

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Косов Егор Дмитриевич

**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОБРАЗЫ И СДВИГИ МЕР
НА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Богачев Владимир Игоревич**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Сакбаев Всеволод Жанович**
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры
высшей математики Московского
физико-технического института

Ульянов Владимир Васильевич
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры
математической статистики
факультета ВМиК
МГУ имени М.В. Ломоносова

Федоровский Константин Юрьевич
доктор физико-математических наук,
доцент, главный научный сотрудник
НИИ НУК ФН Московского
государственного технического
университета имени Н.Э. Баумана

Защита диссертации состоится «18» мая 2018 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинский горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

<https://istina.msu.ru/dissertations/103269810/>

Автореферат разослан «17» апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
доктор физико-математических наук
профессор

Власов
Виктор Валентинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Тематика диссертации находится на стыке функционального анализа, теории меры, теории вероятностей и выпуклой геометрии. Рассмотренные задачи важны не только для указанных областей, но и для бесконечномерного анализа и математической физики (см. обзор А.И. Кириллова¹). Главным объектом исследования данной работы выступает счетно-аддитивная мера, заданная на сигма-алгебре борелевских множеств некоторого локально выпуклого пространства. Основные результаты работы относятся к области теории меры, хотя из-за специфики задач иногда и бывает более удобно использование вероятностной терминологии. Работу можно разделить на три основных части, соответствующие трем основным главам (помимо вспомогательной первой главы), причем эти части связаны идейно и технически.

Во второй главе исследуются вопросы, связанные с носителями мер на банаховых пространствах. Подобные вопросы изучались в работах многих авторов, в том числе В.В. Булдыгина², Е.И. Островского³, Дж. Квелбса⁴, Х. Сато⁵, В.И. Богачева^{6,7,8,9}. В последних двух книгах приведена обширная библиография по современным исследованиям данных вопросов. В работе⁷ было показано, что для меры, обладающей сильным моментом некоторого фиксированного порядка $r > 0$, т. е. такой меры, для которой норма пространства интегрируема в степени r , можно найти компактно вложенное сепарабельное рефлексивное банахово пространство (уже с некоторой другой нормой) полной меры, сужение исходной меры на которое также будет обладать сильным моментом того же порядка r . Нетрудно построить пример меры на сепарабельном банаховом пространстве, не обладающей сильным моментом, для которой каждый непрерывный

¹Кириллов А.И. Бесконечномерный анализ и квантовая теория как исчисления семимартингалов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49. – №3. – С. 43–92.

²Булдыгин В.В. Носители вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен. – 1984. – Т. 29. – №3. – С. 528–532.

³Островский Е.И. О носителях вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах // ДАН СССР. – 1980. – Т. 225. – №6. – С. 1319–1320.

⁴Kuelbs J. Some results for probability measures on linear topological vector spaces with an application to Strassen's LogLog Law // J. Funct. Anal. – 1973. – Vol. 14. – №1. – P. 28–43.

⁵Sato H. Banach support of a probability measure in a locally convex space // Lecture Notes in Math. – 1976. – Vol. 526. – P. 221–226.

⁶Богачев В.И. Локально выпуклые пространства со свойством ЦПТ и носители мер // Вестн. МГУ, мат., мех. – 1986. – №6. – С. 16–20.

⁷Bogachev V.I. Average approximation and moments of measures // J. Complexity. – 2000. – V. 16. – P. 390–410.

⁸Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1, 2, 2-е изд. Регулярная и хаотическая динамика. Москва – Ижевск, 2006.

⁹Богачев В.И., Смолянов О.Г., Соболев В.И. Топологические векторные пространства и их приложения. Регулярная и хаотическая динамика. Москва – Ижевск, 2012.

линейный функционал будет интегрируем в некоторой фиксированной степени. Меры с указанным свойством называются мерами со слабым моментом. Таким образом, возникает вопрос об обобщении приведенного выше результата на меры со слабым моментом. Оказывается, что без дополнительных предположений аналог приведенного выше свойства для мер, обладающих слабым моментом, может не выполняться, в связи с чем во второй главе диссертации приводятся необходимые и достаточные условия для мер со слабым моментом фиксированного порядка, гарантирующие наличие компактно вложенного сепарабельного рефлексивного подпространства полной меры, для которого данная мера будет также обладать слабым моментом исходного порядка. В частности, в случае гильбертова пространства H и меры μ со слабым моментом второго порядка, наличие компактно вложенного гильбертова пространства L полной меры, на котором сужение исходной меры также будет обладать слабым моментом второго порядка, равносильно компактности ковариационного оператора K_μ меры μ , определяемого равенством

$$(K_\mu u, v) = \int_H (u, x)(x, v)\mu(dx), \quad u, v \in H.$$

Третья глава посвящена исследованию свойств множеств допустимых сдвигов мер (т. е. множеств таких векторов, сдвиги меры на которые не сингулярны или эквивалентны исходной мере). Такие множества относительно хорошо изучены в случае произведений мер (см. работы Л. Шеппа¹⁰, Дж. Фельдмана¹¹, С. Какутани¹², С.Д. Чаттерджи и В. Мандрекара¹³, С.Г. Бобкова¹⁴, Р. Дадли¹⁵). В частности, в первых двух указанных работах получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы сдвиг на всякий вектор из ℓ^2 был эквивалентен исходной мере. В диссертации получены обобщения этого результата: приведены просто формулируемые необходимые и достаточные условия эквивалентности сдвига на всякий вектор из ℓ^q , заключающиеся в принадлежности корня из плотности сомножителя пространству Никольского $B_{2,\infty}^{q/2}$ функций дробной дифференцируемости. Также хорошо известно, что пространство сдвигов в случае

¹⁰Shepp L.A. Distinguishing sequence of random variables from a translate to itself // Ann. Math. Statist. – 1965. – Vol. 36. – №4. – P. 1107–1112.

¹¹Feldman J. Examples of non-Gaussian quasi-invariant distribution in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 99. – P. 342–349.

¹²Kakutani S. On equivalence of infinite product measures // Ann. Math. – 1984. – Vol. 49 – P. 214–224.

¹³Chatterji S.D., Mandrekar V. Quasi-Invariance of measures under translation // Math. Z. – 1977. – Vol. 154. – P. 19–30.

¹⁴Bobkov S.G. The size of singular component and shift inequalities // Annals Probab. – 1999. – Vol. 27. – №1. – P. 416–431.

¹⁵Dudley R. M. Singularity of measures on linear spaces // Probab. Theory Relat. Fields. – 1966. – Vol. 6. – №2. – P. 129–132.

гауссовской меры совпадает с пространством Камерона–Мартина этой меры. Так как гауссовские меры являются подклассом логарифмически вогнутых мер, то представляет интерес исследование множеств допустимых сдвигов и таких мер. Класс логарифмически вогнутых мер (которые также называют выпуклыми) был введен и впервые рассмотрен в работах А. Прекопы¹⁶, Л. Лейндлера¹⁷ и К. Борелля^{18,19} и затем исследовался в работах многих авторов, в том числе Е.П. Круговой^{20, 21}, Д. Фейеля и А.С. Устюнеля²², В.И. Богачева и А.В. Колесникова²³, Л. Амброзио, Дж. Да Прато, Б. Голдиса и Д. Паллары^{24,25}. Основными примерами логарифмически вогнутых мер служат равномерные распределения на выпуклых компактах в $\mathbb{R}^n$, а также гауссовские меры (необязательно на конечномерном пространстве). Поэтому исследование логарифмически вогнутых мер тесно связано как с геометрическими и аналитическими вопросами, так и с вопросами теории вероятностей. Для логарифмически вогнутых мер в диссертации доказано, что множество их несингулярных сдвигов является выпуклым, а множество эквивалентных сдвигов является линейным пространством. Отметим, что последнее свойство может не выполняться в случае продакт-мер. Важной чертой бесконечномерного случая является отсутствие аналогов меры Лебега, относительно которых типичные рассматриваемые меры задаются плотностями (хотя в других задачах некоторые аналоги меры Лебега используются, см.²⁶).

В четвертой главе основным объектом исследования выступают измеримые многочлены на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами. В отношении геометрических вопросов подобные исследования проводились Ж. Бургеном²⁷, Б. Клартагом²⁸, Г. Паоури-

¹⁶Prekopa A. Logarithmic concave measures with application to stochastic programming // Acta Sci. Math. – 1971. – Vol. 32. – P. 301–315.

¹⁷Leindler L. On a certain converse of Hölder’s inequality // Acta Sci. Math. – 1972. – Vol. 33. – P. 217–223.

¹⁸Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Math. – 1974. – Vol. 12. – P. 239–252.

¹⁹Borell C. Convex set functions in d-space // Periodica Math. Hung. – 1975. – Vol. 6. – №2. – P. 111–136.

²⁰Кругова Е.П. О сдвигах выпуклых мер // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – №2. – С. 57–66.

²¹Кругова Е.П. Дифференцируемость выпуклых мер // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – №6. – С. 862–871.

²²Feyel D., Ustunel S. Solution of the Monge–Ampere equation on Wiener space for general log-concave measures // J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 232. – №1. – P. 29–55.

²³Богачев В.И., Колесников А.В. Нелинейные преобразования выпуклых мер // Теория вероятн. и ее примен. – 2005. – Т. 50. – №1. – С. 27–51.

²⁴Ambrosio L., Savare G., Zambotti L. Existence and stability for Fokker–Planck equations with log-concave reference measure // Probab. Theory Relat. Fields. – 2009. – Vol. 145. – №3–4. – P. 517–564.

²⁵Ambrosio L., Da Prato G., Goldys B., Pallara D. Bounded variation with respect to a log-concave measure Comm. Partial Differ. Equ. – 2012. – Vol. 37. – №12. – P. 2272–2290.

²⁶Сакбаев В.Ж. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов // Теор. мат. физ. – 2017. – Т. 191. – №3. – С. 473–502.

²⁷Bourgain J. On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. – 1991. – Vol. 1469. – P. 127–137.

²⁸Klartag B. On convex perturbations with a bounded isotropic constant // Geom. Funct. Anal. GAFA. –

сом²⁹. В этих работах рассматривались линейные функционалы или квадрат евклидовой нормы, а также исследовалась так называемая гипотеза гиперплоскости (hyperplane conjecture, см.^{30,31,32}). В вопросах стохастического анализа и теории вероятностей измеримые многочлены появляются как кратные стохастические интегралы по винеровскому процессу, а их изучение на пространствах с гауссовскими мерами началось с классических работ Н. Винера³³, Р. Камерона и У. Мартина³⁴, К. Ито³⁵. Позже, в более абстрактном виде, они изучались во многих работах различных авторов, в том числе А.М. Вершика³⁶, О.Г. Смолянова³⁷, А.В. Скорохода^{38,39}, Ю.А. Давыдова⁴⁰, В.И. Богачева⁴¹. В последние годы одним из основных направлений исследования измеримых многочленов на пространствах с вероятностными мерами стало изучение связи различных норм и метрик как на пространстве самих многочленов фиксированной степени, так и на пространстве распределений, полученных как образы мер при полиномиальных отображениях. В работах Ю.В. Прохорова, В.И. Хохлова^{42,43,44}, С.Г. Бобкова^{45,46} исследовались неравенства типа Хинчина об эквивалентности различных L^p -норм на пространстве многочленов фик-

2006. – Vol. 16. – №6. – P. 1274–1290.

²⁹Paouris G. Concentration of mass on convex bodies // Geom. Funct. Anal. GAFA. – 2006. – Vol. 16. – №5. – P. 1021–1049.

³⁰Milman V. D., Pajor A. Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n -dimensional space // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. – 1989. Vol. 1376. – P. 64–104.

³¹Ball K. Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$ // Studia Math. – 1988. – Vol. 88. – №1. – P. 69–84.

³²Hensley D. Slicing the cube in $\mathbb{R}^n$ and probability // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol. 73. – №1. – P. 95–100.

³³Wiener N. The homogeneous chaos // Amer. J. Math. – 1938. – Vol. 60. – P. 879–936.

³⁴Cameron R.H., Martin W.T. The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier-Hermite polynomials // Ann. Math. – 1947. – Vol. 48. – P. 385–392

³⁵Itô K. Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Japan. – 1951. – Vol. 3. – P. 157–169.

³⁶Вершик А.М. Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах // Успехи матем. наук. – 1964. – Т. 19. – № 1. – С. 210–212.

³⁷Смолянов О.Г. Измеримые полилинейные и степенные функционалы в некоторых линейных пространствах с мерой // ДАН СССР. – 1966. – Т. 170. – С. 526–529.

³⁸Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. Наука, М., 1971.

³⁹Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1975.

⁴⁰Давыдов Ю.А. О распределениях кратных интегралов Винера–Ито // Теория вероятн. и ее примен. – 1990. – Т. 35. – С. 51–62.

⁴¹Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, М., 1997.

⁴²Прохоров Ю.В. О многочленах от нормально распределенных случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. – 1992. – Т. 37. – №4. – С. 747–750.

⁴³Прохоров Ю.В. О многочленах от случайных величин, имеющих гамма-распределение // Теория вероятн. и ее примен. – 1993. – Т. 38. – №1. – С. 198–202.

⁴⁴Прохоров Ю.В., Хохлов В.И. О многочленах от компонент гауссовских случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен. – 2007. – Т. 52. – №4. – С. 810–814.

⁴⁵Bobkov S.G. Remarks on the growth of L^p -norms of polynomials // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. – 2000. – Vol. 1745. – P. 27–35.

⁴⁶Бобков С.Г. Некоторые обобщения результатов Ю.В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов // Теория вероятн. и ее примен. – 2000. – Т. 45. – №4. – С. 745–748.

сированной степени на $\mathbb{R}^n$ с заданной логарифмически вогнутой мерой. Одним из интересных первых результатов в данном направлении было утверждение об эквивалентности среднего геометрического и среднего арифметического для логарифмически вогнутой меры, которое получил Р. Латала⁴⁷. Вопросы о связи различных метрик на пространстве распределений многочленов фиксированной степени изучались И. Нурдиным, Д. Нуалартом, Г. Поли и Дж. Пеккати (см.^{48,49,50,51}). Эти вопросы тесно связаны с различными предельными теоремами для элементов винеровского хаоса фиксированного порядка. Отметим также работу Ф. Гётце, Ю.В. Прохорова, В.В. Ульянова⁵² о поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях.

Важные вопросы о свойствах многочленов и их распределений связаны с оценками меры больших и малых значений. В случае отрезка оценка сверху меры малых значений многочлена следует из классического неравенства Ремеца⁵³ (см. также⁵⁴), имеющего вид

$$\max_{[0,1]} |f| \leq \left(\frac{4}{|J|} \right)^d \sup_J |f|,$$

где f — многочлен степени d , а $J \subset [0, 1]$. Взяв в данном неравенстве множество $J = \{x \in [0, 1]: |f(x)| \leq \varepsilon\}$, получаем оценку

$$(\max_{[0,1]} |f|)^{1/d} \cdot |\{x: |f(x)| \leq \varepsilon\}| \leq 4\varepsilon^{1/d}.$$

Многомерное обобщение неравенства Ремеца и оценки малых значений в случае выпуклого компакта в $\mathbb{R}^n$ были исследованы в работе⁵⁵. Для многочленов на пространстве с логарифмически вогнутыми мерами (которые обобщают ограничение меры Лебега на выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$) подобные оценки меры малых значений изучались в работах Ф.Л. Назарова,

⁴⁷Latala R. On the equivalence between geometric and arithmetic means for logconcave measures // *Convex Geom. Anal.* – 1996. – P. 123–127.

⁴⁸Nourdin I., Nualart D., Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos // *Electron. J. Probab.* – 2013. – Vol. 18. – №22. – P. 1–19.

⁴⁹Nourdin, I. Poly G. Convergence in total variation on Wiener chaos // *Stoch. Processes Appl.* – 2013. – Vol. 123. – №2. – P. 651–674.

⁵⁰Nualart D., Peccati G. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals // *Ann. Probab.* – 2005. – Vol. 33. – №1. – P. 177–193.

⁵¹Nourdin I., Peccati G. Stein's method on Wiener chaos // *Probab. Theory Relat. Fields.* – 2009. – Vol. 145. – №1-2. – P. 75–118.

⁵²Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях // *Теория вероятн. и ее примен.* – 1997. – Т. 42. – N 1. – С. 51–62.

⁵³Remez E.J. Sur une propriété extrémale des polynômes de Tschebychef // *Сообщ. Харьк. мат. о-ва.* – 1936. – Т. 13. – С. 93–95.

⁵⁴Borwein P., Erdelyi T. *Polynomials and polynomial inequalities.* Springer. Berlin. 1995.

⁵⁵Брудный Ю.А., Ганзбург М.И. Об одной экстремальной задаче для многочленов n переменных // *Известия АН СССР. Серия матем.* – 1973. – Т. 37. – №2. – С. 344–355.

М.Л. Содина и А.Л. Вольберга⁵⁶, а также А. Карбери и Дж. Райта⁵⁷. Данные результаты в частности дают независимую от размерности пространства оценку меры малых значений многочлена фиксированной степени, что позволяет использовать их и в бесконечномерной ситуации. В диссертации доказываются нижние оценки на меру уклонения многочлена от его среднего значения (интеграла), что является в некотором смысле обратным неравенством к неравенству Карбери–Райта. В частности для многочлена второй степени на $\mathbb{R}^n$ и произвольной логарифмически вогнутой меры μ при достаточно малых ε получено неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f - m_f| d\mu \right) \cdot \mu(|f - m_f| \leq \varepsilon) \geq C\varepsilon,$$

где f — многочлен второй степени, $m_f = \int f d\mu$ — среднее значение функции f .

Цель работы.

- Для ограниченной борелевской меры на сепарабельном банаховом пространстве, обладающей слабым моментом порядка p , исследовать вопросы существования компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, на котором данная мера также обладает слабым моментом порядка p .
- Исследовать свойства множеств допустимых сдвигов для различных классов мер на локально выпуклых пространствах.
- Исследовать нижние оценки меры уклонения многочленов фиксированной степени от их средних на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Для сепарабельного банахова пространства и ограниченной борелевской меры на нем со слабым моментом порядка p получены необходимые и достаточные условия существования компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, сужение исходной меры на которое также обладает слабым моментом порядка p .

2. Для произведений мер получены обобщения классического результата Шеппа на случай сдвигов на вектора из пространства ℓ^q .

⁵⁶Назаров Ф.Л., Содин М.Л., Вольберг А.Л. Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций // Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14. – №2. – С. 214–234.

⁵⁷Carbery A., Wright J. Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$ // Mathematical research letters. – 2001. – Vol. 8. – №3. – P. 233–248.

3. Для логарифмически вогнутых мер установлено, что множество несингулярных сдвигов является выпуклым, а множество эквивалентных сдвигов является линейным пространством.

4. Для гауссовских мер получены нижние оценки мер уклонений многочленов произвольной степени от их средних. Для логарифмически вогнутых мер такие оценки получены для многочленов второй степени.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете и Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики».

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются меры и интегрирование в бесконечномерных пространствах, их линейные и нелинейные отображения, а также функционалы на бесконечномерных пространствах с мерами, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях.

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2012, 2015 г.),

2. Международная конференция «Вероятность, анализ и геометрия» (Москва, МГУ, 2014 г.),

3. 3-я международная конференция «Вероятность, анализ и геометрия» (Германия, Ульм, 2015 г.),

4. Международная конференция “Infinite-dimensional analysis (the 19th ISE)”, Казальмаджоре, Италия (2016 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и

стохастика» под руководством В.И. Богачева, С.В. Шапошникова и Н.А. Толмачева (МГУ, многократно, 2012–2016 г.),

2. Научно-исследовательский семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б.С. Кашина и академика РАН С.В. Конягина (МГУ, 2015 г.)

3. Международный научно-исследовательский семинар “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельда, Германия (многократно, 2014–2017 г.),

4. Научно-исследовательский семинар в Пекинском Нормальном университете, Китай (2014, 2015 г.),

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора (см. [1], [2], [3], [4], [5], последние три из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Общий объем диссертации составляет 64 страницы.

Краткое содержание диссертации.

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Первая глава данной работы является вводной. Она содержит необходимые определения, обозначения и уже известные результаты, которые используются в остальных трех главах работы. Вопросы, обсуждаемые во второй и третьей главе, имеют бесконечномерную природу, в то время как результаты последней главы нетривиальны уже в конечномерном случае.

Во второй главе исследуются свойства борелевских мер со слабыми моментами на банаховых пространствах. А именно: для ограниченной борелевской меры на сепарабельном банаховом пространстве, обладающей слабым моментом порядка p , доказываются необходимые и достаточные условия наличия компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, на котором данная мера также обладает слабым моментом порядка p . Для меры со слабым моментом порядка два это свойство связано с компактностью ковариационного оператора (определение будет дано во второй главе). Основные результаты этой главы заключены в следующих трех теоремах.

Теорема 2.1.1. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X , причем $X^* \subset L^1(\mu)$. Тогда следующие условия равносильны:

(i) существует компактно вложенное рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры с $E^* \subset L^1(\mu)$,

(ii) для всякого μ -измеримого множества A найдется такой элемент $h_A \in X$, что

$$\int_A f d\mu = f(h_A) \quad \text{для всех } f \in X^*.$$

Теорема 2.2.4. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X и $X^* \subset L^2(\mu)$. Тогда существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства E полной меры с $E^* \subset L^2(\mu)$ равносильно тому, что ковариационный оператор меры μ компактен.

Теорема 2.3.1. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X и $X^* \subset L^2(\mu)$. Если ковариационный оператор меры μ компактен, то существует компактно вложенное в X гильбертово пространство E полной меры, для которого $E^* \subset L^2(\mu)$. Обратно, из существования такого пространства следует компактность ковариационного оператора.

Разумеется, эти утверждения остаются в силе для ограниченных неотрицательных мер (необязательно вероятностных).

В третьей главе исследуются свойства множеств допустимых сдвигов произведений мер и логарифмически вогнутых мер. Для борелевской меры μ на локально выпуклом пространстве X символом μ_h обозначим сдвиг меры μ : $\mu_h(A) := \mu(A - h)$. Через $\widetilde{M}(\mu)$ обозначим множество всех несингулярных сдвигов меры μ (векторов h , для которых меры μ_h и μ не взаимно сингулярны), а через $M(\mu)$ — множество всех эквивалентных сдвигов меры μ (векторов h , для которых меры μ_h и μ эквивалентны).

В первом параграфе третьей главы обобщаются классические результаты Шеппа¹⁰ о необходимом и достаточном условии включения ℓ^2 в $M(\mu)$ на случай ℓ^q вместо ℓ^2 . Ответ дается в терминах принадлежности корня из плотности сомножителя определенному классу Никольского.

Теорема 3.1.3. Пусть $\nu = f(x)dx$ — вероятностная мера на прямой, где $f > 0$ п.в., $\mu = \nu^\infty$. Тогда если $1 \leq q < 2$, то условие

$$\int_{\mathbb{R}} |\sqrt{f(x+s)} - \sqrt{f(x)}|^2 dx \leq Cs^q$$

равносильно тому, что $\ell^q \subset M(\mu)$.

В случае логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве доказано, что множество $M(\mu)$ является линейным пространством, а множество $\widetilde{M}(\mu)$ является выпуклым множеством.

Теорема 3.2.2. Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X . Тогда множество векторов $M(\mu)$ является линейным подпространством в X .

Напомним, что интегралом Хеллингера вероятностных мер μ и ν называется величина

$$H(\mu, \nu) = \int \sqrt{\varrho_\mu \varrho_\nu} d\lambda$$

для какой-либо меры λ , относительно которой данные меры заданы плотностями ϱ_μ и ϱ_ν соответственно (например, можно взять $\lambda = (\mu + \nu)/2$; от выбора λ это число не зависит).

Теорема 3.2.3. Пусть μ логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X . Тогда функция $H(h) = H(\mu, \mu_h)$ (интеграл Хеллингера мер μ и μ_h) является логарифмически вогнутой, т. е.

$$H(th + (1 - t)q) \geq H^t(h)H^{1-t}(q) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.2.4. Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X . Тогда множество $\widetilde{M}(\mu)$ выпукло.

В четвертой главе рассматриваются измеримые многочлены на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами. В этой главе исследуется поведение многочлена в окрестности его среднего (интеграла или математического ожидания по вероятностной терминологии). Оценку сверху на меру множества, на котором многочлен близок к своему среднему, можно получить из неравенства Карбери – Райта из работы⁵⁶, поэтому нас будут интересовать нижние оценки меры данного множества. В четвертой главе оценки такого типа получены в случае гауссовской меры и многочлена произвольной степени, а также в случае произвольной логарифмически вогнутой меры, но многочлена степени два. В силу независимости полученных оценок от размерности они также остаются верными и для случая меры на бесконечномерном пространстве.

В формулировках ниже следующих результатов через m_f и σ_f^2 обозначены математическое ожидание и дисперсия случайной величины f соответственно. В случае гауссовской меры получена следующая теорема.

Теорема 4.1.3. Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Для всякого натурального числа d найдется такое число $L(d) > 0$, что для всякого многочлена f степени d верна оценка

$$\gamma(x: |f(x) - m_f| \leq \sigma_f s) \geq L(d)s |\ln s|^{-d/2} \quad \text{при } 0 \leq s \leq 1/2.$$

Для произвольной логарифмически вогнутой меры получен следующий результат.

Теорема 4.2.3. *Существует такая положительная абсолютная постоянная C_1 , что для всякого полинома f второй степени на $\mathbb{R}^n$ и всякой логарифмически вогнутой меры μ справедливо неравенство*

$$\varepsilon \mu(x: f(x) \leq -\varepsilon) \mu(x: f(x) \geq \varepsilon) \leq C_1 \mu(x: |f(x)| < \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu.$$

Из этой теоремы вытекает следующая оценка на меру уклонения многочлена.

Следствие 4.2.4. *Существует такая положительная абсолютная постоянная C_2 , что для всякого полинома f второй степени на $\mathbb{R}^n$ и всякой логарифмически вогнутой меры μ справедливо неравенство*

$$\mu(x: |f(x) - m_f| < \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} |f - m_f| d\mu \geq C_2 \varepsilon, \text{ если } \varepsilon \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - m_f| d\mu.$$

В последнем параграфе четвертой главы в связи с вопросом об условиях существования совместной плотности распределения нескольких измеримых многочленов второго порядка строится пример, показывающий, что теорема 2.1 из работы⁵⁸ точна. Приведем здесь саму эту теорему.

Теорема 4.3.1. *Пусть $A_1, \dots, A_k$ — линейно независимые измеримые линейные операторы на пространстве с гауссовской мерой, действующие в пространство Камерона–Мартина этой меры. Тогда либо векторы $\hat{A}_1 x, \dots, \hat{A}_k x$ линейно независимы почти всюду, либо существует конечномерный ограниченный линейный оператор D ранга не выше $k - 1$, являющийся нетривиальной линейной комбинацией операторов $A_1, \dots, A_k$.*

Предложение 4.3.3. *В приведенной теореме нельзя добиться меньшего ранга оператора D .*

Заключение

В диссертации исследованы некоторые свойства вероятностных мер на локально выпуклых пространствах и измеримых многочленов на этих пространствах. Для сепарабельного банахова пространства и вероятностной борелевской меры на нем со слабым моментом порядка p в диссертации получены необходимые и достаточные условия существования компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, сужение исходной меры на которое также обладает слабым моментом того же порядка. Для произведений мер

⁵⁸Богачев В.И., Косов Е.Д., Нурдин И., Поли Г. Два свойства векторов из квадратичных форм от гауссовских случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. — 2014. — Т. 59. — №2. — С. 214–232.

получены обобщения классического результата Шеппа на случай сдвигов из пространства ℓ^q . Для логарифмически вогнутых мер установлено, что множество несингулярных сдвигов является выпуклым, а множество эквивалентных сдвигов является линейным пространством. Для гауссовских мер в работе получены нижние оценки мер уклонений многочленов произвольной степени от их средних (математических ожиданий). Для логарифмически вогнутых мер такие оценки получены для многочленов второй степени.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях:

1. Исследование наличия несингулярного сдвига у произвольной невырожденной логарифмически вогнутой меры.

2. Получение нижней оценки уклонения от математического ожидания многочлена произвольной степени на пространстве с логарифмически вогнутой мерой. В этом вопросе гипотеза заключается в том, что правильная оценка меры данного уклонения имеет следующий вид:

$$\mu(|f - m_f| < \varepsilon) \int |f - m_f| d\mu \geq C(d)\varepsilon.$$

Было бы интересно получить оценку с такой зависимостью от ε даже в случае гауссовской меры.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Косов Е.Д. Носители мер со слабыми моментами // Докл. АН. – 2012. – Т. 447. – №3. – С. 254–258.

[2] Косов Е.Д. Нижние оценки мер уклонений многочленов от математических ожиданий // Докл. АН. – 2015. – Т. 465. – №3. – С. 278–280.

[3] Богачев В.И., Косов Е.Д., Нурдин И., Поли Г. Два свойства векторов из квадратичных форм от гауссовских случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. – 2014. – Т. 59. – №2. – С. 214–232.

В работе [3] диссертанту принадлежит предложение 2.1.

[4] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д. Пространства квазиинвариантности продакт-мер // Функц. анализ и его прил. – 2015. – Т. 49. – №2. – С. 79–81.

В работе [4] диссертанту принадлежат основная теорема и примеры.

[5] Arutyunyan L.M., Kosov E.D. Sets of admissible shifts of convex measures // Rendiconti Lincei – Matem. Appl. – 2015. – Vol. 26. – №1. – P. 93–98.

В работе [5] диссертанту принадлежат теорема 1 и 2.

Тезисы докладов на научных конференциях

[6] Kosov E.D. Estimates of integral norms of polynomials on spaces with convex measures // Сборник тезисов докладов международной научной конференции «Probability, Analysis and Geometry». Москва. 2014. – С. 8–8.

[7] Kosov E.D. Estimates of polynomials on spaces with logarithmically concave measures // Сборник тезисов докладов международной научной конференции «3rd Workshop on Analysis, Geometry and Probability». Ulm. 2015. – С. 46–46.

[8] Косов Е.Д. Носители мер со слабыми моментами // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2012». М.: МГУ, 2012. – 2 с.

[9] Косов Е.Д. Оценка L^1 нормы многочлена через L^1 норму его сужения на подмножество положительной меры на пространстве с выпуклой мерой // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2015». М.: МГУ, 2015. – 1 с.