Равномерные функции и новая характеризация интегрируемых по Риману функций

В. К. Захаров, Т. В. Родионов

03 мая 2018 г.

1. Введение

Всем известна характеризация Лебега функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$: *ограниченная функция f интегрируема тогда и только тогда, когда мера Лебега множества точек разрыва функции f равна нулю.*

Эта чрезвычайно красивая характеризация является, однако, совершенно не конструктивной, т. е. не даёт никаких способов приближения функции f какими-либо более простыми (или более понятными) функциями.

1. Введение

Всем известна характеризация Лебега функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$: *ограниченная функция f интегрируема тогда и только тогда, когда мера Лебега множества точек разрыва функции f равна нулю.*
Эта чрезвычайно красивая характеризация является, однако, совершенно не конструктивной, т. е. не даёт никаких способов приближения функции f какими-либо более простыми (или более понятными) функциями.

Мы изложим другую характеризацию, полностью отличную от лебеговской, но дающую способы приближения функции f как более простыми, так и более понятными функциями.

1. Введение

Всем известна характеризация Лебега функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$: *ограниченная функция* f *интегрируема тогда и только тогда, когда мера Лебега множества точек разрыва функции* f *равна нулю.*
Эта чрезвычайно красивая характеризация является, однако, совершенно не конструктивной, т. е. не даёт никаких способов приближения функции f какими-либо более простыми (или более понятными) функциями.

Мы изложим другую характеризацию, полностью отличную от лебеговской, но дающую способы приближения функции f как более простыми, так и более понятными функциями.
Интеграл Римана будет рассматриваться в значительно более общей ситуации измеримого топологического пространства, однако предлагаемая характеризация интегрируемых функций является **новой и отличной от лебеговской даже для отрезка**.

2. Определение μ-интеграла Римана

$(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, заданной на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}$ пространства $(T, \mathcal{G})$;
$F(T)$ — семейство всех функций $f : T \to \mathbb{R}$;
$F_b(T)$ — подсемейство всех ограниченных функций.
$\Delta \equiv \Delta(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ — множество всех конечных разбиений T, состоящих из открытых множеств и борелевских множеств μ-меры нуль.

2. Определение μ-интеграла Римана

$(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, заданной на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}$ пространства $(T, \mathcal{G})$;
$F(T)$ — семейство всех функций $f : T \to \mathbb{R}$;
$F_b(T)$ — подсемейство всех ограниченных функций.
$\Delta \equiv \Delta(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ — множество всех конечных разбиений T, состоящих из открытых множеств и борелевских множеств μ-меры нуль.

Для $\varkappa \equiv \big(Q_k \mid k \in K\big) \in \Delta$ и $f \in F_b(T)$ рассмотрим *нижнюю*
$s(f, \varkappa) \equiv \sum\big(\inf f[Q_k]\mu Q_k \mid k \in K\big)$ и *верхнюю*
$S(f, \varkappa) \equiv \sum\big(\sup f[Q_k]\mu Q_k \mid k \in K\big)$ *суммы Дарбу.*

2. Определение μ-интеграла Римана

$(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, заданной на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}$ пространства $(T, \mathcal{G})$;
$F(T)$ — семейство всех функций $f : T \to \mathbb{R}$;
$F_b(T)$ — подсемейство всех ограниченных функций.
$\Delta \equiv \Delta(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ — множество всех конечных разбиений T, состоящих из открытых множеств и борелевских множеств μ-меры нуль.

Для $\varkappa \equiv \big(Q_k \mid k \in K\big) \in \Delta$ и $f \in F_b(T)$ рассмотрим *нижнюю*
$s(f, \varkappa) \equiv \sum\big(\inf f[Q_k]\mu Q_k \mid k \in K\big)$ и *верхнюю*
$S(f, \varkappa) \equiv \sum\big(\sup f[Q_k]\mu Q_k \mid k \in K\big)$ *суммы Дарбу*.

Функция $f \in F_b(T)$ называется *интегрируемой по Риману на измеримом топологическом пространстве* $(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ или μ-*интегрируемой по Риману*, если
$\sup\big(s(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta\big) = \inf\big(S(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta\big)$.

2. Определение μ-интеграла Римана

$(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, заданной на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}$ пространства $(T, \mathcal{G})$;
$F(T)$ — семейство всех функций $f : T \to \mathbb{R}$;
$F_b(T)$ — подсемейство всех ограниченных функций.
$\Delta \equiv \Delta(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ — множество всех конечных разбиений T, состоящих из открытых множеств и борелевских множеств μ-меры нуль.

Для $\varkappa \equiv \big(Q_k \mid k \in K\big) \in \Delta$ и $f \in F_b(T)$ рассмотрим *нижнюю*
$s(f, \varkappa) \equiv \sum\big(\inf f[Q_k]\mu Q_k \mid k \in K\big)$ и *верхнюю*
$S(f, \varkappa) \equiv \sum\big(\sup f[Q_k]\mu Q_k \mid k \in K\big)$ *суммы Дарбу.*

Функция $f \in F_b(T)$ называется *интегрируемой по Риману на измеримом топологическом пространстве* $(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ или μ*-интегрируемой по Риману*, если
$\sup\big(s(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta\big) = \inf\big(S(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta\big)$.

Для жорданова множества $T \subset \mathbb{R}^n$ (в частности, для $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$) такое определение равносильно обычному.

3. Общее определение равномерных функций

Для решения поставленной задачи был использован новый класс функций на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$: класс *равномерных функций.*

Дескриптивное пространство — пара $(T, \mathcal{S})$, где T — множество, а $\mathcal{S}$ — непустое семейство подмножеств T (*ансамбль на* T).

3. Общее определение равномерных функций

Для решения поставленной задачи был использован новый класс функций на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$: класс *равномерных функций.*

Дескриптивное пространство — пара $(T, \mathcal{S})$, где T — множество, а $\mathcal{S}$ — непустое семейство подмножеств T (*ансамбль на* T).

Определим *колебание* $\omega(f, A) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid t, s \in A\}$ *функции* $f \in F(T)$ *на множестве* $A \subset T$ и

колебание $\omega(f, \pi) \equiv \sup\big(\omega(f, A_i) \mid i \in I\big)$ *функции* f *на коллекции* $\pi \equiv \big(A_i \subset T \mid i \in I\big)$.

3. Общее определение равномерных функций

Для решения поставленной задачи был использован новый класс функций на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$: класс *равномерных функций.*

Дескриптивное пространство — пара $(T, \mathcal{S})$, где T — множество, а $\mathcal{S}$ — непустое семейство подмножеств T (*ансамбль на* T).

Определим *колебание* $\omega(f, A) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid t, s \in A\}$ *функции* $f \in F(T)$ *на множестве* $A \subset T$ и *колебание* $\omega(f, \pi) \equiv \sup\big(\omega(f, A_i) \mid i \in I\big)$ *функции* f *на коллекции* $\pi \equiv \big(A_i \subset T \mid i \in I\big)$.

Коллекция $\pi \equiv \big(A_i \subset T \mid i \in I\big)$ такая, что $\bigcup\big(A_i \mid i \in I\big) = A$, называется *покрытием множества* A.

Функция $f \in F(T)$ называется *равномерной на* $(T, \mathcal{S})$ или $\mathcal{S}$-*равномерной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое **конечное** покрытие $\pi \equiv \big(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I\big)$ множества T, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$.

Семейство всех $\mathcal{S}$-равномерных функций обозначим через $U(T, \mathcal{S})$.

4. Теорема характеризации. I

Рассмотрим на тихоновском пространстве $(T, \mathcal{G})$ с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ ансамбли
$\mathcal{F}_\mu$ всех замкнутых множеств μ-меры нуль,
$\mathcal{N}_\mu \equiv \{N \subset T \mid \exists\, F \in \mathcal{F}_\mu \ (N \subset F)\}$ всех их подмножеств,
$\mathcal{ZP}_\mu \equiv \{G \cup N \mid G \in \mathcal{G} \,\&\, N \in \mathcal{N}_\mu\}$
и семейство $\mathcal{ZP}_\mu$-равномерных функций $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

4. Теорема характеризации. I

Рассмотрим на тихоновском пространстве $(T, \mathcal{G})$ с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ ансамбли
$\mathcal{F}_\mu$ всех замкнутых множеств μ-меры нуль,
$\mathcal{N}_\mu \equiv \{N \subset T \mid \exists\, F \in \mathcal{F}_\mu\ (N \subset F)\}$ всех их подмножеств,
$\mathcal{ZP}_\mu \equiv \{G \cup N \mid G \in \mathcal{G} \,\&\, N \in \mathcal{N}_\mu\}$
и семейство $\mathcal{ZP}_\mu$-равномерных функций $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

Определим соответствующую алгебру множеств
$\mathcal{A}_\mu \equiv \{\bigcup\big(Z_i \cap Y_i \mid i \in I\big) \mid Z_i \in \mathcal{ZP}_\mu \,\&\, T \setminus Y_i \in \mathcal{ZP}_\mu \,\&\, |I| < \infty\}$ и семейство $\mathcal{A}_\mu$-*ступенчатых функций* $\mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mu)$, состоящее из таких $f \in F(T)$, что найдутся конечное разбиение $\big(A_j \in \mathcal{A}_\mu \mid j \in J\big)$ множества T и коллекция $\big(x_j \in \mathbb{R} \mid j \in J\big)$ для которых $f(t) = x_j$ при всех $t \in A_j$.

4. Теорема характеризации. I

Рассмотрим на тихоновском пространстве $(T, \mathcal{G})$ с ограниченной положительной радоновской мерой $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ ансамбли
$\mathcal{F}_\mu$ всех замкнутых множеств μ-меры нуль,
$\mathcal{N}_\mu \equiv \{N \subset T \mid \exists\, F \in \mathcal{F}_\mu\ (N \subset F)\}$ всех их подмножеств,
$\mathcal{ZP}_\mu \equiv \{G \cup N \mid G \in \mathcal{G} \,\&\, N \in \mathcal{N}_\mu\}$
и семейство $\mathcal{ZP}_\mu$-равномерных функций $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

Определим соответствующую алгебру множеств
$\mathcal{A}_\mu \equiv \{\bigcup\bigl(Z_i \cap Y_i \mid i \in I\bigr) \mid Z_i \in \mathcal{ZP}_\mu \,\&\, T \setminus Y_i \in \mathcal{ZP}_\mu \,\&\, |I| < \infty\}$ и семейство $\mathcal{A}_\mu$-*ступенчатых функций* $\mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mu)$, состоящее из таких $f \in F(T)$, что найдутся конечное разбиение $\bigl(A_j \in \mathcal{A}_\mu \mid j \in J\bigr)$ множества T и коллекция $\bigl(x_j \in \mathbb{R} \mid j \in J\bigr)$ для которых $f(t) = x_j$ при всех $t \in A_j$.

Рассмотрим также ансамбли
$\mathcal{G}^0 \equiv \{G \in \mathcal{G} \mid \exists\, f \in C_b(T, \mathcal{G})\ (G = \operatorname{coz} f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\})\}$
всех открытых конуль-множеств непрерывных функций и подансамбль
$\mathcal{U}^0_\mu \equiv \{U \in \mathcal{G}^0 \mid \mu(T \setminus U) = 0\}$ всех таких множеств полной меры.

4. Теорема характеризации. II

Теорема. *Для функции* $f \in F_b(T)$ *следующие условия равносильны:*

1) *функция* f *является* μ*-интегрируемой по Риману;*
2) *множество точек разрыва функции* f *имеет* μ*-меру нуль;*
3) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$*;*

4. Теорема характеризации. II

Теорема. *Для функции* $f \in F_b(T)$ *следующие условия равносильны:*

1) *функция* f *является* μ*-интегрируемой по Риману;*
2) *множество точек разрыва функции* f *имеет* μ*-меру нуль;*
3) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$*;*
4) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует такая ступенчатая функция* $f_n \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mu)$*, что* $|f_n(t) - f(t)| < 1/n$ *для всех* $t \in T$*;*

4. Теорема характеризации. II

Теорема. *Для функции* $f \in F_b(T)$ *следующие условия равносильны:*

1) *функция* f *является* μ*-интегрируемой по Риману;*
2) *множество точек разрыва функции* f *имеет* μ*-меру нуль;*
3) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
4) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует такая ступенчатая функция* $f_n \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mu)$, *что* $|f_n(t) - f(t)| < 1/n$ *для всех* $t \in T$;
5) *существуют счётные коллекции* $u \equiv \big(g_i \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid i \in I\big)$ *и* $v \equiv \big(h_j \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid j \in J\big)$ *такие, что* $g_i \leqslant f \leqslant h_j$ *для всех* $i \in I$ *и* $j \in J$ *и* $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$, *где* $g \equiv \sup u$ *и* $h \equiv \inf v$ *в* $F(T)$;

4. Теорема характеризации. II

Теорема. *Для функции* $f \in F_b(T)$ *следующие условия равносильны:*

1) *функция* f *является* μ*-интегрируемой по Риману;*
2) *множество точек разрыва функции* f *имеет* μ*-меру нуль;*
3) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
4) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует такая ступенчатая функция* $f_n \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mu)$, *что* $|f_n(t) - f(t)| < 1/n$ *для всех* $t \in T$;
5) *существуют счётные коллекции* $u \equiv \big(g_i \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid i \in I\big)$ *и* $v \equiv \big(h_j \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid j \in J\big)$ *такие, что* $g_i \leqslant f \leqslant h_j$ *для всех* $i \in I$ *и* $j \in J$ *и* $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$, *где* $g \equiv \sup u$ *и* $h \equiv \inf v$ *в* $F(T)$;
6) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *найдутся такие* $U_n \in \mathcal{U}^0_\mu$ *и* $f_n \in F(T)$, *что* $f_n|U_n \in C_b(U_n, \mathcal{G}_{U_n})$ *и* $|f(t) - f_n(t)| < 1/n$ *для всех* $t \in U_n$;
7) *существуют счётные коллекции* $\big(g_i \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid i \in I\big)$ *и* $\big(h_j \in C_b(T, \mathcal{G}) \mid j \in J\big)$ *и последовательность* $\big(U_n \in \mathcal{U}^0_\mu \mid n \in \mathbb{N}\big)$ *такие, что* $g_i \leqslant f \leqslant h_j$ *для всех* $i \in I$ *и* $j \in J$, *причём для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $t \in U_n$ *найдутся такие* i *и* j, *что* $h_j(t) - g_i(t) < 1/n$;
8) *существуют такие полунепрерывные функции* $g \in SC^l_b(T, \mathcal{G})$ *и* $h \in SC^u_b(T, \mathcal{G})$, *что* $g \leqslant f \leqslant h$ *и* $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Приведённая теорема была включена в недавно опубликованную авторами двухтомную монографию:

Sets, Functions, Measures. Volume I: Fundamentals of Set and Number Theory (*De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/1). — Berlin: Walter de Gruyter, 2018. — 428+xviii pp.
Sets, Functions, Measures. Volume II: Fundamentals of Functions and Measure Theory (*De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/2). — Berlin: Walter de Gruyter, 2018. — 462+xvi pp.