ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию на соискание ученой степени физико-математических наук Косова Егора Дмитриевича на тему: «Полиномиальные образы и сдвиги мер на линейных пространствах» по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертационная работа Е.Д. Косова «Полиномиальные образы и сдвиги мер на линейных пространствах» посвящена исследованию свойств счетно-аддитивных мер, заданных на сигма-алгебре борелевских подмножеств некоторого локально-выпуклого пространства. Изучаются носители таких мер, обладающих слабыми моментами некоторого порядка; изучаются множества векторов, сдвиги мер на которые являются эквивалентными или несингулярными по отношению к исходной мере; изучаются меры отклонения измеримых многочленов на пространствах с гауссовскими и логарифмически вогнутыми мерами от своих средних значений.

Рассматриваемые в диссертации вопросы являются актуальными в современной теории меры. Важной характеристикой меры на банаховом пространстве является ее носитель. В ряде задач общей теории меры и в приложениях к задачам математической физики изучаются условия на меру на банаховом пространстве, обеспечивающие ее сосредоточенность а некотором подпространстве или подмножестве. Носители мер на банаховых пространствах изучались в работах Х. Сато, В.В. Булдыгина, Е.И. Островского, В.И. Богачева. Большую роль в изучении мер на линейных пространствах играют свойства инвариантности, квазиинвариантности и сингулярности по отношению к изучаемой мере ее образов при сдвигах на векторы линейного пространства. Исследованию этих свойств посвящены работы Л. Шеппа, С. Какутана, Р. Дадли, О.Г. Смолянова, А.М. Вершика. Свойства множества векторов, относительно сдвигов на которые мера обладает свойством квазиинвариантности, важны при изучении случайных блужданий в линейном пространстве и дифференциальных уравнений для функций и мер на этом пространстве. Измеримые многочлены на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами изучаются в различных аспектах теории вероятностей и стохастического анализа в работах Н. Винера, К. Ито, А.В. Скорохода, А.М. Вершика, О.Г. Смолянова, В.И. Богачева. Эти вопросы актуальны для построения теории функций, определенных на бесконечномерных пространствах.

В **первой главе** диссертации изложены известные результаты, используемые в последующих трех главах.

Во **второй главе** диссертации развит новый подход к изучению носителей мер на сепарабельных банаховых простраанствах, обладающих слабым моментом некоторого порядка. В работах В.И. Богачева было получено описание носителей меры на банаховом пространстве, имеющей сильный момент порядка r (т.е. норма пространства является интегрируемой в степени r функцией). Меры со слабым моментом порядка r определяются как меры, для которых каждый непрерывный линейный функционал на банаховом пространстве является интегрируемой в степени r функцией. Для меры на сепарабельном банаховом пространстве X, обладающих слабым, но не обладающих сильным моментом порядка r, приведены критерии существования компактно вложенного сепарабельного рефлексивного подпространства полной меры, для которого рассматриваемая мера также буде обладать слабым моментом порядка r. В главе 2 получен критерий существования компактно вложенного сепарабельного рефлексивного подпространства на пространстве с вероятной борелевской мерой, обладающей слабым моментом порядка $p > 1$. Установленный критерий при $p = 1$ получен в терминах интегрируемости по Петтису тождественного отображения $I : x \to x$ по каждому борелевскому подмножеству $A \subset X$. В случае $p = 2$ критерий получен в терминах компактности ковариационного оператора меры. Приведены примеры мер, для которых упомянутого компактно вложенного подпространства не существует.

В **третьей главе** диссертации исследуются свойства множества допустимых условием эквивалентности (либо условием несингулярности) сдвигов меры на локально выпуклом пространстве X – множеств таких векторов, сдвиги меры на которые эквивалентны (либо несингулярны) по отношению к исследуемой мере. Полученные в третьей главе результаты обобщают теорему Шеппа об эквивалентности мере своему образу при сдвиге на произвольный вектор из пространства l^2. Сначала в главе 3 исследуются продакт-меры ν^∞ на пространстве R^∞, являющиеся счетной степенью вероятностной меры ν на действительной прямой, обладающей положительной плотностью f относительно меры Лебега. Для мер указанного вида установлено, что эквивалентность исходной меры ν^∞ своему образу при сдвиге на произвольный вектор $h \in l^q$ равносильна принадлежности функции $\sqrt{f}$ пространству Бесова $B^r_{2,\infty}$. В третьей главе уствновлено, что для логарифмически вогнутых мер множество векторов, допустимых условием эквивалентности, является линейным подпространством в локально выпуклом пространстве X, а множество векторов, допустимых условием несингулярности, является выпуклым подмножеством пространства X.

В **четвертой главе** диссертации исследуются измеримые многочлены на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами. Изучаются оценки мер множеств, на которых уклонения многочленов от своих средних значений являются большими. Исследования диссертации дополняют информацию, получаемую из неравенства Карбери-Райта, дающего оценку сверху меры больших уклонений. В первой части четвертой главы сначала для логарифмически вогнутой меры на пространстве R^n получены оценки снизу на меры множеств, на которых многочлены заданной степени имеют достаточно большие уклонения от своего среднего. Затем для гауссовской меры на пространстве R^n устанавливаются оценки снизу меры множеств, на которых уклонения многочленов некоторой фиксированной степени от своего среднего значения является малым. Ценностью полученных оценок является их независимость от размерности n пространства R^n, что позволяет распространить полученные оценки на гауссовские меры на банаховом пространстве. Во второй части четвертой главы для логарифмически вогнутой меры на пространстве R^n получены оценки снизу на меры множеств малых уклонений многочленов второй степени от их средних. Полученные оценки также могут быть распространены на случай банахова пространства в силу их независимости от размерности n. В третьей части четвертой главы получено уточнение результата В.И. Богачева о минимальном ранге системы из k линейно независимых операторов Гильберта-Шмидта в пространстве Камерона-Мартина некоторой гауссовской меры на локально выпуклом пространстве.

В рецензируемой диссертационной работе имеют место некоторые стилистические и редакционные недостатки. Стоит отметить в качестве недостатка и некоторую неполноту изложения.

1. В доказательстве теоремы 2.3.1 на стр. 28 символ $\langle V \rangle$, обозначающий линейную оболочку множества V, был определен ранее на стр. 17. Для удобства читателя на стр. 28 стот напомнить о том, что $\langle V \rangle$ означает линейную оболочку.

2. Символ α_f, используемый для обозначения среднего отклонения функции от ее среднего значения, вводится в главе 1 на стр. 17 и затем используется в 4-й главе на стр. 42 без ссылки на стр. 17, что не удобно для читателя.

3. При определении величины $I_q(f)$ на стр. 31 стоит предположить относительно функции f наличие у нее интегрируемой производной f', о чем

упоминается после того, как дано определение.

4. Часть третья главы 4 является интересным результатом о свойствах вырождения системы операторов, но этот результат является независимым по отношению к основным результатам главы 4, касающимся нижних оценок меры уклонения многочленов от их средних значений.

Вместе с тем, указанные замечания нисколько не снижают значимости диссертационного исследования и не меняют положительной оценки диссертации.

В целом диссертационная работа представляет собой обширное научное исследование, в котором получен ряд новых результатов, важных как для теории меры на локально выпуклых пространствах, так и для ее приложений в теории вероятности и математической физике. Тема диссертации является актуальной, методы исследования – современными, результаты – новыми. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Косов Егор Дмитриевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

САКБАЕВ Всеволод Жанович 27.04.2018

Контактные данные: тел.: 7(495)4088172, e-mail: fumi2003@mail.ru Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Московский физико-технический институт (государственный университет), кафедра высшей математики Тел.: +7(495)4084554; e-mail: rector@mipt.ru

Подпись сотрудника Московского физико-технического института (государственного университета) В. Ж. Сакбаева удостоверяю:

Ученый секретарь Московского физико-технического института (государственного университета) Ю.И. Скалько