до умножения функции  $V(\cdot)$  на число.*

III. Классы эквивалентности уравнений с 6-мерной группой симметрий образуют параметризованные семейства, представители которых определяются формулами (II.1)-(II.3) с функциями  $V(\cdot)$  вида

$$\begin{aligned} V(r) &\equiv w, & V(r) &= wr, & V(r) &= w \cos(kr + h), \\ V(r) &= we^{kr}, & V(r) &= w \operatorname{sh}(kr + h), & V(r) &= w \operatorname{ch}(kr + h). \end{aligned} \quad (III)$$

Для семейств, определяемых формулами (II.1), выбор класса определяет только тип функции независимо от значений  $w$ ,  $k$  и  $h$  (для представителя полагаем  $w = k = 1$ ,  $h = 0$ ), при этом классы эквивалентности, отвечающие функциям  $V = 1$  и  $V = r$  исключаются, так как попадают в первый раздел теоремы.

Для семейств, определяемых формулами (II.2), выбор класса определяет тип функции и значение параметра  $k$  независимо от значений  $w$  и  $h$  (для представителя полагаем  $w = 1$ ,  $h = 0$ ), при этом исключаются из рассмотрения (поскольку они уже попали в первый раздел теоремы) классы с представителями  $V = e^{\pm r}$ ,  $V = \operatorname{sh} r$  и  $V = \operatorname{ch} r$ .

Для семейств, определяемых формулами (II.3), выбор класса определяет тип функции и значения параметров  $k$  и  $h$ , независимо от значения  $w$  (для представителя полагаем  $w = 1$ ), при этом исключаются уже представленные в первом разделе случаи  $V = \cos(r + h)$ .

IV. Уравнения с 5-мерной группой симметрий образуют одно однопараметрическое (с параметром  $k$ ) семейство классов эквивалентности с представителями

$$v(x, y, z) = x^{1+k}, \quad v(x, y, z) = \frac{x^{1+k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^k}. \quad (IV)$$

V. Классы эквивалентности уравнений с двумерной группой симметрий образуют 8 функциональных (определяемых функцией двух аргументов) семейств.

Первое семейство задается функциями скорости, указанными в приложении II.4.1, представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + z^2 + 1) \exp \left( k \operatorname{arctg} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)} \right) \times \\ &\times V \left( \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}, \operatorname{arctg} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)} + 2\rho \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right), \end{aligned} \quad (V.1)$$

каждый класс эквивалентности определяет однозначно два параметра  $k, \rho$  ( $\rho \neq 0, \pm 1/2$ ) и функцию  $V(\alpha, \beta)$  – с точностью до сдвига второго аргумента этой функции и умножения ее на постоянный множитель.

Второе семейство задается функциями скорости, указанными в приложении II.4.2, представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1) \exp \left( k \operatorname{arctg} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)} \right) \times \\ \times V \left( \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} - \frac{1}{2}, \frac{2y(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 4xz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}, \right. \\ \left. \frac{4xy - 2z(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \right), \quad (\text{V.2})$$

каждый класс эквивалентности определяет однозначно параметр  $k$  и функцию  $V(\alpha, \beta, \gamma)$ , однородную по второму и третьему аргументам – с точностью до всех вращений аргументов этой функции и умножения ее на постоянный множитель.

Третье семейство задается функциями скорости, указанными в приложениях II.4.3 и II.5.1, представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$v(x, y, z) = x^{1-k} V \left( \frac{x^2}{y^2 + z^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{z} - \theta \ln x \right), \quad (\text{V.3})$$

каждый класс эквивалентности определяет однозначно параметры  $k, \theta$  ( $\theta \neq 0$ ) и функцию  $V(\alpha, \beta)$  – с точностью до сдвига второго аргумента этой функции и умножения ее на постоянный множитель.

Четвертое семейство задается функциями скорости, указанными в приложении II.4.4 и в приложении II.5.2 (при  $\lambda \neq 0$ ), представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$v(x, y, z) = \exp \left( -k \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right) V \left( y^2 + z^2, x - \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right), \quad (\text{V.4})$$

каждый класс эквивалентности определяет однозначно параметр  $k$  и функцию  $V(\alpha, \beta)$  – с точностью до сдвига второго аргумента этой функции и умножения ее на постоянный множитель.

Пятое семейство задается функциями скорости, указанными в приложениях II.4.5 и в приложении II.5.2 (при  $\lambda = 0$ ), представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$v(x, y, z) = \exp \left( -k \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right) V(x, \sqrt{y^2 + z^2}), \quad (\text{V.5})$$

каждый класс эквивалентности определяет однозначно параметр  $k$  и функцию  $V(x, r)$  – с точностью до сдвига первого аргумента этой функции, растяжений, инверсий, порожденных оператором

$$(x^2 - r^2)\partial_x + 2xr\partial_r,$$

и умножения функции на постоянный множитель.

Шестое семейство задается функциями скорости, указанными в приложениях II.4.6 и II.5.3 представителями классов являются уравнения с однородными функциями

$$v(x, y, z) = V(x, y, z), \quad V(tx, ty, tz) = t^k V(x, y, z) \quad (V.6)$$

каждый класс эквивалентности определяет функцию  $V$  однозначно с точностью до всех ортогональных преобразований аргументов этой функции и умножения ее на постоянный множитель.

Седьмое семейство задается функциями скорости, указанными в приложениях II.4.7 и II.5.4 (и там, и там – при  $k \neq 0$ ). Представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$v(x, y, z) = e^{-x} V(y, z), \quad (V.7)$$

каждый класс эквивалентности определяет функцию  $V(y, z)$  однозначно с точностью до вращений и сдвигов аргументов этой функции и умножения ее на постоянный множитель.

Восьмое семейство задается функциями скорости, указанными в приложениях II.4.7 и II.5.4 (и там, и там – при  $k = 0$ ). Представителями классов являются уравнения с функциями вида

$$v(x, y, z) = V(y, z), \quad (V.8)$$

каждый класс эквивалентности определяет функцию  $V(y, z)$  однозначно с точностью до растяжений, вращений и сдвигов аргументов этой функции, а также умножения ее на постоянный множитель.

Для уравнений с одномерной группой симметрий мы представителей не указываем ввиду отсутствия каких-либо соображений, позволяющих определенным образом выделить из класса эквивалентности какого-то представителя.

### 3.5.2 Доказательство теоремы 3.5.1 для уравнений с большой группой симметрий

Для уравнений с 15-мерной группой симметрий прежде всего можно заметить, что поворотами, сдвигами и растяжениями пространства переменных  $(x, y, z)$  (принадлежащими общей группе эквивалентности) можно привести любое уравнение с функцией вида (3.3.1) к уравнению с  $v(x, y, z) \equiv 1$ , любое уравнение с функцией вида (3.3.2) к уравнению с  $v(x, y, z) = x$ , и любое уравнение с функциями вида (3.3.3)-(3.3.5) к уравнениям с функциями



$v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$  и  $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  соответственно.

Уравнение с  $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  инверсией

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -\frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.5.1)$$

приводится к уравнению с  $v(x, y, z) \equiv 1$ , а уравнение с  $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  инверсией

$$(\tilde{x}, \tilde{y} + 1, \tilde{z}) = 2\frac{(x, y + 1, z)}{x^2 + (y + 1)^2 + z^2} \quad (3.5.2)$$

приводится к уравнению с  $v(x, y, z) = x$ .

При этом уравнения с  $v = 1$ , с  $v = x$  и с  $v = x^2 + y^2 + z^2 + 1$  уже не эквивалентны между собой (правда, последние два эквивалентны в комплексном смысле, но мы будем говорить только о вещественных преобразованиях). Это следует из того, что связанные с этими уравнениями пространства лучей (римановы пространства с метрикой (3.1.7)) имеют соответственно нулевую, отрицательную и положительную кривизну (3.1.9). Поскольку кривизна является инвариантом при любых, в том числе и конформных преобразованиях метрики, а при линейных заменах  $\psi$  она умножается на положительный множитель, уравнения с разной кривизной не могут быть эквивалентны между собой. Правда, первое уравнение допускает, как указано в теореме 3.4.2, пространство касательных эквивалентностей более широкое, чем сумма общей алгебры эквивалентности и алгебры симметрий, но в силу исключительности это уравнение не может быть получено из других, для которых все эквивалентные преобразования принадлежат к общей группе эквивалентности, и поэтому посредством этих преобразований сделать ненулевую кривизну нулевой невозможно.

Таким образом, здесь имеется ровно три класса. В первый входят уравнения с функцией скорости вида (3.3.1) и (3.3.5), представителем класса является, в зависимости от удобства, либо  $v \equiv 1$ , либо  $v = x^2 + y^2 + z^2$ . Во второй входят уравнения с функциями (3.3.2) и (3.3.3), с представителями, тоже в зависимости от удобства,  $v = x$  или  $v = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Наконец, в третий класс эквивалентности входят уравнения с функциями (3.3.4), который представляет функция  $v = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ .

Для уравнений с 4-6-мерной группой симметрий, описываемых формулами (3.3.6)-(3.3.9) сразу можно указать на то, что растяжениями, вращениями и сдвигами (а также некоторыми переобозначениями) эти семейства переводятся в семейства с функциями  $v(x, y, z)$  вида (здесь случаи "+ $\nu^2$ ",

" $-\nu^2$ " и " $\nu = 0$ " разделены)

$$v(x, y, z) = V(x), \quad (3.5.3)$$

$$v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} V\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2)\right), \quad (3.5.4)$$

$$v(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2} V\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{z}\right), \quad (3.5.5)$$

$$v(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4x^2} V\left(\frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)^2 + y^2 + z^2}{(x+1)^2 + y^2 + z^2}\right), \quad (3.5.6)$$

$$v(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + 4x^2} V\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2-y^2-z^2}\right), \quad (3.5.7)$$

$$v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) V\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right). \quad (3.5.8)$$

Семейство (3.5.3) эквивалентно (3.5.8), семейство (3.5.4) – семейству (3.5.6), а семейство (3.5.5) – семейству (3.5.7). Эквивалентность устанавливается с помощью инверсии (3.5.1) в первом случае, с помощью инверсии

$$(\hat{x} + 1, \hat{y}, \hat{z}) = \frac{2(x + 1, y, z)}{(x + 1)^2 + y^2 + z^2} \quad (3.5.9)$$

во втором и с помощью инверсии (3.5.2) – в третьем. Эти инверсии устанавливают соответствие и между подсемействами соответствующих семейств уравнений, для которых группы симметрий пяти- или шестимерны.

С другой стороны, алгебры Ли группы симметрий для уравнений (3.5.3)-(3.5.5) попарно неизоморфны (см. таблицу II.1 в приложении II.2). Для семейства (3.5.3) алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$E[z\partial_y - y\partial_z] + I\partial_y + J\partial_z + L\partial_\psi.$$

Пространственная составляющая этой алгебры трехмерна, и содержит абелеву двумерную подалгебру (идеал) сдвигов. Для семейства (3.5.4) алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$(Gy - Fz)\partial_x + (-Gx + Ez)\partial_y + (Fx - Ey)\partial_z + L\partial_\psi,$$

пространственная часть которой является алгеброй вращений и не имеет никаких подалгебр. Наконец, для семейства (3.5.5) алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$A[(x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z] + D[x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z] + H\partial_x + L\partial_\psi,$$

у этой алгебры пространственная часть имеет две двумерные подалгебры (растяжение+сдвиг и растяжение+инверсия), ни одна из них не является абелевой.

Поэтому разные семейства (3.5.3)-(3.5.5) не могут содержать эквивалентных элементов, и остается найти, как действуют в каждом семействе

те преобразования из общей группы, которые оставляют это семейство инвариантным.

Для семейства (3.5.3) такие преобразования, как нетрудно убедиться, сводятся, помимо преобразований симметрии, к растяжениям и сдвигам: условие инвариантности уравнений  $v_y = v_z = 0$  для преобразований, порождаемых алгеброй  $\xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + v\xi_x\partial_v$  приводит к соотношениям  $\xi_{xy}v - \xi_yv_x = \xi_{xz}v - \xi_zv_x = 0$ , что для  $\xi, \eta, \zeta$ , вида (3.4.5) дает  $a = b = c = e = f = g = 0$ . Поэтому сечение этого семейства классом эквивалентности состоит из функций, получаемых друг из друга умножением на константу самой функции, и линейным преобразованием ее аргумента.

Аналогично для семейства (3.5.4) общие преобразования эквивалентности, действующие в этом семействе, сводятся, помимо симметрий, к растяжениям пространственных переменных и  $\psi$ , что для функции  $V(\cdot)$  означает умножение ее на константу и сдвиг ее аргумента. Для семейства же (3.5.5) среди общих преобразований эквивалентности, действующих в этом семействе, только растяжения по  $\psi$  не являются симметриями для  $V(\cdot)$ .

Что касается подсемейств семейств (3.5.3)-(3.5.5), имеющих шестимерную группу симметрий, то они, как уже говорилось, образованы единым образом: функция  $V(\cdot)$  в них является одной из шести следующих функций:  $V(r) \equiv w$ ,  $V(r) = kr + h$ ,  $V(r) = we^{kr}$ ,  $V(r) = w \operatorname{ch}(kr + h)$ ,  $V(r) = w \operatorname{sh}(kr + h)$ ,  $V(r) = w \cos(kr + h)$ , где  $w, k, h$  – произвольные константы. Поскольку преобразования эквивалентности, действующие в каждом из семейств, различны, классы эквивалентности в подсемействах будут иметь разную структуру.

В подсемействах семейства (3.5.3) класс эквивалентности содержит все функции одинакового типа, независимо от значений констант  $w, k, h$ , таких классов ровно четыре (случаи  $V(r) = \operatorname{const}$  и  $V(r) = kr + h$  являются классами (I.1) и (I.2)) и представителями в них являются  $v = e^x$ ,  $v = \operatorname{ch} x$ ,  $v = \operatorname{sh} x$  и  $v = \cos x$ .

В подсемействах семейства (3.5.4) в класс эквивалентности входят только функции с одинаковыми  $k$ , так что представителями являются функции, определяемые (II.2) с  $V(r) \equiv 1$ ,  $V(r) = r$ ,  $V(r) = e^{kr}$ ,  $V(r) = \operatorname{ch}(kr)$ ,  $V(r) = \operatorname{sh}(kr)$ ,  $V(r) = \cos(kr)$  (в случае экспоненты и гиперболических функций  $k \neq \pm 1$ : при этих значениях  $k$  мы получаем классы (I.1)-(I.3)).

В подсемействах же семейства (3.5.5) в класс эквивалентности входят только функции с одинаковыми  $k$  и  $h$ , так что представителями этих классов оказываются функции, определяемые формулой (II.3) с  $V(r) = 1$ ,  $V(r) = r + h$ ,  $V(r) = e^{kr}$ ,  $V(r) = \operatorname{ch}(kr + h)$ ,  $V(r) = \operatorname{sh}(kr + h)$ ,  $V(r) = \cos(kr + h)$  (в случае косинуса – при  $k \neq 1$ , так как при  $k = 1$  мы получаем класс (I.2)).

Подсемейство семейства (3.5.3), имеющее пятимерную группу симметрий, в общем виде описывается формулой  $v = w(x + h)^k$ , и распадается на классы эквивалентности с представителями  $v = x^k$  (где  $k \neq 0, 1$ ).

### 3.5.3 Индуцированная алгебра

Для семейств с двумерной группой симметрий алгебры симметрий всех семейств изоморфны друг другу, и для того, чтобы рассортировать их по классам эквивалентности, требуется проанализировать действие на этих семействах группы эквивалентности.

Нам будет удобно использовать следующее соображение. Пусть

$$P(x, y, z)v_x + Q(x, y, z)v_y + R(x, y, z)v_z = S(x, y, z)v \quad (3.5.10)$$

– классифицирующее уравнение, определяющее одну из функций, перечисленных в приложениях II.4-II.5.

Преобразование эквивалентности переводит каждое из таких уравнений в другое уравнение того же вида. Преобразование уравнения означает, естественно, преобразование его коэффициентов  $P, Q, R, S$ . Поскольку эти коэффициенты являются линейными комбинациями фиксированных функций, преобразование  $P, Q, R, S$  сводится к преобразованию коэффициентов этих линейных комбинаций. Эти преобразования скалярных коэффициентов, генерированные преобразованиями эквивалентности, также образуют группу, которую мы назовем *индуцированной группой*. Поскольку преобразования эквивалентности образуют группу Ли (т.е. эта группа параметризуема, по крайней мере локально), индуцированная группа также является группой Ли, и порождается некоторой алгеброй, которую мы соответственно будем называть *индуцированной*. Оператор индуцированной алгебры, порожденный оператором  $\bar{\Xi}$  алгебры эквивалентности, мы будем обозначать  $\bar{\Xi}^*$ .

**Лемма 3.5.1** Пусть  $\xi, \eta, \zeta, \omega$  зависят от  $x, y, z, v$  и оператор

$$\bar{\Xi} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_z + \phi \partial_\psi + \omega \partial_v,$$

оставляет инвариантным класс уравнений вида (3.5.10) с коэффициентами, зависящими линейно от некоторого конечного набора констант. Тогда индуцированный оператор  $\bar{\Xi}^*$  удовлетворяет равенствам

$$\bar{\Xi}^*U = [U, \bar{\Xi}] + \gamma(x, y, z, v)U, \quad (3.5.11)$$

$$\bar{\Xi}^*S = -\bar{\Xi}S + \frac{U\omega + S(v\omega_v - \omega)}{v} + \gamma(x, y, z, v)S, \quad (3.5.12)$$

где  $U = P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z$ .

**Замечание.** Соотношения (3.5.11)-(3.5.12) являются частным случаем равенств

$$\bar{\Xi}^* \Xi = [\Xi, \bar{\Xi}] + \gamma(x^i, u, u_i, v) \Xi, \quad (3.5.13)$$

$$\bar{\Xi}^*(\Xi^{(1)} F) = [\Xi^{(1)}, \bar{\Xi}^{(1)}] F + \gamma(x^i, u, u_i, v) \Xi^{(1)} F, \quad (3.5.14)$$

для уравнения вида  $F(x^i, u, u_i) = v(x^i)$  с произвольным элементом  $v(x^i)$ . Классифицирующая система уравнений в этом случае имеет вид

$$\Xi v = \Xi^{(1)} F,$$

где  $\Xi$  – соответствующая алгебра симметрий исходного уравнения, а действие оператора  $\bar{\Xi}^*$ , порожденного оператором алгебры эквивалентности  $\bar{\Xi}$  исходного уравнения определяется как раз (3.5.13)-(3.5.14).

**Доказательство леммы 3.5.1.** Для индуцированного оператора имеет место равенство

$$[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}^{(1)}](Pv_x + Qv_y + Rv_z - Sv) = 0,$$

выполненное всегда, когда выполнено (3.5.10). Раскрывая это равенство и учитывая, что  $\bar{\Xi}^*$  действует только на коэффициенты  $P, Q, R$  (поскольку он действует на константы, фигурирующие только в этих коэффициентах), а также что применение к  $P, Q, R$  оператора  $\bar{\Xi}^{(1)}$  тождественно применению оператора  $\bar{\Xi}$  (так как коэффициенты не содержат производных), получаем

$$\begin{aligned} v_x[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]P + v_y[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]Q + v_z[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]R + P\bar{\Xi}^{(1)}v_x + Q\bar{\Xi}^{(1)}v_y + R\bar{\Xi}^{(1)}v_z = \\ = v[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]S + S\bar{\Xi}v. \end{aligned}$$

Подстановка

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}^{(1)}v_x &= \omega_x + \omega_v v_x - v_x \xi_x - v_y \eta_x - v_z \zeta_x, \\ \bar{\Xi}^{(1)}v_y &= \omega_y + \omega_v v_y - v_x \xi_y - v_y \eta_y - v_z \zeta_y, \\ \bar{\Xi}^{(1)}v_z &= \omega_z + \omega_v v_z - v_x \xi_z - v_y \eta_z - v_z \zeta_z, \\ \bar{\Xi}v &= \omega, \end{aligned}$$

приводит к равенству

$$\begin{aligned} v_x[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]P + v_y[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]Q + v_z[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]R + U\omega + P\omega_v v_x + Q\omega_v v_y + R\omega_v v_z - \\ - v_x U\xi - v_y U\eta - v_z U\zeta = v[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]S + S\omega, \end{aligned}$$

которое должно быть выполнено всегда, когда выполнено (3.5.10). Для этого необходимо, чтобы имела место пропорция

$$\frac{[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]P + P\omega_v - U\xi}{P} = \frac{[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]Q + Q\omega_v - U\eta}{Q} =$$

$$= \frac{[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]R + R\omega_v - U\zeta}{R} = \frac{v[\bar{\Xi}^* + \bar{\Xi}]S + S\omega - U\omega}{Sv}.$$

Уменьшая все члены пропорции на  $\omega_v$ , и обозначая общее значение полученной пропорции через  $\gamma(x, y, z, v)$ , приходим к формулам

$$\begin{aligned}\bar{\Xi}^*P &= -\bar{\Xi}P + U\xi + \gamma(x, y, z, v)P, \\ \bar{\Xi}^*Q &= -\bar{\Xi}Q + U\eta + \gamma(x, y, z, v)Q, \\ \bar{\Xi}^*R &= -\bar{\Xi}R + U\zeta + \gamma(x, y, z, v)R, \\ \bar{\Xi}^*S &= -\bar{\Xi}S + \frac{U\omega + S(v\omega_v - \omega)}{v} + \gamma(x, y, z, v)S.\end{aligned}$$

Последнее равенство есть в точности (3.5.12), а сумма первых трех, умноженных на  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  соответственно, дает

$$\begin{aligned}\bar{\Xi}^*P\partial_x + \bar{\Xi}^*Q\partial_y + \bar{\Xi}^*R\partial_z &= U(\xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z) - \\ &- \bar{\Xi}(P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z) + \gamma(P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z),\end{aligned}$$

что совпадает с (3.5.11). Лемма доказана.

В (3.5.11)-(3.5.12) слагаемые, содержащие  $\gamma(x, y, z, v)$  порождают бесконечномерную группу умножений уравнения (3.5.10) на произвольную функцию, эта группа состоит из симметрий уравнения (3.5.10), не индуцированных никакими преобразованиями, порожденными алгеброй эквивалентности. На первый взгляд, эти слагаемые можно было бы просто удалить (т.е. произвести факторизацию), получив, что "эффективное" действие индуцированной группы на коэффициенты уравнения (3.5.10) есть просто присоединенная группа. Однако такой прием не вполне корректен: дело в том, что группа умножений уравнения на произвольную функцию на самом деле может поглощать составляющие некоторых элементов индуцированной алгебры. Поэтому нам придется оставить пока (3.5.11)-(3.5.12) как необходимое условие для индуцированной группы, выделяя, исходя уже из дополнительных соображений, из всех возможных  $\gamma(x, y, z, v)$  те, которые определяют операторы индуцированной алгебры.

**Лемма 3.5.2** *Если  $\xi_v = \eta_v = \zeta_v = 0$ ,*

$$\xi_x = \eta_y = \zeta_z, \quad \xi_y + \eta_x = \xi_z + \zeta_x = \eta_z + \zeta_y = 0, \quad \omega = v(\xi_x - \phi_\psi), \quad \phi_\psi = m, \quad (3.5.15)$$

$$P_x = Q_y = R_z, \quad P_y + Q_x = P_z + R_x = Q_z + R_y = 0, \quad S = P_x - M, \quad (3.5.16)$$

то  $\gamma$  может быть только константой и уравнение (3.5.12) при этом приводится к виду

$$\bar{\Xi}^*M = \gamma M. \quad (3.5.17)$$

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что, независимость от  $v$  не только  $P, Q, R$ , но и  $\xi, \eta, \zeta$  влечет независимость от  $v$  и коэффициента  $\gamma$ . Кроме того, в силу  $\omega = v\omega_v$  (см. предпоследнее уравнение (3.5.15)) мы можем в уравнении (3.5.12) произвести сокращения, приведя его к виду

$$\bar{\Xi}^* S = -\bar{\Xi} S + U\omega_v + \gamma(x, y, z)S. \quad (3.5.18)$$

Дифференцируя равенство

$$\bar{\Xi}^* P = -\bar{\Xi} P + U\xi + \gamma P.$$

по  $x$ , получаем

$$\bar{\Xi}^* P_x = -\xi_x P_x - \eta_x P_y - \zeta_x P_z - \bar{\Xi} P_x + P_x \xi_x + Q_x \xi_y + R_x \xi_z + U\xi_x + \gamma_x P + \gamma P_x,$$

откуда с учетом (3.5.15)-(3.5.16)

$$\bar{\Xi}^* P_x = -\bar{\Xi} P_x + U\xi_x + \gamma_x P + \gamma P_x,$$

и, вычитание из полученного равенства (3.5.18) дает, в силу  $S = P_x - M$ ,  $\omega = v(\xi_x - \phi_\psi)$

$$\bar{\Xi}^* M = -\bar{\Xi} M + U\phi_\psi + \gamma M + \gamma_x P = \gamma M + \gamma_x P \quad (3.5.19)$$

( $\bar{\Xi} M = U\phi_\psi = 0$  так как  $M$  и  $\phi_\psi = m$  – константы, а операторы  $\bar{\Xi}$  и  $U$  содержат дифференцирования только по  $x, y, z$ ). Аналогично получаются и соотношения

$$\bar{\Xi}^* M = \gamma M + \gamma_y Q, \quad \bar{\Xi}^* M = \gamma M + \gamma_z R. \quad (3.5.20)$$

Покажем, что (3.5.18)-(3.5.20) могут выполняться лишь для постоянной функции  $\gamma$ . Действительно, в предположении противного  $P, Q, R$  не являются тождественными нулями и из соотношений (3.5.19)-(3.5.20) получаем значения градиента функции  $\gamma$

$$\gamma_x = \frac{\bar{\Xi}^* M - \gamma M}{P}, \quad \gamma_y = \frac{\bar{\Xi}^* M - \gamma M}{Q}, \quad \gamma_z = \frac{\bar{\Xi}^* M - \gamma M}{R}.$$

Условия совместности (с учетом  $\bar{\Xi}^* M - \gamma M \neq 0$ ) имеют вид

$$\frac{P_y}{P^2} = \frac{Q_x}{Q^2}, \quad \frac{R_y}{R^2} = \frac{Q_z}{Q^2}, \quad \frac{P_z}{P^2} = \frac{R_x}{R^2},$$

что, в силу (3.5.16), дает  $P_y = Q_x = R_x = P_z = Q_z = R_y = 0$ , т.е.  $P$  зависит только от  $x$ ,  $Q$  – только от  $y$ , а  $R$  – только от  $z$ . Но тогда из первого уравнения (3.5.16) немедленно следует, что  $P = Dx + H$ ,  $Q = Dy + I$ ,  $R = Dz + J$  – линейные функции своих аргументов, поэтому  $S = P_x - M$

является константой и из (3.5.18) получаем, что  $\gamma$  – полином степени не выше второй.

Если  $D \neq 0$ , то из (3.5.19)-(3.5.20) получаем, что функция  $\bar{\Xi}^*M - \gamma M$ , являющаяся нетривиальным (в силу  $\gamma \neq \text{const}$ ) полиномом степени не выше второй, делится на три монома  $P = Dx+H$ ,  $Q = Dy+I$ ,  $R = Dz+J$ , что невозможно. Если же  $D = 0$ , то  $P$  – константа, и в этом случае равенство (3.5.19) не может иметь места для полинома  $\gamma$ , отличного от константы.

Итак, во всех случаях предположение  $\gamma \neq \text{const}$  привело нас к противоречию. Значит,  $\gamma$  не зависит от  $x, y, z$ , и уравнение (3.5.19) превращается в (3.5.14). Лемма доказана.

Для использования леммы 3.5.2 нам понадобится таблица коммутации для операторов алгебры конформных преобразований трехмерного пространства (таблица 3.5.1).

Таблица 3.5.1. Коммутаторы элементов Алгебры Ли группы конформных преобразований трехмерного пространства (в некоторых колонках, для экономии места, аргументы у  $\Xi_\alpha$  расположены столбцом).

$[ \quad , \quad ]$	$\Xi_\infty(a, b, c)$	$\Xi_*$	$\Xi_\circ(e, f, g)$	$\Xi_\uparrow(h, i, j)$
$\Xi_\infty \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$	0	$-\Xi_\infty \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$	$\Xi_\infty \begin{pmatrix} Bg - Cf \\ Ce - Ag \\ Af - Be \end{pmatrix}$	$-2\Xi_\circ \begin{pmatrix} Ci - Bj \\ Aj - Ch \\ Bh - Ai \end{pmatrix} - 2(Ah + Bi + Cj)\Xi_*$
$\Xi_*$	$\Xi_\infty(a, b, c)$	0	0	$-\Xi_\uparrow(h, i, j)$
$\Xi_\circ \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}$	$-\Xi_\infty \begin{pmatrix} Gb - Fc \\ Ec - Ga \\ Fa - Eb \end{pmatrix}$	0	$\Xi_\circ \begin{pmatrix} Fg - Gf \\ Ge - Eg \\ Ef - Fe \end{pmatrix}$	$\Xi_\uparrow \begin{pmatrix} Fj - Gi \\ Gh - Eh \\ Ei - Fh \end{pmatrix}$
$\Xi_\uparrow \begin{pmatrix} H \\ I \\ J \end{pmatrix}$	$2\Xi_\circ \begin{pmatrix} cI - bJ \\ aJ - cH \\ bH - aI \end{pmatrix} + 2(aH + bI + cJ)\Xi_*$	$\Xi_\uparrow \begin{pmatrix} H \\ I \\ J \end{pmatrix}$	$\Xi_\uparrow \begin{pmatrix} gI - fJ \\ eJ - gH \\ fH - eI \end{pmatrix}$	0

В ней использованы уже применявшиеся нами обозначения из приложения II.1

$$\begin{aligned} \Xi_\infty(A, B, C) &= [A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz]\partial_x + \\ &+ [B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz]\partial_y + [C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz]\partial_z, \\ \Xi_\circ(E, F, G) &= (Gy - Fz)\partial_x + (-Gx + Ez)\partial_y + (Fx - Ey)\partial_z, \\ \Xi_* &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad \Xi_\uparrow(H, I, J) = H\partial_x + I\partial_y + J\partial_z. \end{aligned}$$



В этих обозначениях алгебра 3.4.5 конформных преобразований трехмерного пространства имеет вид

$$\Xi_{\infty}(a, b, c) + d\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(e, f, g) + \Xi_{\uparrow}(h, i, j),$$

и в таблице коммутаторы указаны сразу для семейств операторов, соответствующим введенным обозначениям.

### 3.5.4 Индуцированные пространства касательных эквивалентностей и индуцированные алгебры симметрий для классифицирующих уравнений с квадратичными коэффициентами

Как уже отмечалось, каждое семейство функций  $v(x, y, z)$ , задающих семейство уравнений эйконала с двумерной группой симметрий, определяется как общее решение линейного дифференциального уравнения, которое называется *классифицирующим*

$$P(x, y, z)v_x + Q(x, y, z)v_y + R(x, y, z)v_z = (P_x(x, y, z) - M)v. \quad (3.5.21)$$

Порождающий уравнение (3.5.21) оператор  $P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z$  мы, как и в предыдущем пункте, будем обозначать через  $U$ . Коэффициенты  $P, Q, R$  классифицирующего уравнения являются коэффициентами оператора симметрии соответствующего уравнения эйконала (а точнее, пространственной составляющей этого оператора) и имеют вид

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Gy - Fz + H, \\ Q(x, y, z) &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Gx + Dy + Ez + I, \\ R(x, y, z) &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Ey + Dz + J \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

с некоторым (для каждого семейства – своим) набором констант. Для того, чтобы не путать константы в коэффициентах классифицирующего уравнения с константами в коэффициентах алгебры эквивалентности, мы будем обозначать константы в классифицирующем уравнении большими буквами, а константы в операторе эквивалентности – маленькими (как в (3.4.5)).

Анализируя группы эквивалентности и симметрий семейств уравнений с двумерной группой симметрий (упомянутых в разделе III формулировки теоремы 3.3.1 и перечисленных в приложениях II.4-II.5), мы будем следовать схеме, уже использованной в доказательстве теоремы 3.3.1 и рассмотрим два основных варианта: когда  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  (коэффициенты классифицирующего уравнения квадратичные) и когда  $A = B = C = 0$  (коэффициенты линейные).

Поскольку в варианте, когда коэффициенты квадратичные, с помощью преобразований, заведомо входящих в группу эквивалентности, уравнение

(3.5.21) приводится к виду (3.3.70)

$$(x^2 - y^2 - z^2 \mp \nu^2)v_x + (2xy + \theta z + \lambda)v_y + (2xz - \theta y)v_z = (2x - M)v, \quad (3.5.23)$$

мы рассмотрим преобразования эквивалентности, действующие только на уравнениях вида (3.5.23). В этом случае

$$U = \Xi_\infty(1, 0, 0) + \Xi_\circ(\theta, 0, 0) + \Xi_\uparrow(\varkappa, \lambda, 0), \quad (3.5.24)$$

и для подалгебры преобразований эквивалентности, действующей на уравнениях вида (3.5.23), должно, в силу лемм 3.5.1-3.5.2, выполняться

$$\bar{\Xi}^*U = [U, \bar{\Xi}] + \gamma U.$$

Подставляя сюда (3.5.24) и

$$\bar{\Xi} = \Xi_\infty(a, b, c) + d\Xi_* + \Xi_\circ(e, f, g) + \Xi_\uparrow(h, i, j),$$

получаем, пользуясь таблицей 3.5.1, что

$$\begin{aligned} & \bar{\Xi}^*\theta \cdot \Xi_\circ(1, 0, 0) + \bar{\Xi}^*\varkappa \cdot \Xi_\uparrow(1, 0, 0) + \bar{\Xi}^*\lambda \cdot \Xi_\uparrow(0, 1, 0) = \\ & = -d\Xi_\infty(1, 0, 0) + \Xi_\infty(0, -g, f) - 2h\Xi_* - 2\Xi_\circ(0, j, -i) - \\ & \quad - \Xi_\infty(0, \theta c, -\theta b) + \Xi_\circ(0, -\theta g, \theta f) + \Xi_\uparrow(0, -\theta j, \theta i) + \\ & + 2(a\varkappa + b\lambda)\Xi_* + 2\Xi_\circ(\lambda c, -\varkappa c, \varkappa b - \lambda a) + d\Xi_\uparrow(\varkappa, \lambda, 0) + \Xi_\uparrow(\lambda g, -\varkappa g, \varkappa f - \lambda e) + \\ & + \gamma\Xi_\infty(1, 0, 0) + \gamma\theta\Xi_\circ(1, 0, 0) + \gamma\varkappa\Xi_\uparrow(1, 0, 0) + \gamma\lambda\Xi_\uparrow(0, 1, 0), \end{aligned}$$

откуда, приравнявая константы при одинаковых операторах, приходим к системе

$$\gamma = d, \quad g + \theta c = 0, \quad f + \theta b = 0; \quad (3.5.25)$$

$$a\varkappa + b\lambda - h = 0; \quad (3.5.26)$$

$$\bar{\Xi}^*\theta = 2\lambda c + \gamma\theta, \quad 2j + \theta g + 2\varkappa c = 0, \quad 2i + \theta f + 2\varkappa b - 2\lambda a = 0; \quad (3.5.27)$$

$$\bar{\Xi}^*\varkappa = d\varkappa + \lambda g + \gamma\varkappa, \quad \bar{\Xi}^*\lambda = -\theta j + \lambda d - \varkappa g + \gamma\lambda, \quad \theta i + \varkappa f - \lambda e = 0, \quad (3.5.28)$$

которая дополняется уравнением (3.5.14).

Для того, чтобы найти преобразования эквивалентности, оставляющие инвариантным семейство уравнений вида (3.5.23), нам необходимо найти значения параметров, при которых система (3.5.25)-(3.5.28) имеет решение. Эта система – дифференциально-алгебраическая: первое уравнение (3.5.27) и первые два уравнения (3.5.28) задают обыкновенные дифференциальные уравнения (т.к.  $\bar{\Xi}^*\theta$ ,  $\bar{\Xi}^*\varkappa$  и  $\bar{\Xi}^*\lambda$  являются производными от  $\theta$ ,  $\varkappa$  и  $\lambda$  по групповому параметру), остальные уравнения – алгебраические.

Рассматривая преобразования, индуцированные на классифицирующие уравнения (3.5.21) группой эквивалентности, мы видим, что преобразования эквивалентности, оставляющие инвариантными то или иное семейство классифицирующих уравнений (например, семейство (3.5.23)) образуют подгруппу индуцированной группы, которую мы, в отличие от общей группы эквивалентности, будем называть *частной индуцированной группой эквивалентности* соответствующего семейства уравнений. Как и в случае исходного уравнения эйконала, помимо частной индуцированной группы эквивалентности, отвечающей уравнению (3.5.23), мы будем рассматривать и индуцированные конус и пространство касательных эквивалентностей, отвечающие различным семействам эквивалентных преобразований, не являющихся, вообще говоря, группами.

Поскольку переход к семейству и подсемейству сужает не только соответствующую индуцированную группу эквивалентности, но и индуцированный конус касательных эквивалентностей (т.к. мы рассматриваем только преобразования, действующие на семействе или подсемействе), мы, постепенно "спускаясь" к подсемействам, можем привести ситуацию к "примитивному" случаю, когда и индуцированная частная алгебра эквивалентности, и индуцированное пространство касательных эквивалентностей вырождаются в алгебру симметрий классифицирующего уравнения. Достижение "примитивных" случаев заканчивает иерархическую классификацию. После этого нам остается только выяснить действие полученных групп симметрий на решения классифицирующих уравнений и установить тем самым соответствие между классами эквивалентности и их представителями.

**Лемма 3.5.3** *Частная индуцированная группа эквивалентности для семейства уравнений (3.5.23) есть группа растяжений.*

**Доказательство.** Для частной группы эквивалентности семейства соотношения (3.5.25)-(3.5.28) должны быть выполнены для любых значений  $\theta$ ,  $\varkappa$ ,  $\lambda$ . Поэтому из тех уравнений (3.5.25)-(3.5.28), которые являются алгебраическими, следует, что все коэффициенты, кроме  $d$ , обязаны быть нулями. Значит, группа эквивалентности семейства (3.5.23) есть группа растяжений. При этом в системе (3.5.25)-(3.5.28) остается только три дифференциальных уравнения

$$\bar{\Xi}^*\theta = d\theta, \quad \bar{\Xi}^*\varkappa = 2d\varkappa, \quad \bar{\Xi}^*\lambda = 2d\lambda,$$

которые означают, что при растяжении системы координат  $(x, y, z)$  коэффициенты также подвергаются растяжениям. Действительно, из самого уравнения (3.5.23) легко увидеть, что растяжение пространства переменных  $(x, y, z)$  в  $t$  раз приводит к умножению  $\theta$  на  $t$ , а  $\varkappa$  и  $\lambda$  – на  $t^2$ . Лемма доказана.

Для определения индуцированного пространства касательных эквивалентностей уравнения (3.5.23) нам понадобится зафиксировать какие-то конкретные значения  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\varkappa$  и решить алгебраическую часть системы (3.5.25)-(3.5.25) (поскольку дифференциальные соотношения не налагают никаких дополнительных условий, а только определяют значения производных).

Как нетрудно проверить, существенное различие имеется для  $\lambda \neq 0$  и для  $\lambda = 0$ . Для  $\lambda \neq 0$  выражение коэффициентов через  $a$ ,  $b$  и  $c$  дает

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} = & a[\Xi_{\infty}(1, 0, 0) + \theta\Xi_{\circ}(1, 0, 0) + \Xi_{\uparrow}(\varkappa, \lambda, 0)] + \\ & + b[\Xi_{\infty}(0, 1, 0) + \Xi_{\circ}(\frac{\theta(\theta^2 - 4\varkappa)}{2\lambda}, -\theta, 0) + \Xi_{\uparrow}(\lambda, (\frac{1}{2}\theta^2 - \varkappa), 0)] + \\ & + c[\Xi_{\infty}(0, 0, 1) - \theta\Xi_{\circ}(0, 0, 1) + (\frac{1}{2}\theta^2 - \varkappa)\Xi_{\uparrow}(0, 0, 1)] + d\Xi_{*}, \end{aligned}$$

при этом

$$\tilde{\Xi}^*\theta = \theta d + 2\lambda c, \quad \tilde{\Xi}^*\varkappa = 2\varkappa d - \lambda\theta c, \quad \tilde{\Xi}^*\lambda = 2\lambda d - \frac{1}{2}\theta(\theta^2 - 4\varkappa)c. \quad (3.5.29)$$

Примечательным фактом является то, что для уравнения (3.5.23) пространство касательных эквивалентностей не является суммой алгебры эквивалентности и алгебры симметрий. Действительно, составляющие  $\tilde{\Xi}$  операторы, содержащие  $a$  и  $b$ , являются операторами симметрии классифицирующего уравнения (т.к. ни  $a$ , ни  $b$  не входят в уравнения (3.5.29)). Оператор, содержащий  $d$  – это оператор группы эквивалентности. А вот оператор, содержащий  $c$ , не лежит ни в алгебре симметрий, ни в алгебре эквивалентности.

Здесь мы наглядно видим, что происходит, когда подсемейство выбрано не очень удачно, но другого варианта выбора у нас нет. Однако оказывается, что наличие "лишнего" оператора совершенно не мешает, а, наоборот, помогает упростить ситуацию.

Прежде всего, если  $c = 0$ , а  $d \neq 0$ , то система (3.5.29) имеет два инварианта  $4\varkappa/\theta^2$  и  $\lambda/\theta^2$  (в предположении, конечно, что  $\theta \neq 0$ ). Если же, напротив,  $d = 0$ , а  $c \neq 0$ , то мы получаем другую пару инвариантов:  $\lambda^2 - \theta^2\varkappa$  и  $\theta^2 + 4\varkappa$ . Наконец, если и  $c \neq 0$ , и  $d \neq 0$ , то у системы (3.5.29) имеется единственный инвариант

$$\frac{\lambda^2 - \theta^2\varkappa}{(\theta^2 + 4\varkappa)^2},$$

который естественно назвать *абсолютным* инвариантом. Поскольку абсолютный инвариант не меняется не только при действии группы эквивалентности, но и при действии любых других преобразований, сохраняющих вид

классифицирующего уравнения (3.5.23), он оказывается классифицирующим параметром – уравнения с разным абсолютным инвариантом лежат в разных классах эквивалентности.

Покажем теперь, что с помощью "лишнего" оператора, не вошедшего ни в алгебру симметрий, ни в алгебру эквивалентности можно построить семейство преобразований, не образующих группу, и с помощью этого семейства редуцировать уравнение (3.5.23) к более простому. А именно, случай  $\lambda \neq 0$  редуцировать к случаю  $\lambda = 0$ .

**Лемма 3.5.4** *Любое решение системы*

$$\dot{\theta} = 2\lambda, \quad \dot{\varkappa} = -\lambda\theta, \quad \dot{\lambda} = -\frac{1}{2}\theta(\theta^2 - 4\varkappa) \quad (3.5.30)$$

*пересекает плоскость  $\lambda = 0$ .*

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что система (3.5.30) имеет интеграл  $\theta^2 + 4\varkappa$ , поэтому все пространство можно расслоить на параболические цилиндры  $\theta^2 + 4\varkappa = 2C$ , и спроектировать нашу систему с каждого из этих параболических цилиндров на плоскость  $(\lambda, \theta)$ , выразив из уравнения цилиндра  $\varkappa$  через  $\theta$  и подставив его в (3.5.30). Получим

$$\dot{\theta} = 2\lambda, \quad \dot{\lambda} = -\theta(\theta^2 - C),$$

ее решение дает уравнение фазовых траекторий

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4}\theta^4 + C\frac{1}{2}\theta^2 + C_1.$$

Проекция фазовых портретов на плоскость  $(\lambda, \theta)$  для случаев  $C \leq 0$  и  $C > 0$  изображены на рис. 3.1 слева и справа соответственно. По этому рисунку видно, что для любого фиксированного  $C$  (т.е. для любого листа нашего слоения) траектории проекции системы (3.5.30) на плоскость  $(\lambda, \theta)$  образуют замкнутые линии (правда, некоторые оказываются сепаратрисами особой точки  $\lambda = \theta = 0$ ), и что все они проходят в некоторый момент времени через прямую  $\lambda = 0$ . Это означает, что на каждом параболическом цилиндре прообразы этих траекторий – траектории системы (3.5.30) проходят через плоскость  $\lambda = 0$ . Лемма доказана.

Из леммы 3.5.4 следует, что задавая  $\theta, \lambda, \varkappa$  как функции некоторого параметра из системы (3.5.30) (сразу отметим, что выражаются они через этот параметр как эллиптические функции) и рассматривая семейство преобразований, определяемых системой уравнений

$$\dot{x} = 2xz, \quad \dot{y} = 2yz - \theta z, \quad \dot{z} = z^2 - x^2 - y^2 + \theta y + \frac{1}{2}\theta^2 - \varkappa,$$

Рис. 3.1: Проекции фазовых портретов на плоскость  $(\lambda, \theta)$  для случаев  $C \leq 0$  (слева) и  $C > 0$  (справа).

с найденными функциями  $\theta, \lambda, \varkappa$ , мы получим при том значении параметра, которое отвечает  $\lambda = 0$ , отображение, преобразующее уравнение вида (3.5.23) с ненулевым  $\lambda$  в уравнение (3.5.23) с нулевым  $\lambda$ . Ниже, в пункте 3.5.6, будет указан другой способ построения такого отображения – в виде суперпозиции семи конформных преобразований.

Поскольку преобразование, приводящее к случаю  $\lambda = 0$ , лежит в общей группе эквивалентности, мы можем далее сузить наши рассмотрения только на этот случай, выбирая представителя только из этих уравнений. Кроме того, поскольку группа растяжений также осуществляет эквивалентное преобразование классифицирующего уравнения, нам можно зафиксировать еще один из оставшихся параметров  $\theta$  или  $\varkappa$ , сведя все к трем основным вариантам:  $\varkappa = \pm 1, \theta$  произвольное;  $\varkappa = 0, \theta = 1$  и  $\varkappa = \theta = 0$ . Фиксация случая  $\lambda = 0$  позволяет нам сузить и пространство касательных эквивалентностей (поскольку сужается класс уравнений, в которые данное уравнение может быть преобразовано): подстановка в систему  $\lambda = 0$  и  $\varkappa = \text{const}$  дает



$$\begin{aligned} 2j + \theta g + 2c = 0, & & 2i + \theta f + 2b = 0, & & d + \gamma = 0, \\ \theta j + g = 0, & & \theta i + f = 0, & & \bar{\Xi}^* \theta = \gamma \theta, \end{aligned}$$

откуда  $d = \gamma = 0$ ,  $\theta = \text{const}$ , и выражение  $g = -\theta c$ ,  $f = -\theta b$ ,  $h = a$ ,  $i = (\theta^2/2 - 1)b$ ,  $2j = (\theta^2/2 - 1)c$  приводит к паре уравнений

$$\theta(\theta^2 - 4)b = 0, \quad \theta(\theta^2 - 4)c = 0,$$

дающих дополнительное ветвление вариантов.

Если  $\theta(\theta^2 - 4) \neq 0$ , то  $b = c = 0$ , и пространство индуцированных касательных эквивалентностей сводится к двумерной алгебре симметрий

$$\bar{\Xi} = a\{\Xi_\infty(1, 0, 0) + \Xi_\uparrow(1, 0, 0)\} + e\Xi_o(1, 0, 0). \quad (3.5.31)$$

Если же  $\theta = 0$ , или  $\theta = \pm 2$ , то пространство касательных эквивалентностей, по-прежнему совпадая с алгеброй симметрий, будет уже четырехмерным:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} = a\{\Xi_\infty(1, 0, 0) + \Xi_\uparrow(1, 0, 0)\} + \\ + b \left\{ \Xi_\infty(0, 1, 0) - \theta\Xi_o(0, 1, 0) + \frac{1}{4}\theta^2\Xi_\uparrow(0, 1, 0) \right\} + e\Xi_o(1, 0, 0) + \\ + c \left\{ \Xi_\infty(0, 0, 1) - \theta\Xi_o(0, 0, 1) + \frac{1}{4}\theta^2\Xi_\uparrow(0, 0, 1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Если  $\varkappa = 0$ ,  $\theta = 1$ , то система дает  $b = c = d = f = g = h = i = j = 0$ , и пространство касательных эквивалентностей, все также совпадая с алгеброй симметрий, будет двумерным:

$$\bar{\Xi} = a\Xi_\infty(1, 0, 0) + e\Xi_o(1, 0, 0). \quad (3.5.33)$$

Случай  $\lambda = \theta = \varkappa = 0$  особый, так как здесь приходится отдельно обсуждать уравнение (3.5.14): во всех предыдущих случаях в силу  $\gamma = d = 0$  это уравнение приобретало вид  $\bar{\Xi}^* M = 0$ , т.е.  $M$  оказывалось инвариантом, и симметрии левой части уравнения автоматически оказывались симметриями всего уравнения. В случае же  $\lambda = \theta = \varkappa = 0$  оказывается, что  $\gamma = d$  не обязано быть нулем, поэтому преобразования, порождаемые алгеброй  $\bar{\Xi} = d\Xi_*$ , хотя и являются симметриями левой части классифицирующего уравнения, будут не симметриями уравнения, а только лишь преобразованиями эквивалентности: они действуют на константу  $M$  в правой части уравнения (3.5.23), умножая ее на ненулевое число. Поэтому этот случай распадается на два:  $M \neq 0$  и  $M = 0$ .

Если  $M \neq 0$ , то, действуя растяжениями и отражениями, можно прийти к случаю  $M = 1$ , поэтому, налагая еще одно дополнительное ограничение ( $M = 1$ ), мы обеспечиваем выполнение условия  $d = \gamma = 0$ , и поскольку в

силу остальных уравнений  $f = g = h = i = j = 0$ , получаем, что пространство касательных эквивалентностей четырехмерно и снова совпадающее с алгеброй симметрий

$$\bar{\Xi} = \Xi_{\infty}(a, b, c) + e\Xi_{\circ}(1, 0, 0). \quad (3.5.34)$$

Если же  $M = 0$ , то и пространство касательных эквивалентностей, и алгебра симметрий расширяются до размерности пять, включая в себя и растяжения:

$$\bar{\Xi} = \Xi_{\infty}(a, b, c) + d\Xi_{*} + e\Xi_{\circ}(1, 0, 0) \quad (3.5.35)$$

### 3.5.5 Классифицирующее уравнение с линейными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай  $A = B = C = 0$ . Тогда, подставляя в уравнение  $\bar{\Xi}^*U = [U, \bar{\Xi}] + \gamma U$  оператор

$$U = D\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(E, F, G) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J),$$

получаем с помощью таблицы коммутаторов (таблица 3.5.1), что

$$\begin{aligned} & \bar{\Xi}^*\{D\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(E, F, G) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J)\} = \\ & = [D\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(E, F, G) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J), \\ & \quad \Xi_{\infty}(a, b, c) + d\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(e, f, g) + \Xi_{\uparrow}(h, i, j)] + \\ & \quad + \gamma\{D\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(E, F, G) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J)\} = \\ & = \Xi_{\infty}(Da, Db, Dc) - \Xi_{\uparrow}(Dh, Di, Dj) - \Xi_{\infty}(Gb - Fc, Ec - Ga, Fa - Eb) + \\ & \quad + \Xi_{\circ}(Fg - Gf, Ge - Eg, Ef - Fe) + \Xi_{\uparrow}(Fj - Gi, Gh - Ej, Ei - Fh) + \\ & \quad + 2(aH + bI + cJ)\Xi_{*} + 2\Xi_{\circ}(cI - bJ, aJ - cH, bH - aI) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J) + \\ & \quad + \Xi_{\uparrow}(gI - fJ, eJ - gH, fH - eI) + \gamma\{D\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(E, F, G) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J)\}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых операторах, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} Da + Gb - Fc = 0, \quad Db + Ec - Ga = 0, \quad Dc + Fa - Eb = 0; \\ \bar{\Xi}^*D = 2(aH + bI + cJ) + \gamma D; \quad \bar{\Xi}^*E = Fg - Gf + 2cI - 2bJ + \gamma E, \\ \bar{\Xi}^*F = Ge - Eg + 2aJ - 2cH + \gamma F, \quad \bar{\Xi}^*G = Ef - Fe + 2bH - 2aI + \gamma G; \\ \bar{\Xi}^*H = dH - Dh + Fj - Gi + gI - fJ + \gamma H, \quad (3.5.36) \\ \bar{\Xi}^*I = dI - Di + Gh - Ej + eJ - gH + \gamma I, \\ \bar{\Xi}^*J = dJ - Dj + Ei - Fh + fH - eI + \gamma J. \end{aligned}$$



Первые три уравнения образуют линейную однородную систему относительно  $(a, b, c)$  с определителем  $D(D^2 + E^2 + F^2 + G^2)$ . Поэтому если  $D \neq 0$ , то  $a = b = c = 0$ , и тогда оказывается, что

$$\bar{\Xi}^* D = \gamma D, \quad \bar{\Xi}^*(E^2 + F^2 + G^2) = 2\gamma(E^2 + F^2 + G^2),$$

$$\bar{\Xi}^*(EH + FI + GJ) = (d + 2\gamma)(EH + FI + GJ) - D(Eh + Fi + Gj),$$

так что выделенные в доказательстве теоремы 3.3.1 случаи (приложение П.5), разделяющие равенство или неравенство нулю коэффициента  $D$  и  $E^2 + F^2 + G^2$ , а при  $D = 0$  – равенство или неравенство нулю  $EH + FI + GJ$ , оказываются наверняка в разных классах эквивалентности. Сужая рассмотрения на каждый из этих случаев и пользуясь тем, что в каждом случае мы уже определили (приложение П.5) канонические уравнения, к которым в каждом этих случаев уравнение приводится сдвигами, вращениями и растяжениями – преобразованиями, заведомо являющихся преобразованиями эквивалентности, мы будем далее рассмотреть преобразования эквивалентности, оставляющие инвариантными только канонические классифицирующие уравнения, указанные в приложении П.5.

Случай  $D \neq 0$ ,  $E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$  приводится к уравнению

$$xv_x + (y + \theta z)v_y + (z - \theta y)v_z = (1 - M)v.$$

Для него  $D = 1$ ,  $E = \theta (\neq 0)$ ,  $F = G = H = I = J = 0$ , и из системы (3.5.36) получаем  $\gamma = 0$ ,  $a = b = c = f = g = h = i = j = 0$ ,  $\bar{\Xi}^*\theta = 0$ ,  $\bar{\Xi}^*M = 0$ , коэффициенты  $d$  и  $e$  – произвольны. Значит, для этого уравнения  $\theta$  и  $M$  являются инвариантами, а пространство касательных эквивалентностей совпадает с алгеброй симметрий

$$\bar{\Xi} = d\Xi_* + e\Xi_\circ(1, 0, 0) \tag{3.5.37}$$

и имеет размерность два.

Если  $D = 0$ ,  $E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$ ,  $EH + FI + GJ \neq 0$ , то каноническое классифицирующее уравнение имеет вид

$$v_x + zv_y - yv_z = -Mv,$$

подставляя в систему (3.5.36)  $E = 1$ ,  $H = 1$ ,  $D = F = G = I = J = 0$ , получаем  $\gamma = 0$ ,  $a = b = c = d = f = g = i = j = 0$ ,  $M$  оказывается инвариантом. Пространство касательных эквивалентностей совпадает с алгеброй симметрий и имеет, как и в предыдущем случае, размерность два:

$$\bar{\Xi} = e\Xi_\circ(1, 0, 0) + h\Xi_\uparrow(1, 0, 0). \tag{3.5.38}$$

В случае же, когда по-прежнему  $D = 0$ ,  $E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$ , но  $EH + FI + GJ = 0$ , каноническое классифицирующее уравнение уже имеет вид

$$zv_y - yv_z = -Mv,$$

и подстановка в систему (3.5.36)  $E = 1$ ,  $D = F = G = I = J = H = 0$  дает  $\gamma = 0$ ,  $b = c = f = g = i = j = 0$ , появляются две произвольные константы  $a$  и  $d$ , но  $M$  остается инвариантом, так что пространство касательных эквивалентностей снова совпадает с алгеброй симметрий, но имеет уже размерность четыре:

$$\bar{\Xi} = a\bar{\Xi}_\infty(1, 0, 0) + d\bar{\Xi}_* + e\bar{\Xi}_\circ(1, 0, 0) + h\bar{\Xi}_\uparrow(1, 0, 0). \quad (3.5.39)$$

Если  $E = F = G = 0$ , но  $D \neq 0$ , то каноническое классифицирующее уравнение имеет вид

$$xv_x + yv_y + zv_z = (1 - M)v,$$

и подстановка  $D = 1$ ,  $E = F = G = H = I = J = 0$  в уравнения (3.5.36) приводит к условиям  $\gamma = 0$ ,  $a = b = c = h = i = j = 0$ , и мы получаем четырехмерную алгебру

$$\bar{\Xi} = d\bar{\Xi}_* + \bar{\Xi}_\circ(e, f, g). \quad (3.5.40)$$

Наконец, если  $D = E = F = G = 0$ , но  $H^2 + I^2 + J^2 \neq 0$ , то каноническое классифицирующее уравнение имеет вид

$$v_x = -Mv,$$

для соответствующих значений констант ( $H = 1$ , остальные – нули) система (3.5.36) дает условия  $a = b = c = f = g = 0$ ,  $d = -\gamma$ . Поскольку  $\bar{\Xi}^*M = \gamma M$ , оператор  $\bar{\Xi} = d\bar{\Xi}_*$  порождает преобразование эквивалентности, действие которого на константу  $M$  является умножением. Поэтому полученное семейство уравнений подразделяется еще на два случая, отвечающих  $M \neq 0$  и  $M = 0$ , в первом случае каноническим является уравнение  $v_x = v$ , пространство касательных эквивалентностей совпадает с алгеброй симметрий и является четырехмерным:

$$\bar{\Xi} = e\bar{\Xi}_\circ(1, 0, 0) + \bar{\Xi}_\uparrow(h, i, j), \quad (3.5.41)$$

а во втором случае каноническое уравнение  $v_x = 0$  имеет уже пятимерное пространство касательных эквивалентностей (все так же совпадающее с алгеброй симметрий):

$$\bar{\Xi} = d\bar{\Xi}_* + e\bar{\Xi}_\circ(1, 0, 0) + \bar{\Xi}_\uparrow(h, i, j). \quad (3.5.42)$$

### 3.5.6 Соответствие семейств классифицирующих уравнений с квадратичными и с линейными коэффициентами

В пункте 3.5.4 мы из классифицирующих уравнений с квадратичными коэффициентами выделили ряд канонических случаев, которые не эквивалентны между собой (решения одного уравнения не могут быть преобразованы в решения другого уравнения), и для каждого из которых пространство касательных эквивалентностей совпало с алгеброй симметрий. Аналогичная сепарация произведена в пункте 3.5.5 для классифицирующих уравнений с линейными коэффициентами. Остается выяснить, могут ли уравнения с квадратичными коэффициентами быть эквивалентны тем или иным уравнениям с линейными коэффициентами.

Оказывается, что уравнение вида (3.5.23)

$$(x^2 - y^2 - z^2 + \varkappa)v_x + (2xy + \theta z + \lambda)v_y + (2xz - \theta y)v_z = (2x - M)v$$

можно привести к уравнению вида

$$\begin{aligned} (Dx + Gy - Fz + H)v_x + (-Gx + Dy + Ez + I)v_y + (Fx - Ey + Dz + J)v_z = \\ = (D - \tilde{M})v \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

если первое уравнение имеет особую точку, т.е. для некоторого  $(x, y, z)$  все коэффициенты уравнения обращаются в нуль. Эти значения  $x, y, z$  определяются, естественно, из системы уравнений

$$x^2 - y^2 - z^2 + \varkappa = 2xy + \theta z + \lambda = 2xz - \theta y = 0,$$

решением которой является

$$x_0 = \frac{\nu}{2}, \quad y_0 = -\frac{\lambda\nu}{\nu^2 + \theta^2}, \quad z_0 = -\frac{\lambda\theta}{\nu^2 + \theta^2}$$

где  $\nu$  – корень уравнения

$$(\nu^2 + 4\varkappa)(\nu^2 + \theta^2) = 4\lambda^2 \quad (3.5.44)$$

(если  $\nu = \theta = 0$  и  $\varkappa \geq 0$  можно взять  $x_0 = 0, y_0 = -\sqrt{\varkappa}, z_0 = 0$ ; а при  $\nu = \theta = 0$  и  $\varkappa < 0$  – соответственно  $x_0 = \sqrt{-\varkappa}, y_0 = z_0 = 0$ ).

Уравнение (3.5.44) уже встречалось нам в виде уравнения (3.3.71) при анализе решений уравнения (3.5.23) (только там вместо  $\nu^2$  фигурировало  $\mu$ ). Это уравнение имеет вещественные корни тогда и только тогда, когда  $\lambda^2 - \varkappa\theta^2 \geq 0$ .

При выполнении этого условия сдвиг системы координат в точку  $(x_0, y_0, z_0)$  приводит уравнение (3.5.23) к виду

$$(x^2 - y^2 - z^2 + 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z)v_x + (2xy + 2x_0y + 2y_0x + \theta z)v_y +$$

$$+(2xz + 2x_0z + 2z_0x - \theta y)v_z = (2x + 2x_0 - M)v$$

(новые переменные здесь обозначены по-прежнему:  $(x, y, z)$ ), а выполнение затем инверсии

$$\hat{x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \hat{y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \hat{z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

приводит функцию  $v(x, y, z)$  к виду

$$\hat{v}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)v \left( \frac{\hat{x}}{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}, \frac{\hat{y}}{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}, \frac{\hat{z}}{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2} \right),$$

а уравнение, которому она удовлетворяет – к виду

$$\begin{aligned} (2x_0x + 2y_0y + 2z_0z + 1)v_x + (2x_0y - 2y_0x - \theta z)v_y + (2x_0z - 2z_0x + \theta y)v_z = \\ = (2x_0 + M)v \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

(здесь новые переменные  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  опять переобозначены через  $x, y, z$ ).

Уравнение (3.5.45) позволяет явно увидеть соответствия между различными вариантами уравнения (3.5.23) и различными вариантами уравнения (3.5.43).

Действительно, уравнение (3.5.45) имеет вид (3.5.43) с  $D = 2x_0 = \nu$ ,  $E = -\theta$ ,  $F = -2z_0 = 2\lambda\theta/(\nu^2 + \theta^2)$ ,  $G = 2y_0 = -2\lambda\nu/(\nu^2 + \theta^2)$ ,  $H = 1$ ,  $I = J = 0$ . При этом, как видно, существенным является, обращается ли в нуль  $D = \nu$  и  $E^2 + F^2 + G^2 = \theta^2 + 4\lambda^2/(\nu^2 + \theta^2) = \theta^2 + \nu^2 + 4\kappa$ . Условие  $\nu \neq 0$ , выполненное тогда и только тогда, когда  $\lambda^2 - \kappa\theta^2 > 0$ , дает не только  $D \neq 0$ , но и  $E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$ . В самом деле,

$$\nu^2 = \frac{-\theta^2 - 4\kappa + \sqrt{(\theta^2 + 4\kappa)^2 + 16(\lambda^2 - \kappa\theta^2)}}{2},$$

откуда

$$\nu^2 + \theta^2 + 4\kappa = \frac{\theta^2 + 4\kappa + \sqrt{(\theta^2 + 4\kappa)^2 + 16(\lambda^2 - \kappa\theta^2)}}{2} > 0.$$

В случае  $\nu = 0$ , но  $\theta \neq 0$  получаем  $D = 0$ ,  $E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$ , при этом свободный вектор  $(H, I, J) = (1, 0, 0)$  не ортогонален вектору  $(E, F, G) = (-\theta, -2z_0, 2y_0)$ . Это означает, что полученное уравнение приводится к виду  $\lambda v_x + z v_y - y v_z = -Mv$ .

Если же  $\nu = \theta = 0$  (и тогда  $\lambda = 0$ ), то при  $\kappa > 0$ , как уже говорилось,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -\sqrt{\kappa}$ ,  $z_0 = 0$ , и в полученном уравнении так же, как и раньше,  $D = 0$ ,  $E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$ , но при этом полученный вектор  $(H, I, J)$  ортогонален  $(E, F, G)$ , так что в этом случае уравнение приводится уже к каноническому виду  $z v_y - y v_z = -Mv$ .

При тех же  $\nu = \theta = 0$ , но  $\varkappa < 0$  в силу  $x_0 = \sqrt{-\varkappa}$ ,  $y_0 = z_0 = 0$  мы получаем случай  $D \neq 0$ ,  $E = F = G = 0$ , а если  $\nu = \theta = \varkappa = 0$ , то  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , и уравнение (3.5.23) простой инверсией приводится к виду  $v_x = Mv$ .

Подведем итог рассуждениям этого пункта. Во-первых, все случаи, когда классифицирующее уравнение имеет особые точки, оказались сводимы к классифицирующим уравнениям с линейными коэффициентами. Во-вторых, поскольку все возможные случаи классифицирующих уравнений с линейными коэффициентами при этом оказались исчерпанными, уравнения с квадратичными коэффициентами, не имеющие особых точек, не могут быть сведены к уравнениям с линейными коэффициентами: иначе они окажутся эквивалентными уравнениям, имеющим особую точку в квадратичной части.

Отметим, что приведенный здесь способ позволяет явно описать цепочку преобразований, приводящих для уравнения с квадратичными коэффициентами случай  $\lambda \neq 0$  к случаю  $\lambda = 0$ : сначала осуществляется цепочка преобразований, приводящих уравнение с  $\lambda \neq 0$  к линейному (сдвиг+инверсия), затем полученное уравнение приводится к каноническому виду (сдвиг+поворот), а затем осуществляется обратное преобразование, но приводящее уже к случаю  $\lambda = 0$  (сдвиг + инверсия + сдвиг). В результате получается дробно-квадратичное преобразование с явно вычисляемыми коэффициентами, однако автору не удалось представить эти коэффициенты в достаточно компактном, обозримом виде.

### 3.5.7 Завершение доказательства теоремы 3.5.1: классы эквивалентности уравнений с двумерной группой симметрий

Используя результаты пунктов 3.5.4-3.5.6, мы, наконец, можем полностью описать расслоение уравнений с двумерной группой симметрий на классы эквивалентности, получив последнее утверждение теоремы 3.5.1. По существу формулы, которые приведены в формулировке этой теоремы – это формулы решений соответствующих канонических уравнений, и необходимо только определить, как на конкретное решение действуют симметрии (3.5.31)-(3.5.35) и (3.5.37)-(3.5.42) соответствующих уравнений.

Для случая уравнения с квадратичной правой частью мы используем только те формулы из приложения II.4, которые отвечают случаю  $\lambda^2 - \theta^2 \varkappa < 0$  – это формулы, указанные в пунктах (II.4.1) и (II.4.2), в которых полагается  $\lambda = 0$ , что и дает формулу (V.1) для первого семейства представителей классов эквивалентности, приведенную в теореме 3.5.1. Нетрудно проверить, что симметрии (3.5.31) действуют на функцию  $V(\alpha, \beta)$  как

сдвиги второго аргумента, что вместе с умножением функции на множитель (порождаемым линейными преобразованиями  $\psi$ ) дает полное описание сечения множества решений классифицирующего уравнения классом эквивалентности.

Формула для второго семейства представителей классов эквивалентности на самом деле ничем не отличается от первой при  $\rho = 1/2$ , второй аргумент функции  $V$  приобретает при этом вид

$$\operatorname{arctg} \frac{2xz + y(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{2xy - z(x^2 + y^2 + z^2 - 1)},$$

однако расширение, сравнительно с первым случаем, группы симметрий уравнения делает более удобной формулу (V.2), так как в этой форме действие группы симметрий на функцию  $V$  реализуется как группа вращений ее аргументов.

Остальные формулы – это формулы решений канонических классифицирующих уравнений с линейными коэффициентами, перечисленные в приложении II.5. При этом случаи пунктов II.5.2 и II.5.4 разбиваются на два:  $\lambda \neq 0$ , сводящиеся к каноническим  $\lambda = 1$ , и  $\lambda = 0$ . Степень однозначности определения функции  $V$  классом эквивалентности определяется, как и выше, действием соответствующей группы симметрий (формулы (3.5.37)–(3.5.42)) классифицирующего уравнения на функцию  $V(\alpha, \beta)$ .

Этим мы завершаем доказательство теоремы 3.5.1.

### § 3.6 Решения уравнений эйконала с 15-мерной группой симметрий. Иллюзия движущегося источника. Редукция уравнений с 4-мерной группой симметрий к двумерным.

#### 3.6.1 Формулы фронтов и лучей для уравнений с 15-мерной группой симметрий

Будем говорить, что поверхность  $t = \psi(x, y, z)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  описывает фронт волны точечного источника, если  $\psi(x, y, z)$  является решением уравнения (3.1.3) и  $\psi^{-1}(0)$  состоит из единственной точки  $(x_0, y_0, z_0)$  (которую мы и называем источником).

Фронт волны от точечного источника для постоянной функции скорости  $v(x, y, z) \equiv v = \text{const}$  известен – это сфера радиуса  $vt$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = v^2 t^2.$$

Оказывается, сферическим является фронт не только для постоянной, но и для всех других функций скорости, задающих уравнение с 15-мерной группой симметрий.

**Теорема 3.6.1** Пусть  $v(x, y, z) = Px + Qy + Rz$  (где  $P^2 + Q^2 + R^2 = w^2 > 0$ ). Тогда фронт волны точечного источника, находящегося в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , является сферическим и определяется соотношением

$$(x - x_0 - P\rho(t))^2 + (y - y_0 - Q\rho(t))^2 + (z - z_0 - R\rho(t))^2 = r^2(t), \quad (3.6.1)$$

в котором

$$\rho(t) = \frac{Px_0 + Qy_0 + Rz_0}{w^2} (\text{ch } wt - 1), \quad r(t) = \frac{Px_0 + Qy_0 + Rz_0}{w} \text{sh } wt. \quad (3.6.2)$$

В случае  $(P, Q, R) = (w, 0, 0)$  (скорость меняется вдоль оси  $x$ ) формула (3.6.1) приобретает вид  $(x - x_0 \text{ch } wt)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x_0 \text{sh } wt)^2$ .

При  $t \rightarrow \infty$  сфера, расширяясь, приближается к "плоскости горизонта"  $Px + Qy + Rz = 0$ .

**Теорема 3.6.2** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)$ . Тогда фронт волны от точечного источника, расположенного в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , является сферическим и определяется соотношением

$$(x - x_0 \rho(t))^2 + (y - y_0 \rho(t))^2 + (z - z_0 \rho(t))^2 = r^2(t), \quad (3.6.3)$$

где функции  $\rho(t)$  и  $r(t)$  задаются формулами (всюду  $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ ):

$$\rho(t) = \frac{\nu^2(1 + \operatorname{tg}^2 wvt)}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{tg}^2 wvt}, \quad r(t) = \frac{\nu(r_0^2 + \nu^2) \operatorname{tg} wvt}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{tg}^2 wvt} \quad (3.6.4)$$

для  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)$ ,

$$\rho(t) = \frac{\nu^2(1 - \operatorname{th}^2 wvt)}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{th}^2 wvt}, \quad r(t) = \frac{\nu(r_0^2 - \nu^2) \operatorname{th} wvt}{\nu^2 - r_0^2 \operatorname{th}^2 wvt} \quad (3.6.5)$$

для  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)$ ,

$$\rho(t) = \frac{1}{1 - r_0^2 w^2 t^2}, \quad r(t) = \frac{r_0^2 w t}{1 - r_0^2 w^2 t^2} \quad (3.6.6)$$

для  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$ .

При обращении в (3.6.4)-(3.6.6) знаменателя в нуль сфера вырождается в плоскость  $xx_0 + yy_0 + zz_0 = (r_0^2 \mp \nu^2)/2$ .

В первом случае при  $\operatorname{tg} wvt = \infty$  сфера стягивается в инверсную к  $(x_0, y_0, z_0)$  точку  $-\nu^2(x_0, y_0, z_0)/r_0^2$ , а при  $\operatorname{tg} wvt = 0$  - в исходную точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Во втором при  $t \rightarrow \infty$  и при  $r_0 > \nu$  она стремится к "сфере горизонта"  $x^2 + y^2 + z^2 = \nu^2$  снаружи; при  $r_0 < \nu$  сфера в плоскость никогда не вырождается, а, расширяясь, стремится при  $t \rightarrow \infty$  к той же "сфере горизонта"  $x^2 + y^2 + z^2 = \nu^2$ , но изнутри. В третьем при  $t \rightarrow \infty$  сфера стягивается к началу координат.

Отметим, что формулы (3.6.1) и (3.6.3) (если в них вместо  $t$  подставить  $\psi$ ) являются полными интегралами Лагранжа (с тремя параметрами  $x_0, y_0, z_0$ ) уравнения (3.1.3), и поэтому любое решение может быть найдено как огибающая соответствующего семейства сфер при условии задания некоторой связи  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  (поверхности начального условия).

**Доказательство теорем 3.6.1-3.6.2** осуществляется подстановкой вместо  $t$  функции  $\psi(x, y, z)$  и проверкой того, что так определенная функция удовлетворяет уравнению (3.1.3) с соответствующей  $v(x, y, z)$ . Наличие анзаца делает результат легко вычисляемым, однако получить этот анзац было существенно сложнее, и, сказать откровенно, он для автора оказался неожиданным открытием.

**Теорема 3.6.3** Пусть  $v(x, y, z) = Px + Qy + Rz$  ( $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$ ). Тогда лучи (семейство кривых, ортогональных фронтам) являются полуокружностями, лежащими в плоскостях, ортогональных плоскости горизонта  $Px + Qy + Rz = 0$  и опирающимися на плоскость горизонта.



Тем самым в среде с линейной функцией скорости лучи порождают в точности геометрию Лобачевского (соответствующей модели Пуанкаре в полуплоскости).

**Доказательство** сводится к повороту системы координат так, чтобы оказалось  $v(x, y, z) = wx$ , и проверке того, что семейство лучей, описываемых формулами

$$x = x_0 \frac{\operatorname{ch} C}{\operatorname{ch}(wt + C)}, \quad y = y_0 + x_0 \frac{\cos \theta \operatorname{sh} wt}{\operatorname{ch}(wt + C)}, \quad z = z_0 + x_0 \frac{\sin \theta \operatorname{sh} wt}{\operatorname{ch}(wt + C)},$$

удовлетворяет системе (3.1.1) с  $v(x, y, z) = wx$ . Возможен и другой вариант – проверить, что подстановка этих формул в (3.6.1) дает тождество и что касательный вектор к полученному семейству кривых пропорционален нормали к сфере (3.6.1). Углы  $\phi = \arccos \operatorname{cth} C$  и  $\theta$  – полярные углы касательной к лучу в момент  $t = 0$ .

**Теорема 3.6.4** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)$  (где  $\nu > 0$ ). Тогда лучи являются дугами окружностей, лежащих в плоскостях, проходящих через начало координат, и эти дуги опираются на сферу горизонта  $x^2 + y^2 + z^2 = \nu^2$ .

Отметим, что сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = \nu^2$  разделяет пространство на две несвязанные части, в каждой из которых волновой процесс происходит независимо от другой (внутри сферы предполагается, что  $w < 0$ , а вне сферы – что  $w > 0$ ). Таким образом, для указанной функции скорости лучи порождают геометрию Лобачевского либо внутри сферы (что соответствует модели Пуанкаре в круге), либо вне сферы – в инвертированном относительно этой сферы варианте.

**Теорема 3.6.5** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)$  (где  $\nu > 0$ ). Тогда лучи являются окружностями, проходящими через исходную точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и инверсную ей  $-\nu^2(x_0, y_0, z_0)/(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$ .

Таким образом, для этой функции скорости лучи порождают аналог сферической геометрии в пространстве.

**Теорема 3.6.6** Пусть  $v(x, y, z) = w \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$ . Тогда лучи являются окружностями, проходящими через исходную точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и начало координат.

В этом случае геометрия лучей оказывается уже обычной евклидовой; преобразование в привычную нам геометрию осуществляется при помощи

инверсии  $r \rightarrow -r/\|r\|^2$ , устанавливающей эквивалентность уравнений эйконала для функций  $v(x, y, z)$  вида (I.1) (см. теорему 3.5.1).

**Доказательство теорем 3.6.4-3.6.6** состоит в ортогональном преобразовании системы координат так, чтобы оказалось  $x_0 = r_0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ , и в проверке того, что семейство окружностей, задаваемых формулами

$$x = \hat{x} + R \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = (-C + R \frac{2u}{1 + u^2}) \cos \theta, \quad z = (-C + R \frac{2u}{1 + u^2}) \sin \theta,$$

где  $\hat{x} = 1/2(x_0 \mp \nu^2/x_0)$ ,  $R^2 = C^2 + (\hat{x} - x_0)^2$ ,  $u = (C + r(t))/(R - \hat{x} + x_0\rho(t))$  при подстановке в (3.6.3) дает тождество и что это семейство ортогонально семейству сфер (3.6.3): касательный вектор

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2R \frac{\dot{u}}{1 + u^2} \left( \frac{2u}{1 + u^2}, \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \cos \theta, \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \sin \theta \right)$$

пропорционален вектору нормали к поверхности фронта

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \frac{1}{v(x, y, z)r} (x - x_0\rho(t), y, z) = \frac{1}{v(x, y, z)r} \times \\ &\times \left( \hat{x} - x_0\rho(t) + R \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, [-C + R \frac{2u}{1 + u^2}] \cos \theta, [-C + R \frac{2u}{1 + u^2}] \sin \theta \right). \end{aligned}$$

Существенно упрощает доказательство тождество  $(\hat{x} - x_0\rho(t))^2 = (\hat{x} - x_0)^2 + r^2(t)$ , которое проверяется непосредственно по формулам (3.6.4)-(3.6.6).

### 3.6.2 Иллюзия движущегося источника

Формулы (3.6.1) и (3.6.3) показывают, что в случае уравнения с 15-мерной группой симметрий фронт является сферическим, как и в случае однородной среды, однако эта сфера является движущейся. Попытка вычислить скорость движения ее центра показывает, что эта скорость выражается через радиус линейным образом.

Действительно, из (3.6.1) следует, что центр сферы, находящийся в точке  $(x^*, y^*, z^*) = (x_0, y_0, z_0) + (P, Q, R)\rho(t)$  на расстоянии  $r = r(t)$  от точки  $(x, y, z)$  фронта волны, движется со скоростью, равной

$$\dot{\rho} \cdot (P, Q, R) = r \cdot \nabla v(x^*, y^*, z^*), \quad (3.6.7)$$

т.е. произведению радиуса сферы и градиента функции  $v(x, y, z)$ .

Аналогично из формулы (3.6.3) следует, что центр сферы, находящийся в точке  $(x^*, y^*, z^*) = (x_0, y_0, z_0)\rho(t)$  на расстоянии  $r = r(t)$  от точки  $(x, y, z)$  фронта волны, двигается относительно нее со скоростью, равной

$$2wr(x^*, y^*, z^*) = r \cdot \nabla v(x^*, y^*, z^*), \quad (3.6.8)$$

т.е. равной произведению радиуса сферы и градиента  $v(x, y, z)$  (правда, вычисленному почему-то уже в центре сферы).

Совершенно очевидная аналогия этой закономерности с известным законом Хаббла заставляет нас, во-первых, понять, что означает полученная зависимость с точки зрения этого закона, а во-вторых, выяснить, насколько общей является полученная зависимость.

Что касается первого, то интерпретация полученного результата более, чем естественна. Допустим, что среда неоднородна и что источник находится в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , а наблюдатель – в точке  $(x, y, z)$ . Условно будем считать, что наблюдатель "видит" движение фронта волны вблизи точки наблюдения, но что он не знает, какова среда вдали от этой точки.

Предположим, что в окрестности точки наблюдения скорость  $v(x, y, z)$  меняется настолько мало, что наблюдатель не может измерить это изменение непосредственно. В этом случае, следуя принципу недостаточного основания, он оказывается обязанным считать, что скорость во всем пространстве постоянна. Но тогда, по естественным причинам, он, вычисляя положение источника, помещает его не в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , а в центр сферы. Таким образом, предположение об однородности среды при интерпретации результатов наблюдения превращает центр сферы в *псевдоисточник*. А движение этого центра будет, естественно, интерпретировано как движение псевдоисточника. Тем самым создается *иллюзия движущегося источника*.

Что же касается второго – общности обнаруженного эффекта – то факт проявления с завидным постоянством столь неожиданной связи скорости движения центра сферы и ее радиуса в наиболее рафинированных в математическом смысле ситуациях позволяет предположить, что аналогичное явление имеет место для любой неоднородной среды. Конечно, в общем случае нельзя предполагать сферичность фронта волны даже от точечного источника, но на самом деле она и не требуется. Речь фактически идет о законе деформации фронта в окрестности некоторой точки  $(x, y, z)$ , которую мы будем называть *точкой наблюдения*. Роль центра сферы здесь играет центр нормальной кривизны, и естественно ожидать, что движение этого центра определяется только поведением функции  $v(x, y, z)$  в окрестности точки наблюдения и расположением фронта.

Глядя на полученные выше формулы, можно предположить, что зависимость скорости движения центра кривизны от радиуса носит линейный характер, однако на самом деле (как мы увидим ниже, в формулах для общего случая) она является линейно-квадратичной: линейная функция с коэффициентом  $\nabla v(x, y, z)$  имеет еще квадратичную "поправку", определяемую уже второй производной от  $v$  в этой же точке. То, что в формуле (3.6.8) в качестве коэффициента пропорциональности фигурирует значение

градиента в центре сферы – просто случайное совпадение, обусловленное спецификой квадратичной функции  $v(x, y, z)$ .

Основную роль в получении формулы играет тот факт, что движущийся фронт – семейство поверхностей  $\Gamma_t$  можно получить как сдвиг начальной поверхности  $\Gamma_0$  вдоль траекторий системы (3.1.1).

**Определение.** Будем говорить, что поверхность  $\Gamma$  вполне регулярна в некоторой точке, если она является дважды непрерывно дифференцируемой, и удовлетворяет, помимо обычного условия регулярности (возможность задания регулярных локальных координат), условию конечности в этой точке всех нормальных кривизн.

Если предположить, что фронт  $\Gamma_0$  в окрестности некоторой точки  $(x, y, z)$ , является вполне регулярной поверхностью, то, задавая ее параметрически в виде  $r = r(p, q)$ , задавая направление нормалей  $n(p, q)$  к поверхности  $\Gamma_0$  и решая систему (3.1.1) относительно пары функций  $r(t, p, q)$ ,  $\tau(t, p, q)$  с начальными условиями  $r(0, p, q) = r(p, q)$ ,  $\tau(0, p, q) = n(p, q)$ , мы получим описание фронта  $\Gamma_t$  в виде поверхности  $r^t(p, q) (= r(t, p, q)$  при фиксированном  $t$ ). Если считать, что  $r(0, 0) = (x, y, z)$  и если функция  $v(\cdot)$  дважды непрерывно дифференцируема, то поверхность  $r^t(p, q)$  будет вполне регулярной по крайней мере в окрестности точки  $r(t, 0, 0)$  при всех  $t$ , достаточно близких к нулю. Это позволяет ввести для каждого такого  $t$  понятие нормальной кривизны в точке  $r(t, p, q)$ , центра кривизны и исследовать его движение с течением времени.

**Двумерный случай.** Сформулируем сначала, для простоты, результат для двумерного случая – когда волновой процесс происходит в плоскости и фронтом является кривая.

**Теорема 3.6.7** Пусть  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция на плоскости,  $\nabla v$  – ее градиент,  $D^2v$  – матрица ее вторых производных.

Пусть  $(x, y)$  – некоторая точка плоскости,  $\Gamma$  – проходящая через эту точку вполне регулярная в окрестности этой точки кривая (фронт),  $\tau$  и  $\nu$  – нормальный и касательный к кривой  $\Gamma$  в точке  $(x, y)$  единичные векторы,  $\gamma$  – кривизна  $\Gamma$  в этой точке.

Тогда для точки  $(x, y)$  скорость движения  $\dot{r}^*$  центра кривизны  $r^*$  при сдвиге  $\Gamma$  вдоль лучей (9) определяется формулой

$$\dot{r}^* = \frac{1}{\gamma} \nabla v(x, y) - \frac{1}{\gamma^2} (D^2v(x, y) \cdot \nu, \nu) \tau. \quad (3.6.9)$$

Как видно, скорость движения  $\dot{r}^*$  центра кривизны выражается через радиус кривизны  $R = 1/\gamma$  линейно-квадратичным образом, причем коэффициенты в этом выражении не зависят ни от этого радиуса, ни от формы

фронта, а только от локального (в окрестности точки  $(x, y)$ ) поведения функции  $v$ , определяющего значения градиента и матрицы вторых производных, и от ориентации фронта, задаваемой репером  $(\tau, \nu)$ .

Отметим, что  $\dot{r}^*$  можно представить в виде суммы двух составляющих: *продольной* (вдоль направления луча, т.е. вдоль вектора  $\tau$ ) и *поперечной* (перпендикулярно этому направлению). Поперечная составляющая

$$\dot{r}_{\text{Поп}}^* = (\dot{r}^*, \nu) = (\nabla v(x, y), \nu) / \gamma$$

порождена не деформацией фронта, а только его вращением вследствие искривления лучей, характерного для неоднородной среды. Действительно, сравнение второго уравнения (3.1.1) (в котором в силу двумерности можно заменить  $-\nabla v + (\nabla v, \tau)\tau$  на  $-(\nabla v, \nu)\nu$ ) с формулами Френе для лучей  $\dot{\tau} = kv\nu$ ,  $\dot{\nu} = -kv\tau$  ( $k$  – кривизна луча,  $kv$  – угловая скорость вращения репера Френе) немедленно дает  $kv = -(\nabla v, \nu)$ , так что  $\dot{r}_{\text{Поп}}^*$  в точности равна произведению угловой скорости вращения касательной к лучу на расстояние до лежащего на этой касательной центра кривизны.

Продольная же составляющая

$$\dot{r}_{\text{Пр}}^* = (\dot{r}^*, \tau) = \frac{(\nabla v(x, y), \tau)}{\gamma} - \frac{(D^2v(x, y) \cdot \nu, \nu)}{\gamma^2}, \quad (3.6.10)$$

определяет движение центра кривизны вдоль касательной к лучу уже вследствие деформации самого фронта.

**Доказательство теоремы 3.6.7.** Пусть кривая  $\Gamma$ , проходящая через точку  $(x, y)$  – положение фронта волны в момент времени  $t = 0$ . Кривую  $\Gamma$  мы будем предполагать заданной параметрически – как функцию  $r(s)$ , где  $s$  – натуральный параметр,  $r(0) = (x, y)$ . Обозначим через  $\gamma$  кривизну фронта в точке  $(x, y)$ , через  $r^*$  – центр кривизны, через  $\tau(s)$  и  $\nu(s)$  – соответственно единичный нормальный и единичный касательный векторы к  $\Gamma$  в точке  $r(s)$  (они же являются, соответственно, единичным касательным и единичным нормальным векторами к лучам, проходящим через  $r(s)$ ).

Пусть  $(r(t, s), \tau(t, s))$  есть решение системы (3.1.1) с начальными условиями  $r(0, s) = r(s)$ ,  $\tau(0, s) = \tau(s)$ . Тогда семейство кривых  $r^t(s) = r(t, s)$  будет описывать распространение фронта с течением времени. Если зафиксировать  $t$ , то вектор кривизны  $\bar{\gamma}(t, s)$  кривой  $r^t(s)$  в точке  $r(t, s)$  будет вычисляться по обычной формуле дифференциальной геометрии

$$\bar{\gamma}(t, s) = \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{r_s(t, s)}{\|r_s(t, s)\|} \right) \quad (3.6.11)$$

(нижним индексом обозначается частное дифференцирование), а соответствующий центр кривизны будет находится в точке

$$r^*(t, s) = r(t, s) + \frac{1}{\gamma^2(t, s)} \bar{\gamma}(t, s) \quad (3.6.12)$$

(где  $\gamma(t, s) = \|\bar{\gamma}(t, s)\|$ ).

Поскольку нас интересует  $\dot{r}^* = \partial r^*(t, s)/\partial t|_{t=s=0}$ , продифференцируем (3.6.12):

$$\dot{r}^* = \frac{dr(t, 0)}{dt} \Big|_{t=0} - 2 \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=s=0} \frac{1}{\gamma^3} \bar{\gamma}(0, 0) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \bar{\gamma}(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=s=0}. \quad (3.6.13)$$

Производная от  $\bar{\gamma}(t, s)$  вычисляется из (3.6.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\gamma}(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \right) \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \|r_s(0, s)\| + \\ &+ \frac{1}{\|r_s(0, s)\|} \frac{d}{ds} \left[ \frac{r_{ts}(t, s)|_{t=0}}{\|r_s(0, s)\|} \right] + \frac{1}{\|r_s(0, s)\|} \frac{d}{ds} \left[ r_s(0, s) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \Big|_{t=0} \right] = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \right) \Big|_{t=0} \frac{d\nu(s)}{ds} + \frac{d^2[v(r(0, s))\tau(s)]}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left[ \nu(s) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \Big|_{t=0} \right] \end{aligned}$$

(мы воспользовались возможностью переставить порядок дифференцирования и заменили  $r_t(t, s)|_{t=0}$  на  $v(r(s))\tau(s)$  в силу первого уравнения системы (3.1.1),  $r_s(0, s)$  на  $\nu(s)$  и соответственно  $\|r_s(0, s)\|$  на единицу – в силу сделанного в самом начале предположения о том, что  $s$  является натуральным параметром для фронта при  $t = 0$ ).

В силу  $\|r_s(0, s)\| \equiv 1$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \right) \Big|_{t=0} &= -\frac{1}{\|r_s(0, s)\|^3} (r_{ts}(t, s), r_s(t, s)) \Big|_{t=0} = \\ &= -\left( \frac{d}{ds} [v(r(s))\tau(s)], \nu(s) \right), \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

и с учетом того, что  $d\tau(s)/ds = \gamma(0, s)\nu(s)$ ,  $d\nu(s)/ds = -\gamma(0, s)\tau$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\gamma}(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -\left( \frac{d[v(r(s))\tau(s)]}{ds}, \nu(s) \right) \frac{d\nu(s)}{ds} + \frac{d^2[v(r(s))\tau(s)]}{ds^2} - \\ &- \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{d[v(r(s))\tau(s)]}{ds}, \nu(s) \right) \nu(s) \right] = v(r(s))\gamma^2(0, s)\tau(s) + \\ &+ \frac{d}{ds} \left[ \frac{dv(r(s))}{ds} \tau(s) + v(r(s))\gamma(0, s)\nu(s) \right] - \frac{d[v(r(s))\gamma(0, s)\nu(s)]}{ds} = \\ &= \gamma^2(0, s)v(r(s))\tau(s) + \frac{d^2v(r(s))}{ds^2} \tau(s) + \frac{dv(r(s))}{ds} \gamma(0, s)\nu(s). \end{aligned}$$

Далее, из

$$\frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\gamma(0, s)} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \bar{\gamma}(0, s) \right),$$

с учетом  $\bar{\gamma}(0, s) = d\nu(s)/ds = -\gamma(0, s)\tau(s)$  находим

$$\left. \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} \right|_{t=0} = - \left[ \gamma^2(0, s)v(r(s)) + \frac{d^2v(r(s))}{ds^2} \right],$$

и подстановка полученных производных (а также  $dr(t, 0)/dt|_{t=0} = v(x, y)\tau$ ) в (3.6.13) дает

$$\begin{aligned} \dot{r}^* &= v(x, y)\tau - 2v(x, y)\tau - 2 \left. \frac{d^2v}{ds^2} \right|_{s=0} \frac{1}{\gamma^2}\tau + v(x, y)\tau + \left. \frac{d^2v}{ds^2} \right|_{s=0} \frac{1}{\gamma^2}\tau + \\ &+ \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{\gamma}\nu = - \left. \frac{d^2v(r(s))}{ds^2} \right|_{s=0} \frac{1}{\gamma^2}\tau + \left. \frac{dv(r(s))}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{\gamma}\nu. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\left. \frac{dv(r(s))}{ds} \right|_{s=0} = (\nabla v(r(s)), \nu(s))_{s=0} = (\nabla v(x, y), \nu),$$

$$\left. \frac{d^2v(r(s))}{ds^2} \right|_{s=0} = \left[ \frac{d}{ds} (\nabla v(r(s)), \nu(s)) \right]_{s=0} = (D^2v(x, y) \cdot \nu, \nu) - \gamma(\nabla v(x, y), \tau),$$

чтобы получить

$$\begin{aligned} \dot{r}^* &= -\frac{1}{\gamma^2}(D^2v(x, y) \cdot \nu, \nu)\tau + \frac{1}{\gamma}[(\nabla v(x, y), \nu)\nu + (\nabla v(x, y), \tau)\tau] = \\ &= -\frac{(D^2v(x, y) \cdot \nu, \nu)}{\gamma^2}\tau + \frac{\nabla v(x, y)}{\gamma}, \end{aligned}$$

что в точности совпадает с формулой (3.6.9). Теорема доказана.

**Трехмерный случай.** Здесь дополнительная специфика возникает, во-первых, в связи с тем, что центр кривизны поверхности в точке  $(x, y, z)$  не единственен: каждый касательный к поверхности вектор  $h$  определяет свое нормальное сечение и свое значение кривизны  $\gamma_h$  этого сечения. Мы будем говорить при интерпретации результатов, что вектор  $h$  задает *базу* наблюдения. Во-вторых, в трехмерном случае, кроме привычной нам кривизны, начинает играть роль еще одна характеристика геометрии поверхности – *геодезическое кручение*, характеризующее скорость вращения вектора нормали к поверхности при движении вдоль кривой на этой поверхности (оно является не столь употребительным, как нормальная кривизна поверхности, но играет в ее геометрии существенную роль – см., напр., [165, гл. 5, п. 7]).

**Теорема 3.6.8** Пусть  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция,  $\nabla v$  – ее градиент,  $D^2v$  – матрица ее вторых производных.

Пусть  $(x, y, z)$  – некоторая точка в пространстве,  $\Gamma$  – проходящая через эту точку вполне регулярная в окрестности этой точки поверхность (фронт),  $\tau$  и  $h$  – нормальный и некоторый касательный к  $\Gamma$  в точке  $(x, y, z)$  единичные векторы,  $\gamma_h$  и  $\epsilon_h$  – нормальная кривизна и геодезическое кручение фронта в этой точке, отвечающие направлению  $h$ .

Тогда для точки  $(x, y, z)$  скорость движения  $\dot{r}_h^*$  соответствующего центра нормальной кривизны  $r_h^*$  при сдвиге  $\Gamma$  вдоль лучей (3.1.1) определяется формулой

$$\dot{r}_h^* = \frac{1}{\gamma_h} \nabla v(x, y, z) + \frac{\epsilon_h^2 v(x, y, z) - (D^2 v(x, y, z) \cdot h, h)}{\gamma_h^2} \tau. \quad (3.6.15)$$

И здесь скорость движения  $\dot{r}_h^*$  центра кривизны выражается через радиус кривизны  $R_h = 1/\gamma_h$  линейно-квадратичным образом. Коэффициенты в этом выражении опять же не зависят от радиуса кривизны и определяются локальным поведением функции  $v$  вблизи  $(x, y, z)$ . Однако, в отличие от двумерного случая, появляется зависимость коэффициента при квадратичном члене не только от направления распространения фронта (вектора  $\tau$ ), но и от ориентации "базы наблюдения" (вектора  $h$ , определяющего значение квадратичной формы  $(D^2 v(x, y, z) \cdot h, h)$ ). Кроме того, этот коэффициент содержит дополнительное слагаемое, зависящее уже от формы фронта, а точнее – от разности его главных кривизн (геодезическое кручение  $\epsilon_h$  поверхности вдоль вектора  $h$  равно разности главных нормальных кривизн поверхности  $\gamma_{max} - \gamma_{min}$ , умноженной на синусы углов, образованных вектором  $h$  с направлениями главных кривизн). Если разность главных кривизн равна нулю (точка  $(x, y, z)$  является *точкой округления* фронта) или если измерения производятся вдоль направлений главных кривизн – коэффициент  $\epsilon_h$  оказывается равным нулю, и мы получаем в точности ту же формулу, что и в двумерном случае.

Поперечная (относительно направления луча) составляющая скорости движения центра кривизны

$$\dot{r}_{h, \text{поп}}^* = \dot{r}_h^* - \tau(\dot{r}_h^*, \tau) = [\nabla v(x, y, z) - (\nabla v(x, y, z), \tau)\tau]/\gamma_h,$$

как и в двумерном случае, порождена не деформацией фронта, а только изгибанием лучей: множитель в квадратных скобках равен угловой скорости вращения касательной к лучу (это видно из сравнения второго уравнения (9) с формулами Френе). Продольная же составляющая описывается формулой

$$\dot{r}_{h, \text{пр}}^* = (\dot{r}_h^*, \tau) = \frac{(\nabla v(x, y, z), \tau)}{\gamma_h} + \frac{\epsilon_h^2 v(x, y, z) - (D^2 v(x, y, z) \cdot h, h)}{\gamma_h^2}. \quad (3.6.16)$$



Отметим, что для сферического фронта  $\epsilon_h = 0$  для всех  $h$ , и поэтому в случае линейной функции  $v(x, y, z)$ , в силу  $D^2v \equiv 0$ , формула (3.6.15) превращается в  $\dot{r}^* = \nabla v(x, y, z)R$ , т.е. в точности в формулу (3.6.7). Для квадратичной же функции  $v(x, y, z) = w(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)$  форма второго дифференциала является квадратом вектора с коэффициентом  $2w$ , так что формула (3.6.15) дает  $\dot{r}^* = \nabla v(r)R - 2wR^2\tau = R(\nabla v(r) - 2wR\tau)$ . Поскольку специфика квадратичной функции  $v(\cdot)$  приводит к тому, что  $\nabla v(r) = 2wr$ , выражение в скобках оказывается равным  $2w(r - R\tau) = 2wr^* = \nabla v(r^*)$ , и мы получаем в точности формулу (3.6.8).

**Доказательство теоремы 3.6.8.** Пусть поверхность  $\Gamma$ , проходящая через точку  $(x, y, z)$  – положение фронта волны в момент времени  $t = 0$ , и  $h$  – касательный к  $\Gamma$  в точке  $(x, y, z)$  единичный вектор. Пусть  $r(s)$  – некоторая кривая на поверхности  $\Gamma$ , заданная параметрически через натуральный параметр  $s$ , проходящая при  $s = 0$  через точку  $(x, y, z)$ , для которой  $h$  является касательным вектором в этой точке. Обозначим через  $\tau(s)$  нормаль к поверхности  $\Gamma$  в точке  $r(s)$ , через  $h(s)$  – единичный касательный вектор к кривой в точке  $r(s)$ , через  $h^\perp(s)$  – ортогональный  $h(s)$  единичный вектор, касательный к  $\Gamma$  в той же точке.

Нормальная кривизна кривой  $r(s)$  при  $s = 0$  есть в точности  $\gamma_h$ :

$$\gamma_h = - \left( \frac{d^2 r(s)}{ds^2}, \tau(s) \right)_{s=0} = - \left( \frac{dh(s)}{ds}, \tau(s) \right)_{s=0} \quad (3.6.17)$$

(знак минус поставлен для того, чтобы "положительной" считать кривизну, соответствующую выпуклости в сторону распространения лучей, т.е. в направлении вектора  $\tau$ ). В силу ортогональности  $\tau(s)$  и  $h(s)$  нормальная кривизна может быть вычислена и как

$$\gamma_h = \left( h(s), \frac{d\tau(s)}{ds} \right)_{s=0}, \quad (3.6.18)$$

в этой форме она описывает, насколько "склоняется" к вектору  $h$  вектор нормали при сдвиге его вдоль  $h$ .

Поскольку  $\tau(s)$  – нормированный вектор,  $d\tau(s)/ds$  ортогонально  $\tau$  и является комбинацией векторов  $h(s)$  и ортогонального к нему касательного вектора  $h^\perp(s)$ . Коэффициент при  $h(s)$  описывается как раз формулой (3.6.18) – это и есть нормальная кривизна. Коэффициент же при  $h^\perp(s)$

$$\epsilon_h = \left( h^\perp(s), \frac{d\tau(s)}{ds} \right)_{s=0}$$

называется *геодезическим кручением*, он характеризует вращение вектора нормали  $\tau$ , при сдвиге его вдоль кривой, вокруг касательного вектора  $h$ .

Ниже мы воспользуемся формулой  $(d\tau/ds)^2 = (d\tau/ds, h)^2 + (d\tau/ds, h^\perp)^2$ , выражающей длину вектора  $d\tau/ds$  через его проекции на вектора  $h$  и  $h^\perp$ , из которой следует, что

$$(d\tau/ds)_{s=0}^2 = \gamma_h^2 + \epsilon_h^2. \quad (3.6.19)$$

Если, как и в двумерном случае, кривую  $r(s)$  на поверхности  $\Gamma$  деформировать с течением времени по закону  $r(t, s)$ , где  $(r(t, s), \tau(t, s))$  – определяемое соответствующими начальными условиями решение системы (3.1.1), то для каждого  $t$  кривая  $r^t(s) = r(t, s)$  будет лежать на поверхности фронта  $\Gamma_t$  с нормалью  $\tau(t, s)$ . Поэтому мы можем, не определяя всей поверхности фронта, найти вектор кривизны  $\bar{\gamma}_h(t, s)$  (по направлению касательной к кривой  $r^t(s)$ ) по формуле (3.6.11), нормальную кривизну  $\gamma_h(t, s) = -(\bar{\gamma}_h(t, s), \tau(t, s))$  и центр нормальной кривизны

$$r_h^*(t, s) = r(t, s) - \frac{1}{\gamma_h(t, s)}\tau(t, s). \quad (3.6.20)$$

Поскольку нас интересует  $\dot{r}_h^* = (\partial r_h^*(t, s)/\partial t)_{t=s=0}$ , дифференцированием формулы (3.6.20) получаем

$$\dot{r}_h^* = \frac{dr(t, 0)}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{\partial \gamma_h(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=s=0} \frac{1}{\gamma_h^2} \tau - \frac{1}{\gamma_h} \frac{\partial \tau(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=s=0}. \quad (3.6.21)$$

Из формулы (3.6.11) (в которой  $\bar{\gamma}(t, s)$  нужно заменить на  $\bar{\gamma}_h(t, s)$ ) следует, как и в двумерном случае, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\gamma}_h(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \right)_{t=0} \frac{dh(s)}{ds} + \frac{d^2[v(r(s))\tau(s)]}{ds^2} + \\ &+ \frac{d}{ds} \left( h(s) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\|r_s(t, s)\|} \right]_{t=0} \right), \end{aligned}$$

и, подставляя сюда  $[\partial/\partial t(1/\|r_s(t, s)\|)]_{t=0}$  из (3.6.14), приходим к

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\gamma}_h(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= - \left( \frac{d}{ds}[v(r(s))\tau(s)], h(s) \right) \frac{dh(s)}{ds} + \frac{d^2[v(r(s))\tau(s)]}{ds^2} - \\ - \frac{d}{ds} \left[ h(s) \left( \frac{d}{ds}[v(r(s))\tau(s)], h(s) \right) \right] &= -2 \left( \frac{d}{ds}[v(r(s))\tau(s)], h(s) \right) \frac{dh(s)}{ds} + \\ + \frac{d^2[v(r(s))\tau(s)]}{ds^2} - \left[ h(s) \frac{d}{ds} \left( \frac{d}{ds}[v(r(s))\tau(s)], h(s) \right) \right], \\ \frac{\partial \gamma_h(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= - \left( \frac{\partial \bar{\gamma}_h(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \tau(s) \right) - \left( \bar{\gamma}_h(0, s), \frac{\partial \tau(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2 \left( \frac{d}{ds} [v(r(s))\tau(s)], h(s) \right) \left( \frac{dh(s)}{ds}, \tau(s) \right) - \left( \frac{d^2[v(r(s))\tau(s)]}{ds^2}, \tau(s) \right) - \left( \frac{dh(s)}{ds}, -\nabla v(r(s)) + (\nabla v(r(s)), \tau(s))\tau(s) \right).$$

В силу (3.6.17) и ортогональности  $v\tau$  и  $h$  первый множитель в первом слагаемом равен

$$\left( \frac{d}{ds} [v(r(s))\tau(s)], h(s) \right)_{s=0} = - \left( v(r(s))\tau(s), \frac{dh(s)}{ds} \right)_{s=0} = v(x, y, z)\gamma_h,$$

второй, опять же в силу (3.6.17) равен  $-\gamma_h$ , а второе слагаемое равно

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2[v(r(s))\tau(s)]}{ds^2}, \tau(s) \right) = \\ &= \frac{d^2v(r(s))}{ds^2} + 2\frac{dv(r(s))}{ds} \left( \frac{d\tau(s)}{ds}, \tau(s) \right) + v(r(s)) \left( \frac{d^2\tau(s)}{ds^2}, \tau(s) \right) = \\ &= \frac{d(\nabla v(r(s)), h(s))}{ds} + v(r(s)) \frac{d}{ds} \left( \frac{d\tau(s)}{ds}, \tau(s) \right) - v(r(s)) \left( \frac{d\tau(s)}{ds} \right)^2 = \\ &= \left( \nabla v(r(s)), \frac{dh(s)}{ds} \right) + (D^2v(r(s)) \cdot h(s), h(s)) - v(r(s)) \left( \frac{d\tau(s)}{ds} \right)^2. \end{aligned}$$

Теперь, полагая  $s = 0$  и пользуясь (3.6.19), мы можем полностью вычислить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_h(t, s)}{\partial t} \Big|_{t=s=0} &= -2v(x, y, z)\gamma_h^2 - \left( \nabla v(x, y, z), \frac{dh(s)}{ds} \Big|_{s=0} \right) - (D^2v(x, y, z) \cdot h, h) + \\ &+ v(x, y, z)(\gamma_h^2 + \epsilon_h^2) + \left( \frac{dh(s)}{ds} \Big|_{s=0}, \nabla v(x, y, z) \right) + (\nabla v(x, y, z), \tau)\gamma_h = \\ &= v(x, y, z)(\epsilon_h^2 - \gamma_h^2) - (D^2v(x, y, z) \cdot h, h) + (\nabla v(x, y, z), \tau)\gamma_h, \end{aligned}$$

и, подставив это в (3.6.21) вместе с  $dr(t, 0)/dt|_{t=0} = v(x, y, z)\tau$  и

$$\frac{\partial \tau(t, s)}{\partial t} \Big|_{t,s=0} = -\nabla v(x, y, z) + (\nabla v(x, y, z), \tau)\tau,$$

прийти к формуле

$$\begin{aligned} \dot{r}_h^* &= v(x, y, z)\tau + \frac{-(D^2v(x, y, z) \cdot h, h) + v(x, y, z)(\epsilon_h^2 - \gamma_h^2)}{\gamma_h^2}\tau + \\ &+ \frac{(\nabla v(x, y, z), \tau)}{\gamma_h}\tau - \frac{-\nabla v(x, y, z) + (\nabla v(x, y, z), \tau)\tau}{\gamma_h} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\nabla v(x, y, z)}{\gamma_h} + \frac{v(x, y, z)\epsilon_h^2 - (D^2v(x, y, z) \cdot h, h)}{\gamma_h^2} \tau,$$

которая в точности совпадает с (3.6.15). Теорема 3.6.8 полностью доказана.

**Комментарии.** Общий характер закона движения центра кривизны требует ответа на вопрос, можем ли мы в процессе физических наблюдений обнаружить иллюзию движущегося источника, и отделить реальное движение от иллюзорного.

Конечно сделанные в начале этого пункта допущения, что мы можем наблюдать реальное распространение фронта вблизи некоторой точки физически нереализуемо, хотя если бы мы имели реальную возможность, "поймав" фронт волны в один момент времени, "забежать" затем вперед него и "поймать" его же еще раз чуть дальше (и чуть позже) – мы, конечно, обнаружили бы *парадокс псевдоисточника*: один и тот же "источник" оказался бы в разных точках пространства, а обнаружение парадокса псевдоисточника позволило бы опровергнуть гипотезу о постоянстве  $v(x, y, z)$  и констатировать неоднородность среды.

Другой способ обнаружить парадокс псевдоисточника возможен, если источник является периодическим по времени (например, посылает периодические импульсы или излучает гармоническую волну). Естественное предположение о том, что через период "следующий" фронт занимает место "предыдущего", позволяет пересчитать эффект движения центра кривизны, интерпретируя ту же геометрическую картинку (две последовательных поверхности) уже как регистрацию в один и тот же момент времени двух разных фронтов, порожденных возмущениями в разные моменты времени. Полученный эффект будет уже физически наблюдаемым, поскольку для периодического источника расположение поверхностей равной фазы описывается тем же самым уравнением эйконала, а взаимное расположение поверхностей равной фазы определяет *длину волны*, которая, собственно говоря, и является наблюдаемой величиной.

Скорость движения "источника" в такой интерпретации оказывается в точности совпадающей по абсолютной величине со скоростью движения центра кривизны и противоположной ей по направлению (поскольку более удаленную от источника поверхность в случае одного и того же фронта, регистрируемого в разные моменты времени, мы относим к более позднему времени, а в случае одновременной регистрации двух различных фронтов – к более раннему).

При такой схеме наблюдения парадокс псевдоисточника будет себя проявлять в том, что при повторении наблюдений источник будет постоянно находится в одном и том же месте, и при этом он (если смотреть на смещения в спектре) будет постоянно двигаться с одной и той же скоростью.

Для того, чтобы обнаружить этот парадокс, нам необходимо либо обладать средствами идеально точного вычисления расстояния до псевдоисточника (радиуса кривизны фронта), либо, по крайней мере, чтобы смещение псевдоисточника за время наблюдения (т.е. произведение вычисленной скорости на время наблюдения) превосходило погрешность определения расстояния до него.

Если же расстояние определяется с погрешностью, существенно большей, чем величина смещения псевдоисточника, то обнаружить парадокс не удастся – он "прячется в погрешности", и наблюдатель, оставаясь в рамках гипотезы об однородности среды, может только констатировать, что источник, находясь на определенном нами "неточном" расстоянии, движется с некоторой скоростью.

Формулы (3.6.9)-(3.6.10) и (3.6.15) дают нам для этого другой инструмент – зависимость коэффициента в квадратичной части от ориентации "базы наблюдения". Экспериментальное обнаружение такого рода зависимости не просто оказывается основанием для опровержения гипотезы о постоянстве скорости распространения возмущения, но, что более важно – позволяет определить, хотя бы частично, локальные характеристики неоднородности среды.

### 3.6.3 Редукция трехмерных уравнений эйконала к двумерным

Непосредственное решение уравнений (3.1.3), имеющих группу симметрий не максимальной размерности, уже затруднительно. Однако оказывается, что уравнения с 4-6-мерной группой симметрий редуцируются к двумерному уравнению вида

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{1}{V^2(\alpha)}, \quad (3.6.22)$$

что существенно упрощает дальнейший анализ, а для уравнений с 6-мерной группой симметрий и позволяет получить явные формулы решения.

**Лемма 3.6.1** Пусть  $v(x, y, z) = V(x)$ . Тогда решение уравнения эйконала (3.1.3), определяющее фронт волны точечного источника  $(x_0, y_0, z_0)$ , будет симметричным относительно вращений вокруг оси  $y = y_0, z = z_0$  и будет являться решением уравнения (3.6.22) (где  $\alpha = x, \beta = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ), удовлетворяющим условию  $\psi^{-1}(0) = (x_0, 0)$  (т.е.  $\alpha_0 = x_0, \beta_0 = 0$ ).

Лучи являются плоскими кривыми и лежат в плоскостях, ортогональных к  $x = 0$ .

**Доказательство.** Замена переменных  $x = \alpha$ ,  $y = y_0 + \beta \cos \phi$ ,  $z = z_0 + \beta \sin \phi$  приводит уравнение (3.1.3) с  $v(x, y, z) = V(x)$  к виду

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)^2 = \frac{1}{V^2(\alpha)}, \quad (3.6.23)$$

так что решения уравнения (3.6.22) будут, очевидно, совпадать с решениями уравнения (3.6.23), инвариантными относительно сдвигов  $\phi$  (т.е. вращений вокруг прямой  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ ). Решение же, определяющее фронт волны точечного источника, такой инвариантностью обладает: поворот этого решения дает решение, тоже определяющее фронт волны точечного источника, а этот фронт определяется однозначно. Последнее является следствием "двойственности" фронтов и лучей, в силу которой фронт  $t = \psi(x, y, z)$  является образом точки  $(x_0, y_0, z_0)$  при сдвиге на время  $t$  вдоль проходящих через нее лучей; лучи же определяются системой регулярных дифференциальных уравнений (3.1.1) (где  $r = (x, y, z)$ ,  $\tau$  – единичный вектор касательной к лучу, обладающей свойством единственности решения).

То, что лучи являются плоскими кривыми, также следует из (3.1.1): в случае  $v(r) = V(x)$  получаем  $\nabla v = (V'(x), 0, 0)$ , и для любого фиксированного вектора  $n = (0, n_2, n_3)$  система (3.1.1) дает

$$\frac{d}{dt}(r, n) = V(x)(\tau, n), \quad \frac{d}{dt}(\tau, n) = V'(x)\tau_1(\tau, n).$$

Если взять  $n = (0, \tau_3(0), -\tau_2(0))$ , то из  $(\tau(0), n) = 0$  следует, в силу второго уравнения, что  $(\tau(t), n) \equiv 0$ , а тогда, уже в силу первого уравнения,  $(r(t) - r(0), n) \equiv 0$ , т.е.  $r(t)$  лежит в плоскости, проведенной через  $r(0)$  ортогонально вектору  $n$ . Лемма доказана.

Совершенно аналогично, только переходом к сферическим координатам  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $z = r \sin \phi \sin \theta$  получается

**Лемма 3.6.2** Пусть  $v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}V(\frac{1}{2} \ln[x^2 + y^2 + z^2])$ . Тогда решение уравнения эйконала (3.1.3), определяющее фронт волны точечного источника  $(x_0, 0, 0)$ , будет симметричным относительно вращений вокруг оси абсцисс и будет являться решением уравнения (3.6.22) (где  $\alpha = \frac{1}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\beta = \arctg(\sqrt{y^2 + z^2}/x)$ ), удовлетворяющим условию  $\psi^{-1}(0) = (\ln |x_0|, 0)$ .

Лучи являются плоскими кривыми и лежат в плоскостях, проведенных через ось абсцисс.

Чуть сложнее обстоит дело в случае  $v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}V(\arctg \frac{y}{x})$ . Здесь переход к цилиндрической системе координат  $x = s \cos \phi$ ,  $y = s \sin \phi$ ,

$z = z$  дает уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{s^2V^2(\phi)}, \quad (3.6.24)$$

редукция которого к двумерному не так очевидна, как в предыдущих двух случаях. Тем не менее имеет место следующая

**Лемма 3.6.3** Пусть  $v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}V(\arctg \frac{y}{x})$ . Тогда решение уравнения эйконала (3.1.3), определяющее фронт волны точечного источника  $(x_0, y_0, z_0)$ , будет являться решением уравнения (3.6.22) (где

$$\alpha = \arctg(y/x), \quad \beta = \operatorname{arcch} \frac{s^2 + s_0^2 + (z - z_0)^2}{2ss_0}, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2},$$

удовлетворяющим условию  $\psi^{-1}(0) = (\arctg(y_0/x_0), 0)$ .

Лучи являются кривыми, лежащими на сферах

$$x^2 + y^2 + (z - z_0 - c)^2 = x_0^2 + y_0^2 + c^2.$$

**Доказательство** сводится к проверке того, что подстановка  $\beta$  в (3.6.22) сводит его к (3.6.24) и к ссылке на свойство единственности для фронта волны точечного источника. То, что лучи лежат на сферах, следует, из того, что касательный вектор к лучу (коллинеарный  $\nabla\psi$  в силу ортогональности лучей и фронтов) является касательным к сфере. Действительно, для любой функции  $\psi(x, y, z)$  вида  $\psi(\alpha, \beta)$  ее градиент является комбинацией  $\nabla\alpha$  и  $\nabla\beta$ , а оба эти вектора, как нетрудно проверить, касательны к сфере. Лемма доказана.

## Глава 4

# Двумерное уравнение эйконала для неоднородной среды

### § 4.1 Групповой анализ двумерного уравнения эйконала

В этом и следующем параграфах исследуется двумерное уравнение эйконала (3.1.4). Помимо того, что это исследование представляет самостоятельный интерес, оно оказывается важным и для трехмерных уравнений, так как целый ряд таких уравнений сводится к двумерным (правда, со специальным видом функции скорости). Ряд свойств двумерного уравнения эйконала (например, бесконечная размерность у группы эквивалентности) отчасти роднит его с уравнением эйконала для анизотропной среды, так что исследование этого уравнения является предпосылкой и для некоторых дальнейших обобщений.

Настоящий параграф посвящен групповому анализу уравнения (3.1.4). Он осуществляется по той же схеме, что и для трехмерного уравнения (см. § 3.2): определение группы симметрий, группы эквивалентности и конуса касательных эквивалентностей.

Группа симметрий точечных преобразований пространства переменных  $(x, y, \psi)$  определяется алгеброй Ли

$$\Xi = \xi(x, y, \psi)\partial_x + \eta(x, y, \psi)\partial_y + \phi(x, y, \psi)\partial_\psi, \quad (4.1.1)$$

в которой коэффициенты  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\phi$  находятся из уравнения Ли  $\Xi^{(1)}F|_{F=0} = 0$ , где  $F$  – разность между левой и правой частями (3.1.4), а  $\Xi^{(1)} = \Xi + \phi^x \partial_{\psi_x} + \phi^y \partial_{\psi_y}$  – продолжение алгебры (4.1.1) в пространство переменных  $(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y)$ ; коэффициенты  $\phi^x$ ,  $\phi^y$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \phi^x &= \phi_x + \phi_\psi \psi_x - \psi_x(\xi_x + \xi_\psi \psi_x) - \psi_y(\eta_x + \eta_\psi \psi_x), \\ \phi^y &= \phi_y + \phi_\psi \psi_y - \psi_x(\xi_y + \xi_\psi \psi_y) - \psi_y(\eta_y + \eta_\psi \psi_y). \end{aligned}$$



Отметим, что групповой анализ для двумерного уравнения существенно отличается от случая уравнения трехмерного. Причиной является бесконечномерность группы конформных преобразований, которая имеет место в двумерном и только в двумерном пространстве. Поэтому решение системы определяющих уравнений (представляющее основную трудность) в двумерном случае приходится осуществлять без использования явного вида алгебры конформных преобразований в  $R^n$ , очень удачно "срабатывающего" случаях более высокой размерности.

В результате группового анализа выделяется два важных семейства уравнений: уравнения с правой частью  $v(x, y) = V(x)$ , зависящей только от одной переменной, которые мы будем называть уравнениями с *плоским слоением* (имеется в виду слоение среды), и уравнения с  $v(x, y) = e^{\lambda y} V(x)$ , которые мы будем называть уравнениями с *квазиплоским слоением*, предполагая при этом, естественно, что  $\lambda \neq 0$ . Функцию  $V(x)$  и в том, и в другом случае мы будем называть *функцией слоения*.

Существенную классифицирующую роль для двумерного уравнения играет кривизна (3.1.10) пространства лучей – риманова пространства с метрикой (3.1.8)

Общая группа эквивалентности определяется алгеброй

$$\bar{\Xi} = \xi(x, y, \psi, v)\partial_x + \eta(x, y, \psi, v)\partial_y + \phi(x, y, \psi, v)\partial_\psi + \omega(x, y, \psi, v)\partial_v, \quad (4.1.2)$$

для которой уравнение Ли

$$\bar{\Xi}^{(1)} F \Big|_{F=0} = 0, \quad (4.1.3)$$

должно удовлетворяться тождественно для всех  $x, y, \psi, v$ , удовлетворяющих (3.1.4). Конус касательных эквивалентностей, отвечающий некоторой фиксированной  $v(x, y)$  определяется из уравнения (4.1.3) при фиксации  $v = v(x, y)$ .

Отметим, что в двумерном случае группа эквивалентности оказывается бесконечномерной, так что мы не можем непосредственно применять теорему 3.2.1, однако, как будет показано, любое уравнение с нетривиальной группой симметрий сводится к уравнению с правой частью специального вида, а для таких уравнений теорема 3.2.1 уже применима.

#### 4.1.1 Формулировки результатов

**Теорема 4.1.1** *Общая группа эквивалентности уравнения (3.1.4) совпадает с прямой суммой группы конформных преобразований двумерного евклидова пространства, и группы линейных преобразований переменной*

$\psi$ . Алгебра Ли этой группы является бесконечномерной и определяется соотношениями

$$\xi_y + \eta_x = 0, \quad \xi_x = \eta_y, \quad \phi = M\psi + L \quad \omega = v(\xi_x - M). \quad (4.1.4)$$

Последняя формула в (4.1.4) означает, что при переходе к новым переменным происходит не только замена переменных под знаком функции, но и умножение этой функции на некоторый множитель. Нетрудно проверить, что при замене пространственных переменных  $(x, y)$  на  $(\alpha, \beta)$  левая часть уравнения эйконала остается квадратом градиента тогда и только тогда, когда  $\alpha_x = \beta_y$  и  $\alpha_y + \beta_x = 0$ , т.е. когда замена переменных – гармоническая; при этом уравнение (3.1.4) переходит в уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{1}{[\alpha_x^2 + \alpha_y^2]v^2(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))}, \quad (4.1.5)$$

т.е. функция  $v$  умножается на квадратный корень из якобиана замены переменных. Линейное же преобразование величины  $\psi$ , порождаемое алгеброй  $(M\psi + L)\partial\psi$ , при переходе к эквивалентному уравнению, очевидно, сопровождается делением на постоянный множитель функции  $v$ .

**Теорема 4.1.2 I.** Уравнение (3.1.4) имеет 10-мерную группу симметрий тогда и только тогда, когда пространство лучей имеет постоянную кривизну. Любое такое уравнение некоторой заменой переменных  $\hat{x} = \alpha(x, y)$ ,  $\hat{y} = \beta(x, y)$  сводится к некоторому уравнению с плоским слоением.

II. Среди уравнений с плоским слоением постоянную кривизну имеют только уравнения с  $V \equiv \text{const}$ ,  $V = we^{kx}$  (для которых кривизна  $K = 0$ ),  $V = wx$  (для которого  $K = -w^2$ ),  $V = w \cos(kx + h)$ ,  $V = w \operatorname{sh}(kx + h)$  (для которых  $K = -k^2w^2$ ) и  $V = w \operatorname{ch}(kx + h)$  (для которого  $K = k^2w^2$ ). Алгебры Ли групп симметрий этих уравнений для  $k = w = 1$ ,  $h = 0$  приведены в приложении II.6.

III. Уравнение (3.1.4) с пространством лучей непостоянной кривизны имеет нетривиальную группу симметрий (более широкую, чем группа сдвигов переменной  $\psi$ , порожденная алгеброй  $L\partial_\psi$ ) тогда и только тогда, когда оно некоторой заменой переменных  $\hat{x} = \alpha(x, y)$ ,  $\hat{y} = \beta(x, y)$  сводится к уравнению с плоским или квазиплоским слоением.

IV. Среди уравнений с квазиплоским слоением трехмерную группу симметрий имеют только уравнения с  $v(x, y) = w(x+h)^{1+\lambda}$ , алгебра Ли этой группы имеет вид

$$\Xi = A((x+h)\partial_x + y\partial_y - \lambda\psi\partial_\psi) + B\partial_y + L\partial_\psi, \quad (4.1.6)$$

и уравнения с  $v(x, y) = we^{\varkappa y} \sin^{1+\varkappa/\lambda}(\lambda x + h)$ , алгебра Ли этой группы имеет вид

$$\Xi = Ae^{\lambda y}(\cos(\lambda x + h)\partial_x + \sin(\lambda x + h)\partial_y) + B(\partial_y - \varkappa\psi\partial_\psi) + L\partial_\psi. \quad (4.1.7)$$

Для остальных же уравнений группа симметрий двумерна и ее алгебра Ли имеет вид ( $\varkappa = 0$  для плоского и  $\varkappa \neq 0$  для квазиплоского слоения)

$$\Xi = B(\partial_y - \varkappa\psi\partial_\psi) + L\partial_\psi. \quad (4.1.8)$$

**Теорема 4.1.3** *Пространство касательных эквивалентностей для любого уравнения вида (1) является суммой алгебры симметрий этого уравнения и общей алгебры эквивалентности.*

Из этой теоремы следует, что при сужении рассмотрений на любое подсемейство уравнений группа эквивалентности не может расшириться существенно: группа эквивалентности подсемейства получается расширением той подгруппы общей группы эквивалентности, которая действует внутри подсемейства, только за счет общих симметрий всех уравнений, входящих в семейство. Поскольку сравнение утверждений теорем 1 и 2 показывает, что эти симметрии, как правило, полностью поглощаются общей группой эквивалентности, задача расслоения на классы эквивалентности тривиализуется, а выбор представителя редуцируется к определению подгруппы общей группы эквивалентности, действующей в соответствующем подсемействе.

**Теорема 4.1.4** *Классы эквивалентности, на которые разбивается семейство уравнений (3.1.4), являются орбитами общей группы эквивалентности. При этом:*

*I. Уравнения с постоянной кривизной пространства лучей, имеющие 10-мерную группу симметрий, образуют три класса эквивалентности. Класс определяется знаком кривизны, представителями классов являются уравнения с  $v(x, y) = 1$  для  $K = 0$ , с  $v(x, y) = x$  для  $K < 0$  и с  $v(x, y) = \operatorname{ch} x$  для  $K > 0$ .*

*II. Уравнения с трехмерной группой симметрий сводятся к уравнениям с плоским слоением со степенной функцией слоения и образуют однопараметрическое семейство классов эквивалентности. Каждому классу соответствует свой показатель  $\lambda$ , представителем класса является уравнение  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = \alpha^{-2(1+\lambda)}$ .*

*III. Уравнения, имеющие двумерную абелеву группу симметрий (не попадающие в разделы I и II), сводятся к уравнениям с плоским слоением и*

образуют функционально-параметрическое (определяемое функцией слоения  $V(\alpha)$ ) семейство классов эквивалентности. Представителями класса являются уравнения вида  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/V^2(\alpha)$ , причем класс эквивалентности определяет функцию  $V(\alpha)$  однозначно с точностью до линейных преобразований ее аргумента и умножения этой функции на константу.

IV. Уравнения, имеющие двумерную неабелеву группу симметрий (не попадающие в разделы I и II), сводятся к уравнениям с квазиплоским слоением и образуют функционально-параметрическое (определяемое функцией слоения  $V(\alpha)$ ) семейство классов эквивалентности. Представителями класса являются уравнения вида

$$\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = e^{-2\beta}/V^2(\alpha),$$

причем класс эквивалентности определяет функцию  $V(\alpha)$  однозначно с точностью до сдвигов ее аргумента и умножения этой функции на константу.

**Замечание.** Как и в трехмерном случае, для уравнений общего вида (3.1.4), не упомянутых в разделах I-IV теоремы 4.1.4 и имеющих только одномерную группу симметрий, разумные соображения, позволяющие выбрать для уравнений этого класса какую-то "каноническую" систему координат (позволяющую представить уравнение в более простом виде) и, соответственно, какого-то определенного представителя, здесь отсутствуют, поэтому для таких уравнений представителя мы не указываем.

#### 4.1.2 Доказательство теоремы 4.1.1

Для продолжения  $\bar{\Xi}^{(1)} = \bar{\Xi} + \phi^x \partial_{\psi_x} + \phi^y \partial_{\psi_y}$  алгебры (4.1.2) в пространство переменных  $(x, y, v, \psi, \psi_x, \psi_y)$  с коэффициентами  $\phi^x, \phi^y$ , вычисляемыми по формулам

$$\begin{aligned} \phi^x &= \phi_x + \phi_\psi \psi_x + \phi_v v_x - \psi_x (\xi_x + \xi_\psi \psi_x + \xi_v v_x) - \psi_y (\eta_x + \eta_\psi \psi_x + \eta_v v_x), \\ \phi^y &= \phi_y + \phi_\psi \psi_y + \phi_v v_y - \psi_x (\xi_y + \xi_\psi \psi_y + \xi_v v_y) - \psi_y (\eta_y + \eta_\psi \psi_y + \eta_v v_y), \end{aligned}$$

уравнение (4.1.3) приводится к виду квадратичного относительно  $\psi_x, \psi_y$  уравнения

$$\begin{aligned} (\phi_x + \phi_v v_x - \frac{1}{v^2} \xi_\psi) \psi_x + (\phi_y + \phi_v v_y - \frac{1}{v^2} \eta_\psi) \psi_y - (\xi_x + \xi_v v_x) \psi_x^2 - \\ - (\eta_x + \eta_v v_x + \xi_y + \xi_v v_y) \psi_x \psi_y - (\eta_y + \eta_v v_y) \psi_y^2 + \frac{1}{v^2} \phi_\psi + \frac{\omega}{v^3} = 0. \end{aligned}$$

Так как это уравнение должно выполняться для всех  $\psi_x, \psi_y$ , удовлетворяющих (3.1.4), его коэффициенты должны быть пропорциональны коэффициентам в (3.1.4). Это дает *определяющие уравнения*

$$\begin{aligned} \eta_x + \eta_v v_x + \xi_y + \xi_v v_y &= 0, & \xi_x + \xi_v v_x &= \eta_y + \eta_v v_y = \phi_\psi + \omega/v, \\ \phi_x + \phi_v v_x &= \xi_\psi/v^2, & \phi_y + \phi_v v_y &= \eta_\psi/v^2. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Поскольку в этих уравнениях допускается как произвол в выборе значений  $v_x$  и  $v_y$  так и произвол в выборе  $v$ , из них немедленно следует, что  $\xi_v = \eta_v = \phi_v = \phi_x = \phi_y = \xi_\psi = \eta_\psi = 0$ . Таким образом, произошло разделение переменных:  $\phi = \phi(\psi)$ ,  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ . Учет требования инвариантности при заменах уравнения  $v_\psi = 0$  дает дополнительное условие  $\omega_\psi = 0$ , из которого следует  $\phi_{\psi\psi} = 0$ , и наши уравнения редуцируются к (4.1.4). Теорема доказана.

### 4.1.3 Доказательство теоремы 4.1.2. Разделение переменных в определяющих уравнениях и условие постоянства кривизны

Для алгебры (4.1.1) условие инвариантности уравнения (3.1.4) приводит к определяющим уравнениям для компонент  $\xi, \eta, \phi$

$$\eta_x + \xi_y = 0, \quad \xi_x = \eta_y = \phi_\psi + (\xi v_x + \eta v_y)/v, \quad \phi_x = \xi_\psi/v^2, \quad \phi_y = \eta_\psi/v^2. \quad (4.1.10)$$

Выделение из (4.1.10) системы уравнений относительно  $\phi$

$$\phi_\psi = \xi_x - (\xi v_x + \eta v_y)/v, \quad \phi_x = \xi_\psi/v^2, \quad \phi_y = \eta_\psi/v^2 \quad (4.1.11)$$

и определение условий совместности полученной системы дает условия

$$[\xi_\psi/v^2]_\psi = [\xi_x - (\xi v_x + \eta v_y)/v]_x, \quad [\eta_\psi/v^2]_\psi = [\xi_x - (\xi v_x + \eta v_y)/v]_y, \quad (4.1.12)$$

$$[\xi_\psi/v^2]_y = [\eta_\psi/v^2]_x.$$

Интегрированием последнего уравнения по  $\psi$  получаем  $(\xi/v^2)_y - (\eta/v^2)_x = 2h(x, y)/v^2$ , где  $h$  – некоторая функция, не зависящая от  $\psi$ . Раскрывая производные и пользуясь  $\xi_y + \eta_x = 0$ , получаем выражения для производных  $\xi_y$  и  $\eta_x$ , подстановка которых в уравнения (4.1.12) дает соотношения

$$\begin{aligned} \xi_{\psi\psi} &= -\xi[v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2)] - v^2 h_y(x, y), \\ \eta_{\psi\psi} &= -\eta[v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2)] + v^2 h_x(x, y), \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

которые означают, что  $\xi$  и  $\eta$  как функции от  $\psi$  являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений с не зависящими от  $\psi$  коэффициентами. Величина, стоящая в квадратных скобках, является гауссовой

кривизной  $K(x, y)$  (см. формулу (3.1.10)) двумерного риманова пространства с метрикой (3.1.8). Подстановка формулы решения (4.1.13)

$$\begin{aligned}\xi(x, y, \psi) &= \xi^1(x, y) \cos(\sqrt{K(x, y)}\psi) + \xi^2(x, y) \sin(\sqrt{K(x, y)}\psi) + \xi^h(x, y), \\ \eta(x, y, \psi) &= \eta^1(x, y) \cos(\sqrt{K(x, y)}\psi) + \eta^2(x, y) \sin(\sqrt{K(x, y)}\psi) + \eta^h(x, y),\end{aligned}\quad (4.1.14)$$

(где  $\xi^i, \eta^i$  – некоторые функции,  $\xi^h = h_y/(Kv^2)$ ,  $\eta^h = -h_x/(Kv^2)$ ) в (4.1.11) показывает, что  $\phi(x, y, \psi)$  имеет вид комбинации

$$\begin{aligned}\phi(x, y, \psi) &= \phi^1(x, y) \sin(\sqrt{K(x, y)}\psi) - \phi^2(x, y) \cos(\sqrt{K(x, y)}\psi) + \\ &+ \phi^*(x, y)\psi + \phi^{**}(x, y),\end{aligned}\quad (4.1.15)$$

причем в силу линейной независимости функций  $1, \psi, \cos \sqrt{K}\psi, \sin \sqrt{K}\psi, \psi \cos \sqrt{K}\psi$  и  $\psi \sin \sqrt{K}\psi$  выполнено  $\phi_x^* = \phi_x^{**} = \phi_y^* = \phi_y^{**} = 0$ ,

$$\phi^1[\sqrt{K}]_x = \phi^1[\sqrt{K}]_y = \phi^2[\sqrt{K}]_x = \phi^2[\sqrt{K}]_y = 0, \quad \xi^i = -\frac{\phi_x^i v^2}{\sqrt{K}}, \quad \eta^i = -\frac{\phi_y^i v^2}{\sqrt{K}}.$$

Из этих равенств следует, что для непостоянной  $K(x, y)$  обязательно  $\phi^1 = \phi^2 = \xi^1 = \xi^2 = \eta^1 = \eta^2 \equiv 0$ , и значит преобразования не распадаются на "пространственные"  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , и "временные"  $\phi = M\psi + L$  тогда и только тогда, когда пространство лучей имеет постоянную кривизну.

#### 4.1.4 Случай переменной кривизны

Сначала мы рассмотрим случай, когда  $K(x, y) \neq \text{const}$ . В этом случае  $\xi$  и  $\eta$  зависят только от  $x$  и от  $y$ .

**Лемма 4.1.1** Пусть уравнение (3.1.4) имеет одномерную группу симметрий, порожденную оператором вида  $\Xi_0 = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y + (M\psi + L)\partial_\psi$ , где  $\xi$  и  $\eta$  – некоторые функции ( $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$ ), а  $M$  и  $L$  – некоторые константы. Тогда замена  $\tilde{x} = \alpha(x, y)$ ,  $\tilde{y} = \beta(x, y)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются системой уравнений

$$\alpha_x = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \alpha_y = -\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \beta_x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \beta_y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad (4.1.16)$$

приводит уравнение (3.1.4) к уравнению с плоским (при  $M = 0$ ) или квазиплоским (при  $M \neq 0$ ) слоением.

**Доказательство** сводится к проверке, используя (4.1.10), совместности системы (4.1.16) для определения  $\alpha$  и  $\beta$ . Поскольку определенная (4.1.16)

замена переменных  $(x, y)$  на  $(\alpha, \beta)$  будет, очевидно, гармонической, она принадлежит группе эквивалентности. При этой замене уравнение (3.1.4) преобразуется в уравнение  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/\tilde{v}^2(\alpha, \beta)$ , где  $\tilde{v}$  – некоторая функция, а оператор группы  $\Xi_0$  преобразуется в оператор  $\tilde{\Xi}_0 = \partial_\beta + (M\psi + L)\partial_\psi$ . Так как при замене условие инвариантности уравнения относительно группы сохраняется, для  $\tilde{\xi} = 0$ ,  $\tilde{\eta} = 1$  и  $\tilde{\phi} = M\psi + L$  должны быть выполнены равенства (4.1.10), из которых следует, что  $\tilde{v}(\alpha, \beta) = e^{-M\beta}V(\alpha)$ , где  $V(\cdot)$  – некоторая функция, так что преобразованное уравнение оказывается уравнением с плоским или квазиплоским слоением. Лемма доказана.

**Следствие.** *Если уравнение, для которого  $K(x, y) \neq \text{const}$ , имеет более чем двумерную группу симметрий, то оно сводится к уравнению с плоским слоением.*

Действительно, в этом случае  $\phi = M\psi + L$ , и для группы симметрий размерности больше двух всегда можно выбрать оператор, у которого  $M = L = 0$ , а  $\xi$  и  $\eta$  не обращаются одновременно в нуль.

**Лемма 4.1.2** *Пусть  $v(x, y) = V(x)$ , т.е. уравнение (3.1.4) является уравнением с плоским слоением. Тогда  $K(x, y) = \text{const}$  для  $V = \text{const}$ ,  $V = wx$ ,  $V = we^{\nu x}$ ,  $V = w \cos(\nu x + h)$ ,  $V = w \text{sh}(\nu x + h)$ ,  $V = w \text{ch}(\nu x + h)$  и только для этих функций. Если  $K(x, y) \neq \text{const}$ , то группа симметрий уравнения (3.1.4) имеет размерность 3 в случае  $V = w(x+h)^\lambda$  (с алгеброй симметрий вида (4.1.6)) и размерность 2 во всех остальных случаях (с алгеброй симметрий вида (4.1.8)).*

**Доказательство.** Первое утверждение леммы сводится, по существу, к решению дифференциального уравнения  $VV'' - V'^2 = K$ , являющегося просто определением кривизны (3.1.10) для  $v(x, y) = V(x)$ .

В случае  $K(x, y) \neq \text{const}$ , как уже отмечалось,  $\phi = M\psi + L$ ,  $\xi$  и  $\eta$  зависят только от  $x$  и  $y$ , и система (4.1.10) приводится к виду

$$\xi_y + \eta_x = 0, \quad \xi_x = M + \xi V'(x)/V(x), \quad \eta_y = M + \xi V'(x)/V(x).$$

Решая ее и исключая при решении варианты, приводящие к  $K(x, y) = \text{const}$ , получаем в случае  $M = 0$  решение  $\xi = 0$ ,  $\eta = \text{const}$ ,  $\psi = L$ , т.е. двумерную группу симметрий с алгеброй (4.1.8). Случай же  $M \neq 0$  возможен лишь для  $V(x) = w(x+h)^{1+\lambda}$  ( $\lambda \neq 0, -1$  для непостоянной  $K$ ), и при этом  $\xi = A(x+h)$ ,  $\eta = Ay + B$ ,  $\phi = -A\lambda\psi + L$ , что и дает алгебру (4.1.6). Лемма доказана.

**Лемма 4.1.3** *Пусть  $v(x, y) = e^{\varkappa y}V(x)$ , т.е. уравнение (3.1.4) является уравнением с квазиплоским слоением ( $\varkappa \neq 0$ ). Если при этом  $K(x, y) \neq \text{const}$ , то группа симметрий уравнения (3.1.4) имеет размерность 3 в*

том и только в том случае, когда  $V(x) = w[\cos(\lambda x + h)]^{1-\varkappa/\lambda}$ , а ее алгебра Ли имеет вид (4.1.7). Во всех остальных случаях группа симметрий имеет размерность 2, а ее алгебра Ли имеет вид (4.1.8).

**Доказательство.** То, что уравнение с квазиплоским слоением имеет как минимум двумерную группу симметрий, проверяется непосредственно: компоненты алгебры (4.1.8) удовлетворяют уравнениям (4.1.10). Если алгебра симметрий двумерна, то она просто совпадает с (4.1.8). Если же ее размерность больше или равна трем, то в силу следствия из леммы 4.1.1 наше уравнение эквивалентно уравнению с плоским слоением, и в силу леммы 4.1.2 размерность группы симметрий не может быть больше трех; она может равняться трем только если уравнение эквивалентно уравнению с плоским слоением и степенной функцией слоения.

Рассмотрение единственной потенциальной возможности – когда группа симметрий трехмерна и ее алгебра имеет вид  $\Xi = A(\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y) + B(\partial_y - \varkappa\psi\partial_\psi) + L\partial_\psi$  – приводит к условию на коммутатор первого и второго операторов

$$[\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \partial_y - \varkappa\psi\partial_\psi] = -(\xi_y(x, y)\partial_x + \eta_y(x, y)\partial_y),$$

который должен принадлежать алгебре, и поэтому обязан быть пропорционален первому оператору  $\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$ . Из полученных уравнений  $\xi_y = -\lambda\xi$ ,  $\eta_y = -\lambda\eta$  получаем, в силу уравнений (4.1.10), что  $v(x, y) = we^{\varkappa y}[\cos(\lambda x + h)]^{1+\varkappa/\lambda}$  ( $\lambda \neq 0$ ), а для соответствующей алгебры Ли приходим к выражению (4.1.7). Утверждение леммы доказано.

**Замечание.** В процессе доказательства мы воспользовались тем, что заменой переменных уравнение с квазиплоским слоением и трехмерной группой симметрий можно свести к уравнению с плоским слоением. Уместно было бы явно предъявить эту замену: она имеет вид  $\alpha = e^{\lambda y} \cos(\lambda x + h)$ ,  $\beta = e^{\lambda y} \sin(\lambda x + h)$  и приводит уравнение с  $v(x, y) = we^{\varkappa y}[\cos(\lambda x + h)]^{1+\varkappa/\lambda}$  к уравнению с  $v(\alpha, \beta) = w\alpha^{1+\varkappa/\lambda}$ .

Завершая этот пункт, можно сказать, что в леммах 4.1.1-4.1.3 по существу доказаны третье и четвертое утверждения теоремы 4.1.2, так что нам осталось только разобраться со случаем постоянной кривизны.

#### 4.1.5 Случай постоянной кривизны

В этом пункте мы, пользуясь предположением  $K(x, y) \equiv \text{const}$ , выпишем формулы для  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\phi$ , сведем уравнения для фигурирующих в них компонент к системе уравнений относительно  $\phi$  и решим эту систему (для плоско-слоистого случая). Обоснование того, что любое уравнение с про-



странством лучей постоянной кривизны сводится к уравнению с плоским слоением будет проведено в следующем параграфе.

Итак, пусть  $K(x, y) = K \equiv \text{const}$ . Поскольку для разных знаков  $K$  получаются различные варианты формул, мы рассмотрим три случая  $K = \nu^2 > 0$ ,  $K = -\nu^2 < 0$  и  $K = 0$  по отдельности. В первом случае

$$\begin{aligned}\xi(x, y, \psi) &= \xi^1(x, y) \cos(\nu\psi) + \xi^2(x, y) \sin(\nu\psi) + \xi^*(x, y), \\ \eta(x, y, \psi) &= \eta^1(x, y) \cos(\nu\psi) + \eta^2(x, y) \sin(\nu\psi) + \eta^*(x, y), \\ \phi(x, y, \psi) &= -\phi^2(x, y) \cos(\nu\psi) + \phi^1(x, y) \sin(\nu\psi) + M\psi + L.\end{aligned}\quad (4.1.17)$$

Подставляя эти функции в уравнения (4.1.10) и приравнивая коэффициенты при синусах, косинусах и свободных членах, получаем соотношения

$$\eta_x^i(x, y) + \xi_y^i(x, y) = 0, \quad \xi_x^i(x, y) = \eta_y^i(x, y) = \nu\phi^i + \frac{\xi^i(x, y)v_x + \eta^i(x, y)v_y}{\nu}, \quad (4.1.18)$$

$$\xi^i(x, y) = -\frac{v^2}{\nu}\phi_x^i(x, y), \quad \eta^i(x, y) = -\frac{v^2}{\nu}\phi_y^i(x, y) \quad (4.1.19)$$

для  $\xi^i$ ,  $\eta^i$  и  $\phi^i$  ( $i = 1, 2$ ) и соотношения

$$\eta_x^*(x, y) + \xi_y^*(x, y) = 0, \quad \xi_x^*(x, y) = \eta_y^*(x, y) = M + \frac{\xi^*(x, y)v_x + \eta^*(x, y)v_y}{\nu} \quad (4.1.20)$$

для  $\xi^*$  и  $\eta^*$ . Подставляя соотношения (4.1.19), явно выражающие  $\xi^i$  и  $\eta^i$  через  $\phi^i$ , в (4.1.18), мы получаем систему уравнений относительно  $\phi^i(x, y)$

$$\phi_{xx}^i = \frac{1}{\nu}[\phi_y^i v_y - \phi_x^i v_x] - \frac{K}{\nu^2}\phi^i, \quad \phi_{yy}^i = \frac{1}{\nu}[\phi_x^i v_x - \phi_y^i v_y] - \frac{K}{\nu^2}\phi^i, \quad (4.1.21)$$

$$\phi_{xy}^i = -\frac{1}{\nu}[v_x \phi_y^i + v_y \phi_x^i].$$

Совершенно аналогично в случае  $K = -\nu^2 < 0$  подстановка

$$\begin{aligned}\xi(x, y, \psi) &= \xi^1(x, y) \text{ch}(\nu\psi) + \xi^2(x, y) \text{sh}(\nu\psi) + \xi^*(x, y), \\ \eta(x, y, \psi) &= \eta^1(x, y) \text{ch}(\nu\psi) + \eta^2(x, y) \text{sh}(\nu\psi) + \eta^*(x, y), \\ \phi(x, y, \psi) &= \phi^2(x, y) \text{ch}(\nu\psi) + \phi^1(x, y) \text{sh}(\nu\psi) + M\psi + L\end{aligned}\quad (4.1.22)$$

в уравнения (4.1.10) дает для  $\xi^i$ ,  $\eta^i$  и  $\phi^i$  ( $i = 1, 2$ ) соотношения (4.1.18) и

$$\xi^i(x, y) = \frac{v^2}{\nu}\phi_x^i(x, y), \quad \eta^i(x, y) = \frac{v^2}{\nu}\phi_y^i(x, y), \quad (4.1.23)$$

а для  $\xi^*$  и  $\eta^*$  – соотношения (4.1.20). Подставляя (4.1.23) в (4.1.18), приходим снова к уравнениям (4.1.21) для  $\phi$ .

Наконец, в случае  $K = 0$  подстановка

$$\begin{aligned}\xi(x, y, \psi) &= \frac{1}{2}\xi^2(x, y)\psi^2 + \xi^1(x, y)\psi + \xi^*(x, y), \\ \eta(x, y, \psi) &= \frac{1}{2}\eta^2(x, y)\psi^2 + \eta^1(x, y)\psi + \eta^*(x, y), \\ \phi(x, y, \psi) &= \frac{1}{6}\phi^{**}(x, y)\psi^3 + \frac{1}{2}\phi^*\psi^2 + \phi^2(x, y)\psi + \phi^1(x, y)\end{aligned}\quad (4.1.24)$$

в уравнения (4.1.10) дает соотношения

$$\phi^{**} = L^2 \equiv \text{const}, \quad \phi^* = L^1 \equiv \text{const},$$

$$\eta_x^i(x, y) + \xi_y^i(x, y) = 0, \quad \xi_x^i(x, y) = \eta_y^i(x, y) = L^i + \frac{\xi^i(x, y)v_x + \eta^i(x, y)v_y}{v}, \quad (4.1.25)$$

$$\xi^i(x, y) = v^2\phi_x^i(x, y), \quad \eta^i(x, y) = v^2\phi_y^i(x, y), \quad (4.1.26)$$

$$\eta_x^*(x, y) + \xi_y^*(x, y) = 0, \quad (4.1.27)$$

$$\xi_x^*(x, y) = \eta_y^*(x, y) = \phi^2(x, y) + \frac{\xi^*(x, y)v_x + \eta^*(x, y)v_y}{v}. \quad (4.1.28)$$

Подставляя в (4.1.25) выражения для  $\xi^i$  и  $\eta^i$  из (4.1.26), получаем и здесь систему уравнений для  $\phi^i$

$$\begin{aligned}\phi_{xx}^i &= \frac{L^i}{v^2} + \frac{1}{v}[\phi_y^i v_y - \phi_x^i v_x], & \phi_{yy}^i &= \frac{L^i}{v^2} + \frac{1}{v}[\phi_x^i v_x - \phi_y^i v_y], \\ \phi_{xy}^i &= -\frac{1}{v}[v_x \phi_y^i + v_y \phi_x^i].\end{aligned}\quad (4.1.29)$$

Непосредственно проверяется, что во всех трех случаях система уравнений находится в инволюции, и поэтому задание трех величин  $\phi$ ,  $\phi_x$  и  $\phi_y$  в некоторой точке  $(x, y)$  полностью определяет решение как системы (4.1.21), так и системы (4.1.29).

Предположим теперь, что уравнение (3.1.4) с пространством лучей постоянной кривизны является уравнением с плоским слоением. В силу леммы 4.1.2 функция слоения может быть только одного из шести видов  $V = \text{const}$ ,  $V = wx$ ,  $V = we^{\nu x}$ ,  $V = w \cos(\nu x + h)$ ,  $V = w \text{sh}(\nu x + h)$ ,  $V = w \text{ch}(\nu x + h)$ . Поскольку за счет сдвигов и растяжений переменных  $(x, y, \psi)$  можно в перечисленных функциях избавиться от коэффициентов, мы будем ниже обсуждать только простейшие случаи, которые мы будем называть *элементарными* – функции  $V \equiv 1$ ,  $V = x$ ,  $V = e^x$ ,  $V = \cos x$ ,  $V = \text{sh } x$  и  $V = \text{ch } x$ .

В случае, когда  $V(x) = \text{ch } x$  (соответствующем  $K = 1$ ), система (4.1.21) имеет решение

$$\phi^i(x, y) = \frac{A^i \cos y + B^i \sin y + C^i \text{sh } x}{\text{ch } x},$$

и по формулам (4.1.19)

$$\xi^i(x, y) = A^i \cos y \operatorname{sh} x + B^i \sin y \operatorname{sh} x - C^i,$$

$$\eta^i(x, y) = A^i \sin y \operatorname{ch} x - B^i \cos y \operatorname{ch} x,$$

а из уравнений (4.1.20) мы находим

$$\xi^*(x, y) = A^* \cos y \operatorname{ch} x + B^* \sin y \operatorname{ch} x,$$

$$\eta^*(x, y) = A^* \sin y \operatorname{sh} x - B^* \cos y \operatorname{sh} x + C^*.$$

Таким образом, группа симметрий в случае  $v(x, y) = \operatorname{ch} x$  оказывается 10-мерной, и ее компоненты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$  определяются формулами, приведенными в приложении II.6.6. Аналогично находятся группы симметрий для остальных случаев (при этом для  $V = x$ ,  $V = \cos x$ , и  $V = \operatorname{sh} x$  мы используем формулы (4.1.22), (4.1.18)+(4.1.23)+(4.1.20) и (4.1.21), а для  $V \equiv 1$  и  $V = e^x$  – формулы (4.1.24)-(4.1.29).

Нам осталось убедиться в том, что всякое уравнение с пространством лучей постоянной кривизны сводится к уравнению с плоским слоением, а значит – к одному из элементарных уравнений. Этот результат является одним из утверждений следующей леммы об условиях приводимости к уравнению с плоским слоением, которую мы здесь только сформулируем, а докажем в следующем параграфе.

**Лемма 4.1.4** *Для того, чтобы уравнение (3.1.4) было приводимо к уравнению с плоским слоением, необходимо, чтобы функции  $v^2(K_x^2 + K_y^2)$  и  $v^2(K_{xx} + K_{yy})$  были функционально зависимыми с  $K(x, y)$ , т.е. чтобы выполнялись условия*

$$\begin{vmatrix} [v^2(K_x^2 + K_y^2)]_x & [v^2(K_x^2 + K_y^2)]_y \\ K_x & K_y \end{vmatrix} = 0, \quad (4.1.30)$$

$$\begin{vmatrix} [v^2(K_{xx} + K_{yy})]_x & [v^2(K_{xx} + K_{yy})]_y \\ K_x & K_y \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1.31)$$

Эти условия являются и достаточными для существования в окрестности точки  $(x, y)$  замены, приводящей к уравнению с плоским слоением, если либо  $K(x, y) = \operatorname{const}$  в этой окрестности, либо в этой точке  $K_x^2 + K_y^2 \neq 0$ .

Ссылкой на эту лемму мы завершаем доказательство теоремы 4.1.2.

### 4.1.6 Доказательство теоремы 4.1.3

В доказательстве мы в значительной мере будем пользоваться формулами из доказательств теорем 4.1.1 и 4.1.2. Определяющие уравнения для пространства касательных эквивалентностей совпадают с уравнениями (4.1.9). Однако, в отличие от теоремы 4.1.1, здесь функция  $v(x, y)$  уже не произвольная, а фиксированная. Фиксация функции  $v(x, y)$  позволяет подставить ее в выражения  $\xi(x, y, v, \psi)$ ,  $\eta(x, y, v, \psi)$ ,  $\phi(x, y, v, \psi)$  и  $\omega(x, y, v, \psi)$ , обозначив полученные функции через  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\phi}$  и  $\tilde{\omega}$ , с которыми мы в дальнейшем и будем иметь дело. Собственно, такая подстановка ничего не изменяет: если, к примеру  $v = x^2 + y^2$ , то в формулах безразлично, считать  $(x^2 + y^2)^2$  функцией от  $x, y$  или квадратом от  $v$ .

Для введенных таким образом  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\phi}$  и  $\tilde{\omega}$  система (4.1.9) приобретает вид

$$\tilde{\eta}_x + \tilde{\xi}_y = 0, \quad \tilde{\xi}_x = \tilde{\eta}_y = \tilde{\phi}_\psi + \frac{\tilde{\omega}}{v}, \quad \tilde{\phi}_x = \frac{\tilde{\xi}_\psi}{v^2}, \quad \tilde{\phi}_y = \frac{\tilde{\eta}_\psi}{v^2}, \quad (4.1.32)$$

и уже почти не отличается от системы уравнений для группы симметрий (4.1.10). Для большего сходства мы обозначим  $\hat{\omega} = \tilde{\omega} - \tilde{\xi}v_x - \tilde{\eta}v_y$ , приведя второе уравнение (4.1.32) к виду

$$\tilde{\xi}_x = \tilde{\eta}_y = \tilde{\phi}_\psi + \frac{1}{v}(\tilde{\xi}v_x + \tilde{\eta}v_y) + \frac{\hat{\omega}}{v}.$$

Условие инвариантности относительно преобразований уравнения  $v_\psi = 0$  приводит, после указанных выше переобозначений, к уравнению  $\hat{\omega}_\psi = 0$ . Значит, введенная нами функция  $\hat{\omega}$  не зависит от  $\psi$ .

Далее мы не будем возвращаться к исходным выражениям компонент оператора  $\bar{\Xi}$  через  $x, y, \psi$  и  $v$ , рассматривая только  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}$ , однако тильды над ними мы писать уже не будем.

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 4.1.2. Так же, как и там, из (4.1.32) извлекаются соотношения относительно  $\phi$

$$\phi_x = \xi_\psi/v^2, \quad \phi_y = \eta_\psi/v^2, \quad \phi_\psi = \xi_x - \frac{1}{v}(\xi v_x + \eta v_y) - \frac{\hat{\omega}}{v},$$

для которых условия совместности дают, с одной стороны, выражения  $\xi_y$  и  $\eta_x$  через  $\xi, \eta$  и функции, от  $\psi$  не зависящие, а с другой – равенства

$$[\xi_\psi/v^2]_\psi = [\xi_x - (\xi v_x + \eta v_y)/v - \hat{\omega}/v]_x, \quad [\eta_\psi/v^2]_\psi = [\xi_x - (\xi v_x + \eta v_y)/v - \hat{\omega}/v]_y,$$

откуда подстановкой  $\xi_y$  и  $\eta_x$  мы получаем аналогичные (4.1.13) уравнения

$$\begin{aligned} \xi_{\psi\psi} &= -\xi[v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2)] - v^2 h_y(x, y) - (\hat{\omega}_x v - \hat{\omega} v_x), \\ \eta_{\psi\psi} &= -\eta[v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2)] + v^2 h_x(x, y) - (\hat{\omega}_y v - \hat{\omega} v_y). \end{aligned}$$

Поскольку  $\hat{\omega}$  от  $\psi$  не зависит, эти уравнения имеют не зависящие от  $\psi$  коэффициенты, так что, как и в доказательстве теоремы 2,  $\xi$  и  $\eta$  оказываются функциями вида (4.1.14), а  $\phi$  – функцией вида (4.1.15), причем подстановка этих функций в (4.1.32) дает альтернативу: либо  $K(x, y) \equiv \text{const}$ , либо  $\xi^i = \eta^i = \phi^i = 0$ .

В случае непостоянной кривизны тогда получается  $\xi_\psi = \eta_\psi = 0$ , поэтому  $\phi_x = \phi_y = 0$ , и система (4.1.32) приводится в точности к соотношениям (4.1.4), определяющим общую группу эквивалентности. Поскольку в случае непостоянной кривизны указанные в теореме 4.1.2 группы симметрий просто поглощаются этой группой, в этом случае наша теорема доказана.

В случае постоянной ненулевой кривизны (положительной или отрицательной) мы из (4.1.32) получаем для  $\xi^i, \eta^i, \phi^i$  в точности уравнения (4.1.18) и, в зависимости от знака  $K$ , (4.1.19) или (4.1.23) соответственно, решения которых принадлежат алгебре симметрий, а для  $\xi^*$  и  $\eta^*$  – уравнения  $\eta_x^*(x, y) + \xi_y^*(x, y) = 0$ ,

$$\xi_x^*(x, y) = \eta_y^*(x, y) = M + \frac{\xi^*(x, y)v_x + \eta^*(x, y)v_y}{v} + \frac{\hat{\omega}}{v} = M + \frac{\omega}{v},$$

определяющие алгебру общих преобразований эквивалентности. Таким образом, все решения (4.1.32) принадлежат сумме алгебры симметрий и алгебры эквивалентности.

В случае же тождественно нулевой кривизны ситуация чуть сложнее, так как получаемые уравнения относительно  $\xi^i, \eta^i, \phi^i$  и относительно  $\xi^*, \eta^*$  "перевязаны" между собой: помимо уравнений (4.1.25)-(4.1.26) они содержат также уравнения

$$\eta_x^*(x, y) + \xi_y^*(x, y) = 0,$$

$$\xi_x^*(x, y) = \eta_y^*(x, y) = \phi^2(x, y) + \frac{\xi^*(x, y)v_x + \eta^*(x, y)v_y}{v} + \frac{\hat{\omega}}{v}.$$

Здесь мы представим  $\xi^*, \eta^*$  в виде суммы  $\xi^* = \xi^{**} + \hat{\xi}^*, \eta^* = \eta^{**} + \hat{\eta}^*$ , где  $\xi^{**}$  и  $\eta^{**}$  – решения системы

$$\eta_x^{**}(x, y) + \xi_y^{**}(x, y) = 0,$$

$$\xi_x^{**}(x, y) = \eta_y^{**}(x, y) = \phi^2(x, y) + \frac{\xi^{**}(x, y)v_x + \eta^{**}(x, y)v_y}{v}.$$

Тогда полученные  $\xi^{**}$  и  $\eta^{**}$  вместе с  $\xi^i, \eta^i$  и  $\phi^i$  дадут нам операторы касательной эквивалентности, принадлежащие алгебре симметрий, а  $\hat{\xi}^*$  и  $\hat{\eta}^*$  будут удовлетворять уравнениям

$$\hat{\eta}_x^*(x, y) + \hat{\xi}_y^*(x, y) = 0, \quad \hat{\xi}_x^*(x, y) = \hat{\eta}_y^*(x, y) = \frac{\hat{\xi}^*(x, y)v_x + \hat{\eta}^*(x, y)v_y}{v} + \frac{\hat{\omega}}{v},$$

которые определяют подалгебру общей алгебры эквивалентности. Таким образом, и в этом случае утверждение теоремы 4.1.3 доказано.

#### 4.1.7 Доказательство теоремы 4.1.4

Первое утверждение теоремы следует из леммы 4.1.4: любое уравнение с постоянной кривизной приводится к уравнению с плоским слоением, имеющему в качестве функции  $v(x, y)$  одну из функций  $v \equiv \text{const}$ ,  $v = w(x + h)$ ,  $v = we^{kx}$ ,  $v = w \cos(kx + h)$ ,  $v = w \text{sh}(kx + h)$  и  $v = w \text{ch}(kx + h)$ , где  $w$ ,  $k$ ,  $h$  – некоторые константы. Далее, избавляясь сдвигами и растяжениями пространственных переменных от констант  $k$  и  $h$ , а растяжениями переменной  $\psi$  – и от множителя  $w$ , мы получаем шесть классов эквивалентности, представителями которых выступают уравнения, названные нами "элементарными" – с  $v \equiv 1$ ,  $v = x$ ,  $v = e^x$ ,  $v = \cos x$ ,  $v = \text{sh} x$  и с  $v = \text{ch} x$ . Остается выяснить, какие из них совпадают между собой.

Поскольку кривизна является инвариантом при заменах пространственных переменных и умножается на положительный множитель при растяжениях переменной  $\psi$ , в разные классы эквивалентности наверняка попадут уравнения с разным знаком кривизны. Так как положительную кривизну  $K = 1$  имеет только элементарное уравнение с  $v = \text{ch} x$ , это уравнение оказывается представителем единственного класса эквивалентности, отвечающего случаю положительной постоянной кривизны.

Нулевую кривизну имеют уравнения с  $v \equiv 1$  и с  $v = e^x$ , но эти уравнения эквивалентны между собой: замена  $\alpha = e^{-x} \cos y$ ,  $\beta = -e^{-x} \sin y$  переводит уравнение  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = e^{-2x}$  в уравнение  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1$ . Поэтому классы эквивалентности этих уравнений совпадают, и случаю нулевой кривизны тоже соответствует единственный класс эквивалентности с представителем  $v \equiv 1$ .

Наконец, отрицательную кривизну  $K = -1$  имеют уравнения с  $v = x$ , с  $v = \cos x$  и с  $v = \text{sh} x$ . Они также эквивалентны между собой: в уравнение  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/\alpha^2$  уравнение  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/\cos^2 x$  преобразуется заменой  $\alpha = e^y \cos x$ ,  $\beta = -e^y \sin x$ , а уравнение  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/\text{sh}^2 x$  – заменой  $\alpha = \text{sh} x / (\text{ch} x + \cos y)$ ,  $\beta = \sin y / (\text{ch} x + \cos y)$ . Значит, и случаю отрицательной кривизны соответствует единственный класс эквивалентности с представителем  $v = x$ . Первое утверждение теоремы 4.1.3 доказано.

В случае непостоянной кривизны уравнения с плоским слоением и уравнения с квазиплоским слоением образуют два подсемейства. Найдем для каждого из подсемейств соответствующую частную группу эквивалентности. Поскольку сравнение утверждений теорем 4.1.1 и 4.1.2 показывает, что для таких уравнений группа симметрий поглощается общей группой эк-

вивалентности, в силу теоремы 4.1.3 группа эквивалентности каждого из семейств может быть только подгруппой общей группы эквивалентности уравнения (3.1.4). Так как действие линейных преобразований переменной  $\psi$  тривиально: оно просто умножает  $v(x, y)$  на постоянный ненулевой множитель, мы можем сосредоточить свое внимание только на преобразованиях пространственных переменных.

Для семейства уравнений с плоским слоением ( $v(x, y) = V(x)$ ) преобразования эквивалентности, порожденные алгеброй  $\xi\partial_x + \eta\partial_y + \omega\partial_v$ , оставляющие инвариантным это семейство, должны, помимо соотношений

$$\xi_x = \eta_y = \frac{\omega}{v}, \quad \xi_y + \eta_x = 0, \quad (4.1.33)$$

удовлетворять еще условию инвариантности относительно этих преобразований уравнения  $v_y = 0$ , которое имеет вид  $\omega_y - \xi_y v_x = 0$ . Решая полученные уравнения и исключая при решении случаи постоянной кривизны, получаем, что алгебра Ли группы эквивалентности для семейства уравнений с плоским слоением имеет вид  $\bar{\Xi} = (A + Cx)\partial_x + (B + Cy)\partial_y + Cv\partial_v + (M\psi + L)\partial_\psi$ . Сама группа эквивалентности оказывается группой сдвигов и растяжений пространственных переменных (плюс линейные преобразования  $\psi$ ), ее действие на функцию слоения  $V(x)$  сводится к линейному преобразованию аргумента под знаком функции и к умножению этой функции на число. Таким образом, одному и тому же классу эквивалентности соответствует целое семейство представителей, и для однозначного выбора одного из них необходимо задать еще три дополнительных условия (например,  $V(0) = V'(0) = V''(0) = 1$ ).

Так, в случае уравнений с трехмерной группой симметрий из функций вида  $w(x + h)^{1+\lambda}$  можно выбрать единственного представителя  $v(x, y) = x^{1+\lambda}$  и определить класс эквивалентности заданием одного лишь показателя  $\lambda$ .

Таким образом, второе и третье утверждения теоремы тоже доказаны.

Аналогично проводится анализ группы эквивалентности для уравнений с квазиплоским слоением. Здесь растяжениями и отражениями показатель  $\varkappa$  в экспоненте сводится к единице, а для уравнений с  $v(x, y) = V(x)e^y$  группа эквивалентности должна удовлетворять, помимо (4.1.33), еще и условию инвариантности уравнения  $v_y = v$ , это условие имеет вид  $\xi_{xy}v - v_x\xi_y - v\eta_y = 0$ . Решением полученной системы с исключением случаев постоянной кривизны и случая уравнения с  $V(x) = w \cos^{1-1/\lambda}(\lambda x + h)$ , имеющего трехмерную группу симметрий и уже рассмотренного выше, получаем, что группа эквивалентности для уравнений с квазиплоским слоением является прямой суммой группы сдвигов пространственных переменных и группы линейных преобразований переменной  $\psi$ . Действие этой группы на

функцию слоения  $V(x)$  сводится к сдвигу аргумента и умножению функции на постоянный множитель, поэтому представитель класса эквивалентности можно выбирать, задавая нормировку двумя условиями (например,  $V(0) = V'(0) = 1$ ). На этом доказательство теоремы 4.1.4 завершено.



## § 4.2 Решения двумерных уравнений эйконала

### 4.2.1 Основные семейства двумерных уравнений эйконала

В предыдущем параграфе были выделены несколько семейств уравнений, имеющих нетривиальную группу симметрий, которые оказываются наиболее интересными, так как именно для них удается, полностью или частично, решить уравнение эйконала. Прежде всего, это уравнения с постоянной кривизной пространства лучей. Ниже (в доказательстве леммы 4.1.4) мы покажем, что они сводятся заменой переменных к элементарным уравнениям (с  $v \equiv 1$ ,  $v = x$ ,  $v = \cos x$ ,  $v = e^x$ ,  $v = \operatorname{sh} x$  и  $v = \operatorname{ch} x$ ).

Далее, совершенно естественным образом выделилось семейство уравнений, описывающих плоско-слоистые среды. С физической точки зрения интерес представляют также уравнения со сферическим слоением среды, однако эти два семейства оказываются эквивалентными: замена  $\alpha = e^x \cos y$ ,  $\beta = e^x \sin y$  приводит уравнение  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/V^2(x)$  к уравнению

$$\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)V^2(\frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + \beta^2))}$$

при этом уравнение с  $v(x, y) = 1$  переходит в уравнение с  $v(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ , уравнение с  $v(x) = \operatorname{sh} x$  переходит в уравнение с  $v(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - 1)$ , а уравнение с  $v(x) = \operatorname{ch} x$  – в уравнение с  $v(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + 1)$ , так что для сферически симметричной среды случаи положительной, отрицательной и нулевой кривизны описываются единообразно функциями вида  $v(x, y) = w(x^2 + y^2 \pm \nu^2)$ .

Уравнения с квазиплоским слоением  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = e^{-2\kappa y}/V^2(x)$ , также выделенные в первом параграфе, заменой  $\alpha = e^{-\kappa y} \cos \kappa x$ ,  $\beta = e^{-\kappa y} \sin \kappa x$  преобразуются в уравнения

$$\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = \frac{1}{\kappa^2 V^2(\frac{1}{\kappa} \operatorname{arctg}(\frac{\beta}{\alpha}))},$$

которые тоже интересны с физической точки зрения, поскольку описывают среду с угловым слоением.

В лемме 4.1.1 мы отметили, что уравнение, имеющее нетривиальную группу симметрий, приводится к уравнению с плоским или квазиплоским слоением, однако не указали никакого способа проверки этого свойства. Условия приводимости к уравнению с плоским слоением мы сформулировали в предыдущем параграфе в лемме 4.1.4, которую и докажем ниже.

При этом, поскольку группа эквивалентности является прямой суммой группы конформных преобразований пространственных переменных и

группы линейных преобразований переменной  $\psi$ , а преобразования  $\psi$  не меняют характер слоения (только умножая  $v(x, y)$  на некоторый множитель), мы сосредоточим свое внимание на преобразованиях пространственных переменных  $(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$ .

#### 4.2.2 Критерий приводимости к уравнению с плоским слоением (доказательство леммы 4.1.4)

Как уже указывалось, замена  $(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$  переменных оставляет вид уравнения инвариантным тогда и только тогда, когда  $\alpha_x = \beta_y$  и  $\alpha_y + \beta_x = 0$ , т.е. когда  $\alpha(x, y)$  и  $\beta(x, y)$  образуют пару сопряженных гармонических функций (*гармоническая* замена переменных). При этом функция  $v(x, y)$  в правой части преобразуется, в силу (4.1.5), в функцию  $\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}v(x, y)$ , где  $x, y$  выражены через  $\alpha$  и  $\beta$ , и для того, чтобы "новая" правая часть была равна  $1/V^2(\alpha)$ , функция  $\alpha(x, y)$  должна удовлетворять соотношению

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)}. \quad (4.2.1)$$

Таким образом, наша задача свелась к нахождению гармонической функции, удовлетворяющей (4.2.1).

Продифференцируем (4.2.1) по  $x$  и по  $y$  и из полученных соотношений, пользуясь гармоничностью  $\alpha$  и равенством (4.2.1), найдем вторые частные производные от  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= (\alpha_x^2 - \alpha_y^2) \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} + \frac{\alpha_y v_y - \alpha_x v_x}{v(x, y)}, \\ \alpha_{xy} &= 2\alpha_x \alpha_y \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{\alpha_y v_x + \alpha_x v_y}{v(x, y)}, \\ \alpha_{yy} &= (\alpha_y^2 - \alpha_x^2) \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} + \frac{\alpha_x v_x - \alpha_y v_y}{v(x, y)}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

По большому счету, нас будет интересовать именно разрешимость системы (4.2.2): очевидно, что если у нее есть решение, то это – гармоническая функция; с другой стороны, непосредственным следствием этой системы являются равенства

$$\begin{aligned} \left[ \alpha_x^2 + \alpha_y^2 - \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \right]_x &= \left[ \alpha_x^2 + \alpha_y^2 - \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \right] \left[ \ln \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \right]_x, \\ \left[ \alpha_x^2 + \alpha_y^2 - \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \right]_y &= \left[ \alpha_x^2 + \alpha_y^2 - \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \right] \left[ \ln \frac{V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \right]_y, \end{aligned}$$

так что выполнение для функции  $\alpha$  соотношения (4.2.1) обеспечивается удовлетворением этого соотношения в одной начальной точке  $(x_0, y_0)$ .

Специфика системы состоит в том, что сама функция  $V(\alpha)$  у нас пока не известна, и ее надо определять из условий совместности системы (4.2.2), которые дают нам равенство

$$\left(\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}\right)' = \frac{K(x, y)}{(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)v^2(x, y)}, \quad (4.2.3)$$

а оно, в силу нашего предположения о том, что  $\alpha(x, y)$  является решением уравнения (4.2.1), влечет

$$\left(\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}\right)' = \frac{K(x, y)}{V^2(\alpha)}. \quad (4.2.4)$$

Уравнение (4.2.4) является ключевым для решения вопроса о редукции.

Прежде всего, если  $K(x, y) \equiv 0$ , то необходимо получаем  $V(\alpha) = we^{z\alpha}$ , либо  $V(\alpha) \equiv w = \text{const}$ , а для этих функций условие совместности (4.2.3) выполнено автоматически. Значит, приняв в качестве  $V(\alpha)$  одну из указанных функций и задавая начальные условия для  $\alpha$ ,  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  в одной точке так, чтобы в ней выполнялось (4.2.1), мы однозначно определим решение системы (4.2.2) – функцию  $\alpha$ . Сопряженная к ней функция  $\beta$  находится стандартным образом, так что требуемая замена существует.

Если  $K(x, y) \equiv \text{const} \neq 0$ , то ситуация чуть сложнее: хотя в этом случае также удастся определить  $V(\alpha)$  из уравнения (4.2.4), выполнение (4.2.3) отсюда автоматически не следует: в этом случае (4.2.3) сводится к (4.2.1). Получается некий "замкнутый круг": для разрешимости (4.2.2) необходимо выполнение (4.2.1), а само уравнение (4.2.1) является лишь следствием системы (4.2.2), когда она разрешима. Этот круг разрывается введением обозначений  $p = \alpha_x$ ,  $q = \alpha_y$  и заменой переменных  $p = V(\alpha) \cos \theta / v(x, y)$ ,  $q = V(\alpha) \sin \theta / v(x, y)$ , которая приводит систему (4.2.2) к виду

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{V(\alpha)}{v(x, y)} \cos \theta, & \theta_x &= \frac{V'(\alpha)}{v(x, y)} \sin \theta - \frac{v_y(x, y)}{v(x, y)}, \\ \alpha_y &= \frac{V(\alpha)}{v(x, y)} \sin \theta, & \theta_y &= -\frac{V'(\alpha)}{v(x, y)} \cos \theta + \frac{v_x(x, y)}{v(x, y)}, \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что эта система является совместной, так что ее решение однозначно определяется заданием начальных условий для  $\alpha$  и  $\theta$  в некоторой точке. Выполнение обратных замен дает решение системы (4.2.2).

Самым нетривиальным является случай  $K(x, y) \neq \text{const}$ , поскольку уравнение (4.2.4) приобретает совершенно другой смысл: вместо того, чтобы просто определять функцию  $V(\alpha)$ , оно теперь означает лишь то, что

функция  $K(x, y)$ , которая пока что зависела от  $(x, y)$  произвольным образом, должна совпадать с  $VV'' - V'^2$ , которая зависит только от  $\alpha$ . Это налагает дополнительное требование: функция  $K(x, y)$  должна быть функционально зависимой с  $\alpha$ , и это требование сильно осложняет всю картину, поскольку мы заранее не можем никак определить характер зависимости  $K(x, y)$  от неизвестной пока функции  $\alpha(x, y)$ .

Оказывается, однако, что "распутывать" узел из системы (4.2.2) и условия (4.2.4) нет необходимости: достаточно, просто зафиксировав факт функциональной зависимости  $K$  и  $\alpha$ , вернуться к исходной постановке:  $\alpha$  должна быть гармонической функцией и должна удовлетворять уравнению (4.2.1). Подставив сюда  $\alpha = a(K)$  (такое представление корректно в любой области, в которой градиент функции  $K$  отличен от нуля), где  $a(K)$  – неизвестная пока функция, которая должна быть определена, получаем из (4.2.1), что

$$v^2(x, y)[K_x^2 + K_y^2] = \frac{V^2(a(K))}{a'^2(K)}, \quad (4.2.5)$$

а из условия гармоничности  $\alpha$  – что

$$\frac{v^2(x, y)[K_{xx} + K_{yy}]}{v^2(x, y)[K_x^2 + K_y^2]} = -\frac{a''(K)}{a'(K)}. \quad (4.2.6)$$

Поскольку и в том, и в другом уравнении справа стоит функция, зависящая только от  $K$ , то и слева должна стоять функция, зависящая только от  $K$ , и мы получаем в качестве необходимого условия приводимости к уравнению с плоским слоением два условия функциональной зависимости, которые фигурируют в условии леммы и аналитически записываются в виде (4.1.30)-(4.1.31).

Условия (4.1.30)-(4.1.31) оказываются и достаточными либо когда  $K(x, y) = \text{const}$  (этот случай мы уже обсудили выше), либо когда  $K_x^2 + K_y^2 \neq 0$ . В последнем случае из (4.1.30)-(4.1.31) следует наличие функциональных зависимостей  $v^2(K_x^2 + K_y^2) = f^2(K)$ ,  $v^2(K_{xx} + K_{yy}) = g(K)$ , и тогда, определив из уравнения

$$a''(K)/a'(K) = -g(K)/f^2(K)$$

функцию

$$a(K) = A_1 \int_0^K \exp\left(\int_0^k \frac{g(\varkappa)}{f^2(\varkappa)} d\varkappa\right) dk + A_2$$

(эта функция строго монотонна, и потому обратима), положив затем  $\alpha(x, y) = a(K(x, y))$  и  $V(\alpha) = f(a^{-1}(\alpha))a'(a^{-1}(\alpha))$ , мы получим гармоническую функцию, удовлетворяющую, в силу выбранных нами  $a(K)$  и  $V(\alpha)$ , уравнению (4.2.1). Лемма 4.1.4 доказана.

### 4.2.3 Приводимость к уравнению с квазиплоским слоением

В отличие от уравнений с плоским слоением, здесь критерии приводимости используют не столько саму функцию  $K(x, y)$ , сколько вычисляемые по ней величины

$$\sigma^*(x, y) = \frac{v^2(x, y)}{K(x, y)} \left[ \left( \frac{K_x}{K} \right)^2 + \left( \frac{K_y}{K} \right)^2 \right], \quad (4.2.7)$$

$$\sigma^{**}(x, y) = \frac{v^2(x, y)}{K(x, y)} \left[ \left( \frac{K_x}{K} \right)_x + \left( \frac{K_y}{K} \right)_y \right]. \quad (4.2.8)$$

Они, как нетрудно видеть, являются инвариантами (поскольку представляют собой отношение первого и второго параметров Бельтрами для логарифма кривизны к самой кривизне). Поскольку случай нулевой кривизны сводится к уравнению с плоским слоением, мы будем предполагать здесь, что кривизна ненулевая и даже более того – непостоянная.

**Лемма 4.2.1** *Для того, чтобы уравнение (3.1.4) с непостоянной кривизной  $K(x, y)$  было приводимо к уравнению с квазиплоским слоением (с  $\kappa \neq 0$ ), необходимо и достаточно, чтобы для функций  $\sigma^*$ ,  $\sigma^{**}$ , определяемых формулами (4.2.7)-(4.2.8), выполнялись два условия:*

1. *Эти функции должны быть функционально зависимы:*

$$\begin{vmatrix} \sigma_x^* & \sigma_y^* \\ \sigma_x^{**} & \sigma_y^{**} \end{vmatrix} = 0; \quad (4.2.9)$$

2. *Если при этом обе они являются константами, то должно выполняться соотношение  $\sigma^* = 2(\sigma^{**})^2/(2 - \sigma^{**})$ ; в противном случае функции  $\tau$  и  $\theta$ , определяемые по  $\sigma$  (где  $\sigma = \sigma^*$  если  $\sigma^* \neq \text{const}$  и  $\sigma = \sigma^{**}$  если  $\sigma^* = \text{const}$ , но  $\sigma^{**} \neq \text{const}$ ), формулами*

$$\tau = \frac{(v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_y \sigma_x - (v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_x \sigma_y}{v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^2}, \quad (4.2.10)$$

$$\theta = \frac{(v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_y \sigma_y + (v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2])_x \sigma_x}{v^2[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^2} \quad (4.2.11)$$

*должны быть функционально зависимыми с  $\sigma(x, y)$ , т.е. должны выполняться соотношения*

$$\begin{vmatrix} \tau_x & \tau_y \\ \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_x & \theta_y \\ \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix} = 0, \quad (4.2.12)$$

*причем  $\tau$  должна быть отлична от нуля.*

**Доказательство** проводится аналогично доказательству леммы 4.1.4. Для того, чтобы замена переменных  $(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$  приводила к уравнению с квазиплоским слоением, необходимо и достаточно, чтобы замена была гармонической ( $\alpha_x = \beta_y, \alpha_y + \beta_x = 0$ ) и чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \frac{e^{2\kappa\beta} V^2(\alpha)}{v^2(x, y)}. \quad (4.2.13)$$

Если обозначить  $p = \alpha_x = \beta_y, q = \alpha_y = -\beta_x$ , то это равенство приобретет вид

$$p^2 + q^2 = \frac{e^{2\kappa\beta} V^2(\alpha)}{v^2(x, y)}, \quad (4.2.14)$$

и его дифференцирование дает систему дифференциальных уравнений относительно  $\alpha, \beta, p, q$

$$\begin{aligned} \alpha_x = p, & & p_x = -2\kappa pq + (p^2 - q^2) \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} + \frac{qv_y - pv_x}{v(x, y)}, \\ \alpha_y = q; & & p_y = \kappa(p^2 - q^2) + 2pq \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{qv_x + pv_y}{v(x, y)}, \\ \beta_x = -q, & & q_x = \kappa(p^2 - q^2) + 2pq \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{qv_x + pv_y}{v(x, y)}, \\ \beta_y = p; & & q_y = 2\kappa pq - (p^2 - q^2) \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{qv_y - pv_x}{v(x, y)}. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

отличающуюся от (4.2.2) (если ее переписать в терминах  $p, q$ ) только наличием членов с  $\kappa$ . Нетрудно проверить, что эти дополнительные члены не влияют на условие совместности системы, которое совпадает с (4.2.3) и, в силу нашего предположения о том, что  $\alpha(x, y)$  является решением уравнения (4.2.13), влечет

$$\left( \frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} \right)' = \frac{K(x, y)}{e^{2\kappa\beta} V^2(\alpha)}.$$

Это соотношение позволяет выразить  $\beta$  через  $x, y$  и  $\alpha$ :

$$\beta = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{K(x, y)}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)}, \quad (4.2.16)$$

подстановка этой  $\beta$  в соответствующую пару уравнений (4.2.13) дает еще два условия:

$$\frac{K_x}{K} = \frac{[V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)]'}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)} p - 2\kappa q, \quad \frac{K_y}{K} = 2\kappa p + \frac{[V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)]'}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)} q,$$

из которых определяются уже  $p, q$ . Подстановка найденных  $p, q$  в (4.2.14) дает уравнение

$$\frac{v^2(K_x^2 + K_y^2)}{K^3} = \frac{4\kappa^2 + R^2(\alpha)}{(V'(\alpha)/V(\alpha))'}, \quad (4.2.17)$$

где через  $R(\alpha)$  обозначена функция

$$R(\alpha) = \frac{[V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)]'}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)}, \quad (4.2.18)$$

подстановка же  $p$  и  $q$  в первую пару уравнений (4.2.15) приводит к системе

$$\alpha_x = \frac{R(\alpha)K_x + 2\kappa K_y}{K(4\kappa^2 + R^2(\alpha))}, \quad \alpha_y = \frac{R(\alpha)K_y - 2\kappa K_x}{K(4\kappa^2 + R^2(\alpha))}, \quad (4.2.19)$$

условием совместности которой оказывается равенство

$$\frac{(K_x/K)_x + (K_y/K)_y}{(K_x/K)^2 + (K_y/K)^2} = \frac{R'(\alpha)}{4\kappa^2 + R^2(\alpha)}. \quad (4.2.20)$$

Как нетрудно видеть, левые части (4.2.17) и (4.2.20) совпадают с функциями  $\sigma^*$  и  $\sigma^{**}/\sigma^*$ , а правые – являются функциями только от  $\alpha$ . Поскольку  $\alpha(x, y)$  имеет, в силу (4.2.13), ненулевой градиент, обе полученные функции должны быть функциями от  $\alpha$ , а значит, функционально зависимы между собой, что и означает необходимость, для существования гармонической замены переменных, удовлетворяющей (4.2.13), равенства (4.2.9).

Теперь возможно несколько вариантов. Первый из них – когда  $\sigma^*$  и  $\sigma^{**}$  являются константами. В этом случае (4.2.17) и (4.2.20) определяют функцию  $V(\alpha)$ . При этом оказывается, что предположение о непостоянстве кривизны и о том, что  $\kappa \neq 0$  исключает возможность этим константам быть нулевыми. Решение пары уравнений (4.2.17), (4.2.20) с учетом определения (4.2.18) функции  $R(\alpha)$  дает условие  $\sigma^* + 2(\sigma^{**})^2/(\sigma^{**} - 2) = 0$ , которое оказывается необходимым, и

$$V(\alpha) = C \cos^{1-\sigma^*/(2\sigma^{**})} \left( 2\kappa \frac{\sigma^{**}}{\sigma^*} \alpha + h \right), \quad (4.2.21)$$

т.е. этот случай соответствует уравнению с трехмерной группой симметрий.

Достаточность полученного условия (в случае, если  $\sigma^*, \sigma^{**}$  являются константами) проверяется непосредственно. Условие (4.2.9) при этом выполняется автоматически, а подстановка  $V(\alpha)$ , определяемой (4.2.21), в систему (4.2.19) позволяет найти  $\alpha$  (система оказывается совместной в силу выполнения (4.2.20)), определяемая (4.2.16) функция  $\beta$ , как легко проверяется, удовлетворяет условиям  $\beta_y = \alpha_x$  и  $\beta_x + \alpha_y = 0$ , и, наконец, в силу

(4.2.17) и определения  $\beta$ ,

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \frac{K_x^2 + K_y^2}{K^2(4\kappa^2 + R^2(\alpha))} = \frac{K}{v^2(x, y)(V'(\alpha)/V(\alpha))'} = \frac{e^{2\kappa\beta}V^2(\alpha)}{v^2(x, y)},$$

т.е.  $\alpha(x, y)$  удовлетворяет (4.2.13).

Во втором варианте – когда одна из функций  $\sigma^*$ ,  $\sigma^{**}$  не является константой – в любой области, где эта функция регулярна (непрерывно дифференцируема и ее градиент отличен от нуля), можно считать, что  $\alpha = a(\sigma)$ , где  $a(\sigma)$  – некоторая функция. Подставляя эту функцию и функцию  $\beta$ , определяемую (4.2.16)

$$\beta = \frac{1}{2\kappa} \ln \left( \frac{v^2(x, y)[\alpha_x^2 + \alpha_y^2]}{V^2(\alpha)} \right), \quad (4.2.22)$$

в условия гармоничности, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a'(\sigma)\sigma_x &= \frac{1}{2\kappa} (\ln[v^2(x, y)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)])_y + \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{a'(\sigma)}{V(a(\sigma))} \right)_\sigma \sigma_y, \\ -a'(\sigma)\sigma_y &= \frac{1}{2\kappa} (\ln[v^2(x, y)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)])_x + \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{a'(\sigma)}{V(a(\sigma))} \right)_\sigma \sigma_x, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

которая, очевидно, эквивалентна

$$\begin{aligned} 2\kappa a'(\sigma) &= \frac{[v^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)]_y \sigma_x - [v^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)]_x \sigma_y}{v^4(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^3}, \\ -2 \left( \ln \frac{a'(\sigma)}{V(a(\sigma))} \right)_\sigma &= \frac{[v^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)]_y \sigma_y + [v^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)]_x \sigma_x}{v^4(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^3}, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

и которая может выполняться только если правые части (совпадающие с функциями (4.2.10)-(4.2.11)) являются функционально зависящими от  $\sigma$ , что аналитически записывается в виде условий (4.2.12). Таким образом, и в случае переменных  $\sigma^*$ ,  $\sigma^{**}$  необходимость условий леммы установлена.

Осталось отметить, что при выполнении условий (4.2.12) и в предположении регулярности соответствующей  $\sigma$  можно, выразив функции  $\tau$  и  $\theta$  через  $\sigma$ , выразить  $a(\sigma)$  и  $V(\alpha)$  формулами

$$a(\sigma) = \frac{1}{2\kappa} \int_0^\sigma \tau(s) ds, \quad V(\alpha) = \tau'(a^{-1}(\alpha)) \exp \left[ \int_0^{a^{-1}(\alpha)} \theta(s) ds \right],$$

обеспечив для пары функций  $\alpha(x, y) = a(\sigma(x, y))$  и  $\beta(x, y)$ , определяемой (4.2.22), выполнение условия гармоничности. Лемма доказана.



#### 4.2.4 Критерий эквивалентности уравнений. Теорема о семи инвариантах

Приведем теперь условие, при котором уравнение с функцией  $v(x, y)$  приводится заменой пространственных переменных к уравнению с функцией  $V(\alpha, \beta)$ .

**Теорема 4.2.1** *Для того, чтобы уравнение (1) с функцией  $v(x, y)$  некоторой точечной заменой  $\alpha = \alpha(x, y)$ ,  $\beta = \beta(x, y)$  приводилось к уравнению с функцией  $V(\alpha, \beta)$ , необходимо, чтобы семь функций*

$$K(x, y) = v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2),$$

$$S^1(x, y) = v^2(x, y)(K_x^2 + K_y^2), \quad S^2(x, y) = v^2(x, y)(K_{xx} + K_{yy}),$$

$$D^{i+} = v^2(x, y)(S_x^i K_x + S_y^i K_y), \quad D^{i-} = v^2(x, y)(S_y^i K_x - S_x^i K_y)$$

*находились между собой в тех же функциональных зависимостях, что и семь функций*

$$\varkappa(\alpha, \beta) = V(V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta}) - (V_\alpha^2 + V_\beta^2),$$

$$\sigma^1(\alpha, \beta) = V^2(\alpha, \beta)(\varkappa_\alpha^2 + \varkappa_\beta^2), \quad \sigma^2(\alpha, \beta) = V^2(\alpha, \beta)(\varkappa_{\alpha\alpha} + \varkappa_{\beta\beta}),$$

$$\delta^{i+} = V^2(\alpha, \beta)(\sigma_\alpha^i \varkappa_\alpha + \sigma_\beta^i \varkappa_\beta), \quad \delta^{i-} = V^2(\alpha, \beta)(\sigma_\beta^i \varkappa_\alpha - \sigma_\alpha^i \varkappa_\beta).$$

*Это условие является и достаточным для существования в окрестности точки  $(x^*, y^*)$  соответствующей замены в случаях, когда*

- $S^1(x, y) \equiv 0$  (т.е.  $K(x, y) \equiv \text{const}$ ) в окрестности  $(x^*, y^*)$ ;
- $S^1(x^*, y^*) \neq 0$ , но  $D^{i-}(x, y) \equiv 0$  в окрестности  $(x^*, y^*)$  (т.е.  $S^i$  функционально зависимы с  $K$ ) и  $K(x^*, y^*)$  принадлежит множеству значений  $\varkappa(\alpha, \beta)$ ;
- по крайней мере одна из  $D^{i-}(x^*, y^*)$  отлична от нуля и система  $\varkappa(\alpha, \beta) = K(x^*, y^*)$ ,  $\sigma^i(\alpha, \beta) = S^i(x^*, y^*)$  для соответствующего  $i$  имеет хотя бы одно решение.

**Замечание 1.** В достаточной части теоремы обсуждаются только случаи "общего положения". Остальные случаи (например, когда градиент  $K$  в точке обращается в нуль, но в окрестности этой точки  $K$  не является константой) являются пограничными: невыполнение условий общности положения характерно для точек, лежащих на границе областей, в которых имеют место случаи общего положения. Эти пограничные случаи требуют особого анализа, который выходит за рамки целей, стоящих перед данной работой, поэтому мы их не рассматриваем.

**Замечание 2.** В случае, когда исследуется сводимость к уравнению с квазиплоским слоением, в случае непостоянной кривизны предположение о функциональной зависимости  $\sigma^i$  от  $\varkappa$  может выполняться лишь если  $\sigma^1/\varkappa^3 = \text{const}$  и  $\sigma^2/\varkappa^2 = \text{const}$ , что соответствует случаям постоянства  $\sigma^*$ ,  $\sigma^{**}$  в лемме 4.2.1. Предположение же о функциональной независимости одной из  $\sigma^i$  с  $\varkappa$  может выполняться только если функции  $\sigma^1/\varkappa^3$  и  $\sigma^2/\varkappa^2$  функционально зависимы между собой. В этом случае условия одинаковой функциональной зависимости для семи инвариантов и дают условия леммы 4.2.1.

**Доказательство.** Необходимость следует из того, что всякое преобразование, переводящее уравнение  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/v^2(x, y)$  в уравнение  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/V^2(\alpha, \beta)$  осуществляет одновременно приведение метрики  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/v^2(x, y)$  к метрике  $ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2)/V^2(\alpha, \beta)$ . Поскольку кривизна является инвариантом,

$$K(x, y) = \varkappa(\alpha, \beta). \quad (4.2.25)$$

Функции  $S^i$  являются первым и вторым параметрами Бельтрами от инварианта  $K$ , поэтому они тоже являются инвариантами, и значит

$$S^i(x, y) = \sigma^i(\alpha, \beta). \quad (4.2.26)$$

Наконец, каждая из величин  $D^{i\pm}$  также получается с помощью инвариантной процедуры дифференцирования из двух инвариантов –  $K$  и соответствующей  $S^i$ . Поэтому они тоже являются инвариантами, и

$$D^{i\pm}(x, y) = \delta^{i\pm}(\alpha, \beta). \quad (4.2.27)$$

Из соотношений (4.2.25)-(4.2.27) немедленно следует утверждение теоремы о необходимости.

Для доказательства достаточности нам понадобится рассмотреть случаи, перечисленные в формулировке теоремы. Первый случай – когда  $K(x, y) \equiv K = \text{const}$ . В этом случае условие одинаковой функциональной зависимости тривиализуется до условия  $\varkappa(\alpha, \beta) \equiv K$ , а существование соответствующей замены переменных следует из леммы 4, так как оба уравнения сводятся к уравнению с плоским слоением и одной и той же кривизной, а все такие уравнения эквивалентны между собой (соответствующие замены приведены в доказательстве теоремы 4.1.4).

Второй случай – когда  $S^1(x^*, y^*) \neq 0$  (отсюда следует, что градиент  $K$  нетривиален и поэтому  $K(x, y) \not\equiv \text{const}$ ), и обе функции  $S^i$  функционально зависимы с  $K$ . В этом случае из невырожденности градиента функции  $K$  в точке  $(x^*, y^*)$ , следует, что функциональную зависимость можно разрешить относительно  $S^i$ :  $S^i(x, y) = F^i(K(x, y))$ . Но тогда из условия одинаковой функциональной зависимости следует, что  $\sigma^i(\alpha, \beta) = F^i(\varkappa(\alpha, \beta))$ .

Выберем пару  $(\alpha^*, \beta^*)$  так, чтобы  $\varkappa(\alpha^*, \beta^*) = K(x^*, y^*)$ . Тогда  $\sigma^1(\alpha^*, \beta^*) = S^1(x^*, y^*) \neq 0$ , и оба уравнения (с  $v(x, y)$  и с  $V(\alpha, \beta)$ ) приводятся к уравнению с плоским слоением в силу леммы 4.1.4. Причем из доказательства леммы следует, что функция слоения определяется только функциями  $F^i$ , и поэтому оба уравнения заменами переменных приводятся к одному и тому же уравнению. Обращение одной из замен, в суперпозиции с другой, дает искомое преобразование  $(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$ .

Наконец, в случае, когда одна из  $D^{i-}(x^*, y^*) \neq 0$ , якобиан функции  $K$  и соответствующей  $S^i$  (мы далее будем обозначать ее просто  $S$ ) в точке  $(x^*, y^*)$  отличен от нуля, и поэтому в окрестности этой точки можно выразить  $x$  и  $y$  через  $K$  и  $S$ , а значит, явно описать выражение всех  $S^i$  и  $D^{i\pm}$  через  $K$  и  $S$ . В силу условия одинаковой функциональной зависимости соответствующие величины  $\sigma^i$  и  $\delta^{i\pm}$  теми же соотношениями выражаются через  $\varkappa$  и  $\sigma$  (равную соответствующей  $\sigma^i$ ), и поэтому все равенства (4.2.25)–(4.2.27) являются следствием системы

$$\varkappa(\alpha, \beta) = K(x, y), \quad \sigma(\alpha, \beta) = S(x, y). \quad (4.2.28)$$

Пусть  $(\alpha^*, \beta^*)$  – некоторое решение системы (4.2.28) при  $(x, y) = (x^*, y^*)$ . Тогда для того  $i$ , для которого  $S = S^i$ , из (4.2.27) получаем, что  $\delta^{i-}(\alpha^*, \beta^*) = D^{i-}(x^*, y^*) \neq 0$ , и поэтому систему (4.2.28) можно в окрестности  $(x^*, y^*)$  разрешить относительно  $(\alpha, \beta)$ , получив выражения  $\alpha = \alpha(x, y)$ ,  $\beta = \beta(x, y)$ .

Покажем, что полученная замена переменных преобразует уравнение  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/v^2(x, y)$  в уравнение  $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/V^2(\alpha, \beta)$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha$  и  $\beta$  образовывали пару гармонических функций и чтобы  $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = V^2(\alpha, \beta)/v^2(x, y)$ .

Вычисляя из (4.2.28) для указанной нами замены производные

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{S_x \varkappa_\beta - K_x \sigma_\beta}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, & \alpha_y &= \frac{S_y \varkappa_\beta - K_y \sigma_\beta}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, \\ \beta_x &= \frac{K_x \sigma_\alpha - S_x \varkappa_\alpha}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, & \beta_y &= \frac{K_y \sigma_\alpha - S_y \varkappa_\alpha}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

мы видим, что для выполнения условия гармоничности ( $\alpha_x = \beta_y$ ,  $\alpha_y = -\beta_x$ ) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$S_x \varkappa_\beta - K_x \sigma_\beta = K_y \sigma_\alpha - S_y \varkappa_\alpha, \quad S_y \varkappa_\beta - K_y \sigma_\beta = S_x \varkappa_\alpha - K_x \sigma_\alpha,$$

которые, будучи приведены к виду

$$S_x = \frac{K_x(\sigma_\alpha \varkappa_\alpha + \sigma_\beta \varkappa_\beta) + K_y(\sigma_\alpha \varkappa_\beta - \sigma_\beta \varkappa_\alpha)}{\varkappa_\alpha^2 + \varkappa_\beta^2},$$

$$S_y = \frac{K_y(\sigma_\alpha \varkappa_\alpha + \sigma_\beta \varkappa_\beta) - K_x(\sigma_\alpha \varkappa_\beta - \sigma_\beta \varkappa_\alpha)}{\varkappa_\alpha^2 + \varkappa_\beta^2},$$

удовлетворяются тождественно: достаточно заменить выражения с  $\sigma$  и  $\varkappa$  на выражения с  $S$  и  $K$  по формулам (4.2.26)-(4.2.27).

С другой же стороны, заменяя в силу доказанной гармоничности  $\alpha_x$  на  $\beta_y$  и  $\alpha_y$  на  $\beta_x$ , получаем из (4.2.29), что

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x = \frac{S_x K_y - K_x S_y}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta} = \frac{V^2(\alpha, \beta)}{v^2(x, y)}$$

в силу опять же (4.2.27). Теорема доказана.

#### 4.2.5 Решения двумерного уравнения эйконала с плоским слоением

Здесь мы дадим формулы фронта волны точечного источника (когда  $\psi^{-1}(0)$  состоит из единственной точки  $(x_0, y_0)$ ) и лучей. В явном виде это удастся сделать лишь для уравнений с пространством лучей постоянной кривизны. Поскольку запас таких уравнений весьма велик, мы приведем эти формулы в случаях наиболее интересных – для уравнения с плоским слоением

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{1}{V^2(\alpha)}, \quad (4.2.30)$$

причем, ввиду инвариантности уравнения (4.2.30) относительно сдвига по  $\beta$ , достаточно рассмотреть случай, когда источник находится в точке  $(\alpha_0, 0)$ .

В остальных случаях уравнений с постоянной кривизной пространства лучей формулы получаются из перечисленных ниже соответствующей заменой переменных. Мы проиллюстрируем это в следующем пункте на уравнениях со сферически-симметричным слоением.

Напомним, что под лучами мы понимаем (см. пункт 3.1.1), семейство кривых, ортогональных фронту (семейству поверхностей  $\psi(x, y) = t$  для некоторого решения  $\psi$  уравнения (3.1.4)). Лучи, параметризованные значениями времени  $t$  (эйконала) являются экстремальными функционала (3.1.6), вычисляемого по кривым, соединяющим точки  $r^i$ , и могут быть найдены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1.1). В двумерном случае  $r = (x, y)$ ,  $\tau = (\cos \theta, \sin \theta)$ , и (3.1.1) переписывается в виде системы (3.1.2).

**Теорема 4.2.2** *Решение уравнения (4.2.30), удовлетворяющее условию  $\psi^{-1}(0) = (\alpha_0, 0)$ , получается исключением параметра  $C$  из пары квадратур*

$$\pm \psi = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{V(\alpha) \sqrt{1 - C^2 V^2(\alpha)}}, \quad \pm \beta = C \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{V(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 - C^2 V^2(\alpha)}}. \quad (4.2.31)$$

В случае когда уравнение (4.2.30) имеет пространство лучей постоянной кривизны, фронты и лучи описываются явными формулами, приведенными в таблицах 4.2.1-4.2.3. В таблице 4.2.1 приводится уравнение фронта, разрешенное относительно  $t$ , в таблице 4.2.2 – уравнение фронта, разрешенное относительно  $\beta$ , а в таблице 4.2.3 – уравнение лучей.

Таблица 4.2.1. Формулы для фронта волны, разрешенные относительно  $t$

$V(\alpha)$	Уравнение фронта
$w = \text{const}$	$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = w^2 t^2$
$w\alpha$	$\text{ch } wt = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha_0^2}{2\alpha\alpha_0}$
$w \cos(k\alpha)$	$\text{ch } kwt = \frac{\text{ch } k\beta - \sin k\alpha \sin k\alpha_0}{\cos k\alpha \cos k\alpha_0}$
$w e^{k\alpha}$	$\frac{1}{2}k^2 w^2 t^2 = \frac{\text{ch } k(\alpha - \alpha_0) - \cos k\beta}{e^{k(\alpha + \alpha_0)}}$
$w \text{sh}(k\alpha)$	$\text{ch } kwt = \frac{\text{ch } k\alpha \text{ch } k\alpha_0 - \cos k\beta}{\text{sh } k\alpha \text{sh } k\alpha_0}$
$w \text{ch}(k\alpha)$	$\cos kwt = \frac{\text{sh } k\alpha \text{sh } k\alpha_0 + \cos k\beta}{\text{ch } k\alpha \text{ch } k\alpha_0}$

Таблица 4.2.2. Формулы для фронта волны, разрешенные относительно  $\beta$

$V(\alpha)$	Уравнение фронта
$w = \text{const}$	$\beta^2 = w^2 t^2 - (\alpha - \alpha_0)^2$
$w\alpha$	$\beta^2 = \alpha_0^2 \text{sh}^2 wt - (\alpha - \alpha_0 \text{ch } wt)^2$
$w \cos(k\alpha)$	$\text{ch } k\beta = \cos k\alpha \cos k\alpha_0 \text{ch } kwt + \sin k\alpha \sin k\alpha_0$
$w e^{k\alpha}$	$\cos k\beta = \text{ch } k(\alpha - \alpha_0) - \frac{1}{2}k^2 w^2 t^2 e^{k(\alpha + \alpha_0)}$
$w \text{sh}(k\alpha)$	$\cos k\beta = \text{ch } k\alpha \text{ch } k\alpha_0 - \text{ch } kwt \text{sh } k\alpha \text{sh } k\alpha_0$
$w \text{ch}(k\alpha)$	$\cos k\beta = \text{ch } k\alpha \text{ch } k\alpha_0 \cos kwt - \text{sh } k\alpha \text{sh } k\alpha_0$

Таблица 4.2.3. Формулы для лучей

$V(\alpha)$	Уравнение лучей
$w = \text{const}$	$\alpha - \alpha_0 = C\beta$
$w\alpha$	$\alpha^2 + (\beta - C)^2 = \alpha_0^2 + C^2$
$w \cos(k\alpha)$	$\sin k\alpha = \sin k\alpha_0 \text{ch } k\beta + C \text{sh } k\beta$
$w e^{k\alpha}$	$e^{k(\alpha - \alpha_0)} = \cos k\beta + C \sin k\beta$
$w \text{sh}(k\alpha)$	$\text{ch } k\alpha = \text{ch } k\alpha_0 \cos k\beta + C \sin k\beta$
$w \text{ch}(k\alpha)$	$\text{sh } k\alpha = \text{sh } k\alpha_0 \cos k\beta + C \sin k\beta$

**Доказательство теоремы 4.2.2.** Решение (4.2.30) производится по стандартной схеме. Уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{d\alpha}{2p} = \frac{d\beta}{2q} = -\frac{dp}{V'(\alpha)/V^3(\alpha)} = \frac{dq}{0}$$

$(p = \psi_\alpha, q = \psi_\beta)$  и допускает очевидный первый интеграл  $q$ . Подставляя  $q = C, p = \sqrt{1/V^2(\alpha) - C^2}$  в формулу  $\psi = \int_{\alpha_0}^{\alpha} [pd\alpha + qd\beta]$ , получаем

$$\psi = \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{V^2(\alpha)} - C^2} d\alpha + C\beta.$$

Поскольку константа  $C$  должна определяться из условия  $d\psi/dC = 0$ , у нас появляется еще одно соотношение

$$\pm\beta = C \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{V^2(\alpha)} - C^2}} d\alpha,$$

совпадающее со второй формулой (4.2.31). Подстановка же выражения для  $\beta$  в формулу для  $\psi$  дает в точности первую формулу (4.2.31).

Формулы второй части теоремы удастся получить, вычисляя, пользуясь спецификой функций  $V(\alpha)$ , квадратуры (4.2.31) и исключая из них константу  $C$  (что представляет наибольшие сложности во всем процессе решения). Впрочем, то, что приведенные функции дают решение, проще убедиться прямой проверкой.

Формулы для лучей также проверяются непосредственно: то, что указанные семейства кривых при любом  $C$  проходят через точку  $(\alpha_0, 0)$  – очевидно, а в том, что это семейство ортогонально фронтам, проще всего убедиться вычислением скалярного произведения градиентов. Этим замечанием мы и завершаем доказательство теоремы.

Внешний вид фронтов и лучей, описываемых формулами теоремы 4.2.2, приведен на рис. 4.2.1.

Из формул теоремы 4.2.2 следует, что в первых трех случаях ( $V(\alpha)$  постоянная, линейная и косинус) фронт остается замкнутой поверхностью всегда. Первый случай соответствует однородной среде и хорошо известен. Во втором случае, хотя среда уже неоднородная, фронт остается окружностью, только с "плывущим центром". Система лучей порождает классическую геометрию Лобачевского в полуплоскости. Третий случай, по существу, уже ничего нового не привносит: от второго он отличается только тем, что  $V(\alpha)$  обращается в нуль не на одной, а на двух параллельных прямых, поэтому процесс распространения волны происходит не в полуплоскости, а в полосе между этими двумя прямыми. Здесь мы имеем дело с еще одной моделью геометрии Лобачевского.

Более экзотическим является поведение фронта и лучей в случаях, когда  $V(\alpha)$  имеет экспоненциальный рост. Здесь фронт остается замкнутой поверхностью только в течение конечного промежутка времени ( $t < e^{-k\alpha_0}/kw$

Рис. 4.2.1. Фронты (жирные линии) и лучи (тонкие линии) для уравнений постоянной кривизны с плоским слоением. Вверху слева  $v \equiv w$ , по центру  $v = wx$ , справа  $v = w \cos kx$ ; внизу слева  $v = we^{kx}$ , по центру  $v = w \operatorname{sh} kx$ , справа  $v = w \operatorname{ch} kx$

для случая экспоненты,  $t < \frac{1}{kw} \operatorname{arccsh} \operatorname{cth} k\alpha_0$  для гиперболического синуса и  $t < \frac{1}{kw} \operatorname{arccos} \operatorname{th} k\alpha_0$  для гиперболического косинуса), по истечении которого замыкается, приобретая форму неограниченной кривой с асимптотами  $\beta = \pm \frac{\pi}{2k}$ , а затем он снова превращается в ограниченную кривую.

Но теперь эта кривая уже не замкнута, ее концевые точки лежат на прямых  $\beta = \pm \pi/k$ , а сама она находится внутри полосы, ограниченной этими прямыми, и перемещается вдоль этой полосы в направлении убывания  $\alpha$ . В случае, когда  $V(\alpha)$  – экспонента, эта кривая, постепенно выпрямляясь, уходит в “бесконечно удаленный” конец полосы соответствующий  $\alpha = -\infty$ ; в случае гиперболического синуса она бесконечно приближается к отрезку  $\alpha = 0$ ; в случае же  $V(\alpha) = w \operatorname{ch} k\alpha$  поведение более сложное.

При  $t \rightarrow \frac{1}{kw} [\pi - \operatorname{arccos} \operatorname{th} k\alpha_0]$  происходит вторичный разрыв фронта, он снова приобретает асимптоты  $\beta = \pm \frac{\pi}{2k}$ , однако находится уже не внутри, а снаружи полосы, ограниченной этими асимптотами, распадаясь на две ветви. Затем фронт снова становится ограниченным и представляет собой пару кривых с концевыми точками на прямых  $\beta = \pm \pi/k$ , и эти кривые при  $t = \frac{\pi}{kw}$  стягиваются к точкам  $\alpha = \alpha_0, \beta = \pm \pi/k$ . В этот момент фронт покидает полосу  $|\beta| \leq \pi/k$  и переходит в две следующих полосы  $\pi/k < |\beta| < 2\pi/k$ , чтобы еще через период стянуться в следующую пару точек  $\alpha = \alpha_0, \beta = \pm 2\pi/k$ , и так далее.

Отметим, что описанный эффект локализации возмущения внутри полосы никак не связан ни с распределением нулей функции  $v(\alpha, \beta)$  (когда эти нули разбивают плоскость на области, в каждой из которых волно-

вой процесс происходит независимо), ни с распределением ее экстремумов (изучаемым в теории волноводов, когда возмущение локализуется, например, в полосе, играющей для функции  $v(\alpha, \beta) = V(\alpha)$  роль "потенциальной ямы"). Напротив, описанная локализация является, в определенном смысле, "самопроизвольной", область локализации зависит от начального условия и определяется только наличием интенсивного (экспоненциального) роста функции  $v$ , из-за чего лучи достаточно быстро разворачиваются в сторону антиградиента этой функции и превращаются в практически параллельный пучок, лежащий как раз внутри указанной полосы.

#### 4.2.6 Решения для уравнений со сферически-симметричным слоением

Как уже говорилось, уравнение (4.2.30) заменой  $x = e^\alpha \cos \beta$ ,  $y = e^\alpha \sin \beta$  сводится к уравнению  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = \left[ (x^2 + y^2) V^2(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) \right]^{-1}$ . Подстановка в формулы для  $V(\alpha)$  функций  $w = \text{const}$ ,  $w\alpha$ ,  $w \cos(k\alpha + h)$ ,  $w e^{k\alpha}$ ,  $w \text{sh}(k\alpha + h)$ ,  $w \text{ch}(k\alpha + h)$  приводит соответственно к уравнениям и формулам для лучей и фронтов, приведенным в таблицах 4.2.4-4.2.5. Для большего удобства мы эти формулы приводим в полярных координатах ( $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ). При этом, как нетрудно видеть, эффект локализации фронта также присутствует, только локализация обнаруживается не в полосе, а в угле (см. рис. 4.2.2).

Таблица 4.2.4. Формулы для фронта волны для случая постоянной кривизны в сферически-слоистых средах

$v(x, y)$	Уравнение фронта
$wr$	$\ln^2 \frac{r}{r_0} + \phi^2 = w^2 t^2$
$wr \ln r$	$\text{ch } w t = \frac{\ln^2 r + \ln^2 r_0 + \phi^2}{2 \ln r \ln r_0}$
$wr \cos(k \ln r)$	$\text{ch } k w t = \frac{\text{ch } k \phi - \sin(k \ln r) \sin(k \ln r_0)}{\cos(k \ln r) \cos(k \ln r_0)}$
$w r^{k+1}$	$\frac{1}{2} k^2 w^2 t^2 = \frac{r^{2k} + r_0^{2k} - 2r^k r_0^k \cos k \phi}{2r^{2k} r_0^{2k}}$
$w r^{1-k} (r^{2k} - \nu^2)$	$\text{ch } 2k w \nu^2 t = \frac{(r^{2k} + \nu^2)(r_0^{2k} + \nu^2) - 4\nu^2 r^k r_0^k \cos k \phi}{(r^{2k} - \nu^2)(r_0^{2k} - \nu^2)}$
$w r^{1-k} (r^{2k} + \nu^2)$	$\cos 2k w \nu^2 t = \frac{(r^{2k} - \nu^2)(r_0^{2k} - \nu^2) + 4\nu^2 r^k r_0^k \cos k \phi}{(r^{2k} + \nu^2)(r_0^{2k} + \nu^2)}$



Таблица 4.2.5. Уравнения лучей для случая постоянной кривизны в сферически-слоистых средах

$v(x, y)$	Уравнение лучей
$wr$	$r = r_0 e^{C\phi}$
$wr \ln r$	$\ln^2 r + (\phi - C)^2 = \ln^2 r_0 + C^2$
$wr \cos(k \ln r)$	$\sin(k \ln r) = \sin(k \ln r_0) \operatorname{ch} k\phi + C \operatorname{sh} k\phi$
$wr^{k+1}$	$r^k = r_0^k (\cos k\phi + C \sin k\phi)$
$wr^{1-k}(r^{2k} - \nu^2)$	$\operatorname{ch} k \ln r = \operatorname{ch} k \ln r_0 \cos k\phi + C \sin k\phi$
$wr^{1-k}(r^{2k} + \nu^2)$	$r_0^k (r^{2k} - \nu^2) = r^k [(r_0^{2k} - \nu^2) \cos k\phi + C \sin k\phi]$

### 4.2.7 Комментарии

К сожалению, уравнения с квазиплоским слоением автору не удалось свести даже к паре квадратур. Не исключено, что это вообще невозможно, и причиной этого является, скорее всего, то, что для таких уравнений двумерная группа симметрий не является абелевой.

Еще один класс уравнений, для которых не удается сделать то, что хотелось бы – это уравнения с  $v(x, y) = x^{1+\lambda}$ , где  $\lambda \neq 0, 1$ . Пара квадратур, к которой сводится решение этого уравнения, является неполными бета-функциями, и в элементарных функциях не выражается. За счет тождеств для бета-функций одну из квадратур можно заменить на соотношение

$$\pm[\lambda\psi + C\beta] = \sqrt{\alpha_0^{-2\lambda} - C^2\alpha_0^2} - \sqrt{\alpha^{-2\lambda} - C^2\alpha^2},$$

но в присутствии второй квадратуры исключение отсюда константы  $C$  все равно не дает сколь-нибудь приемлемой формулы. Единственным исключением является случай, когда  $\lambda+1 = 1/n$ , ( $n$  – целое), и тогда квадратуры выражаются в элементарных функциях, но и в этом случае решение оказывается достаточно обзримым только для  $n = 3$  ( $\lambda = -2/3$ )

$$\frac{27\beta^2}{(\alpha^{2/3} + \alpha_0^{2/3})^3} = \left[ 2 \frac{\sqrt{\psi^2 + 9\alpha^{2/3}\alpha_0^{2/3}}}{\alpha^{2/3} + \alpha_0^{2/3}} - 3 \right] \left[ \frac{\sqrt{\psi^2 + 9\alpha^{2/3}\alpha_0^{2/3}}}{\alpha^{2/3} + \alpha_0^{2/3}} + 3 \right]^2$$

и для  $n = -2$  ( $\lambda = -3/2$ )

$$\frac{9\psi^2}{(\alpha + \alpha_0)^3} = 4 - 3 \frac{4\alpha\alpha_0 - \beta^2}{(\alpha + \alpha_0)^2} - \frac{(4\alpha\alpha_0 - \beta^2)^{3/2}}{(\alpha + \alpha_0)^3},$$

в последнем случае имеет место локализация фронта в параболической области  $4\alpha\alpha_0 - \beta^2 > 0$ . Аналогичный эффект должен иметь место и для других отрицательных степеней, но пока что никакого общего принципа, позволяющего определить форму области локализации, пока нет. По-видимому,

Рис. 4.2.2. Фронты (жирные линии) и лучи (тонкие линии) для уравнений постоянной кривизны в сферически-симметричном варианте. Вверху слева  $v = wr$ , по центру  $v = wr \ln r$ , справа  $v = w \cos k \ln r$ ; внизу слева  $v = wr^{1+k}$ , по центру  $v = wr^{1-k}(r^{2k} - \nu^2)$ , справа  $v = wr^{1-k}(r^{2k} + \nu^2)$ .

это следует искать на пути исследования групп симметрий для уравнений лучей, однако исследование этой задачи – это предмет отдельной работы.

Отметим, что среди известных решений двумерного уравнения эйконала большая часть является либо уравнениями с нулевой кривизной (например, в справочнике [84] это уравнения 6.55, 6.56, 6.59), либо уравнениями с плоским слоением со степенной функцией слоения (например, уравнения 6.57 и 6.58 из [84], соответствующие случаю  $v(x, y) = 1/\sqrt{x}$ , т.е., в наших обозначениях,  $\nu = 3/2$ , для которого решение приведено выше). Для остальных уравнений, упомянутых в [84], решение в конечном виде получить не удастся (например, уравнение (6.60)), поскольку исключение постоянных из квадратур приводит к трансцендентным уравнениям. Аналогичная ситуация складывается и с проинтегрированной в [111] системой уравнений, описывающей лучи. Хотя там для лучей удалось описать явно их форму (циклоида), однако оказывается, что исключить из уравнений циклоиды параметры так, чтобы получить явное соотношение только между  $x$ ,  $y$  и  $\psi$ , не удастся, так как получающиеся уравнения тоже оказываются трансцендентными.

#### 4.2.8 Фронты волн точечного источника для трехмерного уравнения эйконала с шестимерной группой симметрий

Сравнивая формулировки теорем 4.1.2 и 3.3.1, нетрудно заметить, что редукция, описанная в леммах 3.6.1-3.6.3, сводит трехмерные уравнения эйконала с шестимерной группой симметрий в точности к двумерным уравнениям эйконала с постоянной кривизной, решения которых были приведены в предыдущем пункте. Поэтому для получения формул фронтов и лучей для сред, описываемых уравнениями эйконала с шестимерной (и пятимерной) группой симметрий, достаточно в формулах теоремы 4.2.2 совершить подстановку  $\alpha$  и  $\beta$  из лемм 3.6.1-3.6.3.

Для плоско-слоистой среды ( $\alpha = x$ ,  $\beta^2 = (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ ) это дает в случае  $V = \text{const}$  обычный сферический фронт для однородной среды, в случае  $V = wx$  – движущуюся сферу, описанную в теореме 3.6.1, в случае  $V = w \cos kx$  – выпуклую гладкую поверхность, лежащую в плоском слое толщины  $\pi/k$  (в котором косинус не обращается в нуль), постепенно захватывающую весь этот слой и стремящуюся при  $t \rightarrow \infty$  к паре плоскостей, ограничивающих этот слой.

Для случаев же  $V = we^{kx}$ ,  $V = w \operatorname{sh} kx$ ,  $V = w \operatorname{ch} kx$  мы получаем фронт, который в указанные в пункте 4.2.5 моменты времени размыкается, превращаясь в незамкнутую поверхность, граница которой лежит на поверхности цилиндра радиуса  $\pi/k$  (а сама поверхность – внутри этого цилиндра). В случае  $V = w \operatorname{ch} kx$  поверхность фронта стягивается в окружность  $x = -x_0$ ,  $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \pi^2/k^2$ , переходя затем в следующий цилиндрический слой.

Случай сферически-слоистой среды ( $\alpha = \ln r = 1/2 \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $\beta = \phi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}$ ) отличается от плоского, по существу, только выбором системы координат (сферической вместо декартовой), в результате чего в при  $V = \text{const}$ ,  $V = w\alpha$  и  $V = w \cos k\alpha$  возмущенная область имеет форму "блина", охватывающего начало координат, и в некоторый момент времени превращающийся в слой типа сферического с двумя границами – внутренней и внешней. В качестве интересного геометрического факта отметим, что для  $V(\alpha) = \text{const}$  ( $v(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) лучи оказываются логарифмическими спиралями.

Если же  $V(\alpha)$  является экспонентой или гиперболической функцией, то волновой фронт оказывается локализованным в конусе раствора  $2\pi/k$ . Эти случаи особенно интересны, поскольку связаны со степенным характером роста функции  $v(x, y, z)$  в зависимости от расстояния до начала координат.

Случай цилиндрически-слоистой среды (II.3<sub>1</sub>) (см. формулировку леммы 3.5.1) дает тоже "блиноподобный" фронт, но охватывающий теперь уже

ось аппликат. В отличие от предыдущих двух случаев, здесь эффект локализации фронта пропадает. Дело в том, что переменная  $\alpha = \arctg y/x$  в силу своего определения принимает значения лишь от  $-\pi$  до  $\pi$ , и если мы хотим рассматривать реальную среду с таким слоением, нам придется на функцию  $V(\cdot)$  налагать дополнительное условие периодичности  $|V(-\pi)| = |V(\pi)|$ , что исключает для нее возможность быть, например, экспонентой. Для остальных же функций  $V(\alpha)$  условие периодичности налагает дополнительное ограничение, позволяющее заключить эту функцию либо между двумя константами, либо между функциями вида  $C \sin \alpha$ . Поскольку для констант и для синусов эффект локализации отсутствует (в силу соответствующих явных формул, приведенных выше), и в силу того, что неравенство  $v_1(x, y, z) \leq v_2(x, y, z)$  влечет для решений соответствующих уравнений (3.1.3), описывающих фронт волны точечного источника, неравенство  $\psi_1(x, y, z) \geq \psi_2(x, y, z)$  (это – следствие того факта, что  $\psi(x, y, z)$  является экстремальным значением функционала (3.1.6), который монотонно зависит от  $v(r)$ ), в случае цилиндрического слоения среды эффект локализации невозможен.

Наконец, в случае осесимметрично-слоистых сред, описываемых формулами (II.1<sub>2</sub>)-(II.3<sub>2</sub>) (см. формулировку теоремы 3.5.1, нижний индекс означает вторую из пары формул) с функциями  $V(\cdot)$  вида (III) формулы получают постановкой в формулы для плоско-, радиально- и цилиндрически-слоистой среды замен (3.5.1), (3.5.9) и (3.5.2) соответственно. При этом в случае (II.3<sub>2</sub>) эффекта локализации, как и в случае (II.3<sub>1</sub>), не наблюдается в связи с появлением дополнительного условия периодичности для  $V(\cdot)$  и с тем, что область значений переменной  $\alpha$  оказывается ограниченной.

В случаях (II.2<sub>2</sub>)-(II.3<sub>2</sub>) эффект локализации имеется, однако его удобнее описывать не в аналитических, а в геометрических терминах, так как области локализации в этих случаях получаются из плоского и сферически-симметричного случая инверсиями, а сами области локализации ограничены поверхностями, образованными семействами прямых и окружностей, преобразующихся при инверсии также в семейства прямых или окружностей. Эти фигуры известны в геометрии под названием *циклид Дюпена* [70]. Для экспоненциально растущих функций  $V(\alpha)$  вида III так полученная область локализации оказывается, в зависимости от расположения источника, либо внешностью области типа "сомкнувшегося тора" (когда радиус окружности, образующей ось тора меньше радиуса трубки, а при  $\nu = 0$  – равен ей), но с переменным радиусом трубки, либо внутренностью области типа веретена, изогнутого дугой так, что его острые концы находятся в точках  $(\pm\nu, 0, 0)$  (а при  $\nu = 0$  – смыкаются в начале координат).

# Литература

- [1] Авдонин С.А., Белишев М.И., Иванов С.А. Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения  $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$  // Матем. сборник. 1991. Т. 182, N 3. С. 307-331.
- [2] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными эллиптического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
- [3] Алексеев А.С. Задачи типа Лэмба для волнового уравнения в линейно-неоднородном полупространстве // Уч. зап. ЛГУ. Математика. вып. 32. N 246. С. 167-227.
- [4] Алексеев А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв АН СССР. Сер. геофиз.1962. N 11. С. 1514-1531.
- [5] Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967. С. 9-84.
- [6] Алексеев А.С., Бабич В.М. Об одном эффекте экранирования упругих волн тонким слоем // Уч. зап. ЛГУ. Математика. вып. 28, N 177. С. 180-193.
- [7] Алексеев А.С., Гельчинский Б.Я. Об определении интенсивности головных волн в теории упругости лучевыми методами // ДАН СССР. 1958. Т. 118, N 4. С. 661-664.
- [8] Аниконов Ю.Е., Пестов Л.Н. Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск, НГУ. 1990. 64 с.
- [9] Арнольд В.И. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50. вып. 1. С. 3-68.
- [10] Арнольд В.И. Топологические проблемы теории распространения волн // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51. вып. 1. С. 3-50.
- [11] Бабич В.М. Доказательство геометро-оптического приближения для функции Грина // Матер. к совм. сов.-амер. симп. Новосибирск, 1963. 7 с.

- [12] Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики // Уч. зап. ЛГУ. Математика. вып. 32, N 246. С. 228-260.
- [13] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
- [14] Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны. Л.: Из-во ЛГУ, 1985. 272 с.
- [15] Бабич В.М. Математическая теория дифракции // Тр. МИАН. 1986. Т. 175. С. 47-62.
- [16] Бабич В.М., Климова А.А. Гиперболическое уравнение с большим параметром при младших членах и иерархия волн // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, вып. 5. С. 126-171.
- [17] Багдоев А.Г. Некоторые нестационарные задачи распространения волн в полупространстве. Дис... канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1958. 220 с.
- [18] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фушич В.И. Редукция и точные решения уравнения эйконала // Украинский матем. журнал. 1991. Т. 43, N 4. С. 461-474.
- [19] Баранов В., Кюнец Ж. Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями // Проблемы сейсмической разведки. М.: Гостехиздат, 1962. С. 179-188.
- [20] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна // М.: Физматлит, 2003. 88 с.
- [21] Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Докл. РАН. 2000. Т. 370, N 1. С. 7-10.
- [22] Белишев М.И. О нарушении условия разрешимости обратной задачи для неоднородной струны // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 4. С. 57-58.
- [23] Белишев М.И. Уравнения типа Гельфанда-Левитана в многомерной задаче для волнового уравнения // Зап. научн. сем. ЛОМИ 1987. Т. 165, вып. 7. С. 15-20.

- [24] Белишев М.И. Обратная спектральная индефинитная задача для уравнения  $y'' + \lambda\rho(x)y = 0$  на промежутке // Функци. анализ и его прил. 1987. Т. 21, вып. 2. С. 68-69.
- [25] Белишев М.И. Волновые базисы в многомерных обратных задачах // Матем. сборник. 1989. Т. 189, N 5. С. 584-602.
- [26] Белишев М.И., Гласман А.К. Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (ВС-метод) // Алгебра и Анализ. 2000. Т. 12, вып. 2. С. 131-187.
- [27] Берест Ю.Ю., Веселов А.П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49, вып. 6. С. 7-78.
- [28] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., Наука, 1982. 336 с.
- [29] Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. МИАН. 1971. Т. 115. С. 28-38.
- [30] Благовещенский А.С. Обратная краевая задача теории распространения волн в анизотропной среде // Тр. МИАН. 1971. Т. 115. С. 39-56.
- [31] Благовещенский А.С. Об обратных задачах теории распространения нестационарных волн // Прямые и обратные задачи теории дифракции. М.: 1979. С. 116-141.
- [32] Благовещенский А.С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Тр. Ленингр. ун-та. 1966. вып. 1. С. 68-81.
- [33] Боровиков В.А. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Тр. ММО. 1959. Т. 8. С. 199-257.
- [34] Боровиков В.А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., Наука, 1966. 455 с.
- [35] Боровских А.В. Формула распространения волны в одномерной неоднородной среде // Труды ВВМШ "Понтрягинские чтения - XI". Часть II. Воронеж, 2000. С. 36-40.
- [36] Боровских А.В. Распространение волн в одномерной неоднородной среде // Воронеж. ун-т. Воронеж, 2000. 52с. / Деп. в ВИНТИ 13.12.00, N 3134-B00.

- [37] Боровских А.В. Формула распространяющихся волн для одномерной среды // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения И.Г.Петровского. Тез. докл. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 72-73.
- [38] Боровских А.В. Групповая классификация уравнений эйконала для волнового уравнения в неоднородной среде // Воронеж. ун-т. Воронеж, 2002. 143 с. Деп. в ВИНТИ 29.05.02. N 953-B2002.
- [39] Боровских А.В. Формула распространяющихся волн для од- номерной неоднородной среды // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, N 6. С. 758-767.
- [40] Боровских А.В. Групповая классификация уравнения эйконала для неоднородной среды // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, N 11. С. 1570.
- [41] Боровских А.В. Геометрия фронтов и лучей в среде с линейной и квадратичной функцией скорости // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, N 11. С. 1573.
- [42] Боровских А.В. Уравнение эйконала в неоднородной среде // Доклады РАН. 2003. Т. 391, N 5. С. 587-590.
- [43] Боровских А.В. Групповая классификация уравнений эйконала для волнового уравнения в неоднородной среде // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 10, С. 22-33.
- [44] Боровских А.В. Групповая классификация уравнений эйконала для трехмерной неоднородной среды // Матем. сборник. 2004. Т. 195, N 4. С. 23-64.
- [45] Боровских А.В. Уравнение эйконала в неоднородной среде // Тез. докл. Междунар. конф., посвященной 103-летию со дня рождения И.Г.Петровского. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 36-37.
- [46] Боровских А.В. Иллюзия движущегося источника в геометрической оптике неоднородных сред // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, N 7. С. 758-767.
- [47] Боровских А.В. Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2004. Т. 24. С. 3-43.



- [48] Боровских А.В. Группы эквивалентности уравнений эйконала и классы эквивалентных уравнений // Вестник НГУ. 2005.
- [49] Боровских А.В. Выражение функции Римана для волнового уравнения в неоднородной среде через коэффициенты переноса // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, N 6. С. 851.
- [50] Боровских А.В. Групповой анализ двумерного уравнения эйконала // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, N 6. С. 854.
- [51] Боровских А.В. Явные решения двумерных уравнений эйконала // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, N 6. С. 859.
- [52] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
- [53] Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
- [54] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., Наука, 1975. 586 с.
- [55] Вайнберг Б.Р. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1966. Т. 21, вып. 3. С. 115-194.
- [56] Вахания Н.Н. О некоторых краевых задачах для уравнения колебания струны в прямоугольной области. Дисс... к.ф.-м.н. М., 1958. 68 с.
- [57] Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 288 с.
- [58] Волкодавов В.Ф., Шулов В.Е. Две задачи для уравнения колебания струны с интегральными условиями и специальными условиями сопряжения на характеристике // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 4. С. 503-507.
- [59] Волны // Физическая энциклопедия. Под ред. А.М.Прохорова. М., СЭ, 1998. Т. 2, С. 315.
- [60] Габов Е.А. Новые задачи математической теории волн М.: Наука, 1998. 448 с.
- [61] Гальперн С.А. Фундаментальные решения и лакуны квазигиперболических уравнений // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 2. С. 154-165.

- [62] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15, N 4. С. 309-360.
- [63] Гоголадзе В.Г. Волновое уравнение для неоднородных и анизотропных сред // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1935. Т. 9, С. 107-166.
- [64] Гордезиани Д.Г., Авилашвили Г.А. Решения нелокальных краевых задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12, N 1. С. 94-103.
- [65] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИИЛ, 1961. 122 с.
- [66] Григорьева Н.С. Асимптотические методы в задачах распространения звука в неоднородной движущейся среде. Л.: ЛГУ, 1991. 240 с.
- [67] Гринберг Н.И. Обратная задача рассеяния для одномерного волнового уравнения // Дисс... к.ф.-м.н. М., 1990. 71 с.
- [68] Громова Л.Г. О слабых лакунах для некоторых гиперболических уравнений, содержащих младшие члены. Дисс... к.ф.-м.н. М., 1966. 57 с.
- [69] Данилов В.Г., Шелкович В.М. Распространение и взаимодействие  $\delta$ -ударных волн гиперболических систем законов сохранения // Докл. РАН. 2004. Т. 394, N 1. С. 10-14.
- [70] Дарбу Г. Принципы аналитической геометрии. Л.-М.: ГТТЛ, 1938. 375 с.
- [71] Егоров Ю.В. Задачи оптимального управления и дифференциальные уравнения с частными производными // Матер. к совм. сов.-амер. симп. Новосибирск, 1963. 9 с.
- [72] Еругин Н.П., Смирнов М.М. Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, N 5. С. 853-865.
- [73] Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями // М.: Физматлит, 2004. 175 с.
- [74] Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах в математической физики. Новосибирск. Из-во НГУ, 1972. 160 с.

- [75] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [76] Ибрагимов Н.Х., Мамонтов Е.В. О задаче Коши для уравнения  $u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x-t)u_{y_i y_j} = 0$  // Матем. сборник. 1977. Т. 102, N 3. С. 391-409.
- [77] Ибрагимов Н.Х., Оганесян А.О. Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой // Успехи матем. наук. 1991. Т. 46, вып. 2. С. 111-146.
- [78] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 11. С. 1513-1528.
- [79] Ильин В.А. Граничное управление сферически симметричными колебаниями трехмерного шара // Труды МИРАН. 2001. Т. 232. С. 144-155.
- [80] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Доклады РАН. 2003. Т. 393, N 6. С. 730-734.
- [81] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Доклады РАН. 2004. Т. 394, N 2. С. 154-158.
- [82] Калашников А.С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с конечной скоростью распространения возмущений // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1972. N 6. С. 45-49.
- [83] Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, N 1. С. 60-65.
- [84] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., Наука, 1966. 260 с.
- [85] Киселев А.П. Относительно неискажающиеся волны. Новые примеры. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 2001. Т. 275. С. 100-103.
- [86] Киселев А.П., Перель М.В. Относительно неискажающиеся волны для  $m$ -мерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, N 8. С. 1128-1129.

- [87] Капитонов Б.В. Теоремы единственности и точное граничное управление для эволюционных систем // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34, N 5. С. 67-84.
- [88] Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Остановившиеся тепловые волны в неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, N 7. С. 1133-1137.
- [89] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222, 191 с.
- [90] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Параметрическое возбуждение высококомодовых колебаний у нелинейного телеграфного уравнения // Матем. сб. 2000. Т. 191, N 8. С. 45-68.
- [91] Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
- [92] Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // ДАН СССР. 1951. Т. 74, N 1. С. 21-24.
- [93] Крейн М.Г. Об обратных задачах для неоднородной струны // ДАН СССР. 1952. Т. 82, N 5. С. 669-672.
- [94] Крейн М.Г. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка // ДАН СССР. 1953. Т. 88, N 3. С. 405-408.
- [95] Крейн М.Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // ДАН СССР. 1953. Т. 93, N 4. С. 617-620.
- [96] Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // ДАН СССР. 1954. Т. 94, N 6. С. 987-990.
- [97] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [98] Лаврентьев М.М. Математические модели томографии и гиперболические отображения // Сиб. матем. журнал. 2001. Т. 42, N 5. С. 1094-1105.
- [99] Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики // М.: Наука, 1982. 88 с.

- [100] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.
- [101] Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., ГИТТЛ, 1953. 276 с.
- [102] Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971. 312 с.
- [103] Левин В.И., Гросберг Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.-Л., ГИТТЛ, 1951. 575 с.
- [104] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
- [105] Леонтович М.А., Фок В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, вып. 7. С. 557-573.
- [106] Лернер М.Е. Принцип максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана. Самара, 2001. 112 с.
- [107] Локшин А.А. О лакунах и слабых лакунах квазигиперболических уравнений // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ. 1976. 91 с.
- [108] Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 2. М., Наука, 1989. 436 с.
- [109] Мальцев А.И. К теории групп в целом // Избр. труды., Т. 1. М.: Наука, 1976. С. 177-200.
- [110] Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев: Наукова Думка, 1972. 219 с.
- [111] Марчук А.Н., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. М., Наука, 1983. 175 с.
- [112] Меграбов А.Г. Дифференциальные инварианты и спектральный метод в прямых и обратных задачах с переменными коэффициентами. Автореф. ... доктора физ.-мат. наук. Новосибирск, Ин-т вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. 2004 г. 32 с.
- [113] Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., Физматлит, 1995. 336 с.

- [114] Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М., Физматлит, 2003. 432 с.
- [115] Моисеев Е.И., Тихомиров В.В., Козлов Е.А. Формула среднего значения для регулярного решения гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, N 10. С. 1802-1803.
- [116] Молотков И.А., Вакуленко С.А., Бисярш М.А. Нелинейные локализованные волновые процессы. М.: Янус-К, 1999. 176 с.
- [117] Молотков И.А. Аналитические методы в теории нелинейных волн. М.: Физматлит, 2003. 208 с.
- [118] Морозов О.И. Проблема контактной эквивалентности для линейных гиперболических уравнений // Тез. докл. Междунар. конф., посв. 103-летию со дня рождения И.Г.Петровского. М, Изд-во МГУ, 2004. с. 143.
- [119] Мышкис А.Д. О максимальной области разрешимости смешанной задачи для почти линейной гиперболической системы с двумя независимыми переменными // Матер. к совм. сов-амер. симп. по уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963. 10 с.
- [120] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
- [121] Никольский Э.В. Обобщенные функционально-инвариантные решения и эквивалентные системы уравнений математической физики. Новосибирск, Наука, 1997. 156 с.
- [122] Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев: Наукова думка, 1991. 231 с.
- [123] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнения С.А.Чаплыгина // ПМТФ. 1960. N 3. С. 126-145.
- [124] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [125] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30-55.
- [126] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.

- [127] Панов Е.Ю. К нелокальной теории обобщенных энтропийных решений квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка // Дисс... д.ф.-м.н. 01.01.02 – Дифференц. уравнения. Новгород, 1997. 252 с.
- [128] Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. Л.: Наука, 1978. 248 с.
- [129] Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-неоднородных изотропных упругих средах. Т. 1. Л.: Наука, 1982. 288 с.; Т. 2. Л.: Наука, 1985. 302 с.
- [130] Петрашень Г.И., Каштан Б.М., Киселев Ю.В. Количественное изучение нестационарных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельным границей раздела. I. Постановки задач и рациональные методы их решения // Интерференционные волны в слоистых средах. Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1994. Т.214. С. 7-185.
- [131] Петровский И.Г. О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений // Матем. сборник. 1945. Т. 17, N 3. С. 289-370.
- [132] Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В. Волновое уравнение на пространственной сети // Доклады РАН. 2003. Т. 388, N 1. С. 16-18.
- [133] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Гостехиздат, 1954. 515 с.
- [134] Popovich R.O., Yegorchenko I.A. Group classification of generalised eikonal equation // arXiv:math-ph/0112055, V.1. 22 Dec 2001.
- [135] Пташник Б.И. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова Думка, 1984. 264 с.
- [136] Пулькина Л.С. О разрешимости в  $L_2$  нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 2. С. 279-280.
- [137] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2001. Т. 70, вып. 1. С. 88-95.
- [138] Радкевич Е.В. Корректность математических моделей сплошных сред и термодинамика. Новосибирск: "Тамара Рожковская".
- [139] Рождественский Б.Л. О задаче Коши для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа в классе разрывных функций //

- Матер. к совм. сов-амер. симп. по уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963. 9 с.
- [140] Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972. 163 с.
- [141] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики Новосибирск: Наука, 1984. 263 с.
- [142] Романовский Р.К. Метод Римана для гиперболических систем с двумя независимыми переменными. Омск, 1995. 87 с.
- [143] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV. М.: ГТТЛ, 1953. 804 с.
- [144] Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Минск, БГУ, 1974. 232 с.
- [145] Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск, Высшая школа, 1977. 156 с.
- [146] Соболев С.Л. Волновое уравнение для случая однородной изотропной среды // Труды Сейсмологического ин-та. 1930. вып. 2. С. 163-167.
- [147] Соболев С.Л. Волновое уравнение для неоднородной среды // Труды Сейсмологического ин-та. 1930. вып. 6. С. 1-57.
- [148] Соболев С.Л. Функционально-инвариантные решения уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными // Труды физ.-мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259-264.
- [149] Соболев С.Л. К теории нелинейных гиперболических уравнений с частными производными // Матем. сборник. 1939. Т. 5, N 1. С. 71-98.
- [150] Соболев С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе // Докл. АН СССР. 1956, Т. 109. С. 707.
- [151] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1962. 255 с.
- [152] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1992. 431 с.
- [153] Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. 22. ВИНТИ АН СССР. М.: 1983.



- [154] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и М. Стиган. М., Наука, 1979. 832 с.
- [155] Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы. Пороговые свойства и усреднение. Автореф. дисс... доктора физ.-мат. наук. Спб., СПбГУ. 2005. 32 с.
- [156] Тихомиров В.В. Оптимальное управление нелокальных задач для распределенных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 5. С. 709-718.
- [157] Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, N 3. С. 393-403; N 4. С 529-537.
- [158] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М, Наука, 1977. 735 с.
- [159] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИИЛ, 1957. 443 с.
- [160] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [161] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, вып. 4. С. 57-119.
- [162] Филиппов А.Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 2. С. 305-318.
- [163] Филиппов А.Ф. Дифракция на двугранных и многогранных углах // Матем. сборник. 1966. Т. 70, N 4. С. 562-590.
- [164] Филиппов А.Ф. Отражение волны от границы, составленной из дуг различной кривизны // ПММ. 1970. Т. 34, N 6. С. 1076-1084.
- [165] Фиников С.П. Теория поверхностей. М.-Л.: ГТТИ, 1934. 200 с.
- [166] Фок В.А. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1946. Т. 10, N 2. С. 171-188.
- [167] Фок В.А. Обобщение отражательных формул на случай отражения волны произвольной волны от поверхности произвольной формы // ЖЭТТФ. 1950. Т. 20, вып. 11. С. 961-978.
- [168] Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 520 с.

- [169] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 350 с.
- [170] Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. М.: УРСС, 2003. 396 с.
- [171] Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991. 112 с.
- [172] Шарафутдинов В.А. Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск, 1993. 230 с.
- [173] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М., ИЛ, 1974. 359 с.
- [174] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948. 316 с.
- [175] Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001. 499 с.
- [176] Ali-Mehmeti F. Nonlinear waves in networks // Mathematical Research. V. 80. Berlin: Akademie Verlag. 1994. 174 p.
- [177] Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. P. 851-858.
- [178] Cinquini-Cibrario M., Cinquini S. Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico. 1964. 552 pp.
- [179] Davison M.E. A general approach to splitting and invariant embedding for linear wave equations // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 188, N 1. P. 158-181.
- [180] Fattorini H.O. Second-order linear differential equations in Banach spaces. Amsterdam. 1985. 314 p.
- [181] Friedlander F.G. On the integrals of a partial differential equation // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1947. V. 43, N 3. P. 348-359.
- [182] Friedlander F.G. Simple progressive solutions of the wave equation // Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. V. 43, N 3. P. 360-373.
- [183] Friedlander F.G. On the half-plane diffraction problem // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V. 4, N 3. P. 344-357.
- [184] Friedlander F.G. Note on the geometrical optics of diffracted wave fronts // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1949. V. 45, N 3. P. 395-404.

- [185] Friedlander F.G., Keller J.B. Asymptotic expansions of solutions of  $(\nabla^2 + k^2)u = 0$  // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8, N 3. P. 387-394.
- [186] Gårding L. The theory of lacunas // Hyperbolic equations and waves. Battelle Seattle 1968 Rencontres. Springer, 1970. P. 13-21.
- [187] He S. An explicit time-domain solution for the reflection from a stratified acoustic half-space obtained by the boundary control method // TRITA-TET 95-5. 16 p.
- [188] Huber A. Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$  // Monatsh. Math. und Phys. 1932. V. 39. S. 79-100.
- [189] John F. The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. 1941. V. 63. P. 141-154.
- [190] John F. Plane waves and spherical means. N.Y.: 1955. (Русск. перевод: Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. М.: ИИЛ, 1958. 158 с.)
- [191] Komornik V. Exact controllability and stabilization. John Wiley & sons, 1994. 156 pp.
- [192] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 1-3. Leipzig, Teubner, 1888, 1890, 1893.
- [193] Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. N 2. P. 1-68.
- [194] Meleshko S.V. Homogeneous autonomous systems with three independent variables // J. Appl. Math. Mech. 1994. V. 58. P. 857-863.
- [195] Olver P.J. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1995. 525 с.
- [196] Popovich R.O., Eshraghi H. Admissible point transformations of nonlinear Schrödinger equations // Proc. 10th Int. Conf. in Modern Group Analysis. 2005. в печати.
- [197] Rellich F. Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-th Order in Zwei Veränderlichen // Bullet. Soc. Math. France. 1878. V. 16, P. 249-278.

- [198] Riemann B. Über die Fortpflanzung ebner Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen. 1860. V. 8. (Русск. перевод: Риман Б. О распространении плоских волн конечной амплитуды // Сочинения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 376-395).
- [199] Russel D.L. Boundary value control of the higher-dimensional wave equation // SIAM J. Control. 1971. V. 9, N 1. P. 29-42.
- [200] Russel D.L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Review. 1978. V. 20, N 4. P. 639-739.
- [201] Tataru D. Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem // Comm. Partial Differ. Eq. 1995. V. 20, N 5-6. P. 855-884.
- [202] Weston V.H. On the inverse problem for a hyperbolic dispersive partial differential equation // J. Math. Phys. 1972. V. 13, N 12. P. 1952-1956.

# Приложение I

## Вывод формулы распространяющихся волн.

В этом параграфе мы покажем происхождение формулы (1.1.1). Ее вывод, на наш взгляд, очень важен, поскольку позволяет четко увидеть смысл всех величин, фигурирующих в формуле. Рассуждения, приведенные здесь, не являются строгими, поскольку в формальном обосновании формулы (1.1.1) нет необходимости: она доказана в предыдущем параграфе. Здесь же для нас будут важны ассоциативные, смысловые связи.

### I.1 Дискретизация: кусочно-однородная среда

При выводе формулы распространяющихся волн для уравнения (1.0.1) удобно воспользоваться классическими соображениями: разбить пространственную ось на достаточно малые интервалы, на каждом интервале заменить коэффициенты уравнения на постоянные, и, воспользовавшись формулами прохождения волны через точку скачка коэффициента, описать процесс распространения волн в "дискретизированном" варианте, а затем, устремив величину интервалов разбиения к нулю, выполнить "предельный переход" к формуле для непрерывной среды.

При этом оказывается удобным интервалы разбиения выбрать так, чтобы время пробегания сигнала по каждому из них было одно и то же (обозначим его через  $\tau$ ). Тогда, зафиксировав картинку в некоторый момент времени, мы через промежуток времени  $\tau$  получим, что правая волна с  $i$ -го интервала частично прошла на  $i + 1$ -й, а частично отразилась в виде уже левой волны на том же  $i$ -м интервале. При этом при переходе с интервала на интервал волны испытывают растяжение вдоль пространственной оси, определяемое пропорцией между длинами интервалов, т.е. интегралами по этим интервалам от  $\sqrt{a(x)/b(x)}$ .

Именно здесь возникает совершенно естественным образом замена неза-

висимой переменной (1.0.3), которая, с одной стороны, приводит уравнение (1.0.1) к уравнению (1.0.2), для которого скорость распространения сигнала равна единице, унифицируя тем самым разбиение и превращая его в равномерное, а с другой стороны – ликвидируя эффект растяжения волны по пространственной оси, так что наша кусочно-однородная среда превращается в дискретную динамическую систему, и для ее описания необходимы только коэффициенты прохождения волны через точку скачка коэффициента  $k(s)$ .

Эти формулы известны как формулы Баранова-Кюнеца [19], и выглядят следующим образом: для уравнения  $u_{tt} = u_{ss}$ , заданного на оси без точки  $s = 0$  с условиями согласования в этой точке  $u(t, +0) = u(t, -0)$  (условие непрерывности) и  $k^- u_s(t, -0) = k^+ u_s(t, +0)$  (условие гладкости) с положительными коэффициентами  $k^\pm$  решение, имеющее при  $t \leq 0$  имеет вид волны с конечным носителем, идущей слева направо по левой полуоси

$$u(t, s) = u_0(t - s) \quad \text{при } s < 0, \quad u(t, s) = 0 \quad \text{при } s > 0,$$

при  $t > T = \inf \text{supp } u_0$  (т.е. "после" прохождения всей волны через узел) будет иметь вид

$$u(t, s)|_{s < 0} = -\frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-} u_0(t + s), \quad u(t, s)|_{s > 0} = \frac{2k^-}{k^+ + k^-} u_0(t - s).$$

Таким образом, коэффициент отражения правой волны от узла равен  $-\theta = -(k^+ - k^-)/(k^+ + k^-)$ , а коэффициент прохождения волны через узел – соответственно  $1 - \theta = 2k^-/(k^+ + k^-)$ . При  $k^+ = \infty$  (закрепление в точке  $s = 0$ ) мы получаем коэффициент отражения равен  $-1$ , а коэффициент прохождения – нуль. При  $k^- = k^+$  (фиктивный разрыв) коэффициент отражения равен нулю, а коэффициент прохождения – единице.

Совершенно аналогично для волны, идущей справа налево коэффициент отражения оказывается равным  $\theta$ , а коэффициент прохождения, соответственно,  $(1 + \theta)$ .

Формула доказывается представлением решения в виде комбинации  $u(t, s) = [k^+ w(t, s) + k^- v(t, s)]/(k^+ + k^-)$  "четного" и "нечетного" (относительно нуля) решений  $v(t, s)$  и  $w(t, s)$ , которые при  $s < 0$  определяются теми же начальными условиями, что и искомое решение  $u(t, s)$ , а при  $s > 0$  – отражениями этих начальных условий относительно начала координат с коэффициентами  $1$  и  $-k^-/k^+$  соответственно. Для этих двух вспомогательных решений отражение от узла не зависит от коэффициентов условий согласования и осуществляется как отражение от "свободного конца" для четного решения (поскольку для него всегда  $u_s(t, \pm 0) \equiv 0$ ) и как отраже-

ние от "закрепленного конца" для нечетного (для которого, соответственно  $u(t, \pm 0) \equiv 0$ ).

Итак, осуществляя разбиение оси  $s$  на интервалы длиной  $h$  и заменяя на каждом интервале  $[s_i, s_{i+1}]$  этой оси коэффициент  $k(s)$  на постоянное число  $k_i (= k(\xi_i))$  (где  $\xi_i \in [s_i, s_{i+1}]$ ), мы получаем на каждом таком интервале обычное волновое уравнение  $u_{tt} = u_{ss}$ , а в узлах  $s_k$  сочленения интервалов – условие непрерывности  $u(t, s_i - 0) = u(t, s_i + 0)$  и квазигладкости  $k_{i-1}u_s(t, s_i - 0) = k_i u_s(t, s_i + 0)$ .

Представим теперь сужение  $u_i(t, s)$  решения  $u(t, s)$  такого уравнения на отрезок  $[s_i, s_{i+1}]$  в виде суммы  $v_i(t-s) + w_i(t+s)$  волн, идущих слева направо ("правая" волна) и справа налево ("левая" волна). Спустя промежуток времени  $h$  правая волна частично отразится, превратившись в левую на том же промежутке, а частично – пройдет в виде такой же правой волны на следующий промежуток. Аналогично поделится на части и левая волна.

Таким образом, произведя дискретизацию времени и положив  $t_j = hj$ , обозначив  $v_{ij}(s)$  и  $w_{ij}(s)$  правую и левую волну в момент времени  $t_j$  на промежутке  $[s_i, s_{i+1}]$ , мы приобретаем возможность оперировать с этими волнами как с простыми "частицами", которые, не меняя своей "внутренней структуры", просто делятся на "проходящую" и "отраженную" части, что отражается в рекуррентных формулах (см. рис. I.1)

$$v_{i,j+1} = (1 - \theta_i)v_{i-1,j} + \theta_i w_{i,j}, \quad w_{i,j+1} = (1 + \theta_{i+1})w_{i+1,j} - \theta_{i+1}v_{i,j},$$

где через  $\theta_i$  обозначена величина

$$\theta_i = \frac{k_{i+1} - k_i}{k_{i+1} + k_i} \tag{I.1}$$

Рис. I.1: Дискретизация: коэффициенты отражения и прохождения

Понятно, что на каждом следующем шаге эти волны будут дробиться на все большее число слагаемых, однако благодаря дискретизации выражение состояния при  $t = t_j$  через начальное состояние (при  $t=0$ ) оказывается уже чисто калькулятивной задачей: необходимо угадать алгоритм комбинирования этих волн, позволяющий написать обзримую формулу.

Основным соображением здесь оказывается группировка волн по числу отражений, т.е. представление  $v_{ij}$  и  $w_{ij}$  в виде суммы

$$v_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} v_{ij}^{[m]}, \quad w_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} w_{ij}^{[m]}$$

где через  $m$  обозначено число отражений, которое испытала соответствующая составляющая начальной волны для того, чтобы попасть в момент  $t_j$  на  $i$ -й промежуток.

Проще всего ситуация с  $m = 0$ . В этом случае соответствующая составляющая начальной волны просто не отражалась. Поскольку она в момент времени  $t = t_j = jh$  оказалась на  $i$ -м промежутке, в момент времени  $t = 0$  она находилась либо на  $(i - j)$ -м (для правой волны), либо на  $(i + j)$ -м (для левой волны) промежутке и имела то же направление, что и в момент  $t_j$ . При этом, правая волна, пройдя все точки  $s_{i-j+1}, \dots, s_i$  (а левая – пройдя все точки  $s_{i+j}, \dots, s_{i+1}$ ), "набирала" соответствующих множителей, так что

$$v_{ij}^{[0]} = v_{i-j,0} \prod_{s=i-j+1}^i (1 - \theta_s), \quad w_{ij}^{[0]} = w_{i+j,0} \prod_{s=i+1}^{i+j} (1 + \theta_s). \quad (I.2)$$

Далее, в случае  $m = 1$  мы имеем волны с одним отражением. Здесь, как и в случае любого нечетного числа отражений, правая волна в момент  $t_j$  формируется из левой "начальной", а левая, соответствующая  $t_j$  – из правой "начальной" волны. Для правой волны  $v_{ij}^{[1]}$  отражение возможно только в точках левее  $i$ -го отрезка и не левее  $s_{i-j}$  (иначе волна просто не успеет за время  $t_j$  дойти до  $i$ -го отрезка). При этом для того, чтобы отразиться от точки с номером  $i_1$  и попасть на  $i$ -й отрезок в момент  $j$ , волна в момент  $t = 0$  должна отправиться с отрезка с номером  $i_1 + (j - (i - i_1) - 1) = j + 2i_1 - i - 1$  ( $i - i_1$  временных шагов тратится на проход с  $i_1$ -го отрезка на  $i$ -й после отражения, 1 шаг – на отражение на  $i_1$ -м отрезке, а всего у нас точно  $j$  шагов). В итоге мы получаем сумму, в которой каждое слагаемое соответствует своей точке отражения и, соответственно, своей начальной позиции

$$v_{ij}^{[1]} = \sum_{i_1=i-j+1}^i w_{j+2i_1-i-1,0} \left[ \prod_{s=j+2i_1-i-1}^{i_1+1} (1 + \theta_s) \right] \theta_{i_1} \left[ \prod_{s=i_1+1}^i (1 - \theta_s) \right]. \quad (I.3)$$

Аналогично

$$w_{ij}^{[1]} = \sum_{i_1=i+1}^{i+j} v_{2i_1-j-i-1,0} \left[ \prod_{s=2i_1-j-i-1}^{i_1-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_1}) \left[ \prod_{s=i+1}^{i_1} (1 + \theta_s) \right]. \quad (I.4)$$



Такого же типа, но только более громоздкие вычисления приводят нас и к формулам для компонент с бóльшим числом отражений. Здесь нам придется рассмотреть отдельно два случая:  $m$ -четное и  $m$ -нечетное, т.к. они по существу образуются из разных начальных волн: слагаемые с четным номером – из волн той же направленности, а слагаемые с нечетным номером – из волн противоположной направленности.

Рассмотрим  $v_{ij}^{[2m]}$ . Они получены из тех компонент начальной волны, которые осуществили ровно  $2m$  отражений. Пусть эти отражения произошли в точках с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_{2m}$ . Обозначим через  $i_0$  номер того интервала, с которого начальная волна после всех этих отражений пришла на интервал с номером  $i$ , этот номер мы будем дальше обозначать как  $i_{2m+1}$ . Соответствующая начальная волна – это  $v_{i_0,0}$ , она шла слева направо, отразилась от точки  $i_1 > i_0$ , пошла налево, отразилась от точки  $i_2 < i_1$ , опять пошла направо, и т.д., пока после  $2m$ -го отражения от точки  $i_{2m} (< i_{2m-1})$  она не придет на  $i$ -й отрезок (для чего дополнительно необходимо, чтобы  $i_{2m} < i + 1$ ). Кроме того, поскольку все эти отражения произошли за  $j$  временных шагов, необходимо, чтобы

$$(i_1 - 1 - i') + 1 + (i_1 - 1 - i_2) + 1 + \dots + 1 + (i_{2m-1} - 1 - i_{2m}) + 1 + (i - i_{2m}) = j$$

(проход с отрезка с номером  $i_0$  на отрезок с номером  $i_1 - 1$ , отражение от правого конца этого отрезка – точки с номером  $i_1$ , обратный проход до отрезка с номером  $i_2$ , отражение от левого конца этого отрезка – точки с номером  $i_2$ , и т.д.), что можно в более компактной форме записывать в виде

$$\sum_{l=0}^{2m} |i_{l+1} - i_l| = j,$$

где, как мы договорились,  $i_{2m+1} = i$ . Осталось учесть те множители, которые наша волна насобираала при всех этих проходах и отражениях и просуммировать полученное выражение по всем возможным наборам точек отражения:

$$v_{ij}^{[2m]} = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{2m}) : i_{2l} < i_{2l\pm 1}, \\ \sum_{l=0}^{2m} |i_{l+1} - i_l| = j}} v_{i_0,0} \left[ \prod_{s=i_0+1}^{i_1-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_1}) \times \quad (I.5)$$

$$\times \left[ \prod_{s=i_2+1}^{i_1-1} (1 + \theta_s) \right] (\theta_{i_2}) \dots \left[ \prod_{s=i_{2m}+1}^{i_{2m-1}-1} (1 + \theta_s) \right] (\theta_{i_{2m}}) \left[ \prod_{s=i_{2m}+1}^i (1 - \theta_s) \right].$$

Произведения, в которых нижний предел больше верхнего, мы, естественно, будем считать равными единице (так как это возможно только когда  $i_{2l} = i_{2l+1} - 1$  или  $i_{2l} = i_{2l-1} - 1$ , что соответствует двум последовательным отражениям от концов одного и того же отрезка  $[s_i, s_{i+1}]$  без переходов на соседние отрезки).

Аналогично вычисляется и  $w_{ij}^{[2m]}$ , с той лишь разницей что нечетные точки отражения теперь должны быть не больше, а, наоборот, меньше соседних четных:  $i_{2l\pm 1} < i_{2l}$  и во всех произведениях коэффициент  $+\theta_s$  заменяется на  $-\theta_s$ .

$$w_{ij}^{[2m]} = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{2m}) : i_{2l} > i_{2l\pm 1}, \\ \sum_{l=0}^{2m} |i_{l+1} - i_l| = j}} w_{i_0,0} \left[ \prod_{s=i_1+1}^{i_0} (1 + \theta_s) \right] (\theta_{i_1}) \times \quad (I.6)$$

$$\times \left[ \prod_{s=i_1+1}^{i_2-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_2}) \dots \left[ \prod_{s=i_{2m-1}+1}^{i_{2m}-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_{2m}}) \left[ \prod_{s=i_1+1}^{i_{2m}-1} (1 + \theta_s) \right].$$

Аналогично находятся и нечетные слагаемые  $v_{ij}^{[2m-1]}$ ,  $w_{ij}^{[2m-1]}$ , в которых по существу меняется лишь одно: правая волна при  $t = t_j$  выражается через левую начальную волну, а левая при  $t = t_j$  – через правую начальную:

$$v_{ij}^{[2m-1]} = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{2m-1}) : i_{2l} > i_{2l\pm 1}, \\ \sum_{l=0}^{2m-1} |i_{l+1} - i_l| = j}} w_{i_0,0} \left[ \prod_{s=i_1+1}^{i'} (1 + \theta_s) \right] (\theta_{i_1}) \times \quad (I.7)$$

$$\times \left[ \prod_{s=i_1+1}^{i_2-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_2}) \dots \left[ \prod_{s=i_{2m-1}+1}^{i_{2m-2}-1} (1 + \theta_s) \right] (\theta_{i_{2m-1}}) \left[ \prod_{s=i_{2m-1}+1}^i (1 - \theta_s) \right].$$

$$w_{ij}^{[2m-1]} = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{2m-1}) : i_{2l} < i_{2l\pm 1}, \\ \sum_{l=0}^{2m-1} |i_{l+1} - i_l| = j}} v_{i_0,0} \left[ \prod_{s=i'+1}^{i_1-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_1}) \times \quad (I.8)$$

$$\times \left[ \prod_{s=i_2+1}^{i_1-1} (1 + \theta_s) \right] (\theta_{i_2}) \dots \left[ \prod_{s=i_{2m-2}+1}^{i_{2m-1}-1} (1 - \theta_s) \right] (-\theta_{i_{2m-1}}) \left[ \prod_{s=i+1}^{i_{2m-1}-1} (1 + \theta_s) \right].$$

## I.2 Пределный переход

Нам осталось совершить предельный переход в полученных формулах для  $v_{ij}^{[m]}$  и  $w_{ij}^{[m]}$ . Хотя, по большому счету, этот предельный переход может быть формализован и доведен до аккуратного доказательства, однако затраты, которые необходимы на это, представляются неоправданно большими. Уже обоснование корректности аппроксимации континуальной модели с помощью дискретной требует, по большому счету, рафинированной техники современного функционального анализа. Приводимый ниже предельный переход невозможен без довольно тонких оценок и дополнительных предположений, с физической точки зрения непринципиальных. Все это, вкуче с громоздкостью самих формул, делает доказательство неэффективным – прямая подстановка конечных формул в уравнение подтверждает справедливость результата гораздо более коротким способом. Поэтому мы, оставив в стороне доказательность, будем рассуждать здесь только на уровне идей, принципов, "грубых" прикидок. Этого оказывается достаточно для получения верного результата.

Итак, осуществим теперь предельный переход при  $h \rightarrow 0$  в формулах (I.2)-(I.8). Прежде всего обратимся к формулам (I.2). Если мы зафиксируем точку  $s$  и время  $t$ , для которого мы хотим вычислить соответствующие компоненты  $v_0(t, s)$  и  $w_0(t, s)$ , то, конечно, номера этой точки и соответствующего момента времени будут меняться. Но при этом, независимо от изменения номеров, точка с номером  $i(h)$  всегда будет соответствовать точке  $s$ , точка с номером  $i(h) - j(h)$  – точке  $s - t$  а точка с номером  $i(h) + j(h)$  – точке  $s + t$ , так что в предельных формулах мы просто можем заменить  $v_{i-j,0}$  и  $w_{i+j,0}$  на  $v(0, s - t)$  и  $w(0, s + t)$  соответственно.

Далее, в формулах (I.2) присутствуют произведения

$$\prod_{s=i-j+1}^i (1 - \theta_s) \quad \text{и} \quad \prod_{s=i+1}^{i+j} (1 + \theta_s).$$

По определению  $\theta_s$

$$\theta_s = \frac{k_{i+1} - k_i}{k_{i+1} + k_i},$$

и, поскольку мы в качестве  $k_i$  брали значения функции  $k(s)$  в одной из внутренних точек отрезка  $[s_i, s_{i+1}]$ , при  $h \rightarrow 0$  величины  $\theta_s$  можно считать,

с точностью до б.м. порядка  $h^2$ , равными

$$\theta_s = \frac{k'(s_i)}{2k(s_i)}h + o(h^2). \quad (\text{I.1})$$

Произведение множителей  $\prod(1 - \theta_s)$  равно экспоненте от суммы  $\sum \ln(1 - \theta_s)$ , которая, с точностью до бесконечно малых второго порядка, совпадает с суммой

$$\sum(-\theta_s) = -\sum \frac{k'(s_i)}{2k(s_i)}h,$$

а она является, очевидно, интегральной суммой для

$$-\int \frac{k'(s)}{2k(s)}ds = -\frac{1}{2} \ln k(s).$$

Остается заметить, что суммированию от  $(i - j + 1)$  до  $i$  соответствует интегрирование от  $s - t$  до  $s$ , так что окончательно получаем

$$\prod_{s=i-j+1}^i (1 - \theta_s) \rightarrow e^{-\frac{1}{2} \ln k(s)|_{s-t}^s} = \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}}, \quad (\text{I.2})$$

и аналогично

$$\prod_{s=i+1}^{i+j} (1 + \theta_s) \rightarrow e^{\frac{1}{2} \ln k(s)|_s^{s+t}} = \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}}. \quad (\text{I.3})$$

Таким образом, предельный переход в формулах (I.2) дает

$$v^{[0]}(t, s) = \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}}v(0, s-t), \quad w^{[0]}(t, s) = \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}}w(0, s+t),$$

что совпадает с первым и вторым слагаемыми формулы (1.1.1).

Формулы (I.2)-(I.3) для произведений позволяют вычислить без труда пределы и в формулах (I.3)-(I.4). Достаточно обозначить через  $\xi$  точку отражения (которой соответствует номер  $i_1$ , конечно, меняющийся с изменением  $h$ ), через  $y$  – отправную точку волны (которой соответствует номер  $(j + 2i_1 - i - 1)$  для первой формулы и номер  $(2i_1 - j - i - 1)$  для второй), заменить  $\theta_{i_1}$  по формуле (I.1) и произведения по формулам (I.2), (I.3) (с соответствующей заменой пределов интегрирования), и мы получим

$$\sum_{\xi} w(0, \xi) \sqrt{\frac{k(y)}{k(\xi)} \frac{k'(\xi)}{2k(\xi)}} h \sqrt{\frac{k(\xi)}{k(s)}} = \sum_{\xi} w(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)} \frac{k'(\xi)}{2k(\xi)}} h,$$

что является, очевидно, интегральной суммой для интеграла

$$v^{[1]}(t, s) = \int w(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)} \frac{k'(\xi)}{2k(\xi)}} d\xi$$

(здесь надо помнить, что  $y$  – не независимая переменная, а функция от  $\xi$ :  $y = 2\xi + t - s$ ), и после естественного перехода от независимой переменной  $\xi$  к независимой переменной  $y$  (для которой и пределы интегрирования расставляются естественным образом – это  $s - t$  и  $s + t$ ) мы получаем

$$v^{[1]}(t, s) = \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} w(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi\left(\frac{s + y - t}{2}\right) dy. \quad (I.4)$$

Через  $\phi(s)$  мы обозначили, как и в теореме 1.1.1, отношение (1.0.5), а коэффициент перед интегралом – это коэффициент пропорциональности между  $dy$  и  $d\xi$ .

Те же соображения дают "предел" для формулы (I.4)

$$w^{[1]}(t, s) = -\frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} w(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi\left(\frac{s + y + t}{2}\right) dy. \quad (I.5)$$

Пределный переход в формулах (I.5)-(I.8) по существу никаких дополнительных соображений уже не требует. Замена в (I.5)  $\theta_s$  по формуле (I.1) и произведений по формулам (I.2), (I.3) дает сумму

$$(-1)^m \sum_{\substack{(\xi_1, \dots, \xi_{2m}) : \\ \xi_{2l} < \xi_{2l\pm 1}, \\ \xi_0 = y, \xi_{2m+1} = s, \\ \sum_{l=0}^{2m} |\xi_{l+1} - \xi_l| = t}} v_{y,0} \sqrt{\frac{k(y)}{k(\xi_1)}} \phi(\xi_1) \sqrt{\frac{k(\xi_1)}{k(\xi_2)}} \phi(\xi_2) \dots \phi(\xi_{2m}) \sqrt{\frac{k(\xi_{2m})}{k(s)}} h^{2m},$$

которая является интегральной суммой для интеграла

$$(-1)^m \int_{\substack{(\xi_1, \dots, \xi_{2m}) : \\ \xi_{2l} < \xi_{2l\pm 1}, \\ \xi_0 = y, \xi_{2m+1} = s, \\ \sum_{l=0}^{2m} |\xi_{l+1} - \xi_l| = t}} v(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi(\xi_1) \phi(\xi_2) \dots \phi(\xi_{2m}) d\xi_1 \dots d\xi_{2m}.$$

Полученный интеграл нам придется преобразовать. Причин здесь несколько. Во-первых, желательно вынести в "наружный" интеграл интегрируемую функцию, для чего  $y$  нужно сделать переменной интегрирования. Во-вторых, присутствие модулей делает несколько затруднительной

расстановку пределов интегрирования для переменных  $\xi_i$ . Поэтому мы перейдем к новым переменным  $s_1, s_2, \dots, s_{2m-1}$  и  $y$ , положив

$$\begin{aligned} s_1 &= \xi_1 - y, & s_2 &= \xi_1 - \xi_2, & s_3 &= \xi_3 - \xi_2, & \dots \\ s_{2m-2} &= \xi_{2m-1} - \xi_{2m-2}, & s_{2m-1} &= \xi_{2m-1} - \xi_{2m}, \end{aligned}$$

и выразив в терминах  $y$  и  $s_i$  старые переменные  $\xi_i$  и соответствующую область интегрирования:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y + s_1, & \xi_2 &= y + s_1 - s_2, & \xi_3 &= y + s_1 - s_2 + s_3, & \dots \\ \xi_{2m-2} &= y + s_1 - s_2 + s_3 - \dots + s_{2m-2}, \\ \xi_{2m-1} &= y + s_1 - s_2 + s_3 - \dots + s_{2m-2} - s_{2m-1}. \end{aligned} \tag{I.6}$$

Неравенства  $\xi_{2l} < \xi_{2l+1}$  для  $0 \leq l \leq m-1$  означают, что просто  $s_i > 0$ , равенство

$$\sum_{l=0}^{2m} |\xi_{l+1} - \xi_l| = t$$

в новых переменных превращается в

$$\sum_{l=0}^{2m-1} s_l + \xi_{2m-1} - 2\xi_{2m} + s = t,$$

что дает формулу для вычисления  $\xi_{2m}$ :

$$\xi_{2m} = \frac{y + s - t}{2} + \sum_{l=1}^m s_{2l-1}$$

(после подстановки  $\xi_{2m-1}$  из (I.6)), и неравенства  $\xi_{2m} < \xi_{2m-1}$  и  $\xi_{2m} < s$  дают нам соответственно неравенства

$$\sum_{l=1}^{m-1} s_{2l} < \frac{y - s + t}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^m s_{2l-1} < \frac{s - y + t}{2},$$

которые, собственно, и задают верхние пределы интегрирования. Осталось заметить, что  $|d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{2m}| = \frac{1}{2} |ds_1 ds_2 \dots ds_{2m-1} dy|$ , чтобы получить представление нашей функции в виде кратного интеграла:

$$\begin{aligned} v^{[2m]}(t, s) &= \frac{(-1)^m}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) \left[ \int_0^{\frac{s-y+t}{2}} \int_0^{\frac{y-s+t}{2}} \int_0^{\frac{s-y+t}{2}-s_1} \int_0^{\frac{y-s+t}{2}-s_2} \dots \right. \\ &\dots \int_0^{\frac{s-y+t}{2}-s_1-\dots-s_{2m-3}} \phi(y + s_1) \phi(y + s_1 - s_2) \dots \phi(y + s_1 - s_2 + \dots + s_{2m-1}) \times \end{aligned}$$

$$\times \phi\left(\frac{y+s-t}{2} + s_1 + s_3 + \dots + s_{2m-1}\right) ds_{2m-1} \dots ds_1 \Big] dy.$$

Этот интеграл, хотя и удовлетворяет нашим требованиям (выделено "наружу" интегрирование по  $y$  и результат представлен кратным интегралом), тем не менее все-таки не очень хорош, так как содержит слишком громоздкие выражения. Постараемся упростить его следующим образом. Прежде всего, естественно аргумент последней функции обозначить через новую переменную  $\sigma_{2m-1}$ :

$$\sigma_{2m-1} = \frac{y+s-t}{2} + s_1 + s_3 + \dots + s_{2m-1}.$$

Тогда аргумент предпоследней функции окажется равным

$$y + s_1 - s_2 + \dots + s_{2m-1} = \sigma_{2m-1} - \left[\frac{s-y-t}{2} + s_2 + \dots + s_{2m-2}\right]$$

и выражение в квадратных скобках естественно обозначить через  $\sigma_{2m-2}$ :

$$\sigma_{2m-2} = \frac{s-y-t}{2} - s_2 - \dots - s_{2m-2}.$$

Продолжая далее, оказывается, что если положить

$$\sigma_{2l-1} = \frac{y+s-t}{2} + s_1 + s_3 + \dots + s_{2l-1},$$

$$\sigma_{2l} = \frac{s-y-t}{2} + s_2 + \dots + s_{2l},$$

то аргументы у всех функций окажутся просто разностями соседних  $\sigma_i$ , а сами  $\sigma_i$  меняются в пределах от  $\sigma_{i-2}$  до нуля для четных номеров и до  $s$  для нечетных. В итоге получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} v^{[2m]}(t, s) &= \frac{(-1)^m}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) \left[ \int_{\frac{s+y-t}{2}}^s \int_{\frac{s-y-t}{2}}^0 \int_{\sigma_1}^s \int_{\sigma_2}^0 \dots \right. \\ &\dots \int_{\sigma_{2m-4}}^0 \int_{\sigma_{2m-3}}^s \phi\left(\sigma_1 - \frac{s-y-t}{2}\right) \phi(\sigma_1 - \sigma_2) \dots \phi(\sigma_{2m-1} - \sigma_{2m-2}) \times \\ &\left. \times \phi(\sigma_{2m-1}) d\sigma_{2m-1} \dots d\sigma_1 \right] dy. \end{aligned} \quad (I.7)$$

Формула (I.7) отличается от всех предыдущих тем, что в ней, во-первых, уже четко просматриваются три основных аргумента ядра интегрального оператора (выражения в квадратных скобках) – это  $\frac{s+y-t}{2}$ ,  $\frac{s-y-t}{2}$  и  $s$ , и,

во-вторых, легко увидеть рекуррентное соотношение между этими ядрами для соседних номеров  $m$ . Именно, если мы обозначим

$$J_{2m}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\beta}^0 \int_{\sigma_1}^{\gamma} \int_{\sigma_2}^0 \dots \int_{\sigma_{2m-4}}^0 \int_{\sigma_{2m-3}}^{\gamma} \phi(\sigma_1 - \beta) \phi(\sigma_1 - \sigma_2) \times \\ \times \dots \phi(\sigma_{2m-1} - \sigma_{2m-2}) \phi(\sigma_{2m-1}) d\sigma_{2m-1} \dots d\sigma_1, \\ J_{2m-1}(a, b, s) = (-1)^{m-1} \int_b^0 \int_a^s \int_{\sigma_1}^0 \int_{\sigma_2}^s \dots \int_{\sigma_{2m-4}}^s \phi(a - \sigma_1) \phi(\sigma_2 - \sigma_1) \times \\ \times \dots \phi(\sigma_{2m-2} - \sigma_{2m-3}) \phi(\sigma_{2m-2}) d\sigma_{2m-2} \dots d\sigma_1,$$

то

$$v^{[2m]}(t, s) = \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) J_{2m}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy.$$

При этом оказывается, что

$$J_{2m}(\alpha, \beta, \gamma) = - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta) J_{2m-1}(\sigma, \tau, \gamma) d\sigma, \quad (I.8)$$

$$J_{2m+1}(\alpha, \beta, \gamma) = J_1(\alpha, \beta, \gamma) + \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau) J_{2m}(\alpha, \tau, \gamma) d\tau, \quad (I.9)$$

а  $J_1$  уже было вычисленно ранее:  $J_1(\alpha, \beta, \gamma) = \phi(\alpha)$ .

И вот теперь мы уже близки к цели нашего путешествия. Остается заметить, что нам нужны не  $v^{[2m]}$  по отдельности, а их сумма, и поэтому нам нет нужды вычислять по отдельности каждое  $J_{2m-1}$ . Обозначим, как и следует в такой ситуации

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m=1}^{+\infty} J_{2m}(\alpha, \beta, \gamma), \quad \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m=1}^{+\infty} J_{2m-1}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{+\infty} v^{[2m]}(t, s) = \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) J\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy$$

– это и есть третье слагаемое в формуле (1.1.1). А из формул (I.8)-(I.9) немедленно следует, что  $J$  и  $\tilde{J}$  удовлетворяют интегральным уравнениям (1.1.3).



По существу мы уже полностью изложили логику получения формулы. Для остальных трех слагаемых остается только схематично повторить те же рассуждения: для  $w^{[2m]}$  предельный переход дает интеграл

$$(-1)^m \int_{(\xi_1, \dots, \xi_{2m}) : \substack{\xi_{2l} > \xi_{2l\pm 1}, \\ \xi_0 = y, \xi_{2m+1} = s, \\ \sum_{l=0}^{2m} |\xi_{l+1} - \xi_l| = t}} w(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi(\xi_1) \phi(\xi_2) \dots \phi(\xi_{2m}) d\xi_1 \dots d\xi_{2m},$$

который после замены переменных

$$\begin{aligned} s_1 &= y - \xi_1, & s_2 &= \xi_2 - \xi_1, & s_3 &= \xi_2 - \xi_3, & \dots \\ s_{2m-2} &= \xi_{2m-2} - \xi_{2m-1}, & s_{2m-1} &= \xi_{2m} - \xi_{2m-1}, \end{aligned}$$

превращается в интеграл

$$\begin{aligned} w^{[2m]}(t, s) &= \frac{(-1)^m}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) \left[ \int_0^{\frac{y-s+t}{2}} \int_0^{\frac{s-y+t}{2}} \int_0^{\frac{y-s+t}{2} - s_1} \int_0^{\frac{s-y+t}{2} - s_2} \dots \right. \\ &\dots \int_0^{\frac{y-s+t}{2} - s_1 - \dots - s_{2m-3}} \phi(y - s_1) \phi(y - s_1 + s_2) \dots \phi(y - s_1 + s_2 - \dots - s_{2m-1}) \times \\ &\left. \times \phi\left(\frac{y+s+t}{2} - s_1 - s_3 - \dots - s_{2m-1}\right) ds_{2m-1} \dots ds_1 \right] dy. \end{aligned}$$

При этом  $\xi_i$  выражаются через новые переменные  $s_i$  по формулам

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y - s_1, & \xi_2 &= y - s_1 + s_2, & \xi_3 &= y - s_1 + s_2 - s_3, & \dots \\ \xi_{2m-2} &= y - s_1 + s_2 - s_3 + \dots - s_{2m-2}, \\ \xi_{2m-1} &= y - s_1 + s_2 - s_3 + \dots - s_{2m-2} + s_{2m-1}, \\ \xi_{2m} &= \frac{y+s+t}{2} - \sum_{l=1}^m s_{2l-1}, \end{aligned}$$

и неравенства  $\xi_{2l} > \xi_{2l\pm 1}$  дают соответственно  $s_i > 0$  и

$$\sum_{l=1}^{m-1} s_{2l} < \frac{s-y+t}{2}, \quad \sum_{l=1}^m s_{2l-1} < \frac{y-s+t}{2}.$$

Выполнение в полученном интеграле замен

$$\sigma_{2l-1} = \frac{y + s + t}{2} - s_1 - s_3 - \dots - s_{2l-1}, \quad \sigma_{2l} = \frac{s - y + t}{2} - s_2 - \dots - s_{2l},$$

дает нам окончательную формулу

$$w^{[2m]}(t, s) = (-1)^{2m-1} \frac{(-1)^m}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) \left[ \int_{\frac{s+y+t}{2}}^s \int_{\frac{s-y+t}{2}}^0 \int_{\sigma_1}^s \int_{\sigma_2}^0 \dots \right. \\ \left. \dots \int_{\sigma_{2m-4}}^0 \int_{\sigma_{2m-3}}^s \phi\left(\sigma_1 - \frac{s - y + t}{2}\right) \phi(\sigma_1 - \sigma_2) \dots \phi(\sigma_{2m-1} - \sigma_{2m-2}) \times \right. \\ \left. \times \phi(\sigma_{2m-1}) d\sigma_{2m-1} \dots d\sigma_1 \right] dy,$$

из которой видно, что

$$w^{[2m]}(t, s) = -\frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) J_{2m}\left(\frac{s + y + t}{2}, \frac{s - y + t}{2}, s\right) dy,$$

а

$$\sum_{m=1}^{+\infty} w^{[2m]}(t, s) = -\frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) J\left(\frac{s + y + t}{2}, \frac{s - y + t}{2}, s\right) dy$$

– это четвертое слагаемое формулы (1.1.1).

Формула (I.7) дает в пределе интеграл

$$(-1)^{m-1} \int w(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi(\xi_1) \phi(\xi_2) \dots \phi(\xi_{2m-1}) d\xi_1 \dots d\xi_{2m-1}. \\ (\xi_1, \dots, \xi_{2m-1}) : \\ \xi_{2l} > \xi_{2l+1}, \\ \xi_0 = y, \xi_{2m} = s, \\ \sum_{l=0}^{2m-1} |\xi_{l+1} - \xi_l| = t$$

Замена переменных

$$s_1 = y - \xi_1, \quad s_2 = \xi_2 - \xi_1, \quad s_3 = \xi_2 - \xi_3, \quad \dots \\ s_{2m-3} = \xi_{2m-2} - \xi_{2m-3}, \quad s_{2m-2} = \xi_{2m-2} - \xi_{2m-1},$$

в которой старые переменные  $\xi_i$  выражаются через новые переменные  $s_i$  по формулам

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y - s_1, & \xi_2 &= y - s_1 + s_2, & \xi_3 &= y - s_1 + s_2 - s_3, & \dots \\ \xi_{2m-2} &= y - s_1 + s_2 - s_3 + \dots + s_{2m-2}, \\ \xi_{2m-1} &= \frac{y + s - t}{2} + \sum_{l=1}^{m-1} s_{2l},\end{aligned}$$

а неравенства  $\xi_{2l} > \xi_{2l\pm 1}$  дают условия  $s_i > 0$  и

$$\sum_{l=1}^{m-1} s_{2l} < \frac{s - y + t}{2}, \quad \sum_{l=1}^m s_{2l-1} < \frac{y - s + t}{2},$$

превращает полученный интеграл в кратный

$$\begin{aligned}v^{[2m-1]}(t, s) &= \frac{(-1)^{m-1}}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) \left[ \int_0^{\frac{y-s+t}{2}} \int_0^{\frac{s-y+t}{2}} \int_0^{\frac{y-s+t}{2}-s_1} \int_0^{\frac{s-y+t}{2}-s_2} \dots \right. \\ &\dots \int_0^{\frac{s-y+t}{2}-s_2-\dots-s_{2m-4}} \phi(y - s_1) \phi(y - s_1 + s_2) \dots \phi(y - s_1 + s_2 - \dots + s_{2m-2}) \times \\ &\quad \left. \times \phi\left(\frac{s + y - t}{2} + s_2 + s_4 + \dots + s_{2m-2}\right) ds_{2m-2} \dots ds_1 \right] dy.\end{aligned}$$

Выполнение в последнем интеграле замен

$$\sigma_{2l} = \frac{s + y - t}{2} + s_2 + \dots + s_{2l}, \quad \sigma_{2l-1} = \frac{s - y - t}{2} + s_1 + s_3 + \dots + s_{2l-1},$$

дает нам формулу

$$\begin{aligned}v^{[2m-1]}(t, s) &= \frac{(-1)^{m-1}}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) \left[ \int_{\frac{s-y-t}{2}}^0 \int_{\frac{s+y-t}{2}}^s \int_{\sigma_1}^0 \int_{\sigma_2}^s \dots \right. \\ &\dots \int_{\sigma_{2m-3}}^0 \int_{\sigma_{2m-4}}^s \phi\left(\frac{s + y - t}{2} - \sigma_1\right) \phi(\sigma_2 - \sigma_1) \dots \phi(\sigma_{2m-2} - \sigma_{2m-1}) \times \\ &\quad \left. \times \phi(\sigma_{2m-2}) d\sigma_{2m-2} \dots d\sigma_1 \right] dy,\end{aligned}$$

которая, в силу введенных нами обозначений, дает

$$v^{[2m-1]}(t, s) = \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) J_{2m-1}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy,$$

и

$$\sum_{m=1}^{+\infty} v^{[2m-1]}(t, s) = \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} w(0, y) \tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2}, \frac{s-y-t}{2}, s\right) dy,$$

оказывается пятым слагаемым формулы (1.1.1).

И, наконец, предельный переход в (I.8) дает интеграл

$$\begin{aligned} & (-1)^m \int v(0, y) \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} \phi(\xi_1) \phi(\xi_2) \dots \phi(\xi_{2m-1}) d\xi_1 \dots d\xi_{2m-1}, \\ & (\xi_1, \dots, \xi_{2m-1}) : \\ & \xi_{2l} < \xi_{2l\pm 1}, \\ & \xi_0 = y, \xi_{2m} = s, \\ & \sum_{l=0}^{2m-1} |\xi_{l+1} - \xi_l| = t \end{aligned}$$

в котором осуществляется замена переменных

$$\begin{aligned} s_1 &= \xi_1 - y, & s_2 &= \xi_1 - \xi_2, & s_3 &= \xi_3 - \xi_2, & \dots \\ s_{2m-3} &= \xi_{2m-3} - \xi_{2m-2}, & s_{2m-2} &= \xi_{2m-1} - \xi_{2m-2}, \\ \xi_1 &= y + s_1, & \xi_2 &= y + s_1 - s_2, & \xi_3 &= y + s_1 - s_2 + s_3, & \dots \\ \xi_{2m-2} &= y + s_1 - s_2 + s_3 - \dots - s_{2m-2}, \\ \xi_{2m-1} &= \frac{s+y+t}{2} - \sum_{l=1}^{m-1} s_{2l}, \end{aligned}$$

а неравенства  $\xi_{2l} < \xi_{2l\pm 1}$  переходят в условия  $s_i > 0$  и

$$\sum_{l=1}^{m-1} s_{2l} < \frac{y-s+t}{2}, \quad \sum_{l=1}^m s_{2l-1} < \frac{s-y+t}{2}.$$

В результате получается кратный интеграл

$$\begin{aligned} w^{[2m-1]}(t, s) &= \frac{(-1)^m}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) \left[ \int_0^{\frac{s-y+t}{2}} \int_0^{\frac{y-s+t}{2}} \int_0^{\frac{s-y+t}{2}-s_1} \int_0^{\frac{y-s+t}{2}-s_2} \dots \right. \\ & \dots \left. \int_0^{\frac{y-s+t}{2}-s_2-\dots-s_{2m-4}} \phi(y+s_1) \phi(y+s_1-s_2) \dots \phi(y+s_1-s_2+\dots-s_{2m-2}) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \phi\left(\frac{s+y+t}{2} - s_2 - s_4 - \dots - s_{2m-2}\right) ds_{2m-2} \dots ds_1 \Big] dy,$$

который заменой

$$\sigma_{2l} = \frac{s+y+t}{2} - s_2 - \dots - s_{2l}, \quad \sigma_{2l-1} = \frac{s-y+t}{2} - s_1 - s_3 - \dots - s_{2l-1},$$

превращается в

$$\begin{aligned} w^{[2m-1]}(t, s) &= (-1)^{2m-2} \frac{(-1)^m}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) \left[ \int_{\frac{s-y+t}{2}}^0 \int_{\frac{s+y+t}{2}}^s \int_{\sigma_1}^0 \int_{\sigma_2}^s \dots \right. \\ &\dots \int_{\sigma_{2m-3}}^0 \int_{\sigma_{2m-4}}^s \phi\left(\frac{s+y+t}{2} - \sigma_1\right) \phi(\sigma_2 - \sigma_1) \dots \phi(\sigma_{2m-2} - \sigma_{2m-1}) \times \\ &\quad \left. \times \phi(\sigma_{2m-2}) d\sigma_{2m-2} \dots d\sigma_1 \right] dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) \tilde{J}_{2m-1}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy \end{aligned} \quad (I.10)$$

и суммирование по  $m$  дает нам и последний член формулы (1.1.1):

$$\sum_{m=1}^{+\infty} w^{[2m-1]}(t, s) = -\frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}} v(0, y) \tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2}, \frac{s-y+t}{2}, s\right) dy.$$

# Приложение II

## Группы симметрий уравнений эйконала

### II.1 Обозначения

Используемые обозначения для некоторых типичных для трехмерного уравнения эйконала алгебр:

$$\Xi_{\uparrow}(H, I, J) = H\partial_x + I\partial_y + J\partial_z$$

– порождает группу сдвигов (при фиксированных  $H, I, J$  – вдоль вектора  $(H, I, J)$ );

$$\Xi_{\circ}(E, F, G) = (Gy - Fz)\partial_x + (-Gx + Ez)\partial_y + (Fx - Ey)\partial_z$$

– порождает группу вращений (при фиксированных  $E, F, G$  – вокруг оси  $(E, F, G)$ );

$$\Xi_{*} = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$$

– порождает группу растяжений в пространстве переменных  $(x, y, z)$ ;

$$\Xi_{\infty}(A, B, C, k) = [A(x^2 - y^2 - z^2 - k) + 2Bxy + 2Cxz]\partial_x + z$$

$$+[B(y^2 - x^2 - z^2 - k) + 2Axy + 2Cyz]\partial_y + [C(z^2 - x^2 - y^2 - k) + 2Axz + 2Byz]\partial_z$$

– порождает группу преобразований инверсии (при фиксированных  $A, B, C$  – с осью  $l = (A, B, C)$ , траектории этих преобразований осесимметричны, их плоские сечения изображены на рис. II.1 для  $k = \nu^2$ ,  $k = -\nu^2$  и на рис. II.2 для  $k = 0$ ).

Алгебра  $\Xi_{\infty}(A, B, C, 0) + D\Xi_{*} + \Xi_{\circ}(E, F, G) + \Xi_{\uparrow}(H, I, J)$  с произвольными постоянными коэффициентами – это алгебра группы конформных преобразований пространства переменных  $(x, y, z)$  [15, §9], однако мы будем использовать  $\Xi_{\alpha}$  не столько как подалгебры, отвечающие подгруппам

Рис. II.1: Плоские фазовые портреты: слева  $k = \nu^2$ , справа  $k = -\nu^2$

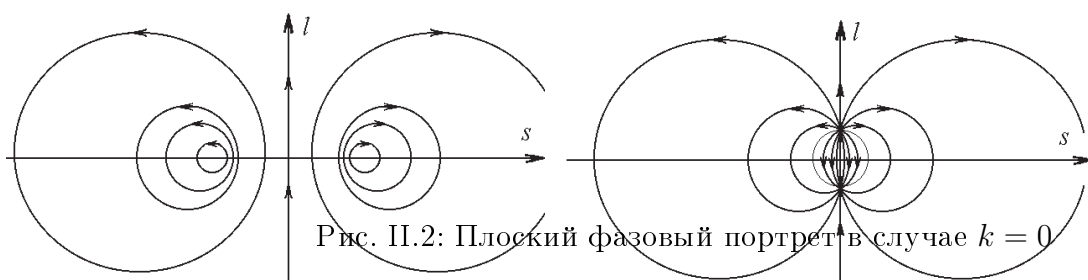


Рис. II.2: Плоский фазовый портрет в случае  $k = 0$

конформной группы, сколько как "базу" для построения компонент более сложных алгебр, в которых параметры зависят еще и от  $\psi$ . Так,

$$\begin{aligned}
 (D_1\psi + D_2)\Xi_* &= (D_1\psi + D_2)x\partial_x + (D_1\psi + D_2)y\partial_y + (D_1\psi + D_2)z\partial_z; \\
 \Xi_\infty(A, B, C, -\psi^2\nu^2) &= [A(\psi^2\nu^2 + x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz]\partial_x + \\
 &+ [B(\psi^2\nu^2 + y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz]\partial_y + \\
 &+ [C(\psi^2\nu^2 + z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz]\partial_z; \\
 \Xi_\circ(\text{Ch}_w(E_1, E_2), \text{Ch}_w(F_1, F_2), \text{Ch}_w(G_1, G_2)) &= \\
 &= [(G_1 \text{ch}(w\psi) + G_2 \text{sh}(w\psi))y - (F_1 \text{ch}(w\psi) + F_2 \text{sh}(w\psi))z]\partial_x + \\
 &+ [-(G_1 \text{ch}(w\psi) + G_2 \text{sh}(w\psi))x + (E_1 \text{ch}(w\psi) + E_2 \text{sh}(w\psi))z]\partial_y + \\
 &+ [(F_1 \text{ch}(w\psi) + F_2 \text{sh}(w\psi))x - (E_1 \text{ch}(w\psi) + E_2 \text{sh}(w\psi))y]\partial_z.
 \end{aligned}$$

В последнем примере употреблено еще одно из серии используемых далее обозначений

$$\begin{aligned}
 \text{Cos}_w(\lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1 \cos(w\psi) + \lambda_2 \sin(w\psi), \\
 \text{Sin}_w(\lambda_1, \lambda_2) &= -\lambda_1 \sin(w\psi) + \lambda_2 \cos(w\psi), \\
 \text{Ch}_w(\lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1 \text{ch}(w\psi) + \lambda_2 \text{sh}(w\psi), \\
 \text{Sh}_w(\lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1 \text{sh}(w\psi) + \lambda_2 \text{ch}(w\psi)
 \end{aligned}$$

для тригонометрических и гиперболических функциональных зависимостей от  $\psi$  с коэффициентами  $\lambda_i$  (которые обычно произвольные) и с параметром  $w$  (который обычно фиксирован и определен параметрами функции  $v(x, y, z)$ ).

## II.2 Алгебры Ли трехмерных уравнений эйконала с 15-мерными группами симметрий

### II.2.1 $v(x, y, z) = v \equiv \text{const}$

Алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \left[ \Xi_\infty(A, B, C, -\psi^2 v^2) + 2(Ax + By + Cz)\psi\partial_\psi \right] + \\ & + D_1 \left[ 2\psi(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) + (\psi^2 v^2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{v^2})\partial_\psi \right] + \\ & + [\psi(H_1\partial_x + I_1\partial_y + J_1\partial_z) + \frac{1}{v^2}(H_1x + I_1y + J_1z)\partial_\psi] + \\ & + D_2[\Xi_* + \psi\partial_\psi] + \Xi_o(E, F, G) + \Xi_\uparrow(H_2, I_2, J_2) + L\partial_\psi, \end{aligned}$$

где  $A, B, C, D_i, E, F, G, H_i, I_i, J_i, L$  – произвольные константы.

### II.2.2 $v(x, y, z) = Px + Qy + Rz$ , где $P^2 + Q^2 + R^2 = w^2 > 0$

Алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \left[ \text{Ch}_w(\lambda_1, \lambda_2)\Xi_\infty(P, Q, R, 0) + \text{Sh}_w(\lambda_1, \lambda_2)\frac{w(x^2 + y^2 + z^2)}{Px + Qy + Rz}\partial_\psi \right] + \\ & + [\Xi_o(\text{Ch}_w(E_1, E_2), \text{Ch}_w(F_1, F_2), \text{Ch}_w(G_1, G_2)) + \\ & + \frac{1}{w(Px + Qy + Rz)} \{ \text{Sh}_w(E_1, E_2)(Ry - Qz) + \\ & + \text{Sh}_w(F_1, F_2)(Pz - Rx) + \text{Sh}_w(G_1, G_2)(Qx - Py) \} \partial_\psi] + \\ & + [\text{Ch}_w(\varkappa_1, \varkappa_2)\Xi_\uparrow(P, Q, R) - \text{Sh}_w(\varkappa_1, \varkappa_2)\frac{w}{Px + Qy + Rz}\partial_\psi] + \\ & + \Xi_\infty(A, B, C, 0) + D\Xi_* + \theta\Xi_o(P, Q, R) + \Xi_\uparrow(H, I, J) + L\partial_\psi, \end{aligned}$$

где  $\lambda_i, E_i, F_i, G_i, \varkappa_i, A, B, C, D, \theta, H, I, J, L$  – произвольные константы, удовлетворяющие соотношениям  $PE_i + QF_i + RG_i = 0$ ,  $PA + QB + RC = 0$  и  $PH + QI + RJ = 0$ .



**II.2.3**  $v(x, y, z) = w(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)$ , где  $w \neq 0$ ,  $\nu \neq 0$

Алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \left[ \Xi_\infty(\text{Ch}_{2w\nu}(A_1, A_2), \text{Ch}_{2w\nu}(B_1, B_2), \text{Ch}_{2w\nu}(C_1, C_2), -\nu^2) \right. \\ & - \frac{2\nu}{w(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)} \{ \text{Sh}_{2w\nu}(A_1, A_2)x + \\ & \left. + \text{Sh}_{2w\nu}(B_1, B_2)y + \text{Sh}_{2w\nu}(C_1, C_2)z \} \partial_\psi \right] + \\ & + \left[ \text{Ch}_{2w\nu}(D_1, D_2)\Xi_* - \text{Sh}_{2w\nu}(D_1, D_2) \frac{x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2}{2w\nu(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)} \partial_\psi \right] + \\ & + \Xi_\circ(E, F, G) - \frac{1}{2\nu^2} \Xi_\infty(H, I, J, \nu^2) + L\partial_\psi, \end{aligned}$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i, E, F, G, H, I, J, L$  – произвольные константы.

**II.2.4**  $v(x, y, z) = w(x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)$ , где  $w > 0$ ,  $\nu \neq 0$

Алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \left[ \Xi_\infty(\text{Cos}_{2w\nu}(A_1, A_2), \text{Cos}_{2w\nu}(B_1, B_2), \text{Cos}_{2w\nu}(C_1, C_2), \nu^2) \right. \\ & - (\text{Sin}_{2w\nu}(A_1, A_2)x + \text{Sin}_{2w\nu}(B_1, B_2)y + \\ & \left. + \text{Sin}_{2w\nu}(C_1, C_2)z) \frac{2\nu}{w(x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)} \partial_\psi \right] + \\ & \left[ \text{Cos}_{2w\nu}(D_1, D_2)\Xi_* + \text{Sin}_{2w\nu}(D_1, D_2) \frac{x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2}{2w\nu(x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)} \partial_\psi \right] + \\ & + \Xi_\circ(E, F, G) + \frac{1}{2\nu^2} \Xi_\infty(H, I, J, -\nu^2) + L\partial_\psi, \end{aligned}$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i, E, F, G, H, I, J, L$  – произвольные константы.

**II.2.5**  $v(x, y, z) = w(x^2 + y^2 + z^2)$ , где  $w > 0$

Алгебра Ли группы симметрий имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \left[ \Xi_\infty(A_1\psi + A_2, B_1\psi + B_2, C_1\psi + C_2, 0) - \right. \\ & \left. - \frac{A_1x + B_1y + C_1z}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \partial_\psi \right] + \\ & + \left[ \Xi_\infty(w^2\psi^2 H, w^2\psi^2 I, w^2\psi^2 J, -1) - 2\psi \frac{Hx + Iy + Jz}{x^2 + y^2 + z^2} \partial_\psi \right] + \\ & + D_1 \left[ 2\psi(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) - \left( \psi^2 + \frac{1}{w^2(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \partial_\psi \right] + \\ & + D_2[\Xi_* - \psi\partial_\psi] + \Xi_\circ(E, F, G) + L\partial_\psi, \end{aligned}$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i, E, F, G, H, I, J, L$  – произвольные константы.

## II.3 Алгебры Ли трехмерных уравнений эйконала с 4-6-мерными группами симметрий

Таблица II.1. Алгебры Ли групп симметрий уравнения (3.1.3) с функциями скорости из семейств (3.3.6)-(3.3.9). Всюду  $V(\cdot)$  – произвольная функция,  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ , в третьей строке, кроме того,  $R \neq 0$ .

$v(x, y, z)$ константы (условия)	Алгебра Ли $\Xi$
$V(Px + Qy + Rz)$ $\Delta, H, I, J, L$ ( $PH + QI + RJ = 0$ )	$\Xi_{II.1} = \Delta \Xi_{\circ}(P, Q, R) +$ $+ \Xi_{\uparrow}(H, I, J) + L \partial_{\psi}$
$V(x^2 + y^2 + z^2)$ $E, F, G, L$	$\Xi_{II.2} = \Xi_{\circ}(E, F, G) + L \partial_{\psi}$
$(-Rx + Pz)V\left(\frac{Ry - Qz}{-Rx + Pz}\right)$ $\Delta, D, \varkappa, L$	$\Xi_{II.3} = \Delta \Xi_{\infty}(P, Q, R, 0) +$ $+ D \Xi_{*} + \varkappa \Xi_{\uparrow}(P, Q, R) + L \partial_{\psi}$
$(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)V\left(\frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2}\right)$ $A, B, C, \theta, L$ ( $PA + QB + RC = 0$ )	$\Xi_{II.4} = \Xi_{\infty}(A, B, C, \mp \nu^2) +$ $+ \theta \Xi_{\circ}(P, Q, R) + L \partial_{\psi}$

Таблица II.2. Подсемейства семейства (3.3.6).  $v(x, y, z) = wV(\chi)$ , где  $w \neq 0$ ,  $\chi = Px + Qy + Rz$  (здесь  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ ), вид функции  $V(\cdot)$  указан в таблице; всюду  $k \neq 0$ ,  $h = \text{const}$ . Произвольные постоянные  $\theta_i, \Delta, H, I, J, L$  удовлетворяют условию  $PH + QI + RJ = 0$ .

$V(\chi)$	Алгебра Ли $\Xi$
$\chi^k$	$\Xi_{II.1} + \theta_1(\Xi_{*} - (k-1)\psi\partial_{\psi})$
$e^{k\chi}$	$\Xi_{II.1} + \theta_1[2\psi\Xi_{\uparrow}(P, Q, R) - (k\psi^2 + \frac{1}{w^2k}e^{-2k\chi})\partial_{\psi}] +$ $+ \theta_2[\Xi_{\uparrow}(P, Q, R) - k\psi\partial_{\psi}]$
$\cos(k\chi)$	$\Xi_{II.1} + \text{Ch}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_{\uparrow}(P, Q, R) + \frac{1}{w}\text{Sh}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\text{tg}(k\chi)\partial_{\psi}$
$\text{sh}(k\chi)$	$\Xi_{II.1} + \text{Ch}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_{\uparrow}(P, Q, R) - \frac{1}{w}\text{Sh}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\text{cth}(k\chi)\partial_{\psi}$
$\text{ch}(k\chi)$	$\Xi_{II.1} + \text{Cos}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_{\uparrow}(P, Q, R) - \frac{1}{w}\text{Sin}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\text{th}(k\chi)\partial_{\psi}$

Таблица II.3. Подсемейства семейства (3.3.7).  $v(x, y, z) = w\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}V(\chi)$ , где  $w \neq 0$ ,  $\chi = \frac{1}{4}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$ , вид функции  $V(\cdot)$  указан в таблице; всюду  $k \neq 0, h = \text{const}$ . Произвольные константы -  $D_i, E, F, G, L$ .

$V(\chi)$	Алгебра Ли $\Xi$
1	$\Xi_{II.2} + (D_1\psi + D_2)\Xi_* + D_1\frac{1}{w^2}\chi\partial_\psi$
$e^{k\chi}$	$\Xi_{II.2} + (2D_1\psi + D_2)\Xi_* - [D_1(\frac{1}{kw^2}e^{-2k\chi} + k\psi^2) + D_2k\psi]\partial_\psi$
$\cos(k\chi + h)$	$\Xi_{II.2} + \text{Ch}_{kw}(D_1, D_2)\Xi_* + \frac{1}{w}\text{Sh}_{kw}(D_1, D_2)\text{tg}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\text{sh}(k\chi + h)$	$\Xi_{II.2} + \text{Ch}_{kw}(D_1, D_2)\Xi_* - \frac{1}{w}\text{Sh}_{kw}(D_1, D_2)\text{cth}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\text{ch}(k\chi + h)$	$\Xi_{II.2} + \text{Cos}_{kw}(D_1, D_2)\Xi_* - \frac{1}{w}\text{Sin}_{kw}(D_1, D_2)\text{th}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\chi + h$	$\Xi_{II.2} + \text{Ch}_w(D_1, D_2)\Xi_* - \text{Sh}_w(D_1, D_2)\frac{1}{w(\chi+h)}\partial_\psi$

Таблица II.4. Подсемейства семейства (3.3.8).

$v(x, y, z) = w\sqrt{(Ry - Qz)^2 + (-Rx + Pz)^2 + (Qx - Py)^2}V(\chi)$ , где  $w \neq 0, P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ ,  $\chi = \text{arctg} \frac{R(Ry - Qz) + P(Py - Qx)}{-Rx + Pz}$ , вид функции  $V(\cdot)$  указан в таблице; всюду  $k \neq 0, h = \text{const}$ . Произвольные константы -  $D, \Delta, \theta_i, \varkappa, L$ .

$V(\chi)$	Алгебра Ли $\Xi$
1	$\Xi_{II.3} + (\theta_1\psi + \theta_2)\Xi_o(P, Q, R) + \frac{\theta_1}{w^2}\chi\partial_\psi$
$e^{k\chi}$	$\Xi_{II.3} + (2\theta_1\psi + \theta_2)\Xi_o(P, Q, R) - [\frac{\theta_1}{kw^2}e^{-2k\chi} + k\theta_1\psi^2 + k\theta_2\psi]\partial_\psi$
$\cos(k\chi + h)$	$\Xi_{II.3} + \text{Ch}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_o(P, Q, R) + \frac{1}{w}\text{Sh}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\text{tg}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\text{sh}(k\chi + h)$	$\Xi_{II.3} + \text{Ch}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_o(P, Q, R) - \frac{1}{w}\text{Sh}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\text{cth}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\text{ch}(k\chi + h)$	$\Xi_{II.3} + \text{Cos}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_o(P, Q, R) - \frac{1}{w}\text{Sin}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\text{th}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\chi + h$	$\Xi_{II.3} + \text{Ch}_{kw}(\theta_1, \theta_2)\Xi_o(P, Q, R) - \text{Sh}_w(\theta_1, \theta_2)\frac{R^2}{w(\chi+h)}\partial_\psi$

Таблица II.5. Подсемейства семейства (3.3.9).

$v(x, y, z) = w\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 \pm \nu^2)^2 \mp 4\nu^2(Px + Qy + Rz)^2}V(\chi)$ , где  $w \neq 0$ ,  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ , вид функции  $V(\cdot)$  указан в таблице, а выражения  $\chi$ , соответствующие различным случаям значений  $\pm\nu^2$  (т.е.  $+\nu^2$ ,  $-\nu^2$  или 0) приведены в таблице II.6; всюду  $k \neq 0$ . Произвольные константы  $\Delta_1, \Delta_2, A, B, C, \theta, L$  удовлетворяют условию  $PA + QB + RC = 0$ .

$V(\chi)$	Алгебра Ли $\Xi$
1	$\Xi_{II.4} - (\Delta_1\psi + \Delta_2)\Xi_\infty(P, Q, R, \pm\nu^2) + \frac{\Delta_1}{w^2}\chi\partial_\psi$
$w\chi^k(\nu = 0)$	$\Xi_{II.4} + \Delta_1(\Xi^* + (k+1)\psi\partial_\psi)$
$e^{k\chi}$	$\Xi_{II.4} - (2\Delta_1\psi + \Delta_2)\Xi_\infty(P, Q, R, \pm\nu^2) -$ $-[\Delta_1(k\psi^2 + \frac{e^{-2k\chi}}{kw^2}) + \Delta_2k\psi]\partial_\psi$
$\cos(k\chi + h)$	$\Xi_{II.4} - \text{Ch}_{wk}(\Delta_1, \Delta_2)\Xi_\infty(P, Q, R, \pm\nu^2) +$ $+\frac{1}{w}\text{Sh}_{wk}(\Delta_1, \Delta_2)\text{tg}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\text{sh}(k\chi + h)$	$\Xi_{II.4} - \text{Ch}_{wk}(\Delta_1, \Delta_2)\Xi_\infty(P, Q, R, \pm\nu^2) -$ $-\frac{1}{w}\text{Sh}_{wk}(\Delta_1, \Delta_2)\text{cth}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\text{ch}(k\chi + h)$	$\Xi_{II.4} - \text{Cos}_{wk}(\Delta_1, \Delta_2)\Xi_\infty(P, Q, R, \pm\nu^2) -$ $-\frac{1}{w}\text{Sin}_{wk}(\Delta_1, \Delta_2)\text{th}(k\chi + h)\partial_\psi$
$\chi + h$	$\Xi_{II.4} - \text{Ch}_w(\Delta_1, \Delta_2)\Xi_\infty(P, Q, R, \pm\nu^2) - \frac{\text{Sh}_w(\Delta_1, \Delta_2)}{w(\chi + h)}\partial_\psi$

Таблица II.6. Вид функции для  $\chi(x, y, z)$ , соответствующий различным случаям значений  $\pm\nu^2$

$\pm\nu^2$	$\chi(x, y, z)$
$+\nu^2$	$\frac{1}{4\nu} \ln \frac{(x + P\nu)^2 + (y + Q\nu)^2 + (z + R\nu)^2}{(x - P\nu)^2 + (y - Q\nu)^2 + (z - R\nu)^2}$
$-\nu^2$	$\frac{1}{2\nu} \text{arctg} 2\nu \frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2}$
0	$\frac{Px + Qy + Rz}{x^2 + y^2 + z^2}$

## II.4 Трехмерное уравнение эйконала: решения классифицирующих уравнений с квадратичными коэффициентами

Классифицирующее уравнение имеет вид

$$\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z = (\xi_x - M)v,$$

где

$$\begin{aligned}\xi &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Gy - Fz + H, \\ \eta &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Gx + Dy + Ez + I, \\ \zeta &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Ey + Dz + J\end{aligned}$$

Поворотами и сдвигами системы координат это уравнение приводится к форме

$$(x^2 - y^2 - z^2 + \varkappa)v_x + (2xy + \theta z + \lambda)v_y + (2xz - \theta y)v_z = (2x - M)v,$$

решение которого – функция  $v(x, y, z)$  имеет вид

$$v(x, y, z) = w(x, y, z)V(r^1(x, y, z), r^2(x, y, z)),$$

где  $V(\cdot, \cdot)$  – произвольная функция, а вид функций  $w$ ,  $r^1$  и  $r^2$  определяется знаком корней  $\mu_{\pm}$  характеристического уравнения

$$(\mu + \theta^2)(\mu + 4\varkappa) = 4\lambda^2,$$

где  $\theta$ ,  $\lambda$  и  $\varkappa$  – параметры приведенного классифицирующего уравнения.

### II.4.1 Случай $\lambda^2 - \theta^2\varkappa < 0$ , $\lambda^2 + (\theta^2 - 4\varkappa)^2 > 0$

Характеристическое уравнение имеет два различных отрицательных корня  $\mu_{\pm}$ . Если обозначить

$$\nu_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \theta^2 + 4\varkappa \pm (4\varkappa - \theta^2) \sqrt{1 + 16 \frac{\lambda^2}{(\theta^2 - 4\varkappa)^2}} \right],$$

в случае, когда  $\theta^2 - 4\varkappa \neq 0$  (что обеспечивает вещественность  $\nu_{\pm}$  и однозначно определяет значения  $\nu_{\pm}$  при  $\lambda = 0$ :  $\nu_{-}^2 = \theta^2$ ,  $\nu_{+}^2 = 4\varkappa$ ), или

$$\nu_{\pm}^2 = 4\varkappa \pm 2\lambda$$

в случае  $\theta^2 = 4\varkappa$ , а также  $k = M/\nu_{+}$ , то

$$w = [\theta(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa) + 2\lambda z] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left( k \operatorname{arctg} \left[ \nu_+ \frac{(\nu_+^2 - \theta^2)x + 2\lambda y}{(\nu_+^2 - \theta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa - \nu_+^2/2) - 2\lambda\theta z} \right] \right), \\ r^1 &= \frac{[(\theta^2 - \nu_+^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \varkappa) + 2\lambda(\theta z + \lambda)]^2 + \nu_+^2[2\lambda y + (\nu_+^2 - \theta^2)x]^2}{[\theta(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa) + 2\lambda z]^2}, \\ r^2 &= \frac{1}{\nu_-} \operatorname{arctg} \left[ \nu_- \frac{2\lambda x - (4\varkappa - \nu_-^2)y}{2\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa - \nu_-^2/2) + \theta(4\varkappa - \nu_-^2)z} \right] - \\ & - \frac{1}{\nu_+} \operatorname{arctg} \left[ \nu_+ \frac{(\nu_+^2 - \theta^2)x + 2\lambda y}{(\nu_+^2 - \theta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa - \nu_+^2/2) - 2\lambda\theta z} \right]. \end{aligned}$$

**Замечание.** Поскольку при  $\lambda = 0$  получается  $4\varkappa - \nu_-^2 = \nu_+^2 - \theta^2 = 4\varkappa - \theta^2 \neq 0$ , в приведенных выражениях вырождений при  $\lambda^2 - \theta^2\varkappa < 0$ ,  $\lambda^2 + (\theta^2 - 4\varkappa)^2 \neq 0$  не происходит.

#### II.4.2 Случай $\lambda = 0$ , $\theta^2 = 4\varkappa > 0$

Характеристическое уравнение имеет кратные мнимые корни:  $\mu_{\pm}^2 = -\theta^2$ . Если обозначить  $\varkappa = \nu^2$  (и тогда  $\theta = 2\nu$ ),  $k = M/2\nu$ , то

$$\begin{aligned} w &= (x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2) \exp \left( k \operatorname{arctg} \frac{2\nu x}{(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)} \right), \\ r^1 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 x^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2)^2}, \quad r^2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + \operatorname{arctg} \frac{2\nu x}{x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2}. \end{aligned}$$

#### II.4.3 Случай $\lambda^2 - \theta^2\varkappa > 0$

Характеристическое уравнение имеет корни разных знаков. Если обозначить

$$\mu_{\pm} = \frac{-\theta^2 - 4\varkappa \pm \sqrt{(\theta^2 - 4\varkappa)^2 + 16\lambda^2}}{2},$$

где индекс у  $\mu$  соответствует выбору знака перед радикалом, и положить  $\mu_{\pm} = \pm\nu_{\pm}^2$  (где  $\nu_{\pm}$  будут вещественны), а  $k = M/2\nu_+$ , то

$$\begin{aligned} w &= \frac{[(\theta^2 + \nu_+^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \nu_+ x + \varkappa + \nu_+^2/2) + 2\lambda(\theta z - \nu_+ y)]^{k+1/2}}{[(\theta^2 + \nu_+^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \nu_+ x + \varkappa + \nu_+^2/2) + 2\lambda(\theta z + \nu_+ y)]^{k-1/2}}, \\ r^1 &= \frac{[(\nu_+^2 + \theta^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \varkappa) + 2\lambda(\theta z + \lambda)]^2 - \nu_+^2[2\lambda y - (\nu_+^2 + \theta^2)x]^2}{[\theta(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa) + 2\lambda z]^2}, \\ r^2 &= \frac{1}{\nu_-} \operatorname{arctg} \left[ \nu_- \frac{2\lambda x - (4\varkappa - \nu_-^2)y}{2\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + \varkappa - \nu_-^2/2) + \theta(4\varkappa - \nu_-^2)z} \right] - \\ & - \frac{1}{2\nu_+} \ln \left[ \frac{(\theta^2 + \nu_+^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \nu_+ x + \varkappa + \nu_+^2/2) + 2\lambda(\theta z - \nu_+ y)}{(\theta^2 + \nu_+^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \nu_+ x + \varkappa + \nu_+^2/2) + 2\lambda(\theta z + \nu_+ y)} \right]. \end{aligned}$$

**Замечание.** В рамках предположения  $\lambda^2 - \theta^2 \varkappa > 0$  пара коэффициентов  $2\lambda, 4\varkappa - \nu_-^2$  одновременно в нуль не обращается, и поскольку  $\theta^2 + \nu_+^2 > 0$ , вырождений в приведенных выражениях при  $\lambda^2 - \theta^2 \varkappa > 0$  не имеется.

#### II.4.4 Случай $\lambda^2 - \theta^2 \varkappa = 0, \lambda^2 + \theta^2 \neq 0$

В этом случае  $\mu_+ = \nu_+ = 0, \mu_- = -(\theta^2 + 4\varkappa)$ . Если обозначить  $\varkappa = \nu^2$  (и тогда  $\lambda = \theta\nu$ ) и  $k = M/\theta$ , то

$$w = [x^2 + y^2 + (z + \nu)^2] \exp \left( k \frac{\theta x - 2\nu y}{x^2 + y^2 + (z + \nu)^2} \right),$$

$$r^1 = \frac{[2\nu(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2) - \theta^2(z + \nu)]^2 + (\theta^2 + 4\nu^2)[\theta y + 2\nu x]^2}{[x^2 + y^2 + (z + \nu)^2]^2},$$

$$r^2 = \frac{\theta}{2\nu\sqrt{\theta^2 + 4\nu^2}} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\theta^2 + 4\nu^2} \frac{2\nu x + \theta y}{2\nu(x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2) - \theta^2(z + \nu)} \right] - \frac{\theta x - 2\nu y}{x^2 + y^2 + (z + \nu)^2}.$$

#### II.4.5 Случай $\lambda = \theta = 0, \varkappa = \nu^2$

$$w = \sqrt{y^2 + z^2} \exp \left( 2k \operatorname{arctg} \frac{2\nu x}{x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2} \right),$$

$$r^1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + \nu^2}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad r^2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{z},$$

где  $k = M/4\nu$ .

#### II.4.6 Случай $\lambda = \theta = 0, \varkappa = -\nu^2$

$$w = \sqrt{y^2 + z^2} \left( \frac{(x + \nu)^2 + y^2 + z^2}{(x - \nu)^2 + y^2 + z^2} \right)^k,$$

$$r^1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - \nu^2}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad r^2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{z},$$

где  $k = M/4\nu$ .

#### II.4.7 Случай $\lambda = \theta = \varkappa = 0$

$$w = \sqrt{y^2 + z^2} \exp\left(\frac{2kx}{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad r^1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad r^2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{z},$$

где  $k = M/4$ .

### II.5 Трехмерное уравнение эйконала: решения классифицирующих уравнений с линейными коэффициентами

Классифицирующее уравнение имеет вид

$$(Dx + Gy - Fz + H)v_x + (-Gx + Dy + Ez + I)v_y + (Fx - Ey + Dz + J)v_z = (D - M)v.$$

#### II.5.1 Случай $D \neq 0, E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$

Классифицирующее уравнение поворотами и сдвигами приводится к уравнению  $xv_x + (y + \theta z)v_y + (z - \theta y)v_z = (1 - k)v$ , решение которого описывается формулой

$$v(x, y, z) = x^{1-k} V\left(\frac{x^2}{y^2 + z^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{z} - \theta \ln x\right).$$

где  $V(\cdot, \cdot)$  – произвольная функция.

#### II.5.2 Случай $D = 0, E^2 + F^2 + G^2 \neq 0$

Классифицирующее уравнение поворотами и сдвигами приводится к уравнению  $\lambda v_x + zv_y - yv_z = -kv$ , решение которого имеет вид

$$v(x, y, z) = \exp\left(-k \operatorname{arctg} \frac{y}{z}\right) V\left(y^2 + z^2, x - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{z}\right).$$

где  $V(\cdot, \cdot)$  – произвольная функция.

#### II.5.3 Случай $D \neq 0, E = F = G = 0$

Классифицирующее уравнение сдвигами приводится к уравнению  $xv_x + yv_y + zv_z = (1 - k)v$ , решением которого является произвольная однородная функция от  $(x, y, z)$  степени  $1 - k$ :

$$v(x, y, z) = V(x, y, z), \quad V(tx, ty, tz) = t^{1-k} V(x, y, z).$$



**II.5.4**  $D = E = F = G = 0, H^2 + I^2 + J^2 \neq 0$

Классифицирующее уравнение поворотом приводится к уравнению  $v_x = -kv$ , решение которого имеет вид

$$v(x, y, z) = e^{-kx}V(y, z),$$

где  $V(\cdot, \cdot)$  – произвольная функция.

**II.6 Алгебры Ли групп симметрий двумерного уравнения эйконала с пространством лучей постоянной кривизны**

**II.6.1**  $v(x, y) \equiv 1 (K = 0)$

$$\begin{aligned} \Xi = & [A(x^2 + \psi^2 - y^2) + 2Bxy + 2Cx\psi]\partial_x + [B(y^2 + \psi^2 - x^2) + 2Axy + 2Cy\psi]\partial_y + \\ & + [C(x^2 + y^2 + \psi^2) + 2Ax\psi + 2By\psi]\partial_\psi + D(x\partial_x + y\partial_y + \psi\partial_\psi) + \\ & + E(x\partial_y - y\partial_x) + F(\psi\partial_x + x\partial_\psi) + G(\psi\partial_y + y\partial_\psi) + H\partial_x + I\partial_y + L\partial_\psi \end{aligned}$$

**II.6.2**  $v(x, y) = e^x (K = 0)$

$$\begin{aligned} \Xi = & (e^x\psi^2 + e^{-x})(A \cos y + B \sin y)\partial_x + (e^x\psi^2 - e^{-x})(A \sin y - B \cos y)\partial_y - \\ & - 2e^{-x}(A \cos y + B \sin y)\psi\partial_\psi - (C \cos y + D \sin y)e^{-x}\partial_\psi + \\ & + e^x\psi[(C \cos y + D \sin y)\partial_x + (C \sin y - D \cos y)\partial_y] + E[(\psi^2 + e^{-2x})\partial_\psi - 2\psi\partial_x] + \\ & + e^x[(F \cos y + G \sin y)\partial_x + (F \sin y - G \cos y)\partial_y] + H(\partial_x - \psi\partial_\psi) + I\partial_y + L\partial_\psi \end{aligned}$$

**II.6.3**  $v(x, y) = x (K = -1)$

$$\begin{aligned} \Xi = & \operatorname{ch} \psi[(A(x^2 - y^2) - By - C)\partial_x + (2Axy + Bx)\partial_y] + \\ & + \frac{A(x^2 + y^2) + By + C}{x} \operatorname{sh} \psi\partial_\psi + \operatorname{sh} \psi[(E(x^2 - y^2) - Fy - G)\partial_x + \\ & + (2Exy + Fx)\partial_y] + \frac{1}{x}[E(x^2 + y^2) + Fy + G] \operatorname{ch} \psi\partial_\psi + \\ & + H(2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y) + D(x\partial_x + y\partial_y) + I\partial_y + L\partial_\psi \end{aligned}$$

**II.6.4**  $v(x, y) = \cos x$  ( $K = -1$ )

$$\begin{aligned} \Xi = & \operatorname{ch} \psi [(A \operatorname{ch} y \sin x + B \operatorname{sh} y \sin x + C) \partial_x + \\ & + (A \operatorname{sh} y \cos x + B \operatorname{ch} y \cos x) \partial_y] + \frac{A \operatorname{ch} y + B \operatorname{sh} y + C \sin x}{\cos x} \operatorname{sh} \psi \partial_\psi + \\ & + \operatorname{sh} \psi [(E \operatorname{ch} y \sin x + F \operatorname{sh} y \sin x + G) \partial_x + \\ & + (E \operatorname{sh} y - F \operatorname{ch} y) \cos x \partial_y] + \frac{E \operatorname{ch} y + F \operatorname{sh} y + G \sin x}{\cos x} \operatorname{ch} \psi \partial_\psi + \\ & + (H \operatorname{ch} y + I \operatorname{sh} y) \cos x \partial_x - [(H \operatorname{sh} y + I \operatorname{ch} y) \sin x + D] \partial_y + L \partial_\psi \end{aligned}$$

**II.6.5**  $v(x, y) = \operatorname{sh} x$  ( $K = -1$ )

$$\begin{aligned} \Xi = & \operatorname{ch} \psi [(A \cos y \operatorname{ch} x + B \sin y \operatorname{ch} x + C) \partial_x + \\ & + (A \sin y \operatorname{sh} x - B \cos y \operatorname{sh} x) \partial_y] - \frac{A \cos y + B \sin y + C \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \operatorname{sh} \psi \partial_\psi + \\ & + \operatorname{sh} \psi [(E \cos y \operatorname{ch} x + F \sin y \operatorname{ch} x + G) \partial_x + \\ & + (E \sin y \operatorname{sh} x - F \cos y \operatorname{sh} x) \partial_y] - \frac{E \cos y + F \sin y + G \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} \psi \partial_\psi + \\ & + (H \cos y + I \sin y) \operatorname{sh} x \partial_x + [(H \sin y - I \cos y) \operatorname{ch} x + D] \partial_y + L \partial_\psi \end{aligned}$$

**II.6.6**  $v(x, y) = \operatorname{ch} x$  ( $K = 1$ )

$$\begin{aligned} \Xi = & \cos \psi [(A \cos y \operatorname{sh} x + B \sin y \operatorname{sh} x - C) \partial_x + \\ & + (A \sin y \operatorname{ch} x - B \cos y \operatorname{ch} x) \partial_y] + \frac{A \cos y + B \sin y + C \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \sin \psi \partial_\psi + \\ & + \sin \psi [(E \cos y \operatorname{sh} x + F \sin y \operatorname{sh} x - G) \partial_x + \\ & + (E \sin y \operatorname{ch} x - F \cos y \operatorname{ch} x) \partial_y] - \frac{E \cos y + F \sin y + G \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \cos \psi \partial_\psi + \\ & + (H \cos y + I \sin y) \operatorname{ch} x \partial_x + [(H \sin y - I \cos y) \operatorname{sh} x + D] \partial_y + L \partial_\psi \end{aligned}$$

## Приложение III

# Решение уравнений конформной группы

Ниже приводится решение системы уравнений

$$\xi_x = \eta_y = \zeta_z, \quad (\text{III.1})$$

$$\eta_x + \xi_y = 0, \quad \zeta_x + \xi_z = 0, \quad \eta_z + \zeta_y = 0, \quad (\text{III.2})$$

определяющих группу конформных преобразований. Трехмерный случай здесь играет "пограничную роль": аналогичная двумерная система  $\xi_x = \eta_y$ ,  $\xi_y + \eta_x = 0$  совпадает с системой Коши-Римана и порождает бесконечномерную группу преобразований (обычно интерпретируемую как группа аналитических отображений комплексной плоскости), в случае же размерности три и более – группа получается конечномерной, доказательство строится простой индукцией по размерности пространства, а трехмерный случай оказывается "стартовым" для индукции.

Итак, начнем решение системы (III.1)-(III.2) с того, что дифференцированием первого и второго уравнений (III.2) получим

$$\eta_{xz} = -\xi_{yz} = \zeta_{xy}$$

и поэтому  $\eta_z - \zeta_y = 2p(y, z)$ , где  $p(y, z)$  – некоторая функция, зависящая только от  $y, z$ . С учетом третьего уравнения (III.2) это дает

$$\eta_z = p(y, z), \quad \zeta_y = -p(y, z). \quad (\text{III.3})$$

Аналогично получаются еще четыре соотношения:

$$\xi_y = q(x, y), \quad \eta_x = -q(x, y), \quad \xi_z = r(x, z), \quad \zeta_x = -r(x, z). \quad (\text{III.4})$$

Далее, дифференцирование (III.1)-(III.2) дает

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \xi_{xx} + \xi_{zz} = 0. \quad (\text{III.5})$$

Следовательно,  $\xi_{yy} = \xi_{zz}$ , и подставляя сюда полученные выше выражения для  $\xi_y$  и  $\xi_z$ , получаем

$$q_y(x, y) = r_z(x, z).$$

Поскольку слева стоит функция, не зависящая от  $z$ , а справа – функция, не зависящая от  $y$ , они могут совпадать только если зависимость и от  $y$ , и  $z$  – фиктивная, т.е. это на самом деле функция, зависящая только от  $x$ . Обозначим ее  $a(x)$ , тогда  $q(x, y) = a(x)y + b(x, z)$ , и

$$\xi(x, y, z) = a(x)\frac{y^2}{2} + b(x, z)y + c(x, z).$$

Подставим полученную функцию  $\xi$  в третье равенство (III.4), и в равенства (III.5). Первая подстановка дает соотношение

$$b_z(x, z)y + c_z(x, z) = r(x, z),$$

которое возможно только если  $b_z(x, z) \equiv 0$ , т.е.  $b$  зависит только от  $x$ :  $b(x, z) \equiv b(x)$ . Вторая и третья подстановки приводят к уравнениям

$$a''(x)\frac{y^2}{2} + b''(x)y + c_{xx}(x, z) + a(x) \equiv 0,$$

$$a''(x)\frac{y^2}{2} + b''(x)y + c_{xx}(x, z) + c_{zz}(x, z) \equiv 0.$$

Первое из них влечет

$$a''(x) = 0, b''(x) = 0, c_{xx}(x, z) = -a(x),$$

а тогда в силу второго

$$c_{zz}(x, z) = a(x).$$

Последнее уравнение означает, что  $c(x, z)$  имеет вид

$$c(x, z) = a(x)\frac{z^2}{2} + d(x)z + e(x).$$

Наконец, подстановка этой формулы в предыдущее уравнение дает равенство

$$a''\frac{z^2}{2} + d''(x)z + e''(x) = -a(x),$$

которое возможно только при  $a''(x) \equiv 0$  (это условие мы уже получали ранее),  $d''(x) \equiv 0$  и  $e''(x) = -a(x)$ .

Подведем итоги: функция  $\xi(x, y, z)$  оказалась представимой в виде

$$\xi(x, y, z) = a(x)\frac{y^2}{2} + b(x)y + a(x)\frac{z^2}{2} + d(x)z + e(x),$$

где  $a(x), b(x), d(x)$  – линейные функции, а  $e(x)$  – функция кубическая (т.к. ее вторая производная линейна). Аналогичный вид, в силу симметрии уравнений (III.1)-(III.2), имеют и функции  $\eta$  и  $\zeta$ . Однако понятно, что произведенные нами манипуляции дают лишь необходимый вид наших функций, а для нахождения точного решения нужно подставить полученные формулы в исходные уравнения и найти соотношения между коэффициентами.

Для того, чтобы несколько упростить себе задачу и одновременно не потерять ни одного решения можно воспользоваться следующим соображением. Из найденного нами вида функций  $\xi, \eta, \zeta$  видно, что они наверняка являются кубическими: суммарная степень  $x, y, z$  во всех слагаемых не превышает трех. С другой стороны, нетрудно заметить, что уравнения (III.1)-(III.2) содержат только первые производные, а однократное дифференцирование по любой переменной любую форму  $k$ -го порядка превращает в форму  $(k - 1)$ -го порядка, без слагаемых более высокого или более низкого порядка. Поэтому, если представить каждую из величин  $\xi, \eta, \zeta$  в виде суммы форм нулевого, первого, второго и третьего порядка, то при подстановке это разделение на формы сохранится и приравнивание будет происходить между слагаемыми, порожденными формами одной и той же степени. Это позволяет нам утверждать, что каждая из форм порядка  $k$ , составляющих решение, сама является решением, и поэтому, найдя отдельно формы каждого порядка, удовлетворяющие нашим уравнениям, общее решение можно получить простым их сложением.

Найдем сначала решения, являющиеся формами третьей степени:

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= \sum_{i,j,k \geq 0}^{i+j+k=3} \xi_{ijk} x^i y^j z^k = \xi_{300} x^3 + \xi_{210} x^2 y + \xi_{201} x^2 z + \\ &+ \xi_{120} x y^2 + \xi_{111} x y z + \xi_{102} x z^2 + \xi_{030} y^3 + \xi_{021} y^2 z + \xi_{012} y z^2 + \xi_{003} z^3, \\ \eta(x, y, z) &= \sum_{i,j,k \geq 0}^{i+j+k=3} \eta_{ijk} x^i y^j z^k, \quad \zeta(x, y, z) = \sum_{i,j,k \geq 0}^{i+j+k=3} \zeta_{ijk} x^i y^j z^k. \end{aligned}$$

Подстановка этих форм в уравнения  $\xi_x = \eta_y = \zeta_z$  дает равенства

$$\begin{aligned} 3\xi_{300} x^2 + 2\xi_{210} x y + 2\xi_{201} x z + \xi_{120} y^2 + \xi_{111} y z + \xi_{102} z^2 &= \\ = \eta_{210} x^2 + 2\eta_{120} x y + \eta_{111} x z + 3\eta_{030} y^2 + 2\eta_{021} y z + \eta_{012} z^2 &= \\ = \zeta_{201} x^2 + \zeta_{111} x y + 2\zeta_{102} x z + \zeta_{021} y^2 + 2\zeta_{012} y z + 3\zeta_{003} z^2, \end{aligned}$$

а в уравнений (III.2) – равенства

$$3\eta_{300} x^2 + 2\eta_{210} x y + 2\eta_{201} x z + \eta_{120} y^2 + \eta_{111} y z + \eta_{102} z^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & +\xi_{210}x^2 + 2\xi_{120}xy + \xi_{111}xz + 3\xi_{030}y^2 + 2\xi_{021}yz + \xi_{012}z^2 = 0 \\
 & \quad 3\zeta_{300}x^2 + 2\zeta_{210}xy + 2\zeta_{201}xz + \zeta_{120}y^2 + \zeta_{111}yz + \zeta_{102}z^2 + \\
 & +\xi_{201}x^2 + \xi_{111}xy + 2\xi_{102}xz + \xi_{021}y^2 + 2\xi_{012}yz + 3\xi_{003}z^2 = 0, \\
 & = \eta_{201}x^2 + \eta_{111}xy + 2\eta_{102}xz + \eta_{021}y^2 + 2\eta_{012}yz + 3\eta_{003}z^2 + \\
 & +\zeta_{210}x^2 + 2\zeta_{120}xy + \zeta_{111}xz + 3\zeta_{030}y^2 + 2\zeta_{021}yz + \zeta_{012}z^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $x, y, z$  дает нам систему из 30 соотношений:

$a$	$b$	$c$	$d$	
$3\xi_{300} = \eta_{210} = \zeta_{201}$	$3\eta_{300} = -\xi_{210}$	$3\zeta_{300} = -\xi_{201}$	$\eta_{201} = -\zeta_{210}$	1
$\xi_{120} = 3\eta_{030} = \zeta_{021}$	$\eta_{120} = -3\xi_{030}$	$\zeta_{120} = -\xi_{021}$	$\eta_{021} = -3\zeta_{030}$	2
$\xi_{102} = \eta_{012} = 3\zeta_{003}$	$\eta_{102} = -\xi_{012}$	$\zeta_{102} = -3\xi_{003}$	$3\eta_{003} = -\zeta_{012}$	3
$2\xi_{210} = 2\eta_{120} = \zeta_{111}$	$2\eta_{210} = -2\xi_{120}$	$2\zeta_{210} = -\xi_{111}$	$\eta_{111} = -2\zeta_{120}$	4
$\xi_{111} = 2\eta_{021} = 2\zeta_{012}$	$\eta_{111} = -2\xi_{021}$	$\zeta_{111} = -2\xi_{012}$	$2\eta_{012} = -2\zeta_{021}$	5
$2\xi_{201} = \eta_{111} = 2\zeta_{102}$	$2\eta_{201} = -\xi_{111}$	$2\zeta_{201} = -2\xi_{102}$	$2\eta_{102} = -\zeta_{111}$	6

Мы, для удобства ссылок, перенумеровали эти уравнения буквами  $a, b, c, d$  и цифрами 1-6, как на шахматной доске. Теперь мы будем решать эту систему, используя метод последовательного поиска: обозначим какой-нибудь из коэффициентов (например,  $\xi_{300}$ ) через  $A$  и будем искать все уравнения, содержащие этот коэффициент. С помощью этих уравнений удастся выразить через  $A$  еще несколько коэффициентов, затем мы пройдемся по списку уравнений еще, отыскивая уравнения, содержащие теперь уже новые найденные коэффициенты – и т.д., заполняя при этом таблицу коэффициентов

$\xi_{300} =$	$\eta_{300} =$	$\zeta_{300} =$
$\xi_{210} =$	$\eta_{210} =$	$\zeta_{210} =$
$\xi_{201} =$	$\eta_{201} =$	$\zeta_{201} =$
$\xi_{120} =$	$\eta_{120} =$	$\zeta_{120} =$
$\xi_{111} =$	$\eta_{111} =$	$\zeta_{111} =$
$\xi_{102} =$	$\eta_{102} =$	$\zeta_{102} =$
$\xi_{030} =$	$\eta_{030} =$	$\zeta_{030} =$
$\xi_{021} =$	$\eta_{021} =$	$\zeta_{021} =$
$\xi_{012} =$	$\eta_{012} =$	$\zeta_{012} =$
$\xi_{003} =$	$\eta_{003} =$	$\zeta_{003} =$

Как мы увидим, процесс довольно скоро "замыкается", давая соотношения относительно самого параметра  $A$ . Итак, пусть  $\xi_{300} = A$ . Тогда из (a1)

следует  $\eta_{210} = \zeta_{201} = 3A$ ,

$$\begin{aligned} (b4) &\rightarrow \xi_{120} = -3A; & (c6) &\rightarrow \xi_{102} = -3A; \\ (a2) &\rightarrow \eta_{030} = -A; & &\zeta_{021} = -3A; \\ (a3) &\rightarrow \eta_{012} = -3A; & &\zeta_{003} = -A; \\ (d5) &\rightarrow \eta_{012} = 3A >> \end{aligned}$$

Во-первых, круг замкнулся: никакие другие коэффициенты через  $A$  не выражаются, а во-вторых, оказалось, что  $3A = -3A$ , а значит,  $A = 0$ . Состояние таблицы коэффициентов после "первого круга" приведено ниже.

$$\begin{array}{lll} \xi_{300} = A & \eta_{300} = & \zeta_{300} = \\ \xi_{210} = & \eta_{210} = 3A & \zeta_{210} = \\ \xi_{201} = & \eta_{201} = & \zeta_{201} = 3A \\ \xi_{120} = -3A & \eta_{120} = & \zeta_{120} = \\ \xi_{111} = & \eta_{111} = & \zeta_{111} = \\ \xi_{102} = -3A & \eta_{102} = & \zeta_{102} = \\ \xi_{030} = & \eta_{030} = -A & \zeta_{030} = \\ \xi_{021} = & \eta_{021} = & \zeta_{021} = -3A \\ \xi_{012} = & \eta_{012} = -3A = 3A & \zeta_{012} = \\ \xi_{003} = & \eta_{003} = & \zeta_{003} = -A \end{array}$$

Продолжим процесс: положим теперь  $\eta_{300} = B$ , тогда

$$\begin{aligned} (b1) &\rightarrow \xi_{210} = -3B; \\ (a4) &\rightarrow \eta_{120} = -3B; & \zeta_{111} &= -6B; \\ (b2) &\rightarrow \xi_{030} = B; \\ (c5) &\rightarrow \xi_{012} = 3B; & (d6) &\rightarrow \eta_{102} = 3B; \\ (b3) &\rightarrow \eta_{102} = -3B >> \end{aligned}$$

Круг замкнулся,  $3B = -3B$ ,  $B = 0$ ;

$$\begin{aligned} \eta_{300} = C; & & (c1) &\rightarrow \xi_{201} = -3C; \\ (a6) &\rightarrow \eta_{111} = -6C; & &\zeta_{102} = -3C; \\ (c3) &\rightarrow \xi_{003} = C; \\ (b5) &\rightarrow \xi_{021} = 3C; & (d4) &\rightarrow \zeta_{120} = 3C; \\ (c2) &\rightarrow \zeta_{120} = -3C >> \end{aligned}$$

Еще один круг замкнулся,  $3C = -3C$ ,  $C = 0$ . И, наконец,

$$\begin{aligned} \zeta_{030} = D; & & (d2) &\rightarrow \eta_{021} = -3D; \\ (a5) &\rightarrow \xi_{111} = -6D; & &\zeta_{012} = -3D; \\ (d3) &\rightarrow \eta_{003} = D; \\ (b5) &\rightarrow \eta_{201} = 3D; & (d4) &\rightarrow \zeta_{210} = 3D; \\ (d1) &\rightarrow \zeta_{210} = -3D >> \end{aligned}$$

Последний круг замкнулся, итоги вычислений приведены в таблице.

$$\begin{array}{lll}
 \xi_{300} = A & \eta_{300} = B & \zeta_{300} = C \\
 \xi_{210} = -3B & \eta_{210} = 3A & \zeta_{210} = 3D = -3D \\
 \xi_{201} = -3C & \eta_{201} = 3D & \zeta_{201} = 3A \\
 \xi_{120} = -3A & \eta_{120} = -3B & \zeta_{120} = 3C = -3C \\
 \xi_{111} = -6D & \eta_{111} = -6C & \zeta_{111} = -6B \\
 \xi_{102} = -3A & \eta_{102} = 3B = -3B & \zeta_{102} = -3C \\
 \xi_{030} = B & \eta_{030} = -A & \zeta_{030} = D \\
 \xi_{021} = 3C & \eta_{021} = -3D & \zeta_{021} = -3A \\
 \xi_{012} = 3B & \eta_{012} = -3A = 3A & \zeta_{012} = -3D \\
 \xi_{003} = C & \eta_{003} = D & \zeta_{003} = -A
 \end{array}$$

Как мы видим, в силу  $A = B = C = D = 0$ , все искомые коэффициенты оказываются нулевыми. Значит, среди форм третьего порядка требуемых решений нет.

Рассмотрим теперь формы второго порядка:

$$\begin{aligned}
 \xi(x, y, z) &= \xi_{200}x^2 + \xi_{020}y^2 + \xi_{002}z^2 + \xi_{110}xy + \xi_{101}xz + \xi_{011}yz, \\
 \eta(x, y, z) &= \eta_{200}x^2 + \eta_{020}y^2 + \eta_{002}z^2 + \eta_{110}xy + \eta_{101}xz + \eta_{011}yz, \\
 \zeta(x, y, z) &= \zeta_{200}x^2 + \zeta_{020}y^2 + \zeta_{002}z^2 + \zeta_{110}xy + \zeta_{101}xz + \zeta_{011}yz.
 \end{aligned}$$

Подставляя их в уравнения (III.1)-(III.2), получаем

$$\begin{aligned}
 2\xi_{200}x + \xi_{110}y + \xi_{101}z &= 2\eta_{020}y + \eta_{110}x + \eta_{011}z = 2\zeta_{002}z + \zeta_{101}x + \zeta_{011}y, \\
 2\eta_{200}x + \eta_{110}y + \eta_{101}z + 2\xi_{020}y + \xi_{110}x + \xi_{011}z &= 0, \\
 2\zeta_{200}x + \zeta_{110}y + \zeta_{101}z + 2\xi_{002}z + \xi_{101}x + \xi_{011}y &= 0, \\
 2\eta_{002}z + \eta_{101}x + \eta_{011}y + 2\zeta_{020}y + \zeta_{110}x + \zeta_{011}z &= 0,
 \end{aligned}$$

что дает систему соотношений

$$\begin{array}{cccc|l}
 a & b & c & d & \\
 2\xi_{200} = \eta_{110} = \zeta_{101} & 2\eta_{200} = -\xi_{110} & 2\zeta_{200} = -\xi_{101} & \eta_{101} = -\zeta_{110} & 1 \\
 \xi_{110} = 2\eta_{020} = \zeta_{011} & \eta_{110} = -2\xi_{020} & \zeta_{110} = -\xi_{011} & \eta_{011} = -2\zeta_{020} & 2 \\
 \xi_{101} = \eta_{011} = 2\zeta_{002} & \eta_{101} = -\xi_{011} & \zeta_{101} = -2\xi_{002} & 2\eta_{002} = -\zeta_{011} & 3
 \end{array}$$

Для решения этой системы воспользуемся тем же методом:

$$\begin{aligned}
 \xi_{200} = A; & \quad (a1) \rightarrow \eta_{110} = \zeta_{101} = 2A; \\
 (b2) \rightarrow \xi_{020} = -A; & \quad (c3) \rightarrow \xi_{002} = -A \gg \\
 \eta_{020} = B; & \quad (a2) \rightarrow \xi_{110} = \zeta_{011} = 2B; \\
 (a1) \rightarrow \eta_{200} = -B; & \quad (c3) \rightarrow \eta_{002} = -B \gg \\
 \zeta_{002} = C; & \quad (a3) \rightarrow \xi_{101} = \eta_{011} = 2C; \\
 (c1) \rightarrow \zeta_{200} = -C; & \quad (d2) \rightarrow \zeta_{020} = -C \gg
 \end{aligned}$$



Оставшиеся три уравнения  $(b3)$ ,  $(c2)$ ,  $(d1)$  – это уравнения

$$\eta_{101} = -\xi_{011}, \quad \zeta_{110} = -\xi_{011}, \quad \eta_{101} = -\zeta_{110},$$

которые могут, очевидно, выполняться только если все три коэффициента – нулевые. Таким образом, получается следующая таблица коэффициентов

$$\begin{array}{lll} \xi_{200} = A & \eta_{200} = -B & \zeta_{200} = -C \\ \xi_{020} = -A & \eta_{020} = B & \zeta_{020} = -C \\ \xi_{002} = -A & \eta_{002} = -B & \zeta_{002} = C \\ \xi_{110} = 2B & \eta_{110} = 2A & \zeta_{110} = 0 \\ \xi_{101} = 2C & \eta_{101} = 0 & \zeta_{101} = 2A \\ \xi_{011} = 0 & \eta_{011} = 2C & \zeta_{011} = 2B. \end{array}$$

Значит, среди форм второго порядка имеется решение, и оно имеет вид

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz, \\ \eta(x, y, z) &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz, \\ \zeta(x, y, z) &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz. \end{aligned} \tag{III.6}$$

Для форм первого порядка

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= \xi_1x + \xi_2y + \xi_3z, \\ \eta(x, y, z) &= \eta_1x + \eta_2y + \eta_3z, \\ \zeta(x, y, z) &= \zeta_1x + \zeta_2y + \zeta_3z \end{aligned}$$

подстановка дает соотношения

$$\xi_1 = \eta_2 = \zeta_3, \quad \xi_2 = \eta_1, \quad \zeta_1 = \xi_3, \quad \eta_3 = \zeta_2,$$

из которых мы получаем еще одно решение:

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= Dx + Ey - Fz, \\ \eta(x, y, z) &= -Ex + Dy + Gz, \\ \zeta(x, y, z) &= Fx - Gy + Dz. \end{aligned} \tag{III.7}$$

И, наконец, любая форма нулевого порядка – константы

$$\xi = H, \quad \eta = I, \quad \zeta = J \tag{III.8}$$

очевидно, являются решением.

Объединяя (III.6)-(III.8), получаем те  $\xi, \eta, \zeta$ , которые удовлетворяют уравнениям (III.1)-(III.2):

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= A(x^2 - y^2 - z^2) + 2Bxy + 2Cxz + Dx + Ey - Fz + H, \\ \eta(x, y, z) &= B(y^2 - x^2 - z^2) + 2Axy + 2Cyz - Ex + Dy + Gz + I, \\ \zeta(x, y, z) &= C(z^2 - x^2 - y^2) + 2Axz + 2Byz + Fx - Gy + Dz + J. \end{aligned}$$