ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2015, том 51, № 11, с. 1420–1432

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЭФФЕКТ ПЕРРОНА БЕСКОНЕЧНОЙ СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ЛЮБОЙ ОКРЕСТНОСТИ НАЧАЛА КООРДИНАТ

© 2015 г. Н. А. Изобов, А. В. Ильин

В развитие обобщений авторов эффекта Перрона смены значений характеристических показателей для любых параметров $m > 1$, $\lambda_1 \le \lambda_2 < 0$ и произвольного ограниченного счетного множества $\beta \subset [\lambda_1, +\infty)$, $\beta \cap [\lambda_2, +\infty) \ne \emptyset$, доказано существование двумерной дифференциальной системы линейного приближения с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на положительной полуоси коэффициентами и характеристическими показателями λ_1 и λ_2, а также бесконечно дифференцируемого возмущения порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат и возможного роста вне ее таких, что нетривиальные решения возмущенной системы бесконечно продолжимы и их (начинающихся в любой окрестности начала координат) характеристические показатели в точности составляют множество β. Одновременно получены обобщения этого бесконечного варианта эффекта Перрона в окрестности начала координат для других точек плоскости начальных значений решений.

DOI: 10.1134/S0374064115110023

Рассматриваем дифференциальные системы линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \ge t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \le \ldots \le \lambda_n(A) < 0$ и нелинейные дифференциальные системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in R^n, \quad t \ge t_0, \tag{2}$$

также с бесконечно дифференцируемыми по переменным $t, y_1, \ldots, y_n$ в области $(t_0, +\infty) \times R^n$ возмущениями $f(t, y)$ порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и возможного роста вне ее:

$$\|f(t, y)\| \le C_f \|y\|^m, \quad C_f = \mathrm{const} > 0, \quad y \in R^n, \quad t \ge t_0. \tag{3}$$

При исследовании по линейному приближению (1) как экспоненциальных устойчивости и условной устойчивости, так и неустойчивости тривиального решения $y \equiv 0$ нелинейной системы (2) с возмущениями (3) возникает необходимость вычисления характеристических показателей Ляпунова (во всяком случае, определения их знаков) ее нетривиальных бесконечно продолжимых на всю полуось $[t_0, +\infty)$ решений $y(t, c)$, $y(t_0, c) = c \in R^n \setminus \{0\}$, начинающихся в как угодно малой окрестности начала координат $y = 0$ (см., например, [1, с. 232–241] и [2, с. 277–326]). В последней монографии содержится библиография по решению частной (при всех возмущениях высшего порядка малости) и в некритическом случае общей (в случае фиксированного порядка $m > 1$) задач Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по линейному приближению. Характеристические показатели этих решений составляют некоторое предельное множество [3; см. также 2, с. 283]

$$\Lambda_0(A, f) \equiv \operatorname*{Lim}_{r \to +0} \{\lambda[y(\cdot, c)] : \ 0 < \|c\| < r\},$$

а характеристические показатели всех нетривиальных бесконечно продолжимых решений системы (2) – множество $\Lambda(A, f)$.

Поэтому возникает необходимый вопрос о существовании бесконечного варианта эффекта Перрона [4; 5, с. 50–51; 6–10] счетной смены значений характеристических показателей решений в любой (как угодно малой) окрестности начала координат (нулевого решения), т.е. вопрос о точной реализации достаточно произвольного ограниченного счетного множества β, в частности, принадлежащего положительной полуоси, предельным множеством $\Lambda_0(A,f)$ характеристических показателей бесконечно продолжимых решений, например, двумерной системы (2) с возмущением (3) и линейным приближением (1) с произвольно заданными отрицательными показателями Ляпунова. Для исследования асимптотического поведения на бесконечности всех решений дифференциальной системы (2) представляет интерес точная реализация множества β одновременно множествами $\Lambda_0(A,f)$ и $\Lambda(A,f)$, а также построение предельных множеств характеристических показателей решений, начинающихся в момент $t=t_0$ в как угодно малых окрестностях некоторых других точек фазовой плоскости, отличных от начала координат $(0,0)$ (например, во всех точках с целочисленными координатами).

В настоящей работе предложен бесконечный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей, как раз и реализующий равенства $\Lambda_0(A,f)=\Lambda(A,f)=\beta$ на двумерных без нарушения общности дифференциальных системах (1)–(3). Более того, одновременно с этим предельными в точках $p=(p_1,p_2)\in R^2$ множествами

$$\Lambda_p(A,f)\equiv \operatorname*{Lim}_{r\to+0}\{\lambda[y(\cdot,c)]:\ 0<\|c-p\|<r\}$$

характеристических показателей бесконечно продолжимых нетривиальных решений построенных двумерных систем (2) реализованы: 1) множество β в случае всех точек p с целыми первыми p_1 и нулевой второй p_2 координатами; 2) множества $\beta\cap[\lambda_2,+\infty)$ в случае произвольных целочисленных первой p_1 (произвольной $p_1\in R$ при $\beta\cap[\lambda_1,\lambda_2)\neq\emptyset$) и ненулевой второй p_2 координат.

В наших предыдущих работах [9, 10] получен бесконечный вариант эффекта Перрона смены произвольных отрицательных значений $\lambda_1\le\lambda_2$ характеристических показателей системы линейного приближения (1) на произвольное же ограниченное счетное множество $\beta_1\cup\beta_2=\Lambda(A,f)$ характеристических показателей решений системы (2). При этом множества $\beta_i\subset[\lambda_i,+\infty)$ удовлетворяли условию $\sup\beta_1\le\inf\beta_2$, но множество $\Lambda_0(A,f)$ состояло не более чем из двух различных чисел.

Относительно множества $\Lambda_0(A,f)$ уместно здесь также отметить, что в работе [3] построена возмущенная система (2) с отрицательными характеристическими показателями системы линейного приближения (1) и экспоненциально устойчивым тривиальным решением $y=0$ (э.у. система), у которой множество характеристических показателей $\Lambda_0(A,f)\subset(-\infty,0)$ (вместо необходимого $\Lambda_0(A,f)\subset(0,+\infty)$) имело положительную меру Лебега. Тем самым эти системы ни в коей мере не реализуют необходимые эффекты Перрона как смены значений, так и смены знака характеристических показателей. Это же относится к работе [11], в которой построены э.у. системы (2) со множествами $\Lambda_0(A,f)\subset(-\infty,0)$, состоящими из счетного числа компонент связности, и к работе [12], в которой полностью описаны множества $\Lambda_0(A,f)\subset(-\infty,0)$ для э.у. систем (2) с возмущениями (3).

Следует также отметить приоритетный характер работ В.В. Козлова [13, 14] и монографии Г.А. Леонова [5] в исследовании разрушения устойчивости решений дифференциальных систем различными возмущениями.

Анонсированный выше результат настоящей работы устанавливает

Теорема. *Для любых параметров* $m>1$, $\lambda_1\le\lambda_2<0$ *и произвольного конечного или ограниченного счетного множества*

$$\beta\subset[\lambda_1,+\infty),\quad \beta\cap[\lambda_2,+\infty)\neq\emptyset, \tag{4}$$

существуют:

1) двумерная линейная система (1) с ограниченной бесконечно дифференцируемой на полуоси $[1,+\infty)$ *матрицей коэффициентов* $A(t)$ *и характеристическими показателями* $\lambda_1(A)=\lambda_1\le\lambda_2=\lambda_2(A)$;

2) бесконечно дифференцируемое по переменным t, y_1, y_2 и удовлетворяющее условию (3) возмущение $f:\ [1,+\infty)\times R^2\to R^2$ порядка $m>1$,

такие, что все нетривиальные решения двумерной нелинейной системы (2) с линейным приближением (1) бесконечно продолжимы вправо и их характеристические показатели составляют множество $\Lambda(A,f)=\beta$, принимающее в точках $p=(p_1,p_2)\in R^2$ с целочисленными координатами свои предельные значения

$$\Lambda_p(A,f)=\begin{cases}\beta, & \text{если}\quad p_1\in Z\quad \text{и}\quad p_2=0,\\ \beta\cap[\lambda_2,+\infty), & \text{если}\quad p_1\in Z\quad \text{и}\quad p_2\in Z\setminus\{0\}.\end{cases}\tag{5}$$

Доказательство этой теоремы состоит из следующих ниже пяти пунктов.

1. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Эта система имеет вид (см. [9])

$$\begin{gathered}\dot x_1=\lambda_1x_1-\alpha[1+s'(t)]x_1\equiv a_1(t)x_1,\\ \dot x_2=a(t,\lambda_1,\lambda_2)x_2-\alpha[1-s'(t)]x_2\equiv a_2(t)x_2,\\ s(t)\equiv t\sin\gamma\ln t,\quad t\ge t_1=1,\end{gathered}\tag{6}$$

в которой параметры α и γ принимают значения

$$\alpha\equiv m^2(m-1)^{-1}|\lambda_1|+|B|,\quad B\equiv\sup\beta,\quad \gamma>8.\tag{7}$$

При этом для ограниченного и бесконечно дифференцируемого коэффициента $a(t,\lambda_1,\lambda_2)$ выполнены соотношения

$$\int\limits_{t_1}^{t}a(\tau,\lambda_1,\lambda_2)\,d\tau\begin{cases}=\lambda_i(t-t_1), & t\in T_i(k),\\ \le\lambda_2(t-t_1), & t\ge t_1,\end{cases}\tag{8}$$

со следующими точками последовательности $\{t_k\}$ и отрезками

$$t_k=e^{4(k-1)\pi},\quad T_i(k)=[t_{4k+2i-1},t_{4k+2i}],\quad i=1,2,\quad k\in N.\tag{9}$$

Построение же необходимых нелинейных возмущений $f(t,y)$ m-го порядка (3) и всех нетривиальных решений возмущенной системы (2), а также вычисление их характеристических показателей содержится в пп. 2–4.

2. ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОРЯДКА $m>1$

Для определения компонент $f_1(t,y_2)$ и $f_2(t,y_1)$ возмущения $f:\ [1,+\infty)\times R^2\to R^2$ нам понадобятся вспомогательные функции $u_i(t)$ времени $t\in[1,+\infty)$ и $V_i(z,k)$ переменной $z\in(-\infty,+\infty)$ и параметра $k\in N$. Для определения этих функций используем монотонную бесконечно дифференцируемую функцию Гелбаума–Олмстеда [15, с. 54]

$$e_{\alpha\beta}(t,\tau_1,\tau_2)=\alpha+(\beta-\alpha)\exp\{-(t-\tau_1)^{-2}\exp[-(t-\tau_2)^{-2}]\},\quad \tau_1<t<\tau_2,$$

принимающую на концах отрезка $[\tau_1,\tau_2]$ соответственно значения произвольных параметров α и β и нулевые значения односторонних производных всех порядков.

Функции $u_i(t)$ определим равенствами [9]

$$u_i(t) = \operatorname{sign}(2-j) \times [d_i(k)]^{\operatorname{sign}(j-1)} \times$$

$$\times \begin{cases} e_{01}(t, \tau_{ij}(k)-1, \tau_{ij}(k)), & t \in [\tau_{ij}(k)-1, \tau_{ij}(k)], \\ 1, & t \in (\tau_{ij}(k), \tau_{i,j+1}(k)-1), \\ e_{10}(t, \tau_{i,j+1}(k)-1, \tau_{i,j+1}(k)), & t \in [\tau_{i,j+1}(k)-1, \tau_{i,j+1}(k)], \end{cases} \tag{10}$$

$$j = 1, 3, \quad i = 1, 2, \quad k \geq k(\gamma),$$

тождественно равные нулю на всех остальных промежутках полуоси $[1, +\infty)$, не содержащихся в равенствах (10). Приведенные в них номер $k(\gamma) \in N$ и моменты $t = \tau_{ij(k)}$ определены в [9], а использованные промежутки ненулевого задания функций $u_i(t)$ принадлежат внутренности отрезка $T_i(k)$. Постоянные же $d_i(k) \in (0,1)$ обеспечивают выполнение равенств

$$J_i(\tau_{i4}(k), \tau_{i1}(k)-1) = J_i(\tau_{4k+2i}, \tau_{4k+2i-1}) = 0,$$

$$i = 1, 2, \quad k \geq k(\gamma), \tag{11}$$

для интегралов

$$J_i(t, \tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} u_i(\xi) g_i(\xi)\, d\xi, \quad t \geq \tau,$$

в которых функции $g_i(t)$ имеют представление

$$g_i(t) \equiv x_i^m(t) x_{3-i}^{-1}(t), \quad x_i(t) \equiv \exp \int\limits_{t_1}^{t} a_i(\tau)\, d\tau, \quad t \geq t_1 = 1.$$

Тем самым в силу (11) для этих интегралов выполнены тождества

$$J_i(t, t_1) \equiv 0, \quad t \notin (\tau_{i1}(k)-1, \tau_{i4}(k)) \subset T_i(k), \quad i = 1, 2, \quad k \geq k(\gamma). \tag{12}$$

Для определения функций $V_i(z, k)$ и построения решений возмущенной системы окажутся необходимыми функции

$$Y_i(t) \equiv x_{3-i}(t) J_i(t, t_1),$$

принимающие в силу равенств (10), (11) и тождеств (12) значения

$$Y_i(t) = \begin{cases} x_{3-i}(t) J_i(t, \tau_{i1}(k)-1) \geq 0, & t \in (\tau_{i1}(k)-1, \tau_{i4}(k)), \\ 0, & t \notin (\tau_{i1}(k)-1, \tau_{i4}(k)), \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad k \geq k(\gamma). \tag{13}$$

Без нарушения общности (см. [9]) множество β можно считать состоящим из более чем двух различных чисел. Это множество представимо в виде объединения $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ двух непустых в силу (4) подмножеств $\beta_1 = \{\beta_{1l}\}$ и $\beta_2 = \{\beta_{2l}\}$, определенных следующим образом:

1) если

$$\beta_0 \equiv \beta \cap [\lambda_1, \lambda_2) \neq \emptyset,$$

то полагаем

$$\beta_1 = \beta_0, \quad \beta_2 = \beta \setminus [\lambda_1, \lambda_2);$$

2) если же $\beta_0 = \emptyset$, то $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

Замечание 1. Во втором случае и при замкнутом снизу множестве β $(\inf \beta \in \beta)$ можно было бы положить $\beta_1 = \{\inf \beta\}$ и $\beta_2 = \beta \setminus \beta_1$.

Предположив сначала выполненным наиболее сложный случай бесконечных множеств β_1 и β_2, определим вспомогательные числа $c_i(k,l) \in (0,1)$ соотношениями

$$\sup_{t\in T_i(k)} \{t^{-1}\ln[c_i(k,l)Y_i(t)]\} = \theta_i^{-1}\ln[c_i(k,l)Y_i(\theta_i)] = \beta_{il} + k^{-1},$$
$$\theta_i = \theta_i(k,l) \in T_i(k), \quad i=1,2, \quad l=\overline{1,k}, \quad k \ge k(\gamma), \tag{14}$$

в которых отрезки $T_i(k)$ определены равенствами (9), а функции $Y_i(t)$ – равенствами (13). При этом существование этих величин $c_i(k,l)$ следует из неравенств

$$\ln Y_i(\tau_{i2}(k)) \ge (|B| + |\lambda_1|/4)\tau_{i2}(k), \quad i=1,2, \quad k\ge k(\gamma),$$

справедливых в силу выбора (7) параметров α и γ.

Введем также вспомогательные величины

$$\varepsilon(k) = 2^{-3k}, \quad \Delta(k) = (k2^k)^{-1}, \quad \eta_l(k) = 2^{-k} + (k-l+1)\Delta(k), \quad l=\overline{1,1+k}.$$

Для произвольного $k \ge k(\gamma)$ определим функции

$$v_i(z,s,k) = \begin{cases} e_{c_i(s,l+1),c_i(s,l)}(z,\eta_{l+1}(s),\eta_{l+1}(s)+\varepsilon(k)), & z-\eta_{l+1}(s)\in[0,\varepsilon(k)],\\ c_i(s,l), & z\in[\eta_{l+1}(s)+\varepsilon(k),\eta_l(s)],\end{cases}$$
$$l=\overline{1,s}, \quad s\in\{1,k\}, \tag{15_1}$$

с величинами $c_i(s,s+1) = c_i(s+1,1)$, если $s=\overline{1,k-1}$, и $c_i(k,k+1)=0$. Функции (15_1) определены на отрезках $[2^{-s},2^{1-s}]$. С помощью этих функций введем на отрезке $[0,1]$ новую функцию

$$V_i(z,k) = \begin{cases} 0, & z\in[0,2^{-k}],\\ v_i(z,s,k), & z\in[2^{-s},2^{1-s}], \quad s=\overline{1,k}.\end{cases} \tag{15_2}$$

На этом отрезке неотрицательная функция (15_2) по свойствам функций Гелбаума–Олмстеда является ограниченной единицей и бесконечно дифференцируемой при всяком значении $k\ge k(\gamma)$.

Распространим определение (15_1), (15_2) функции $V_i(z,k)$ на произвольный отрезок $[q,q+1]$, $q\in N$, следующим образом:

$$V_i(z,k) = \begin{cases} e_{c_i(k,1),0}(z,q,q+2^{-k}), & z\in[q,q+2^{-k}],\\ V_i(z-q,k), & z\in[q+2^{-k},q+1].\end{cases} \tag{15_3}$$

Наконец, для отрицательных значений z положим

$$V_i(z,k) = V_i(-z,k), \quad z\in(-\infty,0), \quad k\ge k(\gamma). \tag{15_4}$$

Построенная на всей оси $(-\infty,+\infty)$ неотрицательная функция $V_i(z,k)$ при всяком $k\ge k(\gamma)$ является ограниченной единицей и бесконечно дифференцируемой по z.

В случае одного конечного множества $\beta_i = \{\beta_{i1},\ldots,\beta_{is}\}$ (или обоих сразу), как и в [9], превращаем его в бесконечное $\beta_i = \{\beta_{il}\}$ с совпадающими элементами $\beta_{il}=\beta_{is}$ и соответствующими величинами $c_i(k,l)=c_i(k,s)$ при всех $l\ge s$. Тем самым мы возвращаемся к рассмотренному ранее случаю.

Формально, как и в [9], с учетом нового определения (15_1) – (15_4) функций $V_i(z,k)$, $i=1,2$, возьмем компоненты $f_i(t,y_{3-i})$ в виде

$$f_{3-i}(t,y_i)=u_i(t)V_i[z(y_i,t),k]|y_i|^m,\quad i=1,2,$$
$$z(y_i,t)\equiv y_i x_i^{-1}(t),\quad y=(y_1,y_2)\in R^2,\quad t\in T_i(k),\tag{16_1}$$
$$f_{3-i}(t,y_i)\equiv 0,\quad t\notin T_i(k),\quad k\ge k(\gamma).$$

Так как ненулевое задание функций $u_i(t)$ определяется исключительно равенствами (10), то эти компоненты оказываются тождественно равными нулю и в дополнительной области:

$$f_{3-i}(t,y_i)\equiv 0,\quad y\in R^2,\quad t\in T_i(k)\setminus(\tau_{i1}(k)-1,\tau_{i4}(k))\ne\emptyset,\tag{16_2}$$

причем содержащаяся в тождествах (16_2) разность множеств состоит из двух непересекающихся ненулевой длины отрезков.

Функции $u_i(t)$ по абсолютной величине и неотрицательная $V_i(z,k)$ по построению являются ограниченными единицей и бесконечно дифференцируемыми, а функция $|y_i|^m$ – бесконечно дифференцируемой вне любой окрестности $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, начала координат. Так как $V_i(z,k)\equiv 0$ при $z\in(-\varepsilon(k),\varepsilon(k))$, $\varepsilon(k)>0$, при всяком фиксированном $k\ge k(\gamma)$, то в силу определения (16_1) компонент возмущения f имеем

$$f_{3-i}(t,y_i)\equiv 0\quad \text{при}\quad |y_i x_i^{-1}(t)|<\varepsilon(k)=2^{-3k}.\tag{16_3}$$

Поэтому недифференцируемость в общем случае функции $|y_i|^m$ в точке $y_i=0$ в силу тождеств (16_3) не приводит к аналогичному свойству для компонент $f_{3-i}(t,y_i)$, сохраняя их бесконечную дифференцируемость не только в точке $y_i=0$, но и с учетом тождеств (16_2) и во всей области $(1,+\infty)\times R$. Выполнимость же условия (3) для построенного возмущения $f(t,y)$ очевидна.

Отметим также вытекающее из определения (16_3) функций $f_{3-i}(t,y_i)$, $i=1,2$, следующее свойство всех нетривиальных решений системы (2) с линейным приближением (6) и возмущением (16_1): всякое такое решение $y(t,c)$, $y(1,c)=c\ne 0$, совпадает с решением $x(t,c)=(c_1x_1(t),c_2x_2(t))$ исходной системы (6) лишь на конечном промежутке времени $[1,t_c]$. Это следует из предельных соотношений

$$\sup_{t\in T_i(k)}|y_i(t,c)x_i^{-1}(t)|\le\varepsilon(k)\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty.$$

Поэтому компонента $y_i(t,c)$ решения $y(t,c)$, не попав в сужающуюся по k область

$$\{(t,y_i):\ t\in T_i(k),\ |y_i x_i^{-1}(t)|\le\varepsilon(k)\}$$

при некотором $k\ge k(\gamma)$, для всех последующих значений $k\in N$ в аналогичную область уже не попадает.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

Согласно определению функций $u_i(t)$, тождественно равных нулю вне промежутков, указанных в равенствах (10), и определению (16_1) компонент $f_{3-i}(t,y_i)$, $i=1,2$, имеем, в частности,

$$u_1(t)\equiv 0,\quad f_2(t,y_1)\equiv 0,\quad t\notin T_1(k),$$
$$u_2(t)\equiv 0,\quad f_1(t,y_2)\equiv 0,\quad t\notin T_2(k).$$

Поэтому на отрезках $T_1(k)$ (отрезках $T_2(k)$) справедливо тождество $f_1(t,y_2)\equiv 0$ (тождество $f_2(t,y_1)\equiv 0$) и система (2) на них является нижне-треугольной (верхне-треугольной). На остальных промежутках полуоси $[1,+\infty)$ имеем $f(t,y)\equiv 0$ и возмущенная система (2) совпадает с исходной линейной (6). Тем самым система (2) допускает последовательное по времени полное интегрирование на всей полуоси $[1,+\infty]$. В частности, в соответствии с предыдущим на отрезке $[1,t_{4k(\gamma)+3}]\supset T_1(k(\gamma))$ имеем $f_1(t,y_2)\equiv 0$ и поэтому первая компонента $y_1(t,c)$ с начальным значением $y_1(1,c)=c_1\in R$ произвольного нетривиального решения

$$y(t,c),\quad y(1,c)=c=(c_1,c_2)\in R^2\setminus\{0\},$$

построенной системы (2) имеет представление

$$y_1(t,c)=c_1x_1(t),\quad t\in[1,t_{4k(\gamma)+3}]\supset T_1(k(\gamma)). \tag{17_1}$$

Тогда вторая компонента $y_2(t,c)$, $y_2(1,c)=c_2\in R$, этого решения в соответствии с равенствами (16_1) и (17_1) является в свою очередь решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot y_2=a_2(t)y_2+|c_1|^mV_1(c_1,k(\gamma))u_1(t)x_1^m(t)$$

и, согласно равенствам (11) и (12), имеет вид

$$y_2(t,c)=c_2x_2(t)+|c_1|^mV_1(c_1,k(\gamma))x_2(t)J_1(t,t_1),\quad t\in[1,t_{4k(\gamma)+3}]. \tag{18_1}$$

В силу равенств (11) и тождеств (12) имеем в свою очередь тождества

$$J_1(t,t_1)\equiv 0,\quad t\in[t_{4k(\gamma)+2},t_{4k(\gamma)+5}],$$

приводящие к представлению

$$y_2(t,c)=c_2x_2(t),\quad t\in[t_{4k(\gamma)+2},t_{4k(\gamma)+5}]\supset T_2(k(\gamma)). \tag{17_2}$$

Оно справедливо еще и потому, что вторая компонента $f_2(t,y_1)$, как уже отмечалось, тождественно равна нулю, в частности, на всех замкнутых промежутках полуоси $[1,+\infty)$, расположенных между любыми отрезками $T_1(k)$ и $T_1(k+1)$, $k\ge k(\gamma)$, и на отрезке $[1,t_{4k(\gamma)+1}]$. Подставляя значение (17_2) второй компоненты $y_2(t,c)$ в функцию $f_1(t,y_2)$, тождественно равную нулю вместе с функцией $u_2(t)$ на отрезке $[1,t_{4k(\gamma)+3}]$, для определения на отрезке $T_2(k)$ первой компоненты $y_1(t,c)$ решения $y(t,c)$ имеем линейное неоднородное уравнение

$$\dot y_1=a_1(t)y_1+|c_2|^mV_2(c_2,k(\gamma))u_2(t)x_2^m(t),\quad t\in T_2(k(\gamma)).$$

Это уравнение для определения компоненты $y_1(t,c)$ в силу тождества $u_2(t)\equiv 0$ для $t\in[1,t_{4k(\gamma)+3}]$ можно рассматривать и на всем отрезке $[1,t_{4k(\gamma)+4}]$. Поэтому компонента $y_1(t,c)$, определенная на отрезке $[1,t_{4k(\gamma)+3}]$ равенством (17_1), на следующем отрезке $T_2(k)$ является решением предыдущего дифференциального уравнения и тем самым имеет вид

$$y_1(t,c)=c_1x_1(t)+|c_2|^mV_2(c_2,k(\gamma))x_1(t)J_2(t,t_{4k(\gamma)+3}),\quad t\in T_2(k(\gamma)). \tag{18_2}$$

Методом математической индукции аналогично равенствам (17_i) и (18_i) с учетом равенств (11) и тождеств (12) для компонент $y_i(t,c)$ решения $y(t,c)$ будем иметь необходимые представления

$$y_i(t,c)=c_ix_i(t)+\begin{cases}|c_{3-i}|^mV_{3-i}(c_{3-i},k)x_i(t)J_{3-i}(t,t_{4k+5-2i}), & t\in T_{3-i}(k),\\ 0, & t\notin T_{3-i}(k),\end{cases}$$
$$k\ge k(\gamma),\quad i=1,2. \tag{19_i}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Сначала условимся для компонент решения $y(t,c)$ построенной системы с начальным вектором $y(1,c)=c=(c_1,c_2)\in R^2$ использовать обозначения $y_1(t,c_1,c_2)$ и $y_2(t,c_1,c_2)$, указывая их явную покоординатную зависимость от компонент вектора c, более удобную при вычислении характеристического показателя этого решения.

Сделаем следующее

Замечание 2. В соответствии с симметричностью для всякого $k\in N$ значений функции $V_{3-i}(c_{3-i},k)$, $i\in\{1,2\}$, относительно начала координат $c_{3-i}=0$ (см. равенства (15_4)) показатели второго слагаемого в представлении (19_i) при положительном c_{3-i} и отрицательном $-c_{3-i}$ совпадают. Из этого следует и совпадение показателей самой компоненты $y_i(t,c_1,c_2)$, соответствующей как положительному c_{3-i}, так и отрицательному $-c_{3-i}$ значению начального параметра $c_{3-i}\neq 0$.

4.1. Показатели решений $y(t,c)$ с начальными векторами $c=(c_1,0)\neq 0$. Для компонент этих решений из равенств (19_i) имеем представление

$$y_1(t,c_1,0)=c_1x_1(t),\quad t\geq 1;$$

$$y_2(t,c_1,0)=\begin{cases}|c_1|^mV_1(c_1,k)Y_1(t), & t\in T_1(k),\\ 0, & t\notin T_1(k),\end{cases}\quad k\geq k(\gamma). \tag{20}$$

Из множеств $\Lambda(A,f)$ и $\Lambda_p(A,f)$ выделим соответственно их подмножества $\Lambda(A,f)|_{R_1}$ и $\Lambda_p(A,f)|_{R_1}$ характеристических показателей нетривиальных решений $y(t,c)$ построенной возмущенной системы (2) с линейным приближением (6) и m -возмущением (16_1), начинающихся в момент $t_0=1$ на оси $R_1=\{c\in R^2:\ c_1\neq 0,\ c_2=0\}$. Докажем для этих подмножеств равенства

$$\Lambda(A,f)|_{R_1}=\Lambda_p(A,f)|_{R_1}=\beta_1,\quad p=(p_1,0),\quad p_1\in N_0. \tag{21}$$

По определению точек $\eta_l(s)$, $l=\overline{1,s}$, $s\in N$, всякий промежуток

$$(2^{-s},2^{1-s}]\subset(0,1],\quad s\in N,$$

состоит из s непересекающихся промежутков $(\eta_{l+1}(s),\eta(s)]$, $l=\overline{1,s}$, равной длины $\Delta(s)$. Поэтому справедливо разложение

$$(0,1]=\bigcup_{s=1}^{+\infty}\bigcup_{l=1}^{s}(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)] \tag{22}$$

на непересекающиеся промежутки $(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)]$ при всех $1\leq l\leq s$, $s\in N$. Для любого $c_1=h$ из этого произвольного промежутка $(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)]$ в силу свойства $\varepsilon(k)\to 0$ при $k\to\infty$ найдется такой номер $q(h)\geq k(\gamma)$, $q(h)\in N$, что по определению (15_1) – (15_4) функций $V_i(z,k):\ R\to(0,1)$, $k\in N$, справедливы равенства

$$V_i(z,k)=c_i(k,l),\quad z\in[h,\eta(s)],\quad \forall k\geq\max\{q(h),s\},\quad i=1,2. \tag{23_1}$$

Поэтому для произвольного $c_1=h\in(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)]$, $l\leq s$, при всех $k\geq\max\{q(h),s\}$ в представлении (20) величины $V_1(h,k)$ принимают значения $c_1(k,l)$. В соответствии с определением (14) этих значений показатель Ляпунова решения (20) реализуется на второй его компоненте $y_2(t,h,0)$ и имеет представление

$$\begin{gathered}\lambda[y(\cdot,c)]=\max\{\lambda[y_1],\lambda[y_2]\}=\max\{\lambda_1,\beta_{1l}\}=\beta_{1l},\\ c=(h,0)\neq 0,\quad h\in(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)],\quad \forall s\geq l,\quad \forall l\in N.\end{gathered} \tag{24_1}$$

Оно позволяет на основании разложения (22) получить в свою очередь равенство

$$\{\lambda[y(\cdot,(h,0))]:\ h\in(0,1]\}=\beta_1 \tag{25_1}$$

как в первом, так и во втором случае определения множества β_1.

Так как промежуток $(2^{-s},2^{1-s}]$ представим в виде

$$(2^{-s},2^{1-s}]=\bigcup_{l=1}^{s}(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)],\quad s\in N,$$

то всякая правосторонняя окрестность $(0,2^{-j}]$ точки $c_1=0$ представима объединением

$$(0,2^{-j}]=\bigcup_{r=j}^{+\infty}(2^{-r-1},2^{-r}] \tag{26}$$

бесконечного числа промежутков $(2^{-r-1},2^{-r}]$, каждый из которых состоит из $r+1$ промежутков

$$(\eta_{l+1}(r+1),\eta_l(r+1)],\quad l=\overline{1,r+1}.$$

Тем самым любая (при всяком $j\in N$) правосторонняя окрестность (26) точки $c_1=0$ содержит при любом фиксированном $l\in N$ счетное число промежутков $(\eta_{l+1}(r),\eta_l(r)]$, $r\in N$. При этом бесконечная (по $r\in N$) последовательность таких промежутков сходится к точке $c_1=0$. Поэтому в силу равенств (24_1) имеем первое необходимое соотношение

$$\{\lambda[y(\cdot,(h,0))]:\ h\in(0,2^{-j}]\}=\beta_1,\quad j=N. \tag{25_2}$$

С другой стороны, по определению (15_4) значений $V_i(z,k)$ для отрицательных Z получаем аналогичное (25_2) и второе необходимое соотношение

$$\{\lambda[y(\cdot,(-h,0))]:\ -h\in[-2^{-j},0)\}=\beta_1,\quad j=N. \tag{25_3}$$

Из соотношений (25_2) и (25_3) имеем теперь равенство

$$\Lambda_0(A,f)|_{R_1}=\beta_1, \tag{21_1}$$

являющееся одним из соотношений (21) при $p=(0,0)$.

В силу периодического по $q=p_i\in N$ определения (15_3) функции $V_i(z,k)$ для нее справедливы аналогичные (23_1) равенства

$$\begin{gathered} V_i(z,k)=c_i(k,l),\quad z-p_i\in[h,\eta_l(s)]\subset(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)],\\ \forall k\ge\max\{q(h),s\},\quad \forall p_i\in N,\quad i=1,2. \end{gathered} \tag{23_2}$$

Поэтому для произвольного параметра

$$c_1\in(p_1+\eta_{l+1}(s),p_1+\eta_l(s)],\quad s\ge l,\quad k\ge q(c_1),\quad \forall p_1\in N_0,$$

в представлении (20) величины $V_1(c_1,k)$ принимают значения $c_1(k,l)$. В соответствии с определениями (14) этих значений и множества β_1 показатель Ляпунова решения (20) реализуется на второй его компоненте $y_2(t,c_1,0)$ и имеет аналогичные (24_1) представления

$$\begin{gathered} \lambda[y(\cdot,c)]=\max\{\lambda_1,\beta_{1l}\}=\beta_{1l},\quad c=(p_1+h,0),\\ h\in(\eta_{l+1}(s),\eta_l(s)],\quad \forall s\ge l,\quad \forall l\in N,\quad \forall p_1\in N_0. \end{gathered} \tag{24_2}$$

Из них, как и выше, получаем аналогичные (25_1) – (25_2) и (21_1) равенства

$$\{\lambda[y(\cdot,(c_1,0))] :\ c_1 \in (p_1, p_1+1]\} = \beta_1, \quad p_1 \in N, \tag{25_4}$$

$$\Lambda_p(A,f)|_{R_1} = \beta_1, \quad p_1 \in N, \quad p_2 = 0. \tag{21_2}$$

Окончательные необходимые справедливые на всей оси R_1 равенства (21) являются следствием замечания 2 и доказанных равенств (21_1) – (21_2) и (25_2) – (25_4).

4.2. Показатели решений $y(t,c)$ с ненулевой второй компонентой начального вектора $c \in R^2$. Рассмотрим сначала случай $c_2 > 0$. Для этого значения найдутся такие числа $p_2 \in N_0$, $l_2 \in N$ и $s_2 \in N$, $s_2 \geq l_2$, что оказывается выполненным включение $c_2 - p_2 \in \in (\eta_{l_2+1}(s_2), \eta_{l_2}(s_2)]$.

В соответствии с равенствами (23_2) функция $V_2(c_2,k)$ принимает значения

$$\begin{gathered} V_2(c_2,k) = c_2(k,l_2), \quad c_2 - p_2 \in [\eta_{l_2+1}(s_2), \eta_{l_2}(s_2)], \\ \forall k \geq \max\{q(c_2), s_2\}, \quad p_2 \in N_0, \quad l_2, s_2 \in N, \quad l_2 \leq s_2. \end{gathered} \tag{23_3}$$

Поэтому первая компонента $y_1(t,c_1,c_2)$ рассматриваемого решения $y(t,c)$ с некоторым начальным значением $y_1(1,c_1,c_2) = c_1 \in R$ в силу равенств (19_1) и (11)–(13) имеет представление

$$y_1(t,c_1,c_2) = c_1 x_1(t) + \begin{cases} |c_2|^m c_2(k,l_2) Y_2(t), & t \in T_2(k), \\ 0, & t \notin T_2(k), \end{cases} \tag{27_1}$$

для значений $c_2 > 0$, p_2, k, l_2 и s_2 из соотношений (23_3). В соответствии с определением (14) величин $c_2(k,l_2)$ и аналогично рассмотренному выше случаю $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ для характеристического показателя разности $w_1(t,c_1,c_2) \equiv y_1(t,c_1,c_2) - c_1 x_1(t)$ из (27_1) получаем равенство

$$\begin{gathered} \lambda[w_1(\cdot,c_1,c_2)] = \beta_2 l_2 \in \beta_2, \quad c_2 - p_2 \in (\eta_{l_2+1}(s_2), \eta_{l_2}(s_2)], \\ p_2 \in N_0, \quad l_2, s_2 \in N, \quad l_2 \leq s_2. \end{gathered} \tag{28}$$

По определению множества $\beta_2 = \beta \cap [\lambda_2, +\infty)$ для всех его элементов β_{2j} справедлива очевидная оценка $\beta_{2j} \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$. Поэтому в силу неравенств (см. (8) и (9))

$$0 < x_1(t) \leq \exp(\lambda_1(t - t_1)), \quad t \geq t_1; \quad \theta_2(k,l_2) \geq t_{4k+3} > \exp(16k\pi), \quad k \in N,$$

и за счет слагаемого k^{-1} в определении (14) моментов $t = \theta_2(k,l_2)$ для любого $c_1 \in R$ и всех достаточно больших $k \in N$ имеем оценки

$$\begin{gathered} |y_1(\theta_2,c_1,c_2)| \geq |w_1(\theta_2,c_1,c_2)| - |c_1| x_1(\theta_2) \geq \\ \geq e^{\beta_2 l_2 \theta_2} + (c_2^m e^{\theta_2/k} - |c_1| e^{|\lambda_1|} - 1) e^{\lambda_1 \theta_2} \geq e^{\beta_2 l_2 \theta_2}, \\ \theta_2 = \theta_2(k,l_2) \in T_2(k), \quad c_2 > 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Из соотношений же (28) и (29) следует теперь двустороннее неравенство

$$\beta_{2l_2} \leq \lambda[y_1(\cdot,c_1,c_2)] \leq \max\{\lambda[x_1]\}, \quad \lambda[w_1(\cdot,c_1,c_2)] = \beta_{2l_2},$$

т.е. необходимое равенство

$$\lambda[y_1(\cdot,c_1,c_2)] = \beta_{2l_2}, \quad \beta_{2l_2} \geq \lambda_2, \quad 0 < c_2 \in (p_2 + \eta_{l_2+1}(s_2), p_2 + \eta_{l_2}(s_2)], \quad c_1 \in R, \tag{30}$$

при некоторых числах $p_2 \in N_0$, $l_2, s_2 \in N$, $l_2 \leq s_2$, определенных значением $c_2 > 0$.

В соответствии с замечанием 2, связанным с симметричностью значений функции $V_2(c_2,k)$ относительно точки $c_2 = 0$, равенство (30) остается справедливым и для отрицательного начального параметра $c_2 \neq 0$ с модулем $|c_2| \in (p_2 + \eta_{l_2+1}(s_2), p_2 + \eta_{l_2}(s_2)]$ при тех же числах p_2, l_2 и s_2.

Вычислим теперь характеристический показатель второй компоненты $y_2(t, c_1, c_2)$ в рассматриваемом случае $c_2 \neq 0$. В силу равенств (11)–(13), (19_2) и (20) она имеет представление

$$y_2(t, c_1, c_2) = c_2 x_2(t) + y_2(t, c_1, 0), \quad c_1 \in R, \quad c_2 \neq 0, \quad t \geq 1. \tag{31}$$

Так как для второй компоненты тривиального решения $y(t, 0) \equiv 0$, $t \geq 1$, выполнено тождество $y_2(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \geq 1$ (см. также (20)), то при $c_1 = 0$ из представления (31) получаем равенство

$$y_2(t, 0, c_2) = c_2 x_2(t), \quad c_2 \neq 0, \quad t \geq 1.$$

Поэтому справедливо очевидное равенство $\lambda[y_2(\cdot, 0, c_2)] = \lambda_2$, $c_2 \neq 0$.

Для ненулевого c_1, как и в рассмотренном выше случае $c_2 = 0$, найдутся такие значения $p_1 \in N_0$, $l_1, s_1 \in N$, $l_1 \leq s_1$, что будет выполнено равенство

$$\lambda[y_2(\cdot, c_1, 0)] = \beta_{1l_1}, \quad |c_1| \in (p_1 + \eta_{l_1+1}(s_1), p_1 + \eta_{l_1}(s_1)]. \tag{32}$$

И в первом случае множества $\beta_1 = \beta_0 \neq \emptyset$, для всех элементов β_{1l} которого справедливы неравенства $\beta_{1l} < \lambda_2$, из равенств (31) и (32) по свойству характеристического показателя суммы двух функций с различными показателями получаем необходимое значение

$$\lambda[y_2(\cdot, c_1, c_2)] = \lambda_2, \quad c_2 \neq 0, \quad |c_1| - p_1 \in (\eta_{l_1+1}(s_1), \eta_{l_1}(s_1)], \quad \beta_0 \neq \emptyset. \tag{33}$$

Во втором случае $\beta_0 = \emptyset$ имеем для элементов β_{1l} множества $\beta_1 = \beta$ оценки $\beta_{1l} \geq \lambda_2$ и поэтому аналогично рассуждениям, связанным с доказательством соотношений (28)–(30), с учетом слагаемого k^{-1} в (14) получаем необходимое равенство

$$\lambda[y_2(\cdot, c_1, c_2)] = \beta_{1l_1} \in \beta_1 = \beta, \quad c_2 \neq 0, \quad |c_1| - p_1 \in (\eta_{l_1+1}(s_1), \eta_{l_1}(s_1)], \quad \beta_0 = \emptyset. \tag{34}$$

Из соотношений (30), как уже отмечалось, справедливых и для $|c_2|$, и равенств (33) и (34) получаем необходимое представление показателя

$$\lambda[y(\cdot, c)] = \max_i \{\lambda[y_i(\cdot, c_1, c_2)]\} =$$

$$= \begin{cases} \beta_{2l_2} \in \beta_2 & \text{для} \quad 0 < |c_2| \in I_{p_2}(l_2, s_2), \quad c_1 = 0, \quad c_1 \neq 0 \quad \text{при} \quad \beta_0 \neq \emptyset, \\ \max\limits_i \{\beta_{2l_i}\} \in \beta_2 = \beta & \text{для} \quad 0 < |c_i| \in I_{p_i}(l_i, s_i), \quad i = 1, 2, \quad \beta_0 = \emptyset, \end{cases} \tag{35}$$

решения $y(t, c)$ с начальной компонентой $c_2 \neq 0$, в котором числа $p_i \in N_0$, $l_i, s_i \in N$, $l_i \leq s_i$, определяются значениями $c_i \neq 0$, $i = 1, 2$, и

$$I_{p_i}(l_i, s_i) \equiv (p_i + \eta_{l_i+1}(s_i), p_i + \eta_{l_i}(s_i)].$$

Из этого представления и равенств (21_2) следуют включения

$$\Lambda(A, f) \subset \beta, \quad \Lambda(A, f)|_{c_2 \neq 0} \subset \beta_2. \tag{36}$$

5. ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ $\Lambda_0(A, f)$ И $\Lambda_p(A, f)$

Для первого множества докажем представление

$$\Lambda_0(A, f) = \beta. \tag{37}$$

Первое необходимое включение $\Lambda_0(A, f) \subset \beta$ следует из первого же включения (36). Первая часть $\beta_1 \subset \Lambda_0(A, f)$ второго необходимого противоположного включения $\beta \subset \Lambda_0(A, f)$ установлена равенством (21_1). Для доказательства второй части $\beta_2 \subset \Lambda_0(A, f)$ этого необходимого включения (в случае $\beta_0 \neq \emptyset$; в случае $\beta_0 = \emptyset$ имеем $\beta_2 = \beta_1 = \beta$ и необходимое включение следует из равенства (21_1)) возьмем произвольный элемент $\beta_{2l} \in \beta_2$ и последовательность $\{d_l(s)\} \downarrow 0$ (при $s \to +\infty$; $l \in N$ фиксировано) значений

$$c_2 = d_l(s) \in (\eta_{l+1}(s), \eta_l(s)], \quad l \le s \in N, \tag{38}$$

начального параметра $c_2 > 0$. Тогда в соответствии с первым равенством (35) для характеристического показателя решений $y(t,(0,d_l(s)))$ будем иметь представления

$$\lambda[y(\cdot,(0,d_l(s)))] = \beta_{2l} \quad \forall s \ge l.$$

Они и устанавливают включение $\beta_{2l} \in \Lambda_0(A,f)$, а тем самым включение $\beta_2 \subset \Lambda_0(A,f)$ и равенство (37).

Аналогично устанавливается справедливость и равенств

$$\Lambda_p(A,f) = \beta, \quad p = (p_1, 0), \quad p_1 \in Z \setminus \{0\}. \tag{39}$$

Как и выше, включение $\Lambda_p(A,f) \subset \beta$ следует из первого включения (36), а включение $\beta_1 \subset \Lambda_p(A,f)$ для указанных p – из равенств (21_2). В случае $\beta_0 = \emptyset$, когда $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, эти два противоположных включения и устанавливают равенство (39). В случае $\beta_0 \ne \emptyset$ необходимое включение $\beta_2 \subset \Lambda_p(A,f)$ для $p = (p_1, 0)$ и $|p_1| \in N$ доказывается следующим образом. Снова для произвольного элемента $\beta_{2l} \in \beta_2$ и соответствующей последовательности $\{d_l(s)\} \downarrow 0$ при $s \to \infty$ по первому равенству (35) получим значения показателей

$$\lambda[y(\cdot,(p_1,d_l(s)))] = \beta_{2l}, \quad |p_1| \in N, \quad \forall s \ge l,$$

устанавливающие недостающее включение $\beta_2 \subset \Lambda_p(A,f)$. Равенства (39) тем самым доказаны.

Докажем теперь последние необходимые равенства

$$\Lambda_p(A,f) = \beta_2 \equiv \beta \cap [\lambda_2, +\infty), \quad p_1 \in Z, \quad p_2 \in Z \setminus \{0\}. \tag{40}$$

С учетом второго включения (36) для этого достаточно установить включение $\beta_2 \subset \Lambda_p(A,f)$ при указанных в (40) значениях $p = (p_1, p_2)$. Как и выше, зафиксируем произвольный элемент $\beta_{2l} \in \beta_2$ и возьмем последовательность $\{d_l(s)\} \downarrow 0$ (при $s \to +\infty$) с определенными соотношениями (38) членами.

Для значений

$$c_2 = [p_2 + \eta_l(s)] \operatorname{sign} p_2, \quad p_2 \in Z \setminus \{0\}, \quad s \in N, \tag{41}$$

и при любых $c_1 \in R$ в случае $\beta_0 \ne \emptyset$ по первому равенству (35) имеем

$$\lambda[y(\cdot,c)] = \beta_{2l} \quad \forall s \in N. \tag{42}$$

Поэтому в рассматриваемом случае справедливо равенство

$$\Lambda_p(A,f) = \beta_2, \quad \beta_0 \ne \emptyset, \quad p = (p_1,p_2) \in R^2, \quad p_1 \in R, \quad p_2 \in Z \setminus \{0\}, \tag{43}$$

более сильное по сравнению со вторым утверждением (5) теоремы.

В случае $\beta_0 = \emptyset$ для вектора $c = (c_1, c_2) \in R^2$ с первыми компонентами

$$c_1 = [p_1 + \eta_l(s)] \operatorname{sign} p_1, \quad p_1 \in Z, \quad \forall s \in N,$$

и вторыми (41) по второму равенству (35) снова имеем при всех $s \in N$ необходимое равенство (42). Теорема полностью доказана.

В п. 5 доказательства теоремы установлено

Следствие. *В случае $\beta \cap [\lambda_1, \lambda_2) \ne \emptyset$ справедливо утверждение (43), более сильное по сравнению со вторым утверждением (5) теоремы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф 14Р–011) и Российского (проект 14–01–90010 Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Izobov N.A.* Lyapunov Exponents and Stability. Cambridge, 2012.

3. *Изобов Н.А.* О числе характеристических и нижних показателей экспоненциально устойчивой системы с возмущениями высшего порядка // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 784–795.
4. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd 32. Hf 5. S. 702–728.
5. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва; Ижевск, 2006.
6. *Коровин С.К., Изобов Н.А.* Эффект Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Докл. РАН. 2010. Т. 434. № 6. С. 739–741.
7. *Ильин А.В., Изобов Н.А.* Общий многомерный эффект Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 1087–1088.
8. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Конечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1522–1536.
9. *Ильин А.В., Изобов Н.А.* Бесконечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем // Докл. РАН. 2014. Т. 457. № 2. С. 147–151.
10. *Ильин А.В., Изобов Н.А.* Эффект Перрона бесконечной смены значений характеристических показателей дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1141–1142.
11. *Волков И.А., Изобов Н.А.* О компонентах связности множества характеристических показателей дифференциальной системы с возмущениями высшего порядка // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 3. С. 197–200.
12. *Барабанов Е.А., Волков И.А.* Строение множества характеристических показателей Ляпунова экспоненциально устойчивых квазилинейных систем // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 3–19.
13. *Козлов В.В.* О механизме потери устойчивости // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 4. С. 496–505.
14. *Козлов В.В.* О стабилизации неустойчивых равновесий периодическими по времени гироскопическими силами // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 6. С. 762–763.
15. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23.01.2015 г.