Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXV
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2012

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

☞ Председатель оргкомитета LXXV ММО

профессор механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова *В. А. Успенский*

☞ Сборник подготовили:

В. Б. Алексеев, В. Д. Арнольд, А. Г. Банникова, А. В. Бегунц, Б. Б. Беднов, А. С. Бердников, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, П. А. Бородин, В. В. Буланкина, Е. Ю. Бунькова, М. А. Волчкевич, В. В. Галатенко, А. И. Галочкин, Т. И. Голенищева-Кутузова, Н. Б. Гончарук, А. Ю. Горицкий, Д. В. Горяшин, В. М. Гуровиц, Г. Г. Гусев, М. Е. Жуковский, О. М. Заплетина, А. А. Заславский, А. С. Зеленский, Ф. А. Ивлев, А. Я. Канель-Белов, А. Л. Канунников, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, О. Н. Косухин, В. А. Кошелев, Ю. Г. Кудряшов, Н. Д. Кудык, Ю. В. Кузьменко, Н. М. Курносов, К. Г. Куюмжиян, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, Д. В. Мусатов, Н. М. Нетрусова, Д. О. Орлов, Л. А. Остроумова, В. С. Панфёров, А. В. Петухов, В. Ю. Радионов, А. М. Райгородский, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Д. В. Селегей, И. Н. Сергеев, П. В. Сергеев, Н. А. Солодовников, Л. А. Суханов, Ю. М. Устиновский, В. Г. Ушаков, А. А. Флеров, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, А. А. Чернов, А. В. Шаповалов, Н. Н. Шатохин, И. А. Шейпак, Д. Э. Шноль, Д. Е. Щербаков, М. В. Юмашев, И. В. Ященко.

☞ Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке

фирмы «НИКС»,
компании «Яндекс»
и фонда «Математические этюды».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Разрежьте рамку (рис. 1) на 16 равных частей.

(*А. В. Шаповалов*)

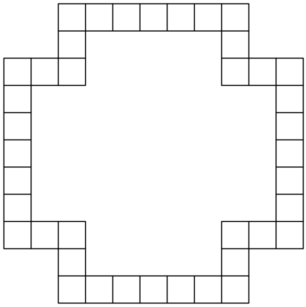


Рис. 1

2. Пазл Пете понравился, он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска? (*А. В. Шаповалов*)

3. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

(*И. В. Раскина*)

4. Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать

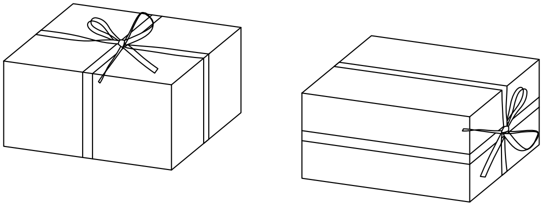


Рис. 2

бантик сверху (как на рис. 2 слева). А чтобы перевязать её с точно таким же бантиком сбоку (как на рис. 2 справа), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.

(*И. В. Раскина*)

5. Замените в равенстве

$$\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} + \text{КУСОК} + \text{КУСОК} + \ldots + \text{КУСОК}$$

одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было бы наибольшим из возможных.

(*И. В. Раскина*)

6. Известно, что Шакал всегда лжёт, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

(*А. В. Хачатурян*)

7 класс

1. Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рис. 3 слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды.

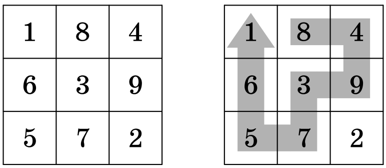


Рис. 3

Петя прошёл, как показано на рис. 3 справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

(*И. В. Ященко*)

2. Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим частям добавили ещё одну фигурку — и оказалось, что и из нового набора фигурок можно сложить как квадрат, так и треугольник.

Покажите, как такое могло бы произойти (нарисуйте, как именно эти два квадрата и два треугольника могли бы быть составлены из фигурок).

(*С. В. Маркелов, В. А. Клепцын*)

3. См. задачу 4 для 6 класса.

4. На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а ещё одна пристань стоит в двух километрах после слияния (рис. 4). Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех её частях. Собственная скорость лодки также постоянна.)

(*В. М. Гуровиц*)

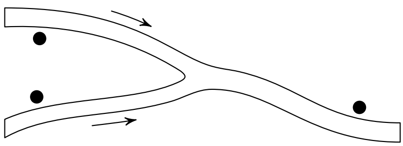


Рис. 4

5. Вася написал верное утверждение:

«В этой фразе 1/3 всех цифр — цифры 3, а 1/2 всех цифр — цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе 1/... всех цифр — цифры *, доли цифр * и * одинаковы и равны 1/..., а доля всех остальных цифр составляет 1/...».

Вставьте вместо звёздочек три разные цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение. (*А. В. Шаповалов*)

6. Победив Кащея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привёл его Кащей в пещеру и сказал:

«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».

Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кащей, если в сундуке исходно лежит а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать? (*А. В. Шаповалов*)

8 класс

1. На доске написаны четыре трёхзначных числа, в сумме дающие 2012. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел. (*А. В. Шаповалов*)

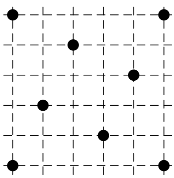


Рис. 5

2. Кузнечик умеет прыгать только ровно на 50 сантиметров. Он хочет обойти 8 точек, отмеченных на рис. 5 (сторона клетки равна 10 сантиметрам). Какое наименьшее количество прыжков ему придётся сделать? (Разрешается посещать и другие точки плоскости, в том числе не узлы сетки. Начинать и заканчивать можно в любых точках.) (*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

3. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались? (*А. В. Шаповалов*)

4. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть точка K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

(*М. А. Волчкевич*)

5. Рациональные числа x, y и z таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, x^2+y+z^2 и x^2+y^2+z целые. Докажите, что число $2x$ целое. (*И. И. Богданов*)

6. В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа — нули. При каких числах m и n, больших 100, такое возможно? (*И. В. Раскина*)

9 класс

1. В стране Далёкой провинция называется *крупной*, если в ней живёт более 7 % жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся две провинции с меньшим населением такие, что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далёкой?

(*А. В. Петухов*)

2. В ряд лежит $2n$ груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно разложить все груши по n пакетам по две груши в каждый и выложить эти пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов также отличались не более чем на 1 г.

(*А. В. Шаповалов*)

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. Рациональные числа x, y и z таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, x^2+y+z^2 и x^2+y^2+z целые. Верно ли, что число $2x$ целое? (*И. И. Богданов*)

5. Дан треугольник ABC. Прямая l касается вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC. (*А. А. Заславский*)

6. а) В футбольном турнире участвовало 75 команд. Каждая команда играла с каждой один раз, за победу в матче команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что любые две команды набрали различное количество очков. Найдите наименьшую возможную разность очков у команд, занявших первое и последнее места.

б) Тот же вопрос для n команд. (*А. Д. Блинков*)

10 класс

1. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно. (*Б. Р. Френкин*)

2. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

(*А. Я. Канель-Белов*)

3. Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны? (*А. С. Бердников*)

4. По кругу разложено чётное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более чем на 1 г. (*А. В. Шаповалов*)

5. Дан остроугольный треугольник ABC. Для произвольной прямой l обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, а через I_l — центр вписанной окружности треугольника, образованного этими прямыми. Найдите геометрическое место точек I_l.

(*А. А. Заславский*)

6. Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трёхэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$, а рёбра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были разного цвета. (*А. М. Райгородский*)

11 класс, первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y=2a+\dfrac{1}{x-b}$ и $y=2c+\dfrac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y=2b+\dfrac{1}{x-a}$ и $y=2d+\dfrac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку. (*О. Н. Косухин*)

3. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH+BH \geqslant 2R$. (*В. С. Панфёров, В. Г. Ушаков*)

4. На собрание пришло n человек ($n>1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4. (*П. В. Сергеев*)

5. Для $n=1, 2, 3$ будем называть числом n-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию 1, $(n+2)$, $(n+2)^2$, ..., либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа. (*О. Н. Косухин*)

6. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S.

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.

(*А. С. Бердников*)

11 класс, второй день

1. К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

(*А. В. Бегунц*)

2. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке? (*О. Н. Косухин*)

3. Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0; 1]$ функцию от x. (*О. Н. Косухин*)

4. После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади S. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна S_1. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна S. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$? (*О. Н. Косухин*)

5. Обозначим через $S(n, k)$ количество не делящихся на k коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням x.

а) Найдите $S(2012, 3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011}, 2011)$ делится на 2012.

(*В. Г. Ушаков*)

6 класс

1. *Ответ*. Можно разрезать так (рис. 6).

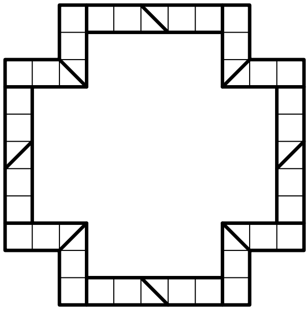


Рис. 6

2. *Ответ*. За час.

Первое решение. Каждое склеивание уменьшает на 1 количество кусков на столе. Раз после 120 склеиваний получился один кусок (целый пазл), то до начала работы был 121 кусок. Теперь если за минуту склеивать по три куска (т. е. уменьшать количество кусков на 2), то один кусок останется через 60 минут.

Второе решение. За минуту Петя делал одно склеивание и на сбор пазла потратил 2 часа. Если бы он склеивал по три куска, он делал бы два склеивания за минуту, т. е. работал бы вдвое быстрее и потратил бы, стало быть, 1 час.

Комментарий. Время, затраченное на склеивание всего пазла, не зависит от того, в каком порядке Петя брал куски. Он мог, например, добавлять по одному кусочки к уже склеенной части. А мог вместо этого склеить кусочки по парам или тройками, а потом склеивать их между собой. Всё равно в первом случае у него ушло бы 2 часа, а во втором — 1 час. В первом решении этот факт доказан с помощью подсчёта общего числа кусочков. А во втором решении принимается за очевидный. Поэтому, строго говоря, второе решение неполно: в нём получен верный ответ, но не доказана его единственность.

3. *Ответ*. 1001.

Решение. Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело. Поскольку в часе, очевидно, более одной минуты, в часе получается 7 минут — ни на какое другое число, большее единицы, 77 и 91 одновременно не делятся. Тогда в сутках $77:7=11$ часов и $11 \cdot 91=1001$ секунда.

Комментарий. То же решение можно изложить алгебраически. А именно, пусть в сутках $a>1$ часов, в часе $b>1$ минут, в минуте $c>1$ секунд. Тогда $77=ab$, $91=bc$. С другой стороны, $77=7 \cdot 11$ и $91=7 \cdot 13$, причём числа 7, 11, 13 простые, т. е. дальше на множители разложить нельзя. Значит, $b=7$, откуда $a=11$, $c=13$. Всего секунд в сутках получается $abc=1001$.

4. *Ответ*. 22 см $\times$ 22 см $\times$ 11 см.

Решение. При первом способе завязывания лента охватывает дважды длину, дважды ширину и четыре раза высоту коробки, т. е. её длина равна шести сторонам основания плюс бантик. При втором способе завязывания лента охватывает дважды длину, четырежды ширину и два раза высоту коробки, т. е. её длина равна семи сторонам основания плюс бантик. Теперь понятно, что разница в длинах лент $178-156=22$ см в точности равна стороне основания коробки. Итак, размеры коробки 22 см $\times$ 22 см $\times$ 11 см. Проверим: в первом случае на обхватывание коробки уходит $22 \times 6=132$ см, 24 см идёт на бантик. Во втором — $22 \times 7=154$ см и те же 24 см на бантик.

5. *Ответ*. Максимальное количество «кусков» равно семи, например: ПИРОГ $=95207$, КУСОК $=13601$.

Решение. Пример для семи «кусков» приведён выше. Покажем, что больше семи «кусков» быть не может. Для этого удобно условие переписать как пример на умножение ПИРОГ $=$ КУСОК $\cdot\, n$, где n — количество «кусков».

Понятно, что если «кусков» 10 или больше, то правая часть превысит 100000, так что решений не будет.

Невозможно решение и для девяти «кусков». Для того чтобы число ПИРОГ $=$ КУСОК $\cdot\, 9$ было пятизначным, надо, чтобы К равнялось 1. Но тогда ПИРОГ и начинается, и кончается на девятку, а этого быть не должно.

Теперь докажем, что и восьми «кусков» быть не может. Пусть КУСОК $\cdot\, 8=$ ПИРОГ. Так как в слове ПИРОГ все цифры разные, то ПИРОГ $\leqslant 98765$, а тогда КУСОК $\leqslant 98765/8=$

$= 12345{,}675$, то есть КУСОК $\leqslant 12345$. Тогда понятно, что $К = 1$ и $Г = 8$. Буква О обозначает цифру, произведение которой на 8 оканчивается на неё же. Легко убедиться, что это может быть только ноль. Поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а $У \leqslant 2$ и $С \leqslant 3$, то $У = 2$ и $С = 3$. Итак, есть только одна возможность: КУСОК $= 12301$. Но это число не подходит, так как $12301 \cdot 8 = 98408$, а в 98408 цифры повторяются, чего не должно быть.

Приведённый пример для семи «кусков» не единственный, есть ещё три: $14051 \cdot 7 = 98357$, $12351 \cdot 7 = 86457$, $12051 \cdot 7 = 84357$. Разумеется, достаточно было привести один пример.

6. *Ответ*. Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

Решение. На первый вопрос «Ты Шакал?» Лев и Шакал заведомо скажут «нет». Поэтому узнать Жирафа и не узнать Попугая Ёж может только в одном случае: если Жираф ответит «Да», а Попугай «Нет». То же можно сказать и о втором вопросе «Ты Жираф?» — на него Лев и Жираф скажут «Нет» (Жираф думает, что его спрашивают, Шакал ли он), стало быть, Шакал распознаётся потому, что только он один и сказал «Да».

Поскольку ответа первого животного на третий вопрос хватило Ежу для определения всех (а до этого ответа информации не хватало), первым не стоял ни Жираф, ни Шакал (их ответы Ёжик мог предсказать заранее, и они ему ничего нового бы не сказали). Первым не мог стоять и Лев (он на третий вопрос ответил бы «нет»), т. е. первым был Попугай, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Шакал. У нас осталось две возможности расстановки:

(1): Попугай, Жираф, Лев, Шакал и (2): Попугай, Лев, Жираф, Шакал. Рассмотрим их.

Если бы имел место порядок (1), то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Попугай, ведь он не повторил ответ второго. А тогда после второго опроса (когда он знал и Жирафа, и Шакала) все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы. А вот в случае порядка (2) варианты Попугай, Лев, Жираф, Шакал и Лев, Попугай, Жираф, Шакал действительно не различались бы до последнего вопроса.

7 класс

1. *Ответ.* Наибольшее число, которое можно получить,— 573618492 (рис. 7).

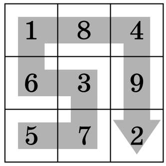


Рис. 7

Комментарии. 1. Объясним, как задачу можно было бы решать (от участников этого не требовалось).

Заметим, что получить число, большее приведённого в условии, можно, начав обход с числа 9 (например, нетрудно получить число 94836572). Однако если обойти все клетки доски, то получится 9-значное число, которое, конечно, будет больше любого 8-значного.

И 9-значное число тоже тем больше, чем больше его первая цифра. Можно заметить, что 9-значного числа, начинающегося с 9, построить не удастся. И вообще, ни для какой из чёрных клеток (рис. 8) не существует начинающегося в ней пути, проходящего по всем клеткам доски (см. следующий комментарий).

Поэтому наибольшее число получится, если начать с самой большой белой клетки, т. е. с цифры 5. Дальше надо перейти к её наибольшему соседу, цифре 7, потом к её наибольшему соседу, цифре 3. Но если дальше пойти в наибольшего соседа цифры 3, цифру 9, обойти все клетки квадрата не получится. Аналогично не надо идти в цифру 8. Поэтому из 3 надо ходить в 6. Далее путь единственен.

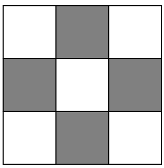


Рис. 8

2. Раскрасив квадратик в шахматном порядке (рис. 8), объясним, почему нельзя обойти все клетки, начиная с чёрной. Действительно, ход из чёрной клетки всегда приводит в белую. Всего чёрных клеток четыре, поэтому белых клеток на любом таком пути тоже не более четырёх — все пять белых клеток так не обойти.

2. Например, см. рис. 9.

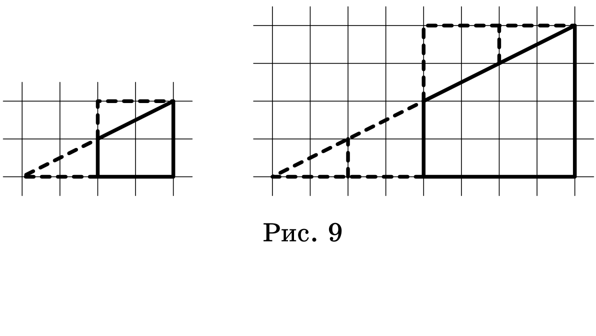


Рис. 9

3. См. решение задачи 4 для 6 класса.

4. *Ответ*. Либо за 24, либо за 72 минуты.

Решение. Обозначим пристани в порядке посещения A, B и C. Подумаем, какая из них могла стоять после слияния.

• Пристань B не могла стоять после слияния. Действительно, иначе лодка шла бы к ней 3 км по течению, а от неё — те же 3 км, но против течения. Но по условию время первой части пути больше, чем время второй.

• Пусть после слияния стоит пристань A. Тогда 1 км против течения лодка проходит за $30/3 = 10$ минут, а 1 км по течению — за $18 - 10 = 8$ минут. Соответственно, путь из C в A (3 км по течению) занимает $3 \cdot 8 = 24$ минуты.

• Наконец, пусть после слияния стоит пристань C. В этом случае 1 км по течению лодка проходит за $18/3 = 6$ минут, а 1 км против течения — за $30 - 6 = 24$ минуты. Соответственно, путь из C в A (3 км против течения) занимает $3 \cdot 24 = 72$ минуты.

5. *Ответ*. «В этой фразе 1/2 всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны 1/5, а доля всех остальных цифр составляет 1/10» (или «...доли цифр 0 и 2 одинаковы...» или «...доли цифр 0 и 5 одинаковы...»).

Решение. Объясним, как задачу можно было бы решать (от участников этого не требовалось).

Если какое-то из заменённых многоточием чисел хотя бы трёхзначное, то всего в этой фразе не менее 100 цифр, что невозможно (тогда одно из чисел состоит минимум из 30 знаков, но тогда всего цифр не менее 10^{30} и т. д. — ясно, что так быть не может). Поэтому все числа или однозначные, или двузначные, а цифр всего от 9 до 12.

Цифр «1» не менее 4, их доля не менее $4/12 = 1/3$, поэтому знаменатель первой дроби однозначный, т. е. цифр меньше 12.

Все знаменатели — делители количества цифр, большие единицы. Поэтому цифр не может быть ни 11 (у числа 11 нет отличных от единицы однозначных делителей), ни 9 (четыре слагаемых вида 1/3 и 1/9 в сумме не дадут 1).

Значит, всего цифр 10, а доля цифр «1» равна 1/2. Остальные дроби могут быть равны 1/5 и 1/10. Сумма долей должна быть равна 1: $1/2 + 1/5 + 1/5 + 1/10 = 1$. В знаменателях по разу встретились цифры 0, 2 и 5, любые две можно упомянуть явно, тогда их доля будет 1/5, а на долю единственной оставшейся цифры придётся 1/10.

6. *Ответ*. а) 13; б) 13.

Решение. Иван будет действовать так, что каждый раз ход Кащея будет единственным: все остальные числа либо встречались на предыдущих ходах, либо слишком велики — у Ивана в этот момент нет столько слитков. Будем записывать ходы игры следующим образом: количество переложенных слитков (число слитков у Ивана после хода).

а) +2 (2), −1 (1), +3 (4), −4 (0), +6 (6), −5 (1), +7 (8), −8 (0), +10 (10), −9 (1), +11 (12), −12 (0), +13 (13).

В конце все возможные ходы сделаны, у Ивана все 13 слитков, значит, их он может забрать.

б) Будем действовать так же, как в предыдущем пункте. После хода «+13 (13)» не сделан только ход 14, но он невозможен, поэтому Иван может унести 13 слитков.

Докажем, что 14 слитков Иван унести не может. Допустим, в какой-то момент в сумке оказалось 14 слитков. Значит, в сундуке слитков нет, то есть последним сходил Иван. Но тогда всего сделано нечётное число ходов, и поэтому какое-то из чисел от 1 до 14 не встретилось. Кащей может сделать ход с этим числом, значит, уносить слитки пока нельзя.

Комментарий. Можно заметить, что для 17, 21 и вообще $4k+1$ слитка задача решается аналогично пункту а), а для 14, 18 и вообще $4k+2$ слитков — аналогично пункту б). Можно подумать над решением задачи и в оставшихся случаях (когда слитков $4k$ или $4k+3$).

8 класс

1. *Ответ*. Достаточно привести любое из четырёх возможных представлений

$$2012 = 353 + 553 + 553 + 553 = 118 + 118 + 888 + 888 =$$
$$= 118 + 188 + 818 + 888 = 188 + 188 + 818 + 818.$$

Решение. Хотя это и не требуется в задаче, покажем, как эти решения могут быть найдены. Первое из них нетрудно найти подбором. Трёхзначных чисел из двух цифр не так много, поэтому можно для начала предположить, что среди искомых чисел будут одинаковые. Более того, 2012 делится на 4, и можно попробовать даже все числа сделать одинаковыми: $2012 = 503 + 503 + 503 + 503$. Это разложение, однако, не годится: в числе 503 используются три разные цифры, 5, 0 и 3. Поэтому логично попытаться избавиться от нуля; попробуем заменить его пятёркой: четыре пятёрки, как и четыре нуля, дают сумму, кончающуюся нулём. Такая замена увеличила общую сумму на $50 \cdot 4 = 200$; остаётся заменить одну из пятёрок в разрядах сотен на тройку, чтобы вернуться к исходному значению суммы. Так мы приходим к представлению

$$2012 = 353 + 553 + 553 + 553.$$

Второе и третье решения можно построить, попытавшись найти *два* числа, записывающихся двумя цифрами и в сумме дающих $2012 : 2 = 1006$. В таком случае очевидно, что из разряда десятков должен происходить перенос, и поэтому сумма цифр в разряде сотен без этого переноса должна равняться 9. Значит, в этом разряде присутствуют обе неизвестные цифры, и их сумма равна 9. С другой стороны, сумма цифр в разряде единиц оканчивается на 6. Поэтому либо эта сумма равна 6 и получена как $3 + 3$ при второй цифре 6 (что не приводит к успеху: мы не сможем получить сумму 10, которую должны получить в разряде десятков), либо равна 16 и получена как $8 + 8$ при второй цифре 1 (что и приводит к обоим упомянутым решениям).

Комментарий. Покажем теперь, как можно было искать такое представление более систематически, и более того, как можно было найти все возможные представления (их, с точностью до порядка слагаемых, четыре). Пусть в записи наших чисел использовались цифры a и b, причём $a < b$. Вычтем из каждого из наших чисел число $\overline{aaa} = 111 \cdot a$ (черта сверху означает «число, записывающееся цифрами...»). Заметим, что получившиеся числа будут состоять тоже только из двух цифр — 0 и $c = b - a$. Тем самым, их можно представить как произведение c на число, записывающееся только цифрами 0 и 1.

Сумма получившихся чисел равна $2012 - 444 \cdot a$; деля эту сумму на c, мы видим, что каждая цифра частного $q = \dfrac{2012 - 444 \cdot a}{c}$ не превосходит 4 и показывает, в скольких из исходных чисел в этом разряде стояла большая из цифр.

Теперь решение можно найти простым перебором: подходят пары $a=3$, $c=2$ (дающая $q=340$ и $b=5$) и $a=1$, $c=7$ (дающая $q=224$ и $b=8$). Всевозможными способами расставляя по разрядам найденные цифры в задаваемом q количестве, мы приходим к четырём указанным выше представлениям.

2. *Ответ*. 8 прыжков.

Решение. Действительно, за 8 прыжков кузнечик может посетить все отмеченные точки, если пройдёт по маршруту $FABGQEDCH$, где точка Q — вершина равнобедренного треугольника с основанием GE и стороной 5 (рис. 10).

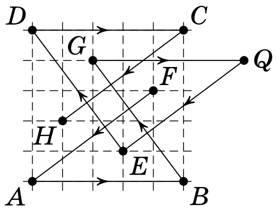


Рис. 10

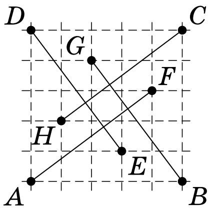


Рис. 11

С другой стороны, 7 прыжками (и тем более меньшим числом) он обойтись не может. Действительно, чтобы за семь прыжков посетить все восемь отмеченных точек, он должен был бы начать в одной из отмеченных точек и каждым прыжком попадать в новую отмеченную точку. Однако на расстоянии 5 от каждой из точек E, F, G, H есть только одна отмеченная точка (D, A, B, C соответственно, рис. 11). Если бы искомый путь существовал, хотя бы одна из точек E, F, G, H не была бы ни начальной, ни конечной точкой маршрута кузнечика. А тогда с ней должны были бы соседствовать хотя бы две отмеченные точки на расстоянии 5.

Полученное противоречие показывает, что обойтись меньшим восьми числом прыжков невозможно.

3. *Ответ*. Не всегда.

Решение. Существует несколько способов предъявить конфигурацию точек, для которой Саша не сможет добиться своего (естественно, для решения достаточно привести лишь одну).

Конструкция 1. Поместим на окружности 3 маленькие дуги, полученные друг из друга поворотами на

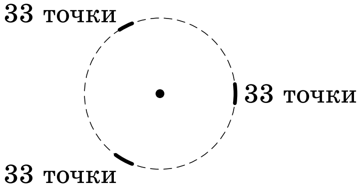


Рис. 12

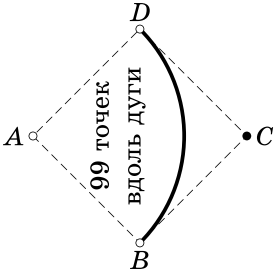


Рис. 13

120°, отметим на каждой дуге по 33 точки и ещё центр окружности (рис. 12). Отрезок из центра соединён с точкой на некоторой дуге. Он не пересечётся с отрезками, чьи концы лежат на других дугах. А такие отрезки есть, так как на двух дугах точек больше, чем на одной и в центре.

Конструкция 2. Возьмём квадрат $ABCD$ и расположим 99 точек $Q_1, \ldots, Q_{99}$ на дуге BD окружности с центром A и радиусом, равным стороне квадрата. В качестве 100-й точки возьмём точку C (рис. 13). Тогда с какой бы точкой Q_n Саша ни соединил отрезком точку C, из оставшихся 49 отрезков Q_iQ_j отрезок CQ_n не будет пересекать вообще *ни один*. Действительно, любой отрезок Q_iQ_j лежит внутри круга с центром A и радиусом AB, а отрезок CQ_n (исключая саму точку Q_n) — вне.

Конструкция 3. Заметим для начала, что если Саше удаётся соединить точки отрезками так, как сказано в условии, то для каждой выбранной им пары точек в каждой из полуплоскостей относительно проходящей через эти точки прямой лежит по 49 из оставшихся 98 точек (поскольку каждый из оставшихся 49 отрезков эту прямую пересекает, и, значит, его концы лежат в разных полуплоскостях).

Теперь отметим любые две точки A и B и по 49 точек в каждой из полуплоскостей относительно прямой AB, так, чтобы все эти 98 точек лежали по другую сторону относительно перпендикуляра к AB, восставленного из точки B, чем точка A (рис. 14). Тогда если Саша соединит точку A с какой-либо точкой Q, отличной от B, то по обе стороны от прямой AQ будет не 49 точек. А если Саша проведёт отрезок AB, то его по построению не пересекут отрезки с концами

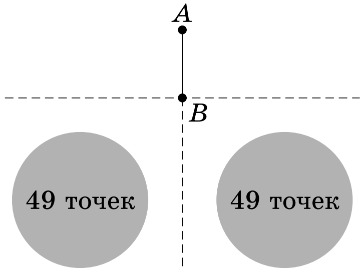


Рис. 14

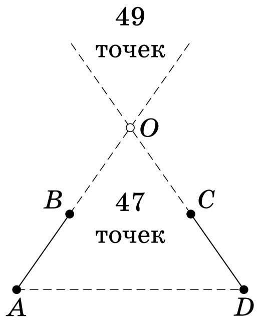


Рис. 15

в остальных точках. В любом случае, отрезок AQ пересекут меньше 49 отрезков.

Конструкция 4. Рассмотрим произвольный треугольник AOD и выберем точки B и C на сторонах AO и OD соответственно. Разместим на плоскости отмеченные точки следующим образом:

• четырьмя отмеченными точками будут точки A, B, C, D;

• ещё 47 точек мы отметим внутри треугольника AOD;

• ещё 49 точек мы отметим в секторе, ограниченном лучами, являющимися продолжениями отрезков AO и DO за точку O (рис. 15).

Тогда единственная точка, с которой Саша может соединить точку A так, чтобы по обе стороны от соответствующей прямой было по 49 точек (см. рассуждение в конструкции 3), это точка B. Аналогично, точку D он может соединить только с точкой C. Но отрезки AB и CD не пересекаются!

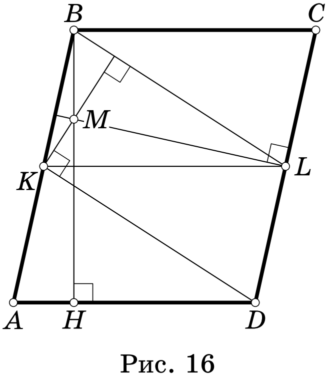


Рис. 16

4. *Первое решение*. Пусть L — середина отрезка CD (рис. 16), тогда $ML \perp CD$, так как ML — медиана равнобедренного треугольника CMD. Рассмотрим треугольник KLB. В нём $LM \perp BK$, так как $BK \parallel CD$, и $BM \perp KL$, так как $KL \parallel AD$. Это значит, что M — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника KLB, то есть $KM \perp BL$. Но $BL \parallel KD$, поэтому $KM \perp KD$, что и требовалось.

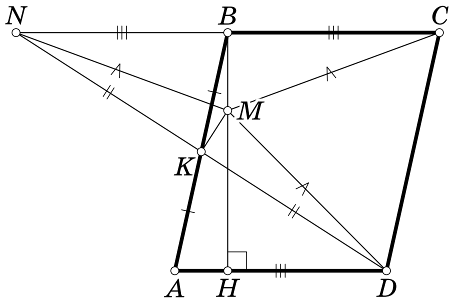


Рис. 17

Второе решение. Пусть L — середина отрезка CD, N — точка пересечения прямых DK и BC (рис. 17). Так как $AD \parallel NB$, то $\angle ADK = \angle BNK$, кроме того, равны углы AKD и BKN и $AK = KB$, значит, треугольники KAD и KBN равны по второму признаку. Отсюда $NB = BC$, и BM является серединным перпендикуляром к отрезку CN. Также ML является серединным перпендикуляром к отрезку CD. Получаем, что точка M является центром описанной окружности треугольника NCD. Поэтому MK — это серединный перпендикуляр к стороне ND, откуда $\angle MKD = 90°$.

Отметим, что эти решения идейно тесно связаны — центр описанной окружности треугольника NCD является ортоцентром его срединного треугольника BKD.

Кроме того, несколько других решений встретились нам в работах участников; мы с удовольствием включаем два из них в эту брошюру.

Третье решение. Построим точку P, симметричную точке M относительно K (рис. 18). Тогда треугольники AKP и MKB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AP = BM$.

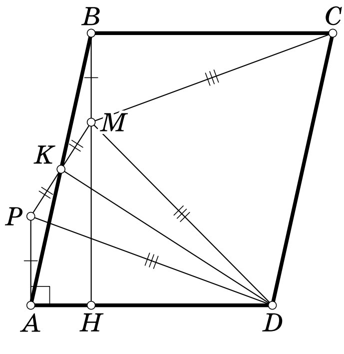


Рис. 18

Кроме того, $\angle PAK = \angle MBK$, и потому $AP \parallel BM$. Следовательно, угол $\angle PAD$ прямой; поскольку $AD = BC$ из свойств параллелограмма, треугольники MBC и PAD равны по двум сторонам и (прямому) углу между ними. Значит, $PD = MC$. Тем самым, треугольник PDM равнобедренный ($MD = MC = PD$), а DK в нём медиана, и, следовательно, высота.

Четвёртое решение. Пусть P и Q — середины отрезков MC и MD соответственно (рис. 19). Тогда PQ — средняя линия в треугольнике $\triangle MCD$, поэтому она параллельна отрезку CD и равна половине его длины. С другой стороны, отрезок BK также параллелен отрезку CD и равен половине его длины; тем самым, PQ и BK параллельны и равны, и, значит, $BPQK$ — параллелограмм.

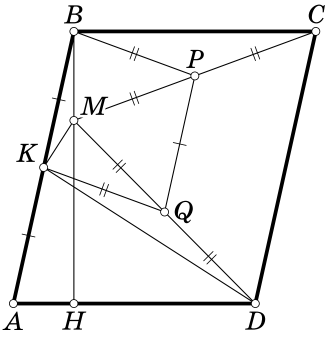


Рис. 19

Далее, BP — медиана в прямоугольном треугольнике MBC, и потому равна $\dfrac{MC}{2}$. Тем самым, $KQ = BP = \dfrac{MC}{2} = \dfrac{MD}{2}$, и медиана KQ в треугольнике MKD равна половине стороны, к которой проведена. Следовательно, этот треугольник прямоугольный: $\angle MKD = 90^\circ$.

Наконец, использующее вписанные углы решение этой же задачи указано в разделе решений 9 класса, см. задачу 9.3.

5. *Решение.* Приведём дроби x, y, z к виду с наименьшим общим знаменателем:

$$x = \frac{a}{D}, \quad y = \frac{b}{D}, \quad z = \frac{c}{D}.$$

Тогда НОД$(a, b, c, D) = 1$ (иначе все эти три дроби можно было бы одновременно сократить).

По условию, число $x^2 + y^2 + z = \dfrac{a^2 + b^2 + cD}{D^2}$ целое, и поэтому $a^2 + b^2 + cD$ делится на D^2; в частности, сумма $a^2 + b^2$ делится на D. Аналогично, на D делятся и суммы $b^2 + c^2$ и $a^2 + c^2$.

Сложив две последних суммы и вычтя первую, видим, что
$$2c^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)$$
делится на D. Аналогично, $2a^2 \vdots D$, $2b^2 \vdots D$.

А отсюда уже следует, что D может быть только единицей или двойкой. Действительно, если у D есть некоторый простой делитель $p > 2$, то из делимости $2a^2$ на D следует, что a обязано делиться на p; аналогично делятся на p числители b и c, и НОД$(a, b, c, D) \geqslant p > 1$. Полученное противоречие показывает, что D — степень двойки. Далее, если $D \vdots 4$, то $a, b, c \vdots 2$, и мы опять же получаем противоречие. Значит, $D = 1$ или $D = 2$. В частности, $2x = \frac{2a}{D}$ — целое число.

6. *Ответ*. Для любых.

Решение. По условию, если в клетке стоит единица, то ровно в одной из соседних клеток написана единица. Это означает, что единицы образуют прямоугольники 1×2. При этом никакие два прямоугольника не граничат по стороне и не пересекаются.

Кроме того, клетка, не принадлежащая таким прямоугольникам, не может граничить ровно с одним прямоугольником. Иначе в этой клетке была бы написана единица, и клетка принадлежала бы одному из прямоугольников 1×2.

Допустим, нам удалось расположить в таблице $m \times n$ прямоугольники 1×2 так, что

1) прямоугольники не граничат по стороне и не пересекаются;

2) если клетка не принадлежит ни одному из прямоугольников, то она граничит *не* с одним прямоугольником (то есть может граничить с 0, 2, 3 или 4 прямоугольниками).

Тогда в прямоугольники можно поставить единицы, а во все остальные клетки — количество соседних с ними единиц, и полученная таблица будет удовлетворять условию задачи. Поэтому в дальнейшем мы будем располагать в таблице прямоугольники, удовлетворяющие требованиям 1 и 2, а не записывать числа.

Заметим, что если m и n дают остаток 1 при делении на 3, прямоугольники можно расположить так, как изображено на рисунке 20.

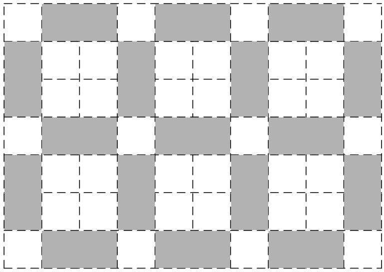


Рис. 20. Прямоугольники 1×2 в таблице $(3k+1) \times (3l+1)$

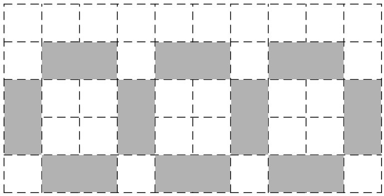


Рис. 21. Полоска $5 \times (3k+1)$, которую можно приставлять

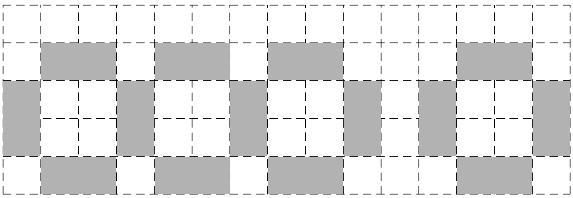


Рис. 22. Полоска $5 \times 3k$, которую можно приставлять

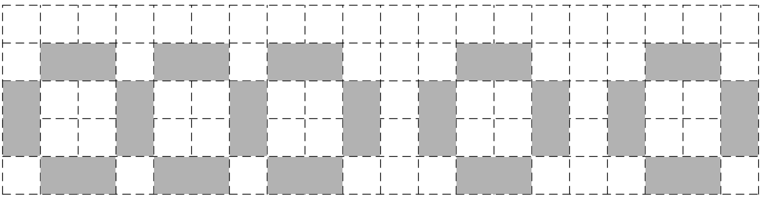


Рис. 23. Полоска $5 \times (3k+2)$, которую можно приставлять

К такой таблице можно снизу добавить одну или две полоски ширины 5, изображённые на рисунке 21. При этом условия 1 и 2, наложенные на прямоугольники, не нарушатся. Это позволяет заполнить таблицу $m \times n$, если n да-

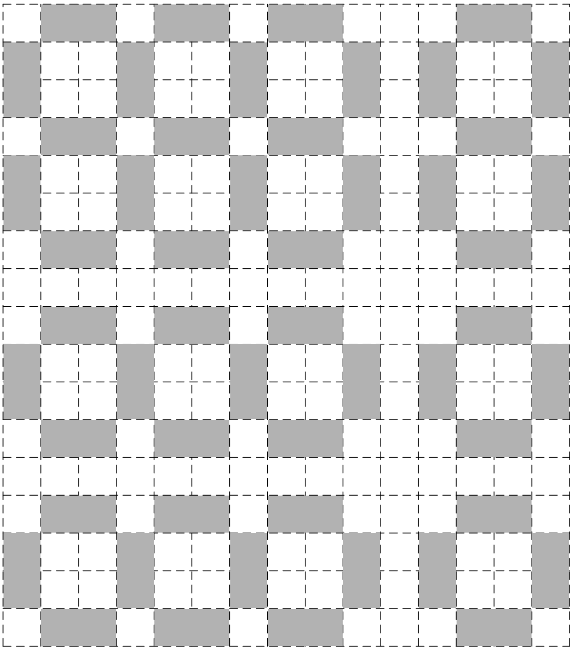


Рис. 24. Заполненная таблица 17×15

ёт остаток 1 при делении на 3, а m — произвольное число, большее 14. Действительно, если m делится на 3, нужно заполнить таблицу $(m-5) \times n$ так, как показано на рисунке 20, и добавить полоску ширины 5, а если m даёт остаток 2 при делении на 3 — заполнить таблицу $(m-10) \times n$ как на рисунке 20 и добавить две полоски ширины 5.

К любой из полученных таблиц можно справа добавить одну или две полоски $m \times 5$. В зависимости от того, какой остаток даёт число m при делении на 3, нужно выбрать одну из полосок, изображённых на рисунках 21, 22 и 23. Это позволяет заполнять любые таблицы $m \times n$, где $m, n > 14$. На рисунке 24 изображён пример: заполненная таблица 17×15.

Комментарий составителей. Эта задача — «учебный» пример настоящей исследовательской задачи, когда математикам приходится разбираться в том, при каких значениях параметра существует (или не существует) описываемый какими-то правилами объект. Зачастую при этом приходится разбирать варианты, комбинируя различные конструкции для одних случаев с доказательствами несуществования для других.

Для упрощения мы ограничились в этой задаче случаем, когда m, $n > 100$. Но вопрос можно задать и для всех натуральных m и n; скажем, таблицу размера $2 \times n$ можно заполнить указанным в задаче образом тогда и только тогда, когда n нечётно (докажите это!). В таблице на рис. 25 указано, при каких m и n такое заполнение существует (соответствующие клетки отмечены знаком «$+$»), а при каких нет (знак «$-$»).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−
2	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
3	−	+	−	−	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+
4	−	−	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	+	+	+
5	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	−	−	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+
7	−	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+
9	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	−	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+
11	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	−	−	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Рис. 25

9 класс

1. *Ответ*. 6 провинций.

Решение. Упорядочим провинции по возрастанию населения. Как в первой, так и во второй провинции живёт не более чем 7 % населения, так как для каждой из них не найдётся двух провинций с меньшим населением. В третьей провинции живёт меньше чем 14 % населения, так как в обеих провинциях с меньшим населением живёт в сумме не больше $7\,\% + 7\,\% = 14\,\%$. В четвёртой провинции живёт меньше чем $21\,\%$, так как снова население любых двух меньших провинций меньше чем $7\,\% + 14\,\% = 21\,\%$. По тем же причинам в пятой провинции живёт меньше чем $14\,\% + 21\,\% = 35\,\%$.

Сложим получившиеся величины. Получим, что в первых пяти провинциях живёт в сумме меньше чем $7\,\% + 7\,\% + 14\,\% + 21\,\% + 35\,\% = 84\,\%$. $84\,\% < 100\,\%$, следовательно, провинций больше 5.

Приведём пример распределения населения по шести провинциям. В них может жить, соответственно, 7 %, 7 %, 11 %, 16 %, 25 %, 34 % населения. Несложно убедиться, что для такого распределения населения по провинциям условие задачи выполняется.

2. *Решение.* Сначала выложим груши по возрастанию масс и докажем, что по-прежнему массы любых двух соседних груш отличаются не больше чем на 1 грамм. Выберем две груши с соседними по величине массами, пусть эти массы равны x и y, $x < y$. Вернёмся к исходной расстановке и будем двигаться от первой груши ко второй. При каждом переходе к соседней груше масса меняется не более чем на 1 г. Так как между x и y нет промежуточных масс, то на каком-то шаге мы либо перейдём от массы, не большей x, к массе, не меньшей y, либо наоборот. Значит, $y - x \leqslant 1$.

Теперь разложим груши в пакеты следующим образом: в первый пакет — первую с последней, во второй пакет — вторую с предпоследней, и так далее, в пакет номер n — грушу номер n с грушей номер $n+1$. Покажем, что такое разбиение — искомое. Пусть a, b, c и d — массы груш, попавших в соседние пакеты, причём $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Тогда груши a и b, а также c и d — соседние. Пакеты имеют массы $a + d$ и $b + c$. Заметим, что

$$-1 \leqslant a - b \leqslant (a+d) - (b+c) \leqslant d - c \leqslant 1,$$

следовательно, $|(a + d) - (b + c)| \leqslant 1$. Это и означает, что массы любых двух соседних пакетов отличаются не более чем на 1 грамм.

3. См. решения задачи 8.4, а также нижеследующее решение, использующее вписанные углы.

Решение. Так как $\angle MHD + \angle MLD = 180^\circ$, то четырёхугольник $MLDH$ — вписанный с диаметром MD (рис. 26).

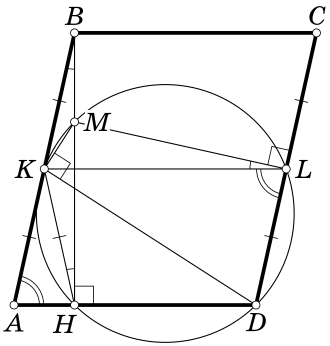


Рис. 26

Так как $KH = \frac{1}{2}AB = AK = DL$, то $KLDH$ — равнобокая трапеция, значит, $KLDH$ — вписанный.

Эти окружности совпадают, так как у них три общие точки: L, D и H. Следовательно, $\angle MKD = 90^\circ$.

4. *Ответ*. Да, верно.

См. решение задачи 8.5.

5. *Решение*. 1) Докажем, что полученный треугольник подобен треугольнику ABC. Пусть δ — угол, на который надо повернуть l против часовой стрелки, чтобы она стала параллельна AB. Тогда из симметрии l_b переходит в прямую, параллельную BC, при повороте на угол $-\delta$, а l_a переходит в прямую, параллельную AC, при повороте на $-\delta$. Следовательно, угол между l_a и l_b равен $\angle C$ треугольника ABC, то есть построенный нами треугольник подобен треугольнику ABC.

2) Докажем, что эти треугольники равны.

Лемма. Пусть прямая k проходит через ортоцентр H треугольника XYZ. Тогда прямые, симметричные k относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Воспользуемся известным фактом: точки, симметричные ортоцентру треугольника, лежат на его описанной окружности, и применим его к точкам H_x, H_y, H_z, симметричным ортоцентру H треугольника XYZ относительно сторон YZ, ZX, XY[1].

При этом угол, опирающийся на дугу H_xH_y, равен углу между прямыми k_x, k_y, симметричными k относительно соответствующих сторон (k_x переходит в k_y при повороте на $2\angle Z$). Значит, k_y проходит через H_y, k_x проходит через H_x, и эти прямые пересекаются на описанной окружности. Так как для k_z и k_x можно провести то же рассуждение, все три прямые k_x, k_y, k_z пересекаются на описанной окружности треугольника XYZ (рис. 27). □

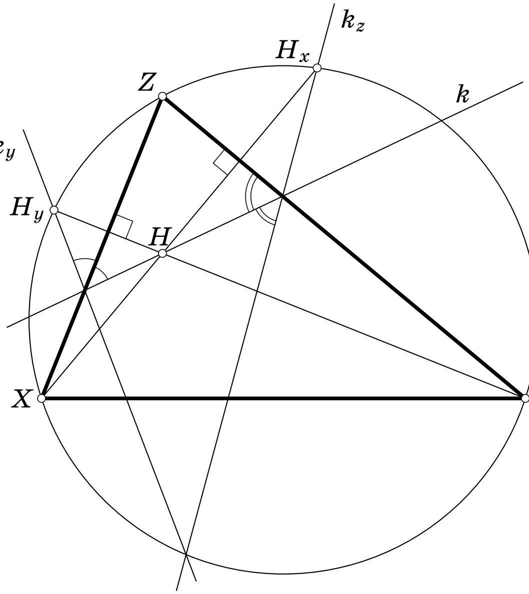


Рис. 27

Заметим теперь, что центр I вписанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника, образованного внешними биссектрисами. Поэтому, применяя утверждение к этому треугольнику и прямой l', проходящей через I и параллельной l, получаем, что прямые, симмет-

[1]Проверим это для точки H_y. Углы H_yZX и XZH_z равны из симметрии. Углы H_yYXи XZH_z равны, так как они оба равны $90^\circ - \angle X$. Получаем $\angle H_yZX = \angle H_yYX$, то есть точки H_y, X, Y и Z лежат на одной окружности, то есть H_y лежит на описанной окружности треугольника XYZ.

ричные l' относительно биссектрис, пересекаются в одной точке. Тогда прямые l_a, l_b, l_c удалены от этой точки на расстояние, равное радиусу r вписанной в треугольник ABC окружности, т. е. у образованного ими треугольника радиус вписанной окружности тоже равен r. Поскольку треугольник, образованный внешними биссектрисами, остроугольный, то r будет радиусом именно вписанной, а не вневписанной окружности.

6. *Ответ.* а) 74, б) $n-1$, если $n>3$; 3, если $n=2$ или $n=3$.

Решение. Если в турнире участвуют две или три команды, то очевидно, что минимальный разрыв будет составлять три очка. Приведём решение для случая n команд.

Согласно принципу Дирихле минимальный разрыв между первым и последним местом не может быть меньше, чем $n-1$, где n — число команд, участвующих в турнире. Докажем, что можно составить схему турнира так, чтобы для $n>3$ получить разрыв $n-1$ между первым и последним местом. Сделаем это по индукции.

База. $n=4$. Приведём пример таблицы турнира, в котором участвует 4 команды и минимальный разрыв составляет 3 очка.

Команда	1	2	3	4	Очки
1	$\times$	3	1	1	5
2	0	$\times$	1	3	4
3	1	1	$\times$	1	3
4	1	0	1	$\times$	2

Заметим, что наибольшее число очков — 5, наименьшее — 2. Будем доказывать, что и в случае участия n команд можно построить таблицу, в которой у команды, занявшей первое место, будет $2n-3$ очка, а у команды, которая будет занимать последнее место, $n-2$ очка.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно для n команд, докажем, что оно верно и для $n+1$ команд. Разобьём команды на тройки по количеству набранных очков: первая тройка — команды с $2n-3$, $2n-4$, $2n-5$ очками, вторая тройка — с $2n-6$, $2n-7$, $2n-8$ очками и т. д. Добавим ещё одну команду. В зависимости от n рассмотрим три случая.

1) $n = 3k + 1$. Рассмотрим команды в первой тройке, новая команда выигрывает у первой команды и проигрывает второй и третьей. Тогда у первой команды так и будет $2n - 3$ очка, у второй $2n - 1$ очко и она выходит на первое место, у третьей $2n - 2$. Аналогично и с другими тройками. Тогда все тройки сдвинутся в целом на два очка. Останется одна команда, занимавшая последнее место с $n - 2$ очками, и у новой команды будет $n - 1$ очко. Между собой они сыграют вничью. В таблице приведены очки команд до и после прибавления новой $(n+1)$-й команды:

Было:	–	–	$2n-3$	$2n-4$	$2n-5$	...	$n+1$	n	$n-1$	$n-2$
Стало:	$2n-1$	$2n-2$	$2n-3$	$2n-4$	$2n-5$	...	$n+1$	n	$n-1$	–

Здесь n — число очков новой команды.

2) $n = 3k + 2$. Команды из k троек играют с новой командой аналогично случаю 1). У последних двух команд $n - 1$ и $n - 2$ очков соответственно, у новой команды $n - 2$ очка. Тогда команда, занимавшая последнее место, выигрывает у новой команды, а предпоследняя — играет с ней вничью:

Было:	–	–	$2n-3$	$2n-4$	...	$n+2$	$n+1$	n	$n-1$	$n-2$
Стало:	$2n-1$	$2n-2$	$2n-3$	$2n-4$	...	$n+2$	$n+1$	n	$n-1$	–

Здесь $n - 1$ — число очков новой команды.

3) $n = 3k$. После того как новая команда сыграет с первыми $k - 1$ тройками, у неё будет $n - 3$ очка. У последних трёх команд будет n, $n - 1$, $n - 2$ очков соответственно. Команда с $n - 1$ очками выигрывает у новой, команда с n очками проигрывает, с $n - 2$ очками играет с ней вничью. Тогда у новой команды будет $n + 1$ очко:

Было:	–	–	$2n-3$	...	$n+2$	$n+1$	n	$n-1$	$n-2$
Стало:	$2n-1$	$2n-2$	$2n-3$	...	$n+2$	$n+1$	n	$n-1$	–

Здесь $n + 1$ — число очков, набранных новой командой.

Утверждение индукции доказано.

Комментарий. Для пункта а) можно предложить отдельные алгоритмы составления схемы турнира.

П е р в ы й с п о с о б. Построим пример таблицы турнира, в котором играли 6 команд, все команды набрали разное число очков и при этом разрыв между первым и последним местом составил 5 очков (в правом столбце отметим количество очков, полученных командой по итогам турнира):

$$
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
\times & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & \times & 3 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
1 & 0 & \times & 3 & 1 & 1 & 6 \\
3 & 1 & 0 & \times & 3 & 0 & 7 \\
3 & 3 & 1 & 0 & \times & 1 & 8 \\
3 & 1 & 1 & 3 & 1 & \times & 9 \\
\hline
\end{array}.
$$

Обозначим такую таблицу турнира за A. Также обозначим:

$$
B = \begin{array}{|cccccc|}
\hline
3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
\hline
\end{array}, \quad
C = \begin{array}{|cccccc|}
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}.
$$

Комбинируя таблицы A, B и C таким образом, чтобы таблицы A стояли на диагонали, а таблицы C были симметричны таблицам B относительно диагонали, можно записать возможный результат турнира между $6n$ командами. Например:

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
A & C \\
\hline
B & A \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cccccc|cccccc|c|}
\hline
\times & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 8 \\
0 & \times & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \\
1 & 0 & \times & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\
3 & 1 & 0 & \times & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\
3 & 3 & 1 & 0 & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\
3 & 1 & 1 & 3 & 1 & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 13 \\
\hline
3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \times & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & \times & 3 & 1 & 0 & 1 & 15 \\
1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & \times & 3 & 1 & 1 & 16 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & \times & 3 & 0 & 17 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & \times & 1 & 18 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & \times & 19 \\
\hline
\end{array}
$$

В случае, если все таблицы B стоят ниже диагонали, то результаты всех команд будут различны и разрыв между первым и последним местом будет $6n-1$ очков. Последнее утверждение верно потому, что в каждой строчке таблицы B сумма очков равна 10, в каждой строчке таблицы C сумма очков равна 4, таким образом, у каждой следующей шестёрки игроков на 6 очков больше по сравнению с предыдущей шестёркой.

В турнире для 72-х команд с таблицей

A	C	C	...	C
B	A	C	...	C
B	B	A	...	C
...	...	...	...	...
B	B	B	...	A

команда, занявшая последнее место, набрала 48 очков, команда, занявшая первое место, — 119 очков. Представим, что к этому турниру присоединились ещё три команды. Пусть между собой они сыграли так:

$\times$	3	1	4
0	$\times$	3	3
1	0	$\times$	1

Разобьём оставшиеся 72 команды на тройки. Пусть каждая из присоединившихся команд с двумя командами из каждой тройки сыграла вничью и выиграла у одной команды из каждой тройки, при этом в каждой тройке каждая команда проиграла разной команде из присоединившихся команд. Тогда за игры с командами, которые уже были в турнире, каждая из присоединившихся команд получит 120 очков, и за игры с присоединившимися командами каждая из 72 команд получит 2 очка. Таким образом, команды, игравшие в турнире для 72 команд, получат в описанном турнире попарно различное количество очков от 50 до 121, а добавленные команды получат 121, 123 и 124 очка.

Изменим итоги одного матча таким образом, чтобы описанный турнир удовлетворял условию о том, что все команды набрали разное количество очков. Без ограничения общности можно считать, что команда, набравшая больше всех очков в турнире для 72 команд (121 очко), сыграла с командой, набравшей в итоге 123 очка, вничью. Изменим результат этой встречи в пользу первой из этих команд. Значит, эта команда получит 123 очка вместо 121 (так как она получит 3 очка вместо 1 за эту встречу), а вторая команда получит 122 очка вместо 123. Теперь в турнире все 75 команд набрали разное количество очков от 50 до 124. Следовательно, мы доказали, что разрыв между первым и последним местом не может быть меньше 74 очков, и построили пример, для которого это число достигается.

В т о р о й   с п о с о б. Приведём пример на 12 команд, в котором каждая получила от 8 до 19 очков.

×	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	19
0	×	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	18
0	0	×	3	3	3	3	1	1	1	1	1	17
0	0	0	×	3	3	3	3	1	1	1	1	16
0	0	0	0	×	1	1	1	3	3	3	3	15
1	0	0	0	1	×	1	1	1	3	3	3	14
1	1	0	0	1	1	×	1	1	1	3	3	13
1	1	1	0	1	1	1	×	1	1	1	3	12
1	1	1	1	0	1	1	1	×	3	1	0	11
1	1	1	1	0	0	1	1	0	×	3	1	10
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	×	3	9
1	1	1	1	0	0	0	0	3	1	0	×	8

Теперь по аналогии построим пример для 75. Для этого поделим команды футболистов на 3 группы A, B, C, в каждой из которых по 25 команд, обозначаемых A_1, A_2, …, A_{25}, B_1, B_2, …, B_{25}, C_1, C_2, …, C_{25}. Результаты игры команд с индексами i, j в группах A, B, C приведены в следующей таблице.

	A	B	C	Σ
A	$\begin{cases} 3 & i>j \\ 0 & i<j \end{cases}$	$\begin{cases} 3 & i\leqslant j \\ 1 & i>j \end{cases}$	1	99+i
B	$\begin{cases} 1 & i<j \\ 0 & i\geqslant j \end{cases}$	$1\ (i\neq j)$	$\begin{cases} 3 & i\geqslant j \\ 1 & i<j \end{cases}$	74+i
C	1	$\begin{cases} 1 & i>j \\ 0 & i\leqslant j \end{cases}$	$\begin{cases} 3 & i=j+1 \text{ или } (i, j)=(1, 25) \\ 1 & i\neq j+1, i\neq j-1, i\neq j, (i, j)\neq(1, 25), (i, j)\neq(25, 1) \\ 0 & i=j-1 \text{ или } (i, j)=(25, 1) \end{cases}$	$49+i$

10 класс

1. *Ответ.* -30.

Решение. Пусть трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c, а его корни равны m и n.

Тогда по теореме Виета $c=amn$. Поэтому одно из пяти чисел на доске делилось по крайней мере на три других числа.

Заметим, что на доске осталась лишь одна пара чисел, одно из которых делится на другое: 2 и 4. Значит, было стёрто число c.

Применив ещё раз теорему Виета, получим $b=-a(m+n)$, а значит, b делится на a. Поэтому $a=2$, $b=4$, числа 3 и -5 — корни, а $c=amn=2\cdot3\cdot(-5)=-30$.

2. *Решение*. В результате выполнения нескольких операций клетка изменит знак, если строка и столбец, её содержащие, менялись суммарно нечётное число раз, и не изменит, если они менялись чётное число раз. Значит, во-первых, результат не зависит от порядка выполняемых операций. Во-вторых, можно считать, что все строки и столбцы менялись не более одного раза. Предположим теперь, что мы заменили знаки в x строках и y столбцах, и получились все плюсы. Если $x+y\leqslant n$, то утверждение задачи верно. Если же $x+y>n$, то суммарное количество строк и столбцов, в которых не производились замены, равно

$$(n-x)+(n-y)=2n-x-y,$$

то есть меньше n. И в то же время, если бы мы не производили замены в исходных x строках и y столбцах, а вместо этого произвели бы замены во всех остальных строках и столбцах, мы получили бы тот же результат: все плюсы. Действительно, мы бы дважды поменяли знак у тех клеток, у которых не менялся знак; не меняли бы знак в тех клетках, в которых знак менялся дважды; один раз изменили бы знак в тех клетках, в которых знак менялся один раз.

3. *Ответ*. Можно.

Решение. Приведём пример такого замощения. Отложим на продолжениях сторон вырезанного треугольника точки A_1, B_1, C_1 так что $AA_1=BB_1=CC_1=xAB$ (рис. 28). Тогда треугольники A_1AB_1, B_1BC_1 и C_1CA_1 будут равны, и треугольник $A_1B_1C_1$ будет равносторонним. Теперь продлим стороны треугольника $A_1B_1C_1$ и отметим на продолжениях точки A_2, B_2, C_2 так, что $A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2=xA_1B_1$. Тогда треугольники $A_2A_1B_2$, $B_2B_1C_2$ и $C_2C_1A_2$ равны между собой и подобны треугольнику A_1AB_1 по двум сторонам и углу между ними. Далее аналогично построим точки A_3, B_3, C_3 и так далее. Размеры треугольников $A_kB_kC_k$ растут как геометрическая прогрессия, поэтому любая точка плоскости будет покрыта. Таким образом, мы получили разбиение плоскости на подобные треугольники вида $A_iA_{i-1}B_i$, $B_jB_{j-1}C_j$ и $C_kC_{k-1}A_k$.

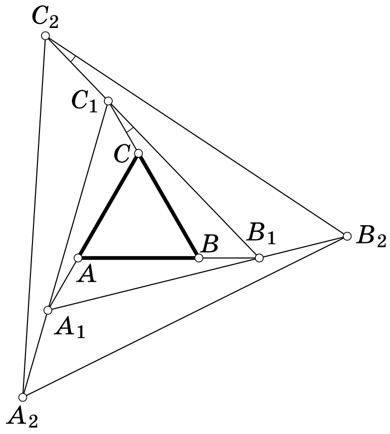


Рис. 28

Посмотрим на равносторонние треугольники $A_kB_kC_k$. Все они имеют общий центр, направления сторон соседних отличается поворотом на угол $\angle B_1C_1B$. Для того чтобы треугольники разбиения не были гомотетичны, подберём величину x так, чтобы угол B_1C_1B был иррациональным. Тогда для любой пары треугольников замощения их длинные стороны не будут параллельны между собой, а значит, треугольники не будут гомотетичны. Следовательно, данное разбиение удовлетворяет условию.

Комментарий. Возможны и другие способы разбиения, приведём несколько из них.

Разбиение на рис. 29 аналогично приведённому в решении, разница в том, что там вершины большего равностороннего треугольника лежали на продолжениях сторон меньшего, а теперь вершины меньшего лежат на сторонах большего. Чтобы среди подобных треугольников не было гомотетичных, надо выбрать угол $\angle B_1CB$ иррациональным.

На рисунках 30 и 31 плоскость разбивается на прямоугольные треугольники с углами 30°, 60°, 90°. Более того, на рис. 30 все треугольники получаются равными. Для этих решений никакого выбора угла не требуется.

4. *Первое решение.* Отметим груши с самым маленьким и с самым большим весами (в дальнейшем будем называть их грушами X и Y соответственно). Очевидно, что если рас-

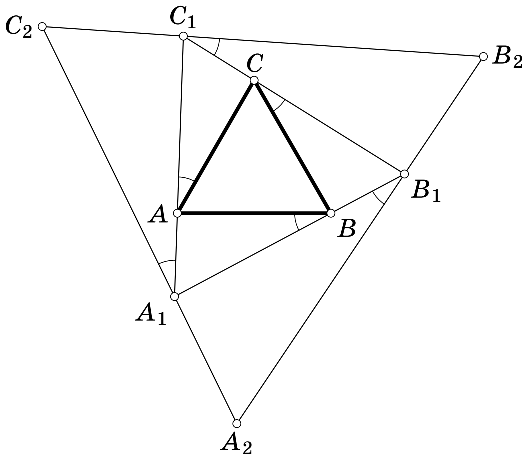


Рис. 29

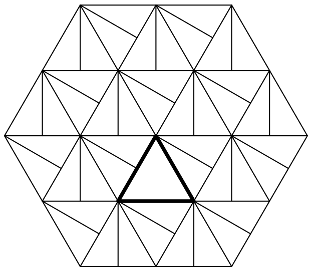


Рис. 30

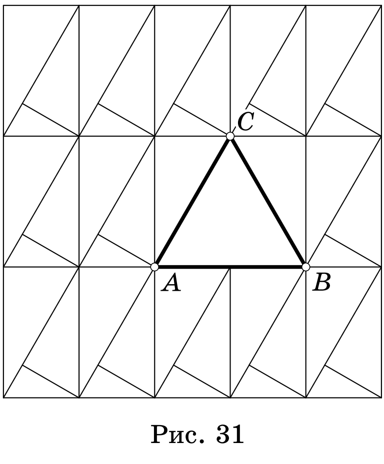


Рис. 31

положенные между ними груши отсортировать по весу (отдельно сортируем по часовой стрелке от X до Y и отдельно — против часовой стрелки от X до Y, деля наши груши таким образом на две части), то веса любых двух соседних по-прежнему будут отличаться не более чем на 1 г. Действительно, если между двумя грушами, вес которых отличается не более чем на 1 г, положить грушу, которая легче одной из них и тяжелее другой, разница в весе между соседними грушами 1 г не превысит. Сведём задачу к более удобной ситуации, когда груши X и Y диаметрально противоположны.

Для этого расположим груши в один ряд по возрастанию веса, на первом месте груша X, на последнем — Y. Докажем, что для любой из груш в этом ряду две последующие, большие по весу груши (если они существуют), отличаются от неё также не более чем на 1 г. Действительно, рассмотрим произвольную грушу Z в ряду. Существует как минимум две груши, которые тяжелее, чем Z, не более чем на 1 г. Одна из них — та, которая была соседней с ней лежащей по кругу после сортировки, вторая найдётся, так как если бы мы после сортировки по кругу перенесли Z в другую часть (ей найдётся место, так как она не легче X и не тяжелее Y), то основное свойство не нарушится — веса любых двух соседних по-прежнему будут отличаться не более чем на 1 г и соседняя с Z груша, большая по весу, подойдёт. Отсюда очевидно следует требуемое.

Теперь опять разложим груши по кругу так, чтобы X и Y были друг напротив друга. По часовой стрелке от X до Y выложим груши с нечётных мест ряда по возрастанию веса, против часовой стрелки от X аналогичным образом разложим груши с чётных мест ряда. Заметим, что условие про веса любых двух соседних груш сохранилось, что следует из доказанного выше утверждения. После чего будем, начиная, например, с груши X и против часовой стрелки, брать грушу, класть в пакет вместе с противоположной ей и выкладывать последовательно по кругу. Несложно проверить, что веса двух соседних пакетов будут отличаться не более чем на 1 г.

Второе решение. Докажем следующее утверждение методом математической индукции.

A_n: если количество разложенных груш равно $2n+2$, то их можно разложить парами, как это требуется в условии.

Б а з а. Количество груш равно 4. Объединим в одну пару самую лёгкую и самую тяжёлую груши, а в другую — две оставшихся. Очевидно, что массы пар отличаются меньше чем на 1 г.

Ш а г. Пусть утверждение доказано для $2n$ груш, $n \geqslant 2$. Рассмотрим $2n+2$ груши и выкинем самую лёгкую и тяжёлую груши (A и B соответственно). Оставшийся набор по-прежнему удовлетворяет условию, значит, по предположению индукции эти $2n$ груш можно расположить по кругу в парах правильным образом. Далее возможны три случая:

1) пара (A, B) не является самой лёгкой или тяжёлой среди образованных из $2n$ груш пар;

2) пара (A, B) самая лёгкая;

3) пара (A, B) самая тяжёлая.

Покажем, как в каждом из трёх случаев расположить все $2n+2$ груши в парах по кругу.

Случай 1: найдутся такие пары (C_1, C_2) и (D_1, D_2), что

$$m(C_1)+m(C_2) < m(A)+m(B) < m(D_1)+m(D_2).$$

Тогда на любой из двух дуг, соединяющих пары груш (C_1, C_2) и (D_1, D_2), найдётся место для новой пары (A, B).

Случаи 2 и 3 аналогичны друг другу, для определённости рассмотрим случай 2. Пусть A' и A'' — две самые лёгкие груши среди оставшихся $2n$. Ясно, что A' и A'' отличаются от A не более чем на 1 г, поскольку это выполнялось для двух соседей груши A. Здесь возможны два варианта.

1) A' и A'' попали в разные пары (A', B') и (A'', B''). Тогда две самые лёгкие пары груш (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) (для определённости считаем, что $m(X_1)+m(Y_1) \geqslant m(X_2)+$ $+m(Y_2)$) отличаются от пары (A, B) не больше чем на один грамм, так как уже

$$0 \leqslant (m(A')+m(B')) - (m(A)+m(B)) \leqslant 1$$

и

$$0 \leqslant (m(A'')+m(B'')) - (m(A)+m(B)) \leqslant 1.$$

Если пары (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) не стоят рядом, то вынем пару (X_1, Y_1) и поставим её рядом с (X_2, Y_2). Это не нарушит условия для пар груш. После этого пару груш (A, B) поставим между парами (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2).

2) A' и A'' попали в одну пару. Тогда рассмотрим самую тяжёлую пару груш (X_1, X_2). Вынем пары (A', A'') и (X_1, X_2) из круга (при этом условие не нарушится). Образуем пары (A', X_1) и (A'', X_2). Для этих пар на каждой из двух дуг, соединяющих бывшие позиции (A', A'') и (X_1, X_2), найдётся место (аналогично случаю 1). К полученному расположению груш теперь можно применить рассуждение из пункта 1.

5. *Решение.* Прямая l пересекает прямые AB, AC, BC в точках K, M, N соответственно (рис. 32). Пусть прямые l_a и l_b пересекаются в точке C_1, прямые l_b и l_c — в точке A_1, прямые l_a и l_c — в точке B_1. Тогда AM, AK — биссектрисы углов треугольника MA_1K (они могут являться биссектрисам как внешних, так и внутренних углов треугольника, в зависимости от выбора прямой l). Следовательно, биссектриса угла при вершине A_1 проходит тоже через точку A (внешнего или внутреннего, в зависимости от выбора прямой l). Эта биссектриса в свою очередь является биссектрисой внутрен-

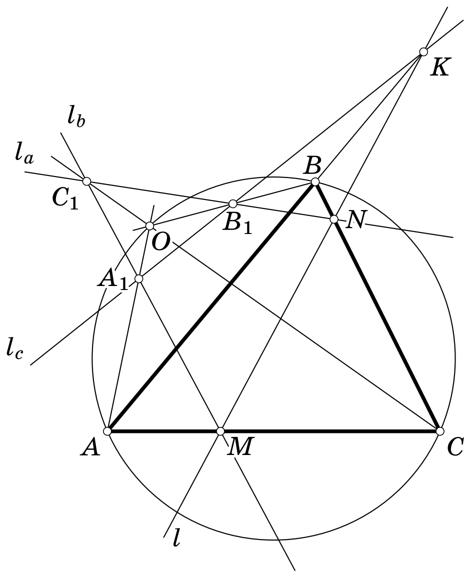


Рис. 32

него угла при вершине A_1 в $\triangle A_1B_1C_1$. Из аналогичных рассуждений для вершин B_1, C_1 следует, что биссектрисы внутренних углов при вершинах B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точки B, C соответственно. Пусть O — точка пересечения этих биссектрис.

Заметим, что справедливы равенства:

$$\angle ABC = \angle BNK + \angle BKN = 90^\circ - \angle BB_1K = \\ = 90^\circ - \angle OB_1C_1 = \angle OA_1C_1 + \angle OC_1A_1 = \angle AOC.$$

С другой стороны, углы $\angle ABC$, $\angle AOC$ опираются на одну и ту же дугу $\smile AC$ окружности, описанной около $\triangle ABC$. Так как $\angle ABC$ — вписанный, то и $\angle AOC$ — вписанный. То есть точка O принадлежит окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Докажем теперь, что любая точка, лежащая на окружности, описанной около $\triangle ABC$, является центром вписанной окружности в треугольник $A_1B_1C_1$, построенный указанным выше способом для некоторой прямой l. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через точку B, $\triangle A_1B_1C_1$ — соответствующий этой прямой треугольник, образованный прямыми l_a, l_b, l_c (рис. 33). Очевидно, точки B и B_1 совпадают. Снова обозначим через O центр вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$ окружности. Пусть $\widetilde{l}$ — другая прямая, проходящая через

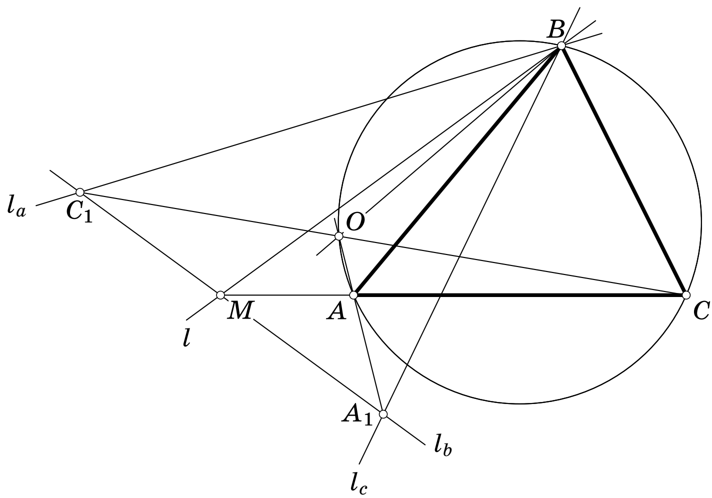


Рис. 33

точку B, причём угол между прямыми $l, \widetilde{l}$ равен φ. Пусть, кроме того, $\triangle\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1\widetilde{C}_1$ — соответствующий этой прямой треугольник, образованный прямыми $\widetilde{l}_a$, $\widetilde{l}_b$, $\widetilde{l}_c$, $\widetilde{O}$ — центр вписанной в $\triangle\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1\widetilde{C}_1$ окружности. Докажем, что $\angle OB\widetilde{O} = \varphi$. Действительно, $\angle AB\widetilde{A}_1 = \varphi$, $\angle CB\widetilde{C}_1 = \varphi$. Кроме того, как мы уже доказали, BO — биссектриса угла A_1BC_1, $B\widetilde{O}$ — биссектриса угла $\widetilde{A}_1B\widetilde{C}_1$. Следовательно, угол между этими биссектрисами также равен φ. Таким образом, поворачивая прямую l вокруг точки O на угол φ от 0 до 360°, мы повернём также и прямую BO на тот же самый угол. Иными словами, мы сможем получить всевозможные положения точки O на окружности, описанной около $\triangle ABC$.

6. *Ответ.* $\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Решение. Обозначим наш граф $G = (V, E)$, где V — его вершины (все тройки элементов из множества $\{1, \ldots, n\}$), а E — рёбра. Минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить вершины, называется *хроматическим числом графа*. Обозначим хроматическое число нашего графа через $\chi(G)$.

Покажем сперва, что $\chi(G) \geqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$. Для этого обозначим через $\alpha(G)$ размер одного из самых больших множеств вершин графа, которые попарно не соединены рёбрами. Легко понять (с учётом принципа Дирихле), что

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)} = \frac{C_n^3}{\alpha(G)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6\alpha(G)}.$$

Остаётся проверить, что $\alpha(G) \leqslant n$. Для этого есть два способа — линейно-алгебраический и индукция. Опишем оба.

Линейно-алгебраический метод. Пусть даны вершины $M_1, \ldots, M_s$, которые попарно не соединены рёбрами. Заменим их векторами $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_s$ с координатами 0 и 1: $x_i = 1$, если $i \in M_j$, и $x_i = 0$ иначе. Тогда условие $|M_i \cap M_j| \neq 1$ равносильно условию $(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j) \neq 1$ (скалярное произведение не равно 1). Нетрудно видеть, что векторы $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_s$ с указанным свойством линейно независимы. Значит, их не больше n.

Индукция. Докажем наше утверждение не только для $n = 2^k$, но для всех n. При $n = 1, 2, 3, 4$ всё очевидно. Пусть дано какое-то n. Если вершины как тройки попарно не пересекаются, то их точно меньше n. Поэтому сочтём, что $M_1 = \{1, 2, 3\}$, а $M_2 = \{1, 2, 4\}$. Есть два случая: либо имеются ещё тройки, которые содержат элементы 1 и 2, либо таковых троек нет. Если их нет, то все вершины, кроме M_1, M_2, как нетрудно видеть, либо лежат в множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, либо с ним не пересекаются. Применяем предположение индукции, и всё в порядке. Иначе пусть без ограничения общности у нас есть тройки $M_1, \ldots, M_r$ вида $\{1, 2, 3\}, \ldots, \{1, 2, r\}$ и $r > 4$. В этом случае все остальные тройки, как снова нетрудно видеть, содержатся в множестве $\{r+1, \ldots, n\}$. Применим предположение индукции, и опять всё в порядке.

Итак, нижняя оценка получена. Уверуем в то, что она неулучшаема, и докажем это двумя способами.

Первый способ. Действуем по индукции (по k). Если $k = 2$, т. е. $n = 4$, то $\chi(G) = 1$, и база индукции установлена. Пусть до k доказали. Докажем для $k+1$. Разобьём множество $\mathscr{R}_n = \{1, \ldots, n\}$ на две равные части: $A_1 = \{1, \ldots, 2^k\}$ и $A_2 = \mathscr{R}_n \setminus A_1$. Обозначим через U_1 и U_2 множества вершин нашего графа, лежащих (как тройки) в A_1 и A_2. По предположению индукции каждое из множеств U_1, U_2 допускает нужную раскраску в $(2^k-1)(2^k-2)/6$ цветов. При этом в обоих случаях мы можем использовать один и тот же набор цветов, так как тройки из U_1 не пересекаются с тройками из U_2, т. е. рёбер не образуют. Итого задействовали $(2^k-1)(2^k-2)/6$ цветов. Надо ещё покрасить тройки, которые пересекают одновременно A_1 и A_2. Обозначим множество этих троек через U_3. Покажем, что для покраски U_3 хватит $2^{k-1}(2^k-1)$ цветов. Рассмотрим вспомогательную конструкцию. А именно, обозначим все неупорядоченные пары элементов из A_1 через P_1; аналогично определим P_2. Очевидно, в P_i ровно $C_{2^k}^2 = 2^{k-1}(2^k-1)$ элементов. Нетрудно видеть, что P_1 можно так разбить на непересекающиеся куски $N_1, \ldots, N_{2^k-1}$ одинаковой мощности 2^{k-1}, чтобы внутри каждого куска никакие две пары, ему принадлежащие, не пересекались. Аналогично зададим $L_1, \ldots, L_{2^k-1}$ для P_2.

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, 2^k-1\}$ и $j \in \{1, \ldots, 2^{k-1}\}$. Пусть $N_i = \{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}, \ldots\}$, $L_i = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \ldots\}$. Рассмотрим следующие четвёрки, в которых индексы берутся по модулю 2^k:

$$\{u_1, u_2, v_{2j-1}, v_{2j}\}, \quad \{u_3, u_4, v_{2j+1}, v_{2j+2}\}, \\ \{u_5, u_6, v_{2j+3}, v_{2j+4}\}, \quad \ldots$$

Пусть множество $C(i, j)$ состоит из всех троек, каждая из которых содержится в одной из перечисленных четвёрок. Нетрудно видеть, что в каждом $C(i, j)$ нет рёбер и что U_3 полностью покрыто множествами $C(i, j)$. Отсюда получаем, что на покраску U_3 хватает $2^{k-1}(2^k-1)$ цветов.

В итоге мы использовали

$$\frac{(2^k-1)(2^k-2)}{6} + 2^{k-1}(2^k-1) = \frac{(2^{k+1}-1)(2^{k+1}-2)}{6}$$

цветов, и всё доказано.

Второй способ. Покажем, как вершины графа можно раскрасить в $x = (n-1)(n-2)/6$ цветов. Закодируем элементы множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ всевозможными последовательностями длины k, состоящими из нулей и единиц. Тогда вершина графа — это тройка таких последовательностей $\{(a_{1j}), (a_{2j}), (a_{3j})\}$. Сопоставим вершине графа v тройку последовательностей $b(v) = \{(b_{1j}), (b_{2j}), (b_{3j})\}$, где $b_{1j} = a_{2j} + a_{3j}$, $b_{2j} = a_{3j} + a_{1j}$, $b_{3j} = a_{1j} + a_{2j}$ — суммы по модулю два. Ясно, что среди последовательностей (b_{1j}), (b_{2j}), (b_{3j}) нет совпадающих, иначе нашлись бы совпадающие среди последовательностей (a_{1j}), (a_{2j}), (a_{3j}). Значит, b является множеством из 3 различных элементов. Каждому набору трёх последовательностей $\{(b_{1j}), (b_{2j}), (b_{3j})\}$ присвоим уникальный цвет, таким образом получая раскраску вершин исходного графа. Заметим, что если две вершины графа v_1, v_2 пересекаются ровно по одному элементу, то соответствующие им тройки $v(b_1)$, $v(b_2)$ различны. Таким образом, полученная раскраска допустима. Осталось посчитать количество использованных цветов. Нетрудно видеть, что

1) ни одна из последовательностей (b_{1j}), (b_{2j}), (b_{3j}) не совпадает с последовательностью, состоящей из одних нулей;

2) $b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} = 2a_{1j} + 2a_{2j} + 2a_{3j} = 0 \pmod 2$;

3) любое множество, состоящее из трёх различных последовательностей (b_{1j}), (b_{2j}), (b_{3j}) нулей и единиц длины k, которое удовлетворяет предыдущим двум пунктам, может

быть получено из некоторой вершины графа описанным выше способом. Для этого достаточно рассмотреть вершину $\{0, b_{3j}, b_{2j}\}$.

Из перечисленных замечаний следует, что количество различных троек $\{(b_{1j}), (b_{2j}), (b_{3j})\}$, сопоставленных вершинам графа, равно x, что и требовалось показать.

11 класс, первый день

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. *Первое решение.* Графики функций $y = 2a + \dfrac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \dfrac{1}{x-d}$ центрально-симметричны относительно точки с координатами $((b+d)/2, a+c)$ и, следовательно, имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда

$$2a + \frac{1}{x-b} = 2c + \frac{1}{x-d} = a + c$$

при $x = \dfrac{b+d}{2}$. Это условие эквивалентно равенству $(a-c) \times \times (b-d) = 2$. Аналогично доказывается, что это равенство также эквивалентно тому условию, что центрально-симметричные относительно точки с координатами $((a+c)/2, b+d)$ графики функций $y = 2b + \dfrac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \dfrac{1}{x-c}$ имеют ровно одну общую точку.

Второе решение. Переформулируем условие задачи следующим образом: уравнение $2a + \dfrac{1}{x-b} = 2c + \dfrac{1}{x-d}$ имеет ровно одно решение. Нетрудно видеть, что при $a = c$ или $b = d$ это уравнение не может иметь ровно одно решение. При $a \neq c$ и $b \neq d$ это уравнение эквивалентно квадратному уравнению

$$2(a-c)x^2 - 2(a-c)(b+d)x + 2(a-c)bd + (b-d) = 0$$

(ни b, ни d не могут являться его корнями при этих условиях). Оно имеет единственный корень тогда и только тогда, когда равен нулю его дискриминант, то есть при

$$4(a-c)^2(b+d)^2 - 8(a-c)(2(a-c)bd + (b-d)) = 0.$$

Преобразуя последнее равенство и учитывая то, что $a - c \neq 0$, получаем $(a-c)(b-d) = 2$. Аналогично доказывается, что равенство $(a-c)(b-d) = 2$ эквивалентно утверждению о том, что график функции $y = 2b + \dfrac{1}{x-a}$ имеет с графиком функции $y = 2d + \dfrac{1}{x-c}$ ровно одну общую точку.

Третье решение. Нетрудно видеть, что точка с координатами $(x,\, y)$ является общей точкой графиков $y = 2b + \dfrac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \dfrac{1}{x-c}$ тогда и только тогда, когда пара чисел $(x,\, y)$ является решением системы

$$\begin{cases} (y-2b)(x-a) = 1, \\ (y-2d)(x-c) = 1. \end{cases}$$

Заметим, что пара чисел $(x_0,\, y_0)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда пара чисел $(y_0/2,\, 2x_0)$ является решением системы

$$\begin{cases} (y-2a)(x-b) = 1, \\ (y-2c)(x-d) = 1. \end{cases}$$

Последняя же система, как следует из условия задачи, имеет единственное решение. Значит, графики функций $y = 2b + \dfrac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \dfrac{1}{x-c}$ будут иметь единственную общую точку.

3. *Первое решение.* Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Заметим, что если $C = 90^\circ$, то в треугольнике ABC точка H совпадает с точкой C и $AB = 2R$. Тогда

$$AH + BH = AC + BC > AB = 2R$$

по неравенству треугольника.

Если $\angle C < 90^\circ$, то этот треугольник является остроугольным, а точки O и H лежат внутри него (рис. 34). Покажем, что точка O находится внутри или на границе треугольника AHB. Действительно, имеем

$$\angle AOB = 2\angle C,$$
$$\angle HAB = 90^\circ - \angle B \geqslant 90^\circ - \angle C = \angle OAB,$$
$$\angle HBA = 90^\circ - \angle A \geqslant 90^\circ - \angle C = \angle OBA$$

и, следовательно, лучи AO и BO пересекаются внутри или на границе треугольника ABC.

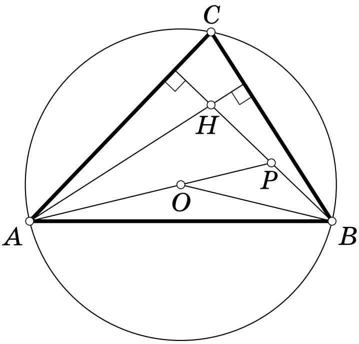


Рис. 34

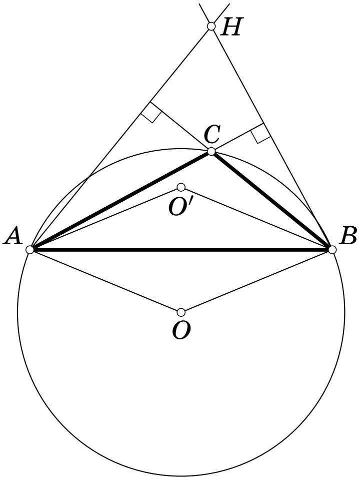


Рис. 35

Обозначим через P точку пересечения луча AO с отрезком BH (при $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ точки O, H и P совпадут). Тогда по неравенству треугольника $AH + HP \geqslant AP$ и $OP + PB \geqslant BO$. Складывая эти неравенства, получаем

$$AH + HP + OP + PB \geqslant AP + BO.$$

Отсюда получаем

$$AH + BH = AH + HP + PB \geqslant AP + BO - OP = AO + BO = 2R.$$

Если $\angle C > 90^\circ$, то треугольник ABC является тупоугольным, а точка O лежит по другую сторону от точек C и H относительно прямой AB (рис. 35). В этом случае $\angle AOB = 360^\circ - 2\angle C$,

$$2\angle OAB = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - (360^\circ - 2\angle C) = \\ = 2\angle C - 180^\circ = \angle C - \angle A - \angle B$$

и

$$2\angle HAB = 180^\circ - 2\angle B = \angle C + \angle A - \angle B > 2\angle OAB.$$

Значит, $\angle HAB > \angle OAB$. Аналогично $\angle HBA > \angle OBA$. Рассмотрим точку O', симметричную точке O относительно прямой AB. Тогда $\angle HAB > \angle O'AB$ и $\angle HBA > \angle O'BA$. Аналогично доказанному для случая остроугольного треугольника

ABC получаем $AH+BH>AO'+BO'=AO+BO$. Что и требовалось.

Второе решение. Если треугольник ABC прямоугольный, то требуемое неравенство доказывается так же, как и в первом решении. Пусть теперь $\angle C\neq 90^\circ$, а BD, AE и CF — перпендикуляры, проведённые из вершин B, A и C к прямым AC, BC и AB соответственно (см. рис. 36 для случая остроугольного треугольника и рис. 37 для случая тупоугольного треугольника).

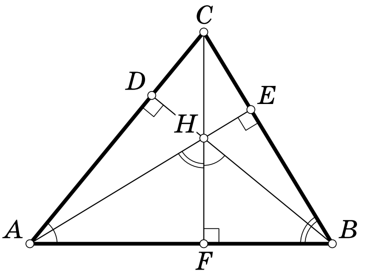


Рис. 36

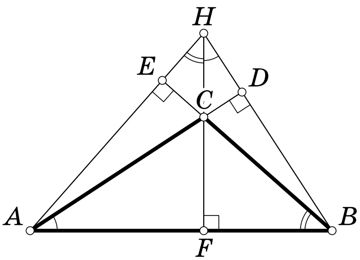


Рис. 37

Заметим, что точка F обязательно лежит на стороне AB, поскольку $\angle A\leqslant\angle B\leqslant 90^\circ$. Рассмотрим прямоугольные треугольники DBA и BHF. Имеем равенства

$$\angle A+\angle DBA=90^\circ=\angle BHF+\angle DBA,$$

и, следовательно, равенство $\angle BHF=\angle A$. Аналогично получаем, что $\angle AHF=\angle B$. Отсюда вытекают равенства

$$AB=AF+FB=AH\sin\angle B+BH\sin\angle A.$$

Один из двух углов $\angle C$ или $180^\circ-\angle C$ является острым, причём $\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$ и $\angle A\leqslant\angle B<\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$. Следовательно, $\sin\angle A\leqslant\sin\angle B\leqslant\sin\angle C=\sin(180^\circ-\angle C)$. Отсюда и из теоремы синусов получаем, что

$$AH+BH\geqslant AH\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}+BH\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}=\frac{AB}{\sin\angle C}=2R.$$

Третье решение. Существует несколько способов доказательства равенств $AH=2R\cos\angle A$ и $BH=2R\cos\angle B$. Используя их, можно свести задачу к неравенству $\cos\angle A+\cos\angle B\geqslant 1$. Приведём его доказательство.

Обозначим через φ угол, равный $(\angle B+\angle C)/2$. Тогда $\angle A \leqslant \leqslant \angle B \leqslant \varphi$, $60^\circ \leqslant \varphi < 90^\circ$ и $\angle A = 180^\circ - 2\varphi$. Для острых углов функция косинус является убывающей. Следовательно,

$$\cos\angle A + \cos\angle B \geqslant \cos\angle A + \cos\varphi = \cos(180^\circ - 2\varphi) + \cos\varphi = \\ = \cos\varphi - \cos(2\varphi) = \cos\varphi\cdot(1 - 2\cos\varphi) + 1 \geqslant 1.$$

4. *Решение.* а) Пусть A — один из пришедших на собрание людей, а k — количество его знакомых. Заметим, что существует ровно $\dfrac{k(k-1)}{2}$ различных пар, составленных из знакомых A людей. Покажем, что $\dfrac{k(k-1)}{2} = n-1$. Для этого сопоставим каждой такой паре знакомых A одного из других пришедших на собрание людей.

Пусть B и C — какая-либо из этих пар. Так как у B и C есть ровно два общих знакомых, то кроме A найдётся ровно ещё один их общий знакомый. Назовём его D и сопоставим его паре B и C. Два общих знакомых у A и D нам уже известны — это B и C. Значит, D незнаком ни с кем из других знакомых A и не мог быть сопоставлен никакой другой паре знакомых A. С другой стороны, каждый из пришедших на собрание, кроме самого A, имеет с ним ровно двух общих знакомых и, значит, был сопоставлен какой-либо паре его знакомых. Так как таких пришедших было ровно $n-1$, то и пар знакомых у A столько же, то есть $\dfrac{k(k-1)}{2} = n-1$. Для любого n может существовать только одно такое натуральное k, удовлетворяющее этому равенству. Следовательно, у каждого из пришедших одно и то же, определяемое равенством $\dfrac{k(k-1)}{2} = n-1$, число знакомых на этом собрании.

б) Пусть $n = 16$. Присвоим каждому из 16 человек индивидуальный номер, состоящий из двух каких-либо необязательно различных цифр k и l из набора $\{1, 2, 3, 4\}$. Будем считать, что человек с номером kl знаком с человеком, номер которого mp, тогда и только тогда, когда либо $k = m$, либо $l = p$. Проверим, что в этом случае любые два человека имеют ровно два других общих знакомых.

Действительно, пусть номера двух людей kl и mp. Если $k \neq m$ и $l \neq p$, то их общими знакомыми будут два человека с номерами kp и ml. Если $k = m$, то общими их знакомыми будут два человека с номерами ks и kt, где s и t — две различные цифры набора $\{1, 2, 3, 4\}$, не совпадающие с l и p. Если же $l = p$, то общими их знакомыми будут два человека с номерами sl и tp, где s и t — две различные цифры набора $\{1, 2, 3, 4\}$, не совпадающие с k и m. Таким образом, все условия задачи выполнены.

5. *Первое решение.* Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — неубывающая последовательность натуральных чисел. Для $k \geqslant 2$ обозначим через $S_k = a_1 + \ldots + a_{k-1}$ суммы $k-1$ первых членов этой последовательности и положим $S_1 = 0$.

Докажем, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных членов последовательности $\{a_k\}$ тогда и только тогда, когда для любого k выполнено неравенство

$$a_k \leqslant S_k + 1. \qquad (1)$$

Действительно, если для некоторого k выполнено $a_k > S_k + 1$, то натуральное число $S_k + 1$ нельзя представить в требуемом виде.

Для проверки достаточности докажем по индукции, что любое натуральное число от 1 до S_k включительно можно представить в требуемом виде, используя только те члены, что входят в S_k, то есть $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$.

База индукции. Из $a_1 \leqslant S_1 + 1 = 1$ мы имеем $a_1 = 1$, $S_2 = a_1 = 1$, и для $k = 2$ утверждение верно.

Индукционный шаг. Без использования a_k мы, по индукционному предположению, можем получить все числа от 1 до S_k. Добавляя же a_k к этим числам, мы сможем получить все натуральные числа от $a_k + 1$ до $a_k + S_k = S_{k+1}$, и само a_k также представимо в нужном виде. Отрезки $[1, S_k]$ и $[a_k, S_{k+1}]$ ввиду $a_k \leqslant S_k + 1$ покрывают все натуральные числа от 1 до S_{k+1}. Утверждение доказано.

Решение исходной задачи даёт применение доказанного утверждения к последовательности $\{a_k\}$, состоящей из членов геометрических прогрессий $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 1, 4, 4^2, 4^3, \ldots$ и $1, 5, 5^2, 5^3, \ldots$, расположенных в порядке неубывания: 1, 1, 1, 3, 4, 5, 9, 16, 25, 27, 64, 81, 125, 243, 256, 625, 729, 1024, 2187, 3125, 4096, …

Проверим неравенство (1). Для $k = 1, 2, 3$ оно выполнено ввиду $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Пусть для $k > 3$ сумма S_k состоит ровно из n членов первой геометрической прогрессии (от 3^0 до

3^{n-1}), m — второй (от 4^0 до 4^{m-1}) и $l=k-1-n-m$ — третьей (от 5^0 до 5^{l-1}). Тогда следующее число последовательности a_k равно минимальному из чисел 3^n, 4^m, 5^l. Имеем

$$S_k=\sum_{j=0}^{n-1}3^j+\sum_{j=0}^{m-1}4^j+\sum_{j=0}^{l-1}5^j=\frac{3^n-1}{2}+\frac{4^m-1}{3}+\frac{5^l-1}{4}\geqslant$$
$$\geqslant(\min(3^n,\,4^m,\,5^l)-1)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=$$
$$=\frac{13}{12}(\min(3^n,\,4^m,\,5^l)-1)>\min(3^n,\,4^m,\,5^l)-1=a_k-1.$$

Второе решение. Непосредственной проверкой убедимся в том, что для чисел 1, 2, ..., 9 доказываемое утверждение верно. Действительно, $1=0+0+1$, $2=0+1+1$, $3=3+0+0$, $4=0+4+0$, $5=0+0+5$, $6=1+4+1$, $7=3+4+0$, $8=3+4+1$, $9=0+4+5$.

Докажем методом математической индукции, что утверждение задачи верно и для всех $N>9$. Предположим, что для всех натуральных чисел, меньших, чем N, это утверждение уже доказано. Выведем отсюда, что это утверждение верно и для N. Основная идея дальнейшего решения состоит в том, что требуемое в условии задачи представление числа N в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа можно получить, используя такое представление для некоторого меньшего N натурального числа.

Пусть 3^k, 4^l и 5^m — наибольшие из членов указанных в условии трёх прогрессий, не превосходящие N (k, l, m — натуральные, $k\geqslant 2$). Если $N<2\cdot 3^k$, то $N-3^k<3^k$. Так как число $N-3^k$ можно по предположению индукции представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа, то, прибавляя к числу первого типа 3^k и учитывая неравенство $N-3^k<3^k$, мы получим новое число первого типа, сумма которого с прежними числами второго и третьего типов будет равна N. Аналогично можно получить представление числа N в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа в случае, когда $N<2\cdot 4^l$ или $N<2\cdot 5^m$.

Пусть теперь $N\geqslant 2\cdot 3^k$, $N\geqslant 2\cdot 4^l$ и $N\geqslant 2\cdot 5^m$. Обозначим через a, b и c соответственно наибольшее, среднее и наименьшее из чисел 3^k, 4^l и 5^m. Тогда $N/2 \geqslant a > b > c$ и $N-a-b>0$. Если $N-a-b<c$, то $N-a-b<a$ и $N-a-b<b$. Представляя число $N-a-b$ в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа и добавляя к соответствующим слагаемым числа a и b, мы получим представление числа N в виде требуемой суммы. Если же $N-a-b \geqslant c$, то или $N=a+b+c$ и требуемое представление в виде суммы уже получено, или $N-a-b-c>0$. В последнем случае либо $N-a-b-c<c$ — и тогда требуемое представление числа N в виде суммы можно получить из представления в виде суммы для числа $N-a-b-c$, либо $N-a-b-c \geqslant c$.

Проверим, что в этом случае $3^{k-1} < N-a-b-c < 2\cdot 3^{k-1}$. Имеем $3^{k-1}=3^k/3 \leqslant N/6$, $3^{k+1}>N$, $4^{l+1}>N$ и $5^{m+1}>N$. Значит, $c>N/5$,

$$N-a-b-c \geqslant c > \frac{N}{5} > 3^{k-1}$$

и

$$N-a-b-c < N-\frac{N}{3}-\frac{N}{4}-\frac{N}{5} < \frac{2N}{9} < 2\cdot 3^{k-1}.$$

Отсюда получаем, что

$$0 < N-a-b-c-3^{k-1} < 3^{k-1}$$

и, представляя число $N-a-b-c-3^{k-1}$ в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа и добавляя затем к первому числу $3^{k-1}+3^k$, ко второму числу — 4^l и к третьему числу — 5^m, получим требуемое представление в виде суммы для числа N. Все случаи разобраны.

6. а) *Ответ*. Нет.

Решение. Покажем, что удовлетворяющим условию задачи набором прямоугольников со сторонами $4^k \times \frac{1}{2\cdot 4^k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ нельзя покрыть всю плоскость.

Первое доказательство. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной 1. Самый большой отрезок, который может поместиться внутри него, имеет длину $\sqrt{2}$. Следовательно, любой прямоугольник ширины $\frac{1}{2\cdot 4^k}$ может пересекаться с этим квадратом лишь по такому многоугольнику, который можно разрезать на трапеции и треугольники, все основания которых не превосходят $\sqrt{2}$, а сумма всех их высот не превосходит $\frac{1}{2\cdot 4^k}$. Значит, площадь такого многоугольника не более $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4^k}$. Поэтому предложенный набор прямоугольников покрывает на единичном квадрате фигуру площади не более

$$\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4^k}+\ldots=\frac{\sqrt{2}}{6}<1,$$

то есть не может покрывать всю плоскость.

Второе доказательство. Заметим, что между двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $2/n^2$ ($n=1, 2, \ldots$), не может поместиться дуга единичной окружности длины $2\pi/n$. Действительно, если бы такая дуга могла поместиться между этими двумя прямыми, то между ними поместился бы и круговой сегмент, ограниченный этой дугой и стягивающей её хордой. В такой сегмент можно вписать окружность диаметра $1-\cos\frac{\pi}{n}$. Но

$$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}>2/n^2$$

и, следовательно, окружность такого диаметра между такими двумя прямыми не помещается.

Заметим, что k-й прямоугольник предложенного набора при любом его расположении находится между двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $\frac{1}{2\cdot 4^k}$. Каждая такая пара параллельных прямых высекает на единичной окружности не более двух дуг с длинами меньшими, чем $\pi/2^k$. Значит, эти прямоугольники покрывают на каждой единичной окружности дуги с суммой длин меньшей

$$\frac{2\pi}{2}+\frac{2\pi}{4}+\ldots+\frac{2\pi}{2^k}+\ldots=2\pi,$$

то есть не покроют её полностью, а значит, и не покрывают полностью всю плоскость.

б) *Ответ*. Да.

Решение. Рассмотрим произвольный бесконечный набор квадратов, удовлетворяющий условию задачи. Если среди его квадратов найдётся бесконечно много таких, стороны которых больше некоторого числа $a>0$, то покрыть всю плоскость будет можно (для этого будет достаточно последовательно покрыть ими все вспомогательные квадраты со стороной a, на которые разбивается плоскость, как указано на рис. 38). Иначе найдётся квадрат с самой большой стороной в наборе. Обозначим длину его стороны через a. Если уменьшить стороны всех квадратов набора и при этом окажется, что новым набором можно покрыть всю плоскость, то её можно будет покрыть и старым набором.

Произведём со всеми квадратами набора следующее изменение: если сторона квадрата была равна b, то уменьшим её до наибольшей возможной величины вида $a/2^k$ ($k=1$, 2, ...). Так как стороны квадратов набора уменьшатся при таком преобразовании менее чем в 2 раза, то их площади при этом преобразовании уменьшатся менее чем в 4 раза. Следовательно, для любого числа S найдутся квадраты из нового набора суммарной площади больше S.

Упорядочим этот новый бесконечный набор квадратов в порядке невозрастания длин их сторон, а затем разделим его на бесконечное количество поднаборов, в каждом из которых содержится конечное число квадратов с суммарной площадью больше a^2.

Докажем индукцией по $n=0, 1, 2, \ldots$, что любым конечным набором квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, длины сторон которых имеют вид $a/2^k$, $k=0, 1, \ldots, n$, и суммарная площадь которых удовлетворяет неравенству $S \geqslant N \cdot a^2$, можно покрыть любые N квадратов со стороной a.

Действительно, при $n=0$ стороны всех квадратов Q_1, Q_2, ..., Q_m равны a, суммарная площадь этих квадратов равна ma^2. Значит, $m \geqslant N$ и доказываемое утверждение верно, поскольку m квадратами со сторонами, равными a, можно покрыть любые N таких же квадратов.

Предположим, что утверждение доказано для некоторого целого неотрицательного n. Докажем, что оно верно и для $n+1$. Если в наборе $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, длины сторон которых имеют вид $a/2^k$, $k=0, 1, \ldots, n+1$, есть ровно p ($p \geqslant 0$) квадратов со стороной a, то этими p квадратами можно покрыть любые p таких же квадратов. Покажем, что оставшимися $m-p$ квадратами из набора $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ можно покрыть любые $N-p$ квадратов со стороной a. Действительно, длины сторон оставшихся $m-p$ квадратов имеют вид $c/2^k$, $k=0, 1, \ldots, n$, где $c=a/2$, а их суммарная площадь равна $S-pa^2 \geqslant (N-p)a^2 = 4(N-p)c^2$. По предположению индукции получаем, что этими $m-p$ квадратами можно покрыть любые $4(N-p)$ квадратов со стороной $c=a/2$. Следовательно, ими можно покрыть и любые $N-p$ квадратов со стороной a. Утверждение доказано.

Будем покрывать плоскость новыми квадратами следующим образом. Сначала мысленно покроем плоскость вспомогательными квадратами со стороной a как на рис. 38, а затем каждый вспомогательный квадрат покроем своим конечным поднабором из новых квадратов (рис. 39). Как было замечено выше, отсюда следует, что плоскость можно покрыть и исходным набором квадратов.

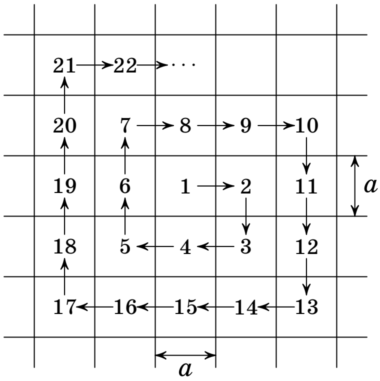


Рис. 38

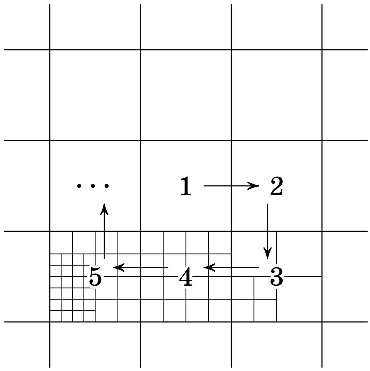


Рис. 39

11 класс, второй день

1. *Ответ*. 19.

Решение. Пусть исходная последовательность имела вид $n+1$, $n+2$, ..., $n+m$, а после приписывания справа двух цифр к каждому из её членов получилась последовательность $(l+1)^2$, $(l+2)^2$, ..., $(l+m)^2$. Тогда для любого $k=1$, 2, ..., m выполнены неравенства

$$100(n+k) \leqslant (l+k)^2 \leqslant 100(n+k)+99.$$

Прибавим к каждой из частей этого двойного неравенства выражение $50^2-100(l+k)$ и воспользуемся равенством

$$(l+k)^2-100(l+k)+50^2=(k+l-50)^2.$$

Приходим к неравенствам

$$50^2+100(n-l)\leqslant(k+l-50)^2\leqslant 50^2+100(n-l)+99.$$

Обозначим целое число $50^2+100(n-l)$ через p. Полученные нами неравенства при $p\geqslant 1$ можно переписать в виде $\sqrt{p}\leqslant|k+l-50|\leqslant\sqrt{p+99}$. В этом случае значения всех выражений $k+l-50$ при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ принадлежат либо отрезку $[-\sqrt{p+99};\ -\sqrt{p}]$, либо отрезку $[\sqrt{p};\ \sqrt{p+99}]$. Каждый из этих отрезков содержит не более $\sqrt{p+99}-\sqrt{p}+1$ целых чисел. Следовательно, при таких p получаем

$$m\leqslant\sqrt{p+99}-\sqrt{p}+1=\frac{99}{\sqrt{p+99}+\sqrt{p}}+1\leqslant 10.$$

При $p\leqslant 0$ получаем неравенства $-\sqrt{p+99}\leqslant|k+l-50|\leqslant\leqslant\sqrt{p+99}$. Тогда значения всех выражений $k+l-50$ при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ принадлежат отрезку $[-\sqrt{p+99};\ \sqrt{p+99}]$. Этот отрезок содержит нечётное число целых чисел, не превосходящее $2\sqrt{p+99}+1<21$. Следовательно, при таких p получаем $m\leqslant 19$.

Значит, в исходной последовательности не могло быть более 19 членов. Подходящим примером такой последовательности являются числа 16, 17, ..., 34, которые после приписывания справа двух цифр преобразуются в последовательность $1681=41^2$, $1764=42^2$, ..., $3481=59^2$.

2. *Ответ*. Да.

Решение. Так как каждый из пяти прожекторов испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке, то найдутся по крайней мере три прожектора, которые испускают луч под одним и тем же углом. Будем считать, что это угол α.

Пусть эти три прожектора, расположенные в точках A, B и C, повернули так, что испускаемые ими лучи пересеклись в одной точке D. Обозначим через H основание перпендикуляра, проведённого из точки D к плоскости ABC. Треугольники ADH, BDH и CDH равны по общему катету DH и острому углу α. Следовательно, $AH=BH=CH$, точка H является центром описанной около треугольника ABC окружности и $DH=AH\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, в полупространстве над горизонтальной площадкой существует лишь одна точка, в которой могут пересечься лучи этих трёх прожекторов.

Рассмотрим ещё один прожектор, отличный от этих трёх. Так как по условию все четыре прожектора можно повернуть так, чтобы их лучи пересекались в одной точке, а такой точкой может быть лишь точка D, то и четвёртый прожектор можно повернуть так, чтобы испускаемый им луч проходил через точку D. Аналогичные рассуждения показывают, что таким же образом можно повернуть и пятый прожектор. Значит, все пять прожекторов можно так повернуть, чтобы все пять лучей пересеклись в одной точке.

Комментарий. Утверждение о том, что все пять прожекторов можно так повернуть, чтобы все пять испускаемых ими лучей пересеклись в одной точке, остаётся справедливым и в том случае, если опустить условие, что каждый из прожекторов испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке (оставив при этом остальные условия). Достаточно лишь потребовать, чтобы угол наклона каждого из лучей не менялся при повороте прожектора. Известное жюри доказательство этого факта выходит за рамки школьной программы по геометрии.

3. *Решение.* Докажем утверждение задачи индукцией по n. При $n=1$ на доске после действий учителя останутся написаны x и $(1-x)$. Нетрудно видеть, что x представляет собой возрастающую на отрезке $[0; 1]$ функцию, а $x+$ $+(1-x)$ — постоянную функцию.

Предположим, что для некоторого натурального n утверждение задачи верно. Докажем его и для значения $n+1$. Пусть учитель сложил первые k полученных выражений $(2 \leqslant k \leqslant 2^{n+1})$. Заметим, что после проделанных им операций получится многочлен вида

$$x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot (1-x) + x \cdot x \cdot \ldots \cdot (1-x) \cdot x + \ldots,$$

где каждое слагаемое представляет собой произведение $n+1$ неотрицательных на отрезке $[0; 1]$ множителей вида x и $1-x$.

Если $k \leqslant 2^n$, то первый множитель в каждом из этих k слагаемых равен x. Если вынести его за скобку, то в скобках останется сумма вида

$$x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot (1-x) + x \cdot x \cdot \ldots \cdot (1-x) \cdot x + \ldots,$$

где каждое слагаемое представляет собой произведение n множителей вида x и $(1-x)$. По предположению индукции выражение в скобках представляет собой постоянную или возрастающую на отрезке [0; 1] функцию от x. Значит, после умножения на x также получится возрастающая на отрезке [0; 1] функция.

Если $k = 2^{n+1}$, то учитель сложил все выражения на доске. При этом получается многочлен, который можно сгруппировать и записать в виде $(x + (1 - x))^n$. Этот многочлен постоянен и равен единице.

Если $2^n < k < 2^{n+1}$, то обозначим полученную учителем функцию $f(x)$ и рассмотрим сумму оставшихся выражений, им не использованных. Эта сумма будет равна $1 - f(x)$. Первый множитель в каждом из её $2^{n+1} - k$ слагаемых равен $(1 - x)$. Если вынести его за скобку, а слагаемые в скобках расположить в обратном порядке, то в скобках останется сумма вида

$$(1-x)\cdot(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x)\cdot(1-x) + \\ + (1-x)\cdot(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x)\cdot x + \\ + (1-x)\cdot(1-x)\cdot\ldots\cdot x\cdot(1-x) + \ldots,$$

где каждое слагаемое представляет собой произведение n множителей вида x и $(1 - x)$.

Обозначим $(1 - x)$ через t. Тогда выражение в скобках примет вид

$$t\cdot t\cdot\ldots\cdot t\cdot t + t\cdot t\cdot\ldots\cdot t\cdot(1-t) + t\cdot t\cdot\ldots\cdot(1-t)\cdot t + \ldots,$$

которое по предположению индукции представляет собой постоянную или возрастающую на отрезке [0; 1] функцию от t. Значит, это выражение представляет собой постоянную или убывающую на отрезке [0; 1] функцию от x. После умножения на $(1 - x)$ мы также получим убывающую на отрезке [0; 1] функцию от x. Но эта функция равна $1 - f(x)$. Следовательно, и в этом случае полученная учителем функция $f(x)$ возрастает на отрезке [0; 1]. Доказательство закончено.

4. *Ответ*. 2/3.

Решение. Для каждой точки P скатерти обозначим через $f(P)$, $g(P)$ и $h(P)$ соответственно точки, симметричные ей относительно одной из двух линий, соединяющих середины противоположных сторон скатерти, второй такой линии и той её диагонали, при перегибе через которую видимая площадь пятен становится равна S_1. Обозначим также через $k(P)$ точку, симметричную точке P относительно второй диагонали скатерти. Тогда точки $h(k(P))$ и $f(g(P))$ совпадают с точкой, симметричной точке P относительно центра скатерти. Отсюда получаем, что для любой точки P точки $k(P)$ и $h(f(g(P)))$ также совпадают.

Предположим, что $S_1 < 2S/3$. Тогда площадь множества всех точек Q, для которых $P = g(Q)$ и Q покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > 2S/3$. Аналогично, площадь множества всех точек Q, для которых Q и $R = f(Q)$ покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > 2S/3$.

Заметим, что если две фигуры имеют площади s_1 и s_2 соответственно, а их объединение имеет площадь не более S, то площадь их пересечения будет не менее $s_1 + s_2 - S$.

Тогда площадь тех точек Q, для которых одновременно выполнены оба условия, должна быть больше чем $2S/3 + 2S/3 - S = S/3$. Значит, и площадь всех точек P, для которых P и $R = f(Q) = f(g(P))$ покрыты пятнами, больше чем $S/3$.

Аналогично, площадь множества тех точек R, для которых $P = g(f(R))$, R и $T = h(R)$ покрыты пятнами, больше чем $S/3 + 2S/3 - S = 0$. Значит, и площадь всех точек P, для которых P и $T = h(R) = h(f(g(P)))$ покрыты пятнами, больше нуля.

С другой стороны, $T = h(f(g(P))) = k(P)$. Из условия следует, что площадь тех точек P, для которых P и $k(P)$ покрыты пятнами, равна 0. Получили противоречие. Значит $S_1 \geqslant 2S/3$ и $S_1 : S \geqslant 2/3$.

Пример расположения пятен на скатерти, при котором $S_1 : S = 2/3$, показан на рис. 40. Стороны квадратной скатерти разделены отмеченными на ней точками на 6 равных частей. Если обозначить длину её стороны через a, то для этого примера $S = a^2/2$ и $S_1 = a^2/3$.

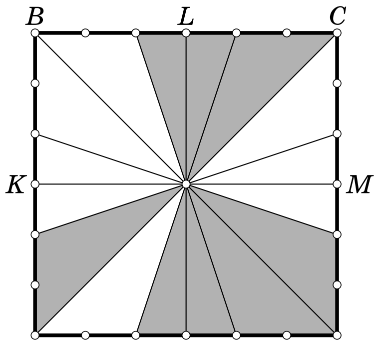


Рис. 40

5. *Решение*. Пусть k — простое число и

$$n = n_0 + n_1 \cdot k + n_2 \cdot k^2 + \ldots + n_{p-1} \cdot k^{p-1} = (n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0)_k$$

— k-ичное представление числа n. Покажем двумя различными способами, что $S(n, k) = (n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_p+1)$.

Первый способ. Будем рассматривать многочлены с целыми коэффициентами. Скажем, что два многочлена $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ сравнимы по модулю k, если сравнимы по модулю k (то есть дают одинаковый остаток при делении на k) все их коэффициенты при одинаковых степенях. Будем обозначать это $P_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие очевидные свойства сравнимости многочленов по модулю:

1) если $P_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)$ и $T_n(t) \overset{(k)}{=} S_n(t)$, то $P_n(t)T_n(t) \overset{(k)}{=}$ $\overset{(k)}{=} Q_n(t)S_n(t)$;

2) если k — простое число, то C_k^m делится на k при любом $m = 1, \ldots, k-1$, и C_n^m не делится на k при любом $n < k$, $m =$ $= 0, \ldots, n$. В дальнейшем k — простое число.

Докажем сначала, что для любого m справедливо

$$(t+1)^{k^m} \overset{(k)}{=} t^{k^m} + 1.$$

Воспользуемся индукцией по m. При $m = 1$ имеем

$$(t+1)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j t^j \overset{(k)}{=} t^k + 1.$$

Пусть $(t+1)^{k^m} \overset{(k)}{=} t^{k^m} + 1$. Тогда

$$(t+1)^{k^{m+1}} = ((t+1)^{k^m})^k \overset{(k)}{=} ((t^{k^m} + 1))^k \overset{(k)}{=} t^{k^{m+1}} + 1.$$

Теперь докажем основное утверждение индукцией по числу разрядов в k-й записи числа n. Если $0 \leqslant n \leqslant k-1$, утверждение очевидно. Пусть оно верно, если n представимо в виде

$$n = n_0 + n_1 \cdot k + n_2 \cdot k^2 + \ldots + n_{p-1} \cdot k^{p-1}, \quad 0 \leqslant n_i \leqslant k-1.$$

Рассмотрим число

$$N = n_0 + n_1 \cdot k + n_2 \cdot k^2 + \ldots + n_{p-1} \cdot k^{p-1} + n_p \cdot k^p = n + n_p \cdot k^p,$$
$$1 \leqslant n_p \leqslant k-1.$$

Имеем

$$(t+1)^N = (t+1)^n \cdot ((t+1)^{k^p})^{n_p} \overset{(k)}{=} (t+1)^n \cdot (t^{k^p}+1)^{n_p} = \\ = \sum_{j=0}^{n_p} C_{n_p}^j t^{k^p j}(t+1)^n.$$

Так как ни один из коэффициентов $C_{n_p}^j$ не делится на k и (в силу того, что $n < k^p$) у многочленов $t^{k^p j}(t+1)^n$ при разных j нет одинаковых степеней t, число коэффициентов многочлена $(t+1)^N$, которые не делятся на k, равно числу таких коэффициентов у $(t+1)^n$, умноженному на n_p+1, что и требовалось.

Второй способ. Коэффициент при x^m равен числу сочетаний из n элементов по m элементов: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Надо посчитать, сколько чисел среди $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $m = 0, 1, \ldots, n$ не делятся на k.

Обозначим через $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Степень простого числа k, на которую делится $n!$, можно вычислить по формуле: $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{k^2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{k^3} \right\rfloor + \ldots$, поскольку сначала по одному делителю дают все числа, делящиеся на k, затем ещё по одному все числа, делящиеся на k^2, затем ещё по одному все числа, делящиеся на k^3, и т. д. (с некоторого места все слагаемые в сумме равны 0). Поэтому степень простого числа k, на которую делится C_n^m, равна

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k^3} \right\rfloor + \ldots\right) - \left(\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{k^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k^3} \right\rfloor + \ldots\right) - \\ - \left(\left\lfloor \frac{n-m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{k^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{k^3} \right\rfloor + \ldots\right) = \\ = \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{k} \right\rfloor\right)\right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{m}{k^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{k^2} \right\rfloor\right)\right) + \\ + \left(\left\lfloor \frac{n}{k^3} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{m}{k^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{k^3} \right\rfloor\right)\right) + \ldots$$

Для любых действительных чисел a и b выполняется $\lfloor a+b \rfloor \geqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$. При этом если $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a, то

$$\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \quad \Leftrightarrow \quad \{a\}+\{b\} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \{a\} \leqslant \{a+b\}.$$

Получаем, что все слагаемые в выписанной выше сумме неотрицательны, и для того, чтобы C_n^m не делилось на k, надо, чтобы все они равнялись 0, а это равносильно тому, что $\left\{\frac{m}{k}\right\} \leqslant \left\{\frac{n}{k}\right\}$, $\left\{\frac{m}{k^2}\right\} \leqslant \left\{\frac{n}{k^2}\right\}$, $\left\{\frac{m}{k^3}\right\} \leqslant \left\{\frac{n}{k^3}\right\}$ и т. д. Пусть $n = (n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0)_k$ и $m = (m_p m_{p-1} \ldots m_1 m_0)_k$ — k-ичные представления чисел n и m. Тогда требуемое условие равносильно тому, что $m_0 \leqslant n_0$, $m_1 \leqslant n_1$, $m_2 \leqslant n_2$ и т. д. Получаем, что при каждом i должно выполняться $m_i \leqslant n_i$, то есть m_i может принимать ровно $n_i + 1$ значений $(0, 1, \ldots, n_i)$. Всего вариантов для m: $(n_0 + 1)(n_1 + 1) \ldots (n_p + 1)$.

а) Так как 3 — простое число, то можно применить полученную формулу. В троичном представлении число 2012 имеет вид: $2012 = (2202112)_3$. Поэтому $S(2012, 3) = 3^4 \cdot 2^2 = 324$.

б) Заметим, что число 2011 также является простым. Рассмотрим число $2012^{2011} = (1 + 2011)^{2011}$. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$2012^{2011} = (1 + 2011)^{2011} = 1 + 2011 \cdot 2011 + \frac{2011 \cdot 2010}{2} \cdot 2011^2 + \frac{2011 \cdot 2010 \cdot 2009}{6} \cdot 2011^3 + C_{2011}^4 \cdot 2011^4 + \ldots$$

В последней сумме все слагаемые, начиная с четвёртого, делятся на 2011^4, а первые 3 слагаемых дают $1 + 2011^2 + 1005 \cdot 2011^3$. Это означает, что в представлении числа 2012^{2011} в системе счисления с основанием 2011 младшие разряды такие: $n_0 = 1$, $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1005$. Так как 2011 — простое число, то для него справедлива доказанная выше формула. Поэтому $S(2012^{2011}, 2011)$ делится на $(n_0 + 1)(n_3 + 1) = 2012$.

6 класс (*1568 работ*)

	1	2	3	4	5	6
–	14	114	372	446	408	360
0	146	1137	694	642	833	826
1	351	81	67	82	93	186
2	0	28	80	36	32	113
3	39	30	113	33	114	44
4	1018	64	47	110	37	19
5		114	195	22	21	17
6				197	9	0
7					8	2
8					13	1

7 класс (*1123 работы*)

	1	2	3	4	5	6
0	11	313	618	733	1017	913
1	302	294	48	117	21	71
2	450	6	57	39	0	10
3	5	76	47	15	0	7
4	355	434	353	145	0	30
5				32	0	45
6				42	85	30
7						5
8						12

8 класс (*651 работа*)

	1	2	3	4	5	6
$+/+.$	383	43	31	39	0	1
$\pm$	44	14	6	3	0	0
$\mp$	0	42	16	3	0	8
$-./-$	128	495	384	265	281	243
0	96	57	214	341	370	399

9 класс (*574 работы*)

	1	2	3	4	5	6а	6б
$+/+.$	113	25	76	6	0	1	1
$\pm$	61	7	3	1	1	0	0
$+/2$	28	1	0	0	0	0	0
$\mp$	22	117	10	5	20	1	2
$-./-$	312	274	242	310	85	236	183
0	38	150	243	252	468	336	388

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс (636 работ)

	1	2	3	4	5	6
+/+.	180	71	34	11	7	0
±	76	16	16	8	23	0
∓	223	12	19	70	2	3
−./−	94	295	223	327	118	140
0	63	242	344	220	486	493

11 класс, первый день (667 работ)

	1	2	3	4а	4б	5	6а	6б
+	264	106	61	12	15	5	18	1
±	131	190	35	7	0	2	8	0
∓	140	67	167	10	3	13	19	12
−	132	304	404	638	649	647	622	654

11 класс, второй день (246 работ)

	1	2	3	4	5а	5б
+	63	85	23	1	1	1
±	34	11	4	0	9	1
∓	50	24	19	8	10	1
−	99	126	200	237	226	243

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учёными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всём мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
http://www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ВШЭ

Факультет математики — небольшой молодой математический факультет, ориентированный на исследования. Преподают на факультете ведущие математики Москвы, активно разрабатывающие собственные направления. Особенное внимание уделяется современным направлениям в алгебре, топологии, алгебраической геометрии. Студенты факультета получают широкую базовую математическую подготовку. Это даст выпускникам свободу выбора последующей специализации, а приобрётенные исследовательские навыки пригодятся вне зависимости от специальности.

По окончании программы бакалавриата выпускники смогут совершенствоваться в магистратуре и аспирантуре факультета математики, а также других факультетов ВШЭ и других ведущих вузов России и мира.

Высшая школа экономики — государственный университет. Студенты получают отсрочку от призыва в вооружённые силы. В университете имеется военная кафедра. Иногородние студенты обеспечиваются общежитием.

Подробную информацию о факультете и преподавателях см. на сайте http://math.hse.ru.

Информацию об учебных курсах и учебные материалы можно найти на сайте http://vyshka.math.ru.

Вопросы задавайте по электронной почте math@hse.ru.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
http://www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ЖУРНАЛ «КВАНТ» В ИНТЕРНЕТЕ

http://kvant.mccme.ru/

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

Сейчас старые номера журнала «Квант» практически недоступны читателям. Имеется ничтожное число библиотек, в которых есть полное собрание вышедших журналов. Этот сайт призван открыть путь к богатому архиву журнала.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

http://vofem.ru/

Электронная версия научно-популярного журнала, заложившего традиции жанра в литературе на русском языке.

С 1886 по 1917 год вышло 674 выпуска В. О. Ф. Э. М. Журнал в разные годы возглавляли: Эразм Корнелиевич Шпачинский (1886—1898), Владимир Акимович Циммерман (1898—1904), Вениамин Фёдорович Каган (1902—1917).

Периодичность — 24 раза в год отдельными выпусками в 24 или 32 страницы каждый.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы, отчёты о заседаниях московского математического кружка и многое другое.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте http://www.problems.ru

ДЕСЯТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 8 апреля 2012 года

http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступивших в городской математической олимпиаде, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Седьмой Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится летом 2012 года.

Олимпиада будет проходить в помещении школы № 192 по адресу Ленинский проспект, д. 34-А (м. «Ленинский проспект»). Начало олимпиады в 11^{00}. Справки по телефону: (495) 137-33-55 с 10^{00} до 18^{00}.

Так как ожидается большое количество участников, то желающих принять участие в олимпиаде просим до 2 апреля зарегистрироваться на сайте школы

http://olymp.sch192.ru

При регистрации необходимо указать свою фамилию, имя, класс, школу и округ (город).

Участников просят иметь при себе: сменную обувь, письменные принадлежности, бумагу для записей.

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице http://www.mccme.ru/leto

Двенадцатая летняя школа «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

пройдёт с 19 по 30 июля 2012 года в Дубне (на базе санатория-профилактория «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, присылайте в Оргкомитет до 10 мая заполненную анкету участника. (Персонально приглашаются на школу обладатели дипломов I—II степени в параллели 10 и 11 классов на этой или предыдущей ММО.)

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, чл.-корр. РАН Д. О. Орлов, А. А. Разборов и И. А. Панин, проф. А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, В. А. Успенский, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, а также Ю. М. Бурман, А. И. Буфетов, В. А. Клепцын, А. Г. Кузнецов, Г. Ю. Панина, И. В. Ященко и другие.

Материалы прошедших школ и информационное сообщение о школе—2012 смотрите на сайте

http://www.mccme.ru/dubna/

Контактный e-mail оргкомитета: dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXV Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Подписано в печать 23/III 2012 г.
Формат бумаги $60 \times 90/16$. Объём 4,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп»
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ

в московские специализированные школы и классы на 2012/2013 учебный год

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 (499) 137-17-69 ул. Фотиевой, 18 (499) 137-69-31 http://www.sch2.ru/	7 и 8 физ.-матем. *добор* в 9, 10 физ.-матем.	Вступительные испытания с 23 марта по 25 мая
№ 54 (499) 245-54-25 ул. Доватора, 5/9 (499) 245-99-72 http://moscowschool54.narod.ru	8 матем. *добор* в 9 матем.	С февраля по май по графику на сайте школы
№ 57 (495) 691-85-72 М. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (495) 691-54-58 http://sch57.msk.ru/	8 матем. 9 матем. 9 гуманит.	По средам в 16^{00} с 21 марта По средам в 16^{00} с 4 апреля По понед. в 16^{00} с 26 марта
№ 179 (495) 692-48-51 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 http://www.179.ru/	8 матем. 9 матем.	По пятницам в 16^{00} с 16 марта По четвергам в 17^{00} с 15 марта
№ 192 (499) 137-33-55 Ленинский просп., 34-А (499) 137-72-85 http://www.sch192.ru/ mail@sch192.ru	5 ест.-научный, 7 био.-хим., физ.-матем., 9 физ.-хим., 10 физ.-хим.; *добор* в 8, 9, 10 био.-хим., 8, 9, 10 физ.-матем.	Март—май по пятницам в 16^{00}
№ 218 (495) 976-63-45 Дмитровское ш., 5а (495) 976-19-85 http://school218.ru/ sch218.edu@mtu-net.ru	6, 7, 8 *добор* в 9 и 10 широкий выбор спецкурсов	Апрель—май, запись на сайте
№ 463 (499) 612-34-19 Судостроительная ул., 10 http://sch463.edite.ru	8, 10 при МФТИ	Март—май по четвергам
№ 518 (495) 951-49-82 Садовническая набережная, 37 http://sch518.ru	5—8 при МФТИ	Март—май по средам

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 1189 (499) 193-60-23 Маршала Василевского, 9, к. 1 http://1189.ru sch1189@szouo.ru	10 физ.-матем.	16 мая в 16^{00}
№ 1329 (495) 651-35-98 ул. Никулинская, 10 http://co1329.mskzapad.ru	7, 8 физ.-матем.	С 5 марта по 25 мая
№ 1332 (495) 714-97-72 б-р Дмитрия Донского, 6, корп. 1 http://1332.ru	7, 8, 9, 10 физ.-матем. при МФТИ	Март—май по субботам
№ 1511 (499) 324-29-21 Пролетарский пр-т, 6, корп. 3 (499) 434-26-44 http://1511.ru	9, 10 физ.-матем.	Экзамены с 7 апреля
№ 1543 (495) 433-16-44 ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (495) 434-26-44 http://www.1543.ru	8 матем., физ.-хим., био., гум.	Апрель
№ 2007 (495) 716-29-35 ул. Горчакова, 9, корп. 1. http://www.fmsh2007.ru	5—7 физ.-матем., *добор* в 8, 9, 10 физ.-матем.	12 апреля в 16^{00} 7, 14, 22 апреля
«Интеллектуал» (495) 445-52-10 Кременчугская ул., 13 http://sch-int.ru	5 разноур. обуч.: матем., русск. яз., англ. яз, история; *добор* в 7; широкий выбор кружков	Запись на экзамены с февраля на сайте, экзамены с марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Обучение в школах (классах) бесплатное.
Более подробная информация о наборе в эти и другие школы — на сайте http://www.mccme.ru/schools/

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXV
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

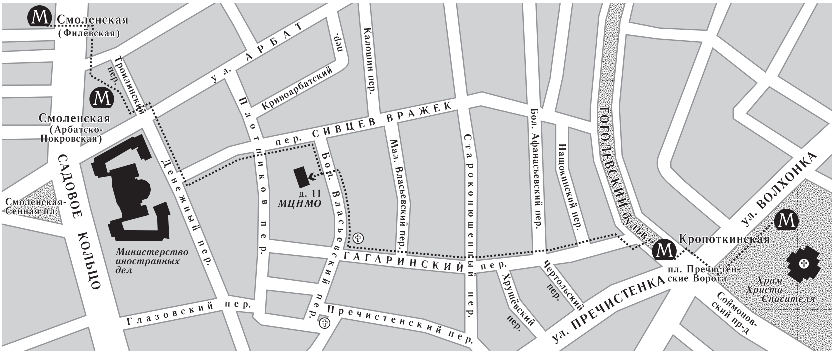
Москва
Издательство МЦНМО
2012

РАСПИСАНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ
1 апреля 2012 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
12^{30}	Разбор задач	16–10	01	02	14–08
13^{30}	Показ работ	14 этаж	13 этаж	02	12 этаж
15^{00}	Лекция А. Л. Семёнова в ауд. 01				
16^{30}	Торжественное закрытие, награждение победителей	02			

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении, будет происходить по средам с 16^{00} до 18^{00} в МЦНМО (Бол. Власьевский пер., 11, телефон (499) 241-12-37, http://www.mccme.ru, mmo@mccme.ru).

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО



ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице http://www.mccme.ru/leto